ECONOMETRIC INSTITUTE

CORPS DE CLASSES LOCAL

M. HAZEWINKEL

REPRINT SERIES no. 188

This article appeared in M. Demazure and P. Gabriel "Groupes Algébriques", Tome I, North-Holland (1970)

ERASMUS UNIVERSITY ROTTERDAM,
P.O. BOX 1738, ROTTERDAM, THE NETHERLANDS

APPENDICE

Corps de classes local

par

MICHIEL HAZEWINKEL *

Dans tout cet appendice, K désigne un corps local, i.e. le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet A de corps résiduel parfait k. Nous notons m l'idéal maximal de A, π une uniformisante de K (i.e. un générateur de l'idéal m), p la caractéristique de k, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et v la valuation de K qui est positive sur $A-\{0\}$ et telle que $v(\pi) = 1$.

Le cas $p = 0$ étant facile et classique, nous supposons $p \neq 0$. Toute extension de corps L/K sera implicitement supposée algébrique. Enfin, pour toute extension galoisienne M/N, on note $\Pi(M/N)$ le groupe de Galois topologique de M sur N.

n° 1 Généralités sur les extensions de corps locaux

1.1 ***Lemme**: Si L est une extension finie de K, la fermeture intégrale A_L de A dans L est un anneau de valuation discrète complet et un A-module libre de rang fini. Si v_L est la valuation de L correspondante et si k_L est le corps résiduel de A_L, on a $[L: K] = v_L(\pi) \cdot [k_L: k]$.*

En effet, cela résulte de *Alg. comm.* VI, § 8, n° 5, cor. 2 au th. 2, compte-tenu de *loc. cit.* § 1, n° 3, cor. 3 au th. 3.

Dans la situation précédente, on note m_L l'idéal maximal de A_L et π_L un générateur de m_L.

---

* Je remercie M. Demazure et P. Gabriel d'avoir adapté mon manuscrit au style de leur livre. Je tiens aussi à reconnaître ma dette sans cesse croissante envers F. Oort; sans l'intérêt qu'il a porté à mon travail, sans ses conseils et sa participation, cet appendice n'aurait jamais été écrit.

1.2 Une extension L de K est dite *non ramifiée* si, pour toute sous-extension finie M de L, on a $v_M(\pi) = 1$; la fermeture intégrale A_L de A dans L est alors un anneau de valuation discrète, dont l'idéal maximal est engendré par π; en effet, comme $A_L = \bigcup_M A_M$, il résulte de 1.1 que les éléments de A_L non divisibles par π sont inversibles, et que $\bigcap \pi^n A_L = 0$; on applique alors *Alg. comm.* VI, § 1, n° 4, prop. 2. La valuation correspondante de L est notée v_L, et les complétés respectifs de A_L et L sont notés $\hat{A}_L$ et $\hat{L}$.

1.3 Une extension L de K est dite *totalement ramifiée* si, pour toute sous-extension finie M de L, on a $k_M = k$, c'est-à-dire $v_M(\pi) = [M: K]$ (1.1).

> ***Lemme***: *Soient L une extension de K, T une sous-extension totalement ramifiée et N une sous-extension non ramifiée. Alors T et N sont linéairement disjointes sur K, i.e. l'application canonique $T \otimes_K N \to L$ est injective.*

En effet, il est clair qu'on peut supposer T et N finis sur K. Soit $M = T \cdot N$ l'image de l'application en question. On a évidemment $v_M(\pi) \geqq v_T(\pi)$ et $k_N \subset k_M$, d'où d'après 1.1

$$[M: K] = v_M(\pi)[k_M: k] \geqq v_T(\pi) \cdot [k_N: k] = [T: K][N: K] = [T \underset{K}{\otimes} N: K].$$

1.4 Supposons maintenant K de caractéristique 0, et soit L une extension finie de K. Dans ce cas, K et L sont des extensions finies totalement ramifiées de $[k] = \operatorname{Fract} \mathfrak{W}(k)$ et de $[k_L]$ (V, § 4, 2.2); d'autre part, $[k_L]$ est une extension non ramifiée de $[k]$. D'après le lemme 1.3, L contient donc $M = K \otimes_{[k]} [k_L]$ et a même corps résiduel que M. D'un autre côté, on a $[M: K] = [[k_L]: [k]] = [k_L: k] = [k_M: k]$. Par conséquent, *$M$ est une extension non ramifiée de K et L une extension totalement ramifiée de M.*

Lorsque N est une sous-extension non ramifiée de L, on a évidemment $N = K \otimes_{[k]} [k_N]$. On voit ainsi que $M = K \otimes_{[k]} [k_L]$ *est la plus grande sous-extension non ramifiée de L et que les extensions non ramifiées N/K peuvent être décrites au moyen des extensions résiduelles k_N/k.* En outre, lorsque k_N/k est galoisienne, $\Pi(k_N/k)$ opère fidèlement sur $[k_N]$, donc sur $N = K \otimes_{[k]} [k_N]$; il s'identifie donc à $\Pi(N/K)$. Lorsque l'extension L/K est galoisienne, M est évidemment invariante sous $\Pi(L/K)$; l'extension M/K est donc galoisienne et on a une suite exacte

$$1 \to \Pi(L/M) \to \Pi(L/K) \to \Pi(k_L/k) \to 1.$$

Tout ceci peut s'étendre aux extensions infinies L/K. Dans ce cas, la plus grande sous-extension non ramifiée de L est $M = \varinjlim_{F \subset L} K \otimes_{[k]} [k_F]$, où F parcourt les sous-extensions finies de L. En particulier, lorsque $L = \bar{K}$ est une clôture algébrique de K, on a $M = K_{\mathrm{nr}} = \varinjlim_{\ell \subset \bar{k}} K \otimes_{[k]} [\ell]$, ℓ parcourant les sous-extensions finies de $\bar{k}$. On dit que K_{nr} *est l'extension non ramifiée maximale de* K. Elle a pour groupe de Galois $\Pi(\bar{k}/k)$.

On a des résultats analogues, et même plus simples, lorsque K est de caractéristique p. Alors A est un anneau de séries formelles $k[[\pi]]$ (V, § 4, 2.4). Lorsque L est une extension finie de K, la plus grande sous-extension non ramifiée est $M = k_L((\pi)) = K \otimes_k k_L$. De même $K_{\mathrm{nr}} = \varinjlim_{\ell \subset \bar{k}} \ell[[\pi]]$, ℓ parcourant les sous-extensions finies de $\bar{k}$.

1.5 ***Théorème d'Eisenstein:*** a) *Soient T une extension finie totalement ramifiée de K et*

$$(*) \qquad \pi_T^n + a_1 \pi_T^{n-1} + \dots + a_n = 0, \qquad a_i \in K,$$

l'équation minimale sur K d'une uniformisante π_T de T. Alors $A_T = A[\pi_T]$, $n = [T: K]$, $v(a_s) \geqq 1$ pour tout $s \geqq 1$ et $v(a_n) = 1$.

b) *Réciproquement, soit $T = K(\omega)$ une extension de K telle que $\omega^n + a_1 \omega^{n+1} + \dots + a_n = 0$, avec $a_s \in m = \pi A$ pour tout $s \geqq 1$ et $v(a_n) = 1$. Alors $[T: K] = n$, T est une extension totalement ramifiée de K, ω est une uniformisante et l'équation donnée est l'équation minimale de ω.*

a) En effet, si $\ell = v_T(\pi) = [T: K]$, $A_T/\pi A_T$ a pour base sur k les classes des éléments $1, \pi_T, \dots, \pi_T^{\ell-1}$. Comme A_T est libre sur A (1.1), il s'ensuit que $1, \pi_T, \dots, \pi_T^{\ell-1}$ est une base de T sur K, donc que $n = \ell$ et que $a_i \in A_T$ pour tout i. Supposons qu'il y ait un i tel que $v(a_i) = 0$. Supposons i maximal; on a alors $v_T(a_i \pi_T^{n-i}) = n - i$; si $j > i$, on a

$$v_T(a_j \pi_T^{n-j}) = n - j + nv(a_j) > v_T(a_i \pi_T^{n-i});$$

si $j < i$, on a $v_T(a_j \pi_T^{n-j}) = n - j + nv(a_j) \geqq n - j > v_T(a_i \pi_T^{n-i})$; enfin, on a $v_T(\pi_T^n) = n > v_T(a_i \pi_T^{n-i})$. Dans le premier membre de l'égalité (*), la valuation de $a_i \pi_T^{n-i}$ est donc strictement inférieure à celle de tous les autres termes, ce qui n'est pas possible.

On a donc $v(a_i) > 0$, d'où $a_i = \pi_T^n b_i$, avec $b_i \in A_T$. On déduit alors de (*) que $-b_n = 1 + b_{n-1} \pi_T + \dots + b_1 \pi_T^{n-1}$, ce qui montre que b_n est inversible; d'où $v_T(b_n) = 0$ et $nv(a_n) = v_T(a_n) = n + v_T(b_n) = n$, i.e. $v(a_n) = 1$.

b) En effet, de l'égalité $\omega^n + \dots + a_n = 0$, on tire

$$nv_T(\omega) = v_T(\omega^n) \geqq \inf_i v_T(a_i \omega^{n-i}) = \inf_i \big(v_T(\pi) v(a_i) + (n-i) v_T(\omega)\big).$$

Cela n'est manifestement possible que si $v_T(\omega) > 0$. Dans ce cas, on a $v_T(\pi)v(a_i)+(n-i)v_T(\omega) > v_T(\pi) = v_T(a_n)$ si $i < n$. Il s'ensuit que $nv_T(\omega) = v_T(a_n)$; d'où $[T: K] \geqq v_T(\pi) \geqq n \geqq [T: K]$; d'où $v_T(\omega) = 1$, et $n = v_T(\pi) = [T: K]$.

1.6 ***Proposition:*** *Soit T une extension totalement ramifiée de K de degré $\ell = [T: K]$ premier à p. On a alors $T = K(\omega)$, où ω est solution d'une équation de la forme $\omega^\ell - u\pi = 0$, u étant le représentant multiplicatif d'un élément non nul de k.*

En effet, comme $v_T(\pi) = \ell$, on a $\pi_T^\ell = v\pi$, avec $v \in A_T^*$. Si u est le représentant multiplicatif de la classe de $v \bmod \pi$, on a donc $v = u(1+\pi_T a)$, avec $a \in A_T$. Il suffit donc de poser $\omega = \pi_T(1+\pi_T a)^{-1/\ell}$ (l'endomorphisme $x \mapsto x^\ell$ de $1+\pi_T A_T$ induit un isomorphisme dans chaque quotient

$$(1+\pi_T^i A_T)/(1+\pi_T^{i+1} A_T) \simeq k_T^+,$$

donc est un isomorphisme (*Alg. comm.*, chap III, §2, cor. 3 du théor. 1)).

Si k est algébriquement clos, on a de même $u = w^\ell$, w étant encore un représentant multiplicatif. Posons $\zeta = \omega w^{-1}$; *on a alors $T = K(\zeta)$, avec $\zeta^\ell = \pi$.*

1.7 ***Proposition:*** *Si T est une extension galoisienne, finie, totalement ramifiée de K, le groupe de Galois $\Pi(T/K)$ est résoluble.*

En effet, posons $\Gamma = \Pi(T/K)$, et, pour tout $i \in N$,

$$\Gamma_i = \operatorname{Cent}_\Gamma(A_T/\pi_T^{i+1}A_T) = \{\gamma \in \Gamma | v_T(\gamma a - a) \geqq i+1, \forall a \in A_T\}.$$

Alors Γ_i est un sous-groupe distingué de Γ. Si $\gamma \in \Gamma_i$, on a en outre $\gamma(\pi_T) = \pi_T + \pi_T^{i+1} b$, avec $b \in A_T$; d'où $\gamma(\pi_T)/\pi_T \in 1+\pi_T^i A_T$. De la formule

$$\delta(\gamma(\pi_T))/\pi_T = (\delta(\pi_T)/\pi_T)(\gamma(\pi_T)/\pi_T)(\delta(u)/u),$$

où $u = \gamma(\pi_T)/\pi_T$, on déduit facilement que les applications $\gamma \mapsto \gamma(\pi_T)/\pi_T$ induisent des homomorphismes injectifs $\Gamma/\Gamma_1 = \Gamma_0/\Gamma_1 \to k^* \simeq A^*/(1+\pi_T A)$ et $\Gamma_i/\Gamma_{i+1} \to k^+ \simeq (1+\pi_T^i A)/(1+\pi_T^{i+1} A)$ pour $i \geqq 1$. On en déduit que *Γ/Γ_1 est cyclique d'ordre premier à p, et que Γ_1 est un p-groupe.*

n° 2 Décomposition des extensions galoisiennes d'un corps local

2.1 ***Théorème de décomposition:*** *Pour toute extension galoisienne L de K_{nr} (1.4), il y a une extension totalement ramifiée L' de K telle que $L'_{\mathrm{nr}} = L' \otimes_K K_{\mathrm{nr}} = L$.*

En effet, grâce au théorème de Zorn, on se ramène sans peine au cas où $[L: K_{nr}] < \infty$. Il y a alors une extension finie L_1 de K telle que $L = L_1 \cdot K_{nr}$ (appliquer par exemple I, § 3, 1.2 au système filtrant des sous-extensions finies de K_{nr}). Soit K_1 la plus grande sous-extension non ramifiée de K contenue dans L_1 (1.3). On a alors $L_1 = K_1(\omega)$, où ω est la solution d'une équation d'Eisenstein $\omega^n + a_1\omega^{n+1} + \ldots + a_n = 0$ ($a_i \in K_1$; 1.5). Soient $\omega_1 = \omega, \omega_2, \ldots, \omega_\ell$ les conjugués de ω. Comme $L_1 \otimes_{K_1} K_{nr} = L$, on a $\omega_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\omega^j$, avec $a_{ij} \in K_{nr}$. Si K' est une extension galoisienne finie de K contenant les a_{ij}, et contenue dans K_{nr}, alors $K'(\omega)/K'$ est galoisienne, totalement ramifiée et telle que $K'(\omega) \otimes_{K'} K_{nr} \simeq L$. Par conséquent, $\Pi(L/K_{nr}) \simeq \Pi(K'(\omega)/K')$ est résoluble (1.7); par récurrence sur $[L: K_{nr}]$ on se ramène donc au cas où $\Pi(L/K_{nr})$ est cyclique, d'ordre premier q. Nous considérons alors deux cas:

a) $q \neq p$. Avec les notations ci-dessus, on a alors $K'(\omega) = K'(x)$, avec $x^\ell = u\pi$, u étant le représentant multiplicatif d'un élément de $k_{K'(\omega)}$ (1.6). Quitte à agrandir K', on peut supposer que $u = v^n$, donc que $K'(\omega) = K'(y)$, avec $y^q = \pi$ et $yv = x$. On choisira alors $L' = K(y)$.

b) $q = p$. Considérons la suite exacte canonique

$$1 \to \Pi(K'(\omega)/K') \to \Pi(K'(\omega)/K) \xrightarrow{\varphi} \Pi(K'/K) \to 1$$

et la classe de cohomologie associée $\varepsilon(K') \in H^2(\Pi(K'/K), \Pi(K'(\omega)/K'))$. D'après III, § 5, 6.11 b), on a

$$0 = H_c^2(\Pi(K_{nr}/K), \Pi(L/K_{nr})) \simeq \varinjlim H^2(\Pi(K'/K), \Pi(K'(\omega)/K')).$$

Si l'extension K'/K a été choisie assez grande, on a donc $\varepsilon(K') = 0$, de sorte que φ possède une section σ. On a alors

$$\Pi(K'(\omega)/K) \simeq \Pi(K'(\omega)/K') \cdot \sigma(\Pi(K'/K))$$

et il suffit de prendre pour L' le corps des invariants de $\sigma(\Pi(K'/K))$ dans $K'(\omega)$.

2.2 ***Corollaire***: *Si T/K est une sous-extension totalement ramifiée de L/K, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T/K est maximale dans l'ensemble des sous-extensions totalement ramifiées de L/K.*

(ii) $T \otimes_K K_{nr} \simeq L$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): ceci résulte de 1.3; (i) $\Rightarrow$ (ii): en effet, il y a d'après 2.1 une extension totalement ramifiée T' de T telle que

$$T' \otimes_K K_{nr} = T' \otimes_T (T \otimes_K K_{nr}) = T' \otimes_T T_{nr} = L;$$

si T est maximale, on a nécessairement $T = T'$.

2.3 ***Corollaire***: *Soient L une extension galoisienne de K_{nr} et T/K une sous-extension totalement ramifiée maximale de L/K. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *L'extension T/K est abélienne* (i.e. *elle est galoisienne et $\Pi(T/K)$ est abélien*).

(ii) *$\Pi(L/K_{nr})$ est contenu dans le centre de $\Pi(L/K)$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): en effet, d'après 2.2, on a $\Pi(L/K) \xrightarrow{\sim} \Pi(T/K)\times\Pi(K_{nr}/K)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): en effet, comme on a $T\otimes_K K_{nr} = L$ d'après 2.2, $\Pi(L/K)$ est produit semi-direct de $\Pi(L/K_{nr})$ et de $\Pi(L/T)$. Mais comme $\Pi(L/K_{nr})$ est central, $\Pi(L/T)$ opère trivialement sur $\Pi(L/K_{nr})$ par automorphismes intérieurs; on a donc $\Pi(L/K) = \Pi(L/K_{nr})\times\Pi(L/T)$ et $\Pi(L/T)$ est distingué dans $\Pi(L/K)$. Il s'ensuit que T/K est galoisien et que $\Pi(T/K) \xrightarrow{\sim} \Pi(L/K_{nr})$ est commutatif.

2.4 ***Corollaire***: *Soient K_{ab} une extension abélienne maximale de K, K_{abnr} la sous-extension non ramifiée maximale de K_{ab}, et T une extension totalement ramifiée de K. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T est une extension abélienne de K et est maximale parmi les extensions abéliennes totalement ramifiées de K.*

(ii) *$T\otimes_K K_{abnr}$ est K-isomorphe à K_{ab}.*

(ii) $\Rightarrow$ (i): ceci résulte de 1.3 ou 2.2.

(i) $\Rightarrow$ (ii): posons $K_{abnr} = M$, et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & K_{ab} & \longrightarrow & L = K_{ab}\otimes_M K_{nr} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K_{nr}. \end{array}$$

L'homomorphisme canonique $\varphi:\Pi(L/K)\to\Pi(K_{ab}/K)\times\Pi(K_{nr}/K)$ a pour noyau $\operatorname{Ker}\varphi = \Pi(L/K_{ab})\cap\Pi(L/K_{nr}) = \{1\}$, donc est injectif. Comme φ envoie $\Pi(L/K_{nr})$ dans le centre de $\Pi(K_{ab}/K)\times\Pi(K_{nr}/K)$, on voit donc que *$\Pi(L/K_{nr})$ est contenu dans le centre de $\Pi(L/K)$.*

Soit d'autre part T' une sous-extension de L qui contienne T, soit totalement ramifiée, et soit maximale pour ces conditions. D'après 2.3, l'extension T'/K est abélienne. Comme T/K est maximale, on a $T = T'$ et $T\otimes_K M\otimes_M K_{nr} \xrightarrow{\sim} T\otimes_K K_{nr} \xrightarrow{\sim} K_{ab}\otimes_M K_{nr}$; il s'ensuit que le morphisme canonique $\Pi(K_{ab}/K)\to\Pi(T\otimes_K M/K)$ est injectif, d'où $T\otimes_K M = K_{ab}$.

2.5 ***Remarque***: dans les notations de 2.3, le corps résiduel de K_{abnr} est une clôture abélienne k_{ab} de k, et $\Pi(K_{abnr}/K)$ s'identifie à $\Pi(k_{ab}/k)$; on a une suite exacte

$$0 \to \Pi(K_{\mathrm{ab}}/K_{\mathrm{abnr}}) \to \Pi(K_{\mathrm{ab}}/K) \to \Pi(k_{\mathrm{ab}}/k) \to 0.$$

Le choix d'une sous-extension abélienne totalement ramifiée maximale T de K_{ab} définit d'après 2.3 un isomorphisme

$$\Pi(K_{\mathrm{ab}}/K) \simeq \Pi(T/K) \times \Pi(K_{\mathrm{abnr}}/K),$$

donc un scindage de la suite exacte précédente et un isomorphisme $\Pi(K_{\mathrm{ab}}/K_{\mathrm{abnr}}) \xrightarrow{\sim} \Pi(T/K)$. L'objet des numéros suivants est de donner une construction de $\Pi(K_{\mathrm{ab}}/K_{\mathrm{abnr}})$.

n° 3 La norme

3.1 Pour toute extension finie totalement ramifiée T de K, nous notons A_T le k-schéma en anneaux $G(A_T)$ associé à A_T (V, § 4, 2.6). Si $R \in \mathsf{M}_k$ et si K est de caractéristique 0, on a donc $\mathsf{A}_T(R) = A_T \otimes_{\mathfrak{W}(k)} \mathfrak{W}(R)$ (V, § 4, 3.3); si K est de caractéristique p, on a $A_T \simeq k[[\pi_T]]$ et $\mathsf{A}_T(R) \simeq R[[\pi_T]]$.

Nous notons U_T le *k-groupe des unités* de A_T, qui est tel que $\mathsf{U}_T(R) = \mathsf{A}_T(R)^*$ pour $R \in \mathsf{M}_k$; nous utiliserons la filtration (U_T^n), $n \in \mathrm{N}$, de U_T introduite en V, § 4, 3.2. Rappelons que $\mathsf{U}_T^1 = (\mathsf{U}_T)^{\mathrm{u}}$, que $(\mathsf{U}_T)^{\mathrm{m}} \simeq \mu_k$; de plus, ique $n \geqq 1$, le morphisme

$$\mathfrak{i}_n^T \colon \alpha_k \to \mathsf{U}_T^n/\mathsf{U}_T^{n+1},$$

tel que $\mathfrak{i}_n^T(x) =$ classe de $1+\pi_T^n x$, où π_T est une uniformisante de T, est un épimorphisme de noyau ${}_{p^m}\alpha_k$, si $m = [n/e_T]$ et $e_T = v_T(p \cdot 1_T) \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ (*confer* V, § 4, 3.2 et 3.4).

Pour tout $R \in \mathsf{M}_k$, $\mathsf{A}_T(R)$ est un module libre de rang $[T\colon K]$ sur $\mathsf{A}_K(R)$ (1.1); on peut donc définir la trace et la norme de $\mathsf{A}_T(R)$ dans $\mathsf{A}_K(R)$; lorsque R varie, on obtient ainsi des morphismes de k-schémas $\mathsf{A}_T \to \mathsf{A}_K$. On note

$$\mathfrak{Tr}_{T/K} \colon \mathsf{A}_T \to \mathsf{A}_K$$

le morphisme défini par la trace, et

$$\mathfrak{N}_{T/K} \colon \mathsf{U}_T \to \mathsf{U}_K$$

l'homomorphisme de k-groupes induit par la norme.

3.2 ***Lemma:*** *Soit T une extension galoisienne de K de degré premier q. Si $R \in \mathsf{M}_k$, $n \geqq 1$ et $x \in \pi_T^n \mathsf{A}_T(R)$, on a*

$$\mathfrak{N}_{T/K}(1+x) - 1 - \mathfrak{Tr}_{T/K}(x) - \mathfrak{N}_{T/K}(x) \in \mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^{2n}\mathsf{A}_T(R)).$$

En effet, posons $G = \Pi(T/K)$ et $x^a = \prod_{s\in a} s(x)$ pour toute partie finie a de G. On a alors $\mathfrak{N}_{T/K}(1+x) = \sum_a x^a$. Si $n(a)$ est le nombre d'éléments de a, on a $1 = x^\emptyset$, $\mathfrak{N}_{T/K}(x) = x^G$ et $\mathfrak{Tr}_{T/K}(x) = \sum_{n(a)=1} x^a$. Si $n(a) \neq 0, q$, on a $s(a) \neq a$ pour tout $s \neq 1$ de G (car G est cyclique d'ordre premier). Il y a donc des parties $a_1, \ldots, a_r$ (en fait $r = (1/q)(2^q-2)-1!$) telles qu'on ait

$$\sum_a x^a - 1 - \mathfrak{Tr}_{T/K}(x) - \mathfrak{N}_{T/K}(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_s x^{s(a_i)} = \mathfrak{Tr}_{T/K}\Big(\sum_{i=1}^{r} x^{a_i}\Big),$$

$n(a_i) \geqq 2$ pour tout i, donc $\sum_{i=1}^r x^{a_i} \in \pi_T^{2n} A_T(R)$.

3.3 ***Lemme***: *Soient T une extension finie, totalement ramifiée, séparable de K, et f le polynôme minimal sur K d'une uniformisante π_T de T. Posons $d = v_T(f'(\pi_T)) > 0$. Alors, pour tout $R \in \mathsf{M}_k$ et tout $i \in \mathbf{N}$, on a $\mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^i A_T(R)) = \pi^j A_K(R)$, avec $j = [(i+d)/n]$ = partie entière de $(i+d)/n$ et $n = [T\colon K]$.*

En effet, reproduisons une démonstration de Serre: comme T/K est séparable, les racines $\pi_1, \ldots, \pi_n$ de f dans une extension convenable de T sont distinctes. On a donc

$$(*) \qquad \frac{1}{f(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(\pi_i)(T-\pi_i)}.$$

Si l'on développe $1/f(T)$ en série de puissances en $1/T$, le terme de plus bas degré est $1/T^n$. Comparant avec le développement du membre de droite de $(*)$ on obtient

$$\mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^i/f'(\pi_T)) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqq i \leqq n-2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^{n-1}/f'(\pi_T)) = 1.$$

Considérons alors la matrice de terme général $r_{ij} = \mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^i(\pi_T^j/f'(\pi_T))$, $0 \leqq i,j < n$. Les formules ci-dessus montrent que $r_{ij} = 0$ si $i+j \leqq n-2$, et $r_{ij} = 1$ si $i+j = n-1$. Pour $i+j \geqq n$, on a

$$r_{ij} = \mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^n \pi_T^{i+j-n}/f'(\pi_T)),$$

et comme π_T^n est combinaison linéaire à coefficients dans A des π_T^i, $0 \leqq i \leqq n$, ceci montre par récurrence que $r_{ij} \in A$. Comme on a dét $(r_{ij}) = (-1)^n$ (matrice triangulaire), on voit que $(r_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, A)$.

Ceci montre que la forme A-bilinéaire $\mathrm{Tr}_{T/K}(x \cdot y)$ met en dualité A_T et

$$\pi_T^{-d} A_T = \sum_{i=0}^{n-1} A\pi_T^i/f'(\pi_T).$$

Or, la relation $\mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^i A_T) \subset \pi^j A$ équivaut à $\mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^{i-nj} A_T) \subset A$, i.e.

d'après notre dualité à $\pi_T^{i-nj}A_T \subset \pi_T^{-d}A_T$, ou encore à $i-nj \geqq -d$. D'où le lemme lorsque $R = k$.

Pour obtenir le résultat dans le cas général, il suffit de remarquer que $\mathfrak{Tr}_{T/K}(R) = \mathrm{Tr}_{T/K} \otimes_A \mathrm{A}_K(R)$.

3.4 ***Lemme***: *Supposons qu'avec les hypothèses de* 3.3, T/K *soit une extension galoisienne de rang premier* q. *Si* σ *engendre* $\Pi(T/K)$, *on a* $d = (q-1)(t+1)$ *avec* $t = v_T(\sigma(\pi_T)-\pi_T)-1$.

En effet, on a $f'(\pi_T) = \prod_{\tau \neq 1} (\pi_T - \tau(\pi_T))$ et $v_T(\tau(\pi_T)-\pi_T) = v_T(\sigma(\pi_T)-\pi_T)$ si $\tau \in \Pi(T/K)$, $\tau \neq 1$. D'où l'égalité cherchée.

Remarquons que, d'après la démonstration de 1.7, on a $t = 0$ si $q \neq p$ et $t \geqq 1$ si $q = p$.

3.5 Sous les hypothèses de 3.4, et pour $i \geqq 1$, nous posons désormais

$$\chi(i) = \sup(i, qi-d) = \begin{cases} i & \text{si } \ i \leqq d/(q-1) = t+1, \\ qi-d & \text{si } \ i \geqq t+1. \end{cases}$$

Par conséquent, les inégalités $\chi(i) \leqq j < \chi(i+1)$ signifient que i est le plus grand entier u tel que $\sup(u, qu-d) \leqq j$; elles équivalent donc à $i = \inf(j, [(j+d)/q])$.

Proposition: *Soit* T *une extension galoisienne totalement ramifiée de* K *de rang premier* q. *Avec les notations ci-dessus, on a*:

a) $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \to U_K$ *est un épimorphisme de k-groupes affines commutatifs.*

b) *La partie multiplicative* $\mathfrak{N}^m_{T/K}$ *de* $\mathfrak{N}_{T/K}$ *est l'endomorphisme* $x \mapsto x^q$ *de* μ_k.

c) *Pour tout* $i \geqq 1$, $\mathfrak{N}_{T/K}$ *envoie* $U_T^{\chi(i)}$ *dans* U_K^i *et les homomorphismes induits* $U_T^{\chi(i)}/U_T^{\chi(i+1)} \to U_K^i/U_K^{i+1}$ *sont des épimorphismes.*

L'assertion b) est claire puisqu'on a $\mathfrak{N}_{T/K}(u) = u\sigma(u)\ldots\sigma^{q+1}(u)$ et que σ induit sur $\mu_k \simeq U_T^m$ le morphisme identique. D'autre part, il résulte de c) que $U_T^{\chi(1)}/U_T^{\chi(n)} \to U_K^1/U_K^n$ est un épimorphisme pour tout $n \geqq 1$, donc que $U_T^1 \to U_K^1$ est un épimorphisme (les limites projectives filtrantes sont exactes), ce qui, compte-tenu de b) implique a).

Il reste donc à démontrer c). Pour prouver que $\mathfrak{N}_{T/K}$ envoie $U_T^{\chi(i)}$ dans U_K^i, il suffit, compte-tenu de V, § 4, 3.1, de montrer que $\mathfrak{N}_{T/K}(R)$ envoie $1+\pi_T^{\chi(i)}\mathrm{A}_T(R)$ dans $1+\pi^i\mathrm{A}_K(R)$ pour tout $R \in M_k$. Soient donc j un entier $\geqq 1$ et $a \in \mathrm{A}_T(R)$, $R \in M_k$. D'après 3.2 et 3.3, on a

$$(*) \qquad \mathfrak{N}_{T/K}(1+\pi_T^j a) \equiv 1 + \mathfrak{N}_{T/K}(a)u^j\pi^j + \mathfrak{Tr}_{T/K}(a\pi_T^j) \bmod \pi^{[(2j+d)/q]},$$

où $u = \mathfrak{N}_{T/K}(\pi_T)/\pi \in A^*$. Appliquant à nouveau 3.3, on en conclut que $\mathfrak{N}_{T/K}(1+\pi_T^j a) \in 1+\pi^i \mathsf{A}_K(R)$, dès que $i \leqq \inf(j, (j+d)/q)$, ce qui équivaut à $j \geqq \chi(i)$. Cela entraîne la première assertion de c). Pour démontrer la seconde, il suffit d'après 3.1 de construire pour chaque i un endomorphisme non nul $\mathfrak{n}_i$ de $\boldsymbol{\alpha}_k$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\alpha}_k & \xrightarrow{\mathfrak{i}^T_{\chi(i+1)-1}} & U_T^{\chi(i+1)-1}/U_T^{\chi(i+1)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{n}_i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{N}_{T/K}} \\ \boldsymbol{\alpha}_k & \xrightarrow{\mathfrak{i}^K_i} & U_K^i/U_K^{i+1}, \end{array}$$

c'est-à-dire tel que $\mathfrak{N}_{T/K}(1+a\pi_T^j) \equiv 1+\mathfrak{n}_i(a)\pi^i \bmod \pi^{i+1}\mathsf{A}_K(R)$, pour tout $R \in \mathsf{M}_k$ et tout $a \in \boldsymbol{\alpha}_k(R) = R$, avec $j = \chi(i+1)-1$.

Pour ce faire, distinguons plusieurs cas:

A) Si $1 \leqq i < t$ (ce qui implique $q = p$), on a $\chi(i) = i$, $\chi(i+1) = i+1$, donc $j = i$, et $j < [(j+d)/q]$. La formule (*) donne alors

$$\mathfrak{N}_{T/K}(1+a\pi_T^i) \equiv 1+a^p u^i \pi^i \bmod \pi^{i+1}\mathsf{A}_K(R),$$

et on peut prendre $\mathfrak{n}_i(a) = \bar{u}^i a^p$, où $\bar{u}$ est la classe de u modulo π.

B) Si $i = t \geqq 1$ (ce qui implique encore $q = p$), on a $\chi(i) = i$, $\chi(i+1) = i+1$, donc $j = i = t$ et $j = [(j+d)/q]$. Si $w = \pi^{-t}\,\mathfrak{Tr}_{T/K}(\pi_T^t) \in A^*$ (3.3), la formule (*) donne ici (on peut prendre $a \in \mathsf{A}_K(R)$)

$$\mathfrak{N}_{T/K}(1+a\pi_T^t) = 1+aw\pi^t+a^p u^t \pi^t \bmod \pi^{t+1}\mathsf{A}_K(R).$$

On peut donc prendre $\mathfrak{n}_t$ tel que $\mathfrak{n}_t(a) = a\bar{w}+a^p\bar{u}^t$.

C) Si $i > t$, alors $[(j+d)/q] = i < j$, et $w = \pi^{-i}\,\mathrm{Tr}_{L/K}(\pi_T^j) \in A^*$. La formule (*) donne alors $\mathfrak{N}_{T/K}(1+a\pi_T^j) \equiv 1+a\pi^i \bmod \pi^{i+1}\mathsf{A}_T(R)$, de sorte qu'on peut prendre $\mathfrak{n}_i$ tel que $\mathfrak{n}_i(a) = a\bar{w}$.

3.6 Corollaire: *Si T est une extension galoisienne finie, totalement ramifiée de K, le morphisme-norme $\mathfrak{N}_{T/K}$: $U_T \to U_K$ est un épimorphisme.*

D'après 1.7, si $T \neq K$, T contient une sous-extension galoisienne T' qui est cyclique de degré premier; d'après 3.5, $\mathfrak{N}_{T'/K}$ est un épimorphisme. Comme $\mathfrak{N}_{T/K} = \mathfrak{N}_{T'/K} \circ \mathfrak{N}_{T/T'}$, l'assertion en résulte par récurrence sur $[T: K]$.

3.7 Corollaire: *Supposons le corps résiduel k du corps local K algébriquement clos. Pour toute extension finie T/K, l'application-norme $N_{T/K}$: $T \to K$ est surjective.*

En effet, si $S \subset T$, on a $N_{T/K} = N_{S/K} \circ N_{T/S}$. En particulier, si S est la plus grande sous-extension séparable de T, on voit qu'on est ramené à traiter séparément le cas d'une extension séparable et celui d'une extension purement radicielle. Le second cas est facile et inutile pour la suite (on se ramène au cas où $[T: K] = p$; on a alors $K \simeq k((t))$, $L \simeq k((u))$ avec $u^p = t$).

Dans le cas où T/K est séparable, soit Q une extension galoisienne finie de K contenant T; comme on a $N_{Q/K} = N_{T/K} \circ N_{Q/T}$, il suffit de prouver la surjectivité de $N_{Q/K}$, ce qui nous ramène au cas où T/K est galoisienne. Dans ce cas $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \to U_K$ est un épimorphisme (3.6). D'après III, § 3, 7.6, il s'ensuit que $\mathfrak{N}_{T/K}(k): A_T^* \to A^*$ est une surjection. Comme l'image de $N_{T/K}$ contient en outre une uniformisante (à savoir $N_{T/K}(\pi_T)$; 1.5 a)), le résultat est établi.

n° 4 Groupe de Galois et groupe des unités

4.1 Soit T une extension galoisienne finie totalement ramifiée de K considérons le morphisme norme $\mathfrak{N}_{T/K}: U_T \to U_K$ et soit $\mathfrak{V}_{T/K} = (\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K})^c$ Comme $\mathfrak{N}_{T/K}$ est un épimorphisme (3.6), on a une suite exacte

$$1 \to \pi_0(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K}) \to U_T/\mathfrak{V}_{T/K} \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} U_K \to 1,$$

où $\mathfrak{n}_{T/K}$ est induit par $\mathfrak{N}_{T/K}$ et où $\pi_0(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K}) = (\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K})/\mathfrak{V}_{T/K}$. Nous nous proposons de montrer que $\pi_0(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K})$ est isomorphe au k-groupe constant $\Pi(T/K)_k^{ab}$. (Γ^{ab} désigne ici le plus grand quotient commutatif d'un groupe abstrait Γ.) Pour cela, si π_T est une uniformisante de T, nous associons à tout $\sigma \in \Pi(T/K)$ l'image canonique $\psi(\sigma)$ de $\sigma(\pi_T)/\pi_T$ dans $\pi_0(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K})(k)$.

> ***Lemme***: *L'application* $\psi: \Pi(T/K) \to \pi_0(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K})(k)$ *est un homomorphisme de groupes et ne dépend pas du choix de* π_T.

En effet, si $\sigma \in \Pi(T/K)$, soit $\varphi_\sigma: U_T \to U_T$ le morphisme $u \mapsto \sigma(u)/u$ ($u \in U_T(R)$, $R \in M_k$). Il est clair que $\mathfrak{N}_{T/K} \circ \varphi_\sigma = 1$, donc que φ_σ se factorise à travers $\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K}$. Or U_T est connexe; donc φ_σ se factorise à travers $\mathfrak{V}_{T/K}$. En particulier, $\mathfrak{V}_{T/K}(k)$ contient tous les éléments de la forme $\sigma(u)/u$, avec $u \in U_T(k)$. Il s'ensuit que $\sigma(u\pi_T)/u\pi_T = (\sigma(u)/u) \cdot (\sigma(\pi_T)/\pi_T)$ est congru à $\sigma(\pi_T)/\pi_T$ modulo $\mathfrak{V}_{T/K}(k)$, donc que ψ ne dépend pas du choix de l'uniformisante. Si $\sigma, \tau \in \Pi(T/K)$, on a

$$\psi(\tau\sigma) = (\tau\sigma)(\pi_T)/\pi_T = \{\tau(\sigma(\pi_T))/\sigma(\pi_T)\} \cdot \sigma(\pi_T)/\pi_T = \psi(\tau) \cdot \psi(\sigma).$$

4.2 L'homomorphisme $\psi\colon \Pi(T/K) \to \pi_0(\mathfrak{Ker}\,\mathfrak{N}_{T/K})(k)$ se factorise à travers $\Pi(T/K)^{ab}$. Nous notons $\mathfrak{i}_{T/K}\colon \Pi(T/K)_k^{ab} \to U_T/\mathfrak{V}_{T/K}$ l'homomorphisme induit par ψ.

Théorème d'exactitude: *Si T/K est une extension galoisienne finie totalement ramifiée, la suite*

$$1 \to \Pi(T/K)_k^{ab} \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} U_T/\mathfrak{V}_{T/K} \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} U_K \to 1$$

est une suite exacte de k-groupes affines commutatifs.

Il s'agit de prouver que $\mathfrak{i}_{T/K}$ induit un isomorphisme de $\Pi(T/K)_k^{ab}$ sur $\mathfrak{Ker}\,\mathfrak{n}_{T/K}$, et il suffit de le faire après extension du corps de base de k à $\bar{k}$. Or, il résulte évidemment de 1.4 que $A_{T_{nr}} \xrightarrow{\sim} A_T \otimes_{\mathfrak{W}(k)} \mathfrak{W}(\bar{k})$ si K est de caractéristique 0; on a alors $(A_T)_{\bar{k}} \xrightarrow{\sim} G(A_T \otimes_{\mathfrak{W}(k)} \mathfrak{W}(\bar{k})) = A_{\hat{T}_{nr}}$ d'après V, § 4, 1.6; d'où $U_T \otimes_k \bar{k} \xrightarrow{\sim} U_{\hat{T}_{nr}}$ et $U_K \otimes_k \bar{k} \xrightarrow{\sim} U_{\hat{K}_{nr}}$, ce qui reste vrai si $K \xrightarrow{\sim} k[[\pi]]$ et nous ramène au cas où *k est algébriquement clos.* Alors $\Pi(T/K)_k^{ab}$ et $\mathfrak{Ker}\,\mathfrak{n}_{T/K}$ sont proconstants (V, §3, 1.1), et il suffit de montrer que $\Pi(T/K)^{ab} \to \operatorname{Ker} \mathfrak{n}_{T/K}(k)$ est bijectif.

Notons alors $U_T = U_T(k)$, $V_{T/K} = \mathfrak{V}_{T/K}(k)$ et $N_{T/K} = \mathfrak{N}_{T/K}(k)$. Considérons l'homomorphisme $\varphi\colon U_T^{\Pi(T/K)} \to U_T$ qui a $\varphi_\sigma\colon u \mapsto \sigma(u)/u$ pour composante d'indice $\sigma \in \Pi(T/K)$. Posons $\mathfrak{V}'_{T/K} = \widetilde{\operatorname{Im}}\,\varphi$ et $V'_{T/K} = \operatorname{Im} \varphi(k) = \mathfrak{V}'_{T/K}(k)$. On a alors $\mathfrak{V}'_{T/K} \subset \mathfrak{V}_{T/K}$ (cf. 4.1) et $(\mathfrak{V}_{T/K}/\mathfrak{V}'_{T/K})(k) = V_{T/K}/V'_{T/K} \subset (\operatorname{Ker} N_{T/K})/V'_{T/K}$. D'après 4.3 ci-dessous, on voit que $(\mathfrak{V}_{T/K}/\mathfrak{V}'_{T/K})(k)$ est fini. Donc $(\mathfrak{V}_{T/K}/\mathfrak{V}'_{T/K})_{red}$ est fini (V, § 3, 1.5). Comme $\mathfrak{V}_{T/K}$ est connexe, on a donc $\mathfrak{V}'_{T/K} = (\mathfrak{V}_{T/K})_{red}$ et $V'_{T/K} = V_{T/K}$, ce qui, modulo 4.3, achève la démonstration.

4.3 ***Lemme***: *Supposons k algébriquement clos. Soient T une extension galoisienne finie de K et $V'_{T/K}$ le sous-groupe de U_T engendré par les $\sigma(u)/u$, $\sigma \in \Pi(T/K)$, $u \in U_T$. L'homomorphisme $\Pi(T/K) \to U_T/V'_{T/K}$, qui associe à $\sigma \in \Pi(T/K)$ la classe de $\sigma(\pi_T)/\pi_T$, induit un isomorphisme $j\colon \Pi(T/K)^{ab} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Ker} N_{T/K})/V'_{T/K}$.*

En effet, posons $\Gamma = \Pi(T/K)$. Pour tout Γ-module M et tout entier $i \geqq 0$, on a $H_i(\Gamma, M) = \operatorname{Tor}_i^{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}, M)$, Γ opérant trivialement sur $\mathbf{Z}$. On a en particulier $H_0(\Gamma, M) = M/\mathbf{I}(\Gamma)M$, où $\mathbf{I}(\Gamma)M$ est le sous-groupe de M engendré par les éléments $\gamma m - m$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $m \in M$ (III, § 6, 1.1). Considérons le diagramme commutatif de Γ-modules

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{I}(\Gamma) & \xrightarrow{\text{incl.}} & \mathbf{Z}(\Gamma) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & U_T & \xrightarrow{\text{incl.}} & T^* & \xrightarrow{v_T} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où $\alpha(\gamma) = \gamma(\pi_T)$ et $\beta(\gamma-1) = \gamma(\pi_T)/\pi_T$ si $\gamma \in \Gamma$. Comme les lignes sont exactes on a un diagramme induit

$$\begin{tikzcd}
O=H_1(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(\Gamma, \mathbf{I}(\Gamma)) \arrow[r] \arrow[d, "H^0(\Gamma,\beta)"] & H_0(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) \arrow[r] \arrow[d] & H_0(\Gamma, \mathbf{Z}) \arrow[d, equal] \\
H_1(\Gamma, T^*) \arrow[r] & H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \arrow[r, "\partial"] & H_0(\Gamma, U_T) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & H_0(\Gamma, T^*) \arrow[r] \arrow[d, "N'"] & H_0(\Gamma, \mathbf{Z}) \\
 & 1 \arrow[r] & U_K \arrow[r] & K^*, &
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes et où N, N' sont induits par l'application-norme $N_{T/K}$ (remarquer que $H_0(\Gamma, U_T) = U_T/\{\gamma u/u\} = U_T/V'_{T/K}$ et $H_0(\Gamma, T^*) = T^*/\{\gamma x/x\}$ avec $\gamma \in \Gamma$, $u \in U_T$ et $x \in T^*$). D'après 4.4 et 4.5 ci-dessous, on a $H_1(\Gamma, T^*) = 0$ et $\operatorname{Ker} N' = 0$. Par conséquent, ∂ induit un isomorphisme $H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \simeq \operatorname{Ker} N = (\operatorname{Ker} N_{T/K})/V'_{T/K}$. D'un autre côté, on a $H_0(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) \simeq \mathbf{Z}[\Gamma]/\mathbf{I}(\Gamma) \simeq \mathbf{Z} = H_0(\Gamma, \mathbf{Z})$. Notre diagramme permet donc d'identifie $H_0(\Gamma, \mathbf{I}(\Gamma)) = \mathbf{I}(\Gamma)/\mathbf{I}(\Gamma)^2$ à $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ et il montre que $H^0(\Gamma, \beta)$ induit u isomorphisme de $\mathbf{I}(\Gamma)/\mathbf{I}(\Gamma)^2$ sur $\operatorname{Ker} N$. Il reste donc a vérifier (ce qui e classique et facile) que l'application $\gamma \mapsto \gamma-1$ de Γ dans $\mathbf{I}(\Gamma)$ induit p passage au quotient un isomorphisme u: $\Gamma^{ab} \simeq \mathbf{I}(\Gamma)/\mathbf{I}(\Gamma)^2$; par constructio u est tel que $j = H^0(\Gamma, \beta)u$.

4.4 ***Lemme***: *Sous les hypothèses du lemme* 4.3, *tout élément* $x \in T^*$ *tel que* $N_{T/K}(x) = 1$ *est de la forme* $x = \prod_{i=1}^r \gamma_i(y_i)/y_i$ *avec* $\gamma_i \in \Pi(T/K)$ *et* $y_i \in T^*$.

a) *Supposons d'abord* $\Gamma = \Pi(T/K)$ *cyclique*: on a donc une résolution libre du Γ-module $\mathbf{Z}$ de la forme

$$\ldots\ \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?N} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?(\sigma-1)} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?N} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{?(\sigma-1)} \mathbf{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

où σ est un générateur de Γ et où $N = \sum \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Identifiant tout Γ-module M à $\mathsf{Mod}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}[\Gamma], M)$, on en déduit

$$H^{2i+1}(\Gamma, M) = \mathsf{Mod}^{2i+1}_{\mathbf{Z}[\Gamma]}(\mathbf{Z}, M) = (\operatorname{Ker} N_M)/\mathbf{I}(\Gamma)M$$

si $i \geqq 0$ (N_M: $M \to M$ est l'application $N?$: $m \mapsto Nm$). Or on sait d'autre part (III, §5, 3.2) que $H^1(\Gamma, T^*) = \operatorname{Ker}(\tilde{H}^1(K, \mu_K) \to \tilde{H}^1(T, \mu_T))$. Comme $\tilde{H}^1(K, \mu_K) = 0$ (III, § 4, 4.4), on a donc $H^1(\Gamma, T^*) = 0$ (théorème 90 de Hilbert), d'où Ker $N_M = \mathbf{I}(\Gamma)M$ si $M = T^*$.

b) *Cas général*: raisonnons par récurrence sur $[T: K]$. Si $\Pi(T/K)$ n'est pas cyclique, T contient une sous-extension galoisienne L distincte de K et T (car $\Pi(T/K)$ est résoluble (1.7)). Posons $R = N_{T/L}$. On a alors $N_{T/K}(x) = N_{L/K}(R(x)) = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $R(x) = \prod_{j=1}^{s} \bar{\delta}_j(z_j)/z_j$, avec $z_j \in L^*$ et $\bar{\delta}_j \in \Pi(L/K)$. Soient $\delta_j \in \Pi(T/K)$ un prolongement de $\bar{\delta}_j$ à T et t_j un élément de T^* tel que $R(t_j) = z_j$ (3.7). On a alors $R(x) = \prod_j \bar{\delta}_j(R(t_j))/R(t_j) = R(\prod_j \delta_j(t_j)/t_j)$. Posant $u = \prod_j \delta_j(t_j)/t_j$ et appliquant l'hypothèse de récurrence à l'extension T/L et à l'élément $u^{-1}x \in T^*$, on a le résultat cherché.

4.5 Lemme: *Sous les hypothèses du lemme* 4.3, *on a* $H_1(\Pi(T/K), T^*) = 0$.

a) *Supposons d'abord* $\Gamma = \Pi(T/K)$ *cyclique*: se servant de la résolution de $\mathbf{Z}$ donnée en 4.4 a), on voit alors qu'on a $H_{2i+1}(\Gamma, M) = M^\Gamma/N_M(M)$ pour tout Γ-module M (4.4; on note M^Γ le groupe des $m \in M$ tels que $\gamma(m) = m$, $\forall \gamma \in \Gamma$). On a donc en particulier $H_1(\Gamma, T^*) = K^*/N_{T/K}T^* = \{1\}$ (3.7).

b) *Cas général*: soit H un sous-groupe distingué de $\Gamma = \Pi(T/K)$. Pour tout Γ-module M, l'opération de Γ sur M induit par passage au quotient une opération de Γ/H sur $M/\mathbf{I}(H)M$. Lorsque M est un Γ-module libre, $M/\mathbf{I}(H)M$ est un (Γ/H)-module libre. Enfin le foncteur $M \leftrightarrow M/\mathbf{I}(\Gamma)M$ se décompose en $M \leftrightarrow M/\mathbf{I}(H)M$ et en $N \leftrightarrow N/\mathbf{I}(\Gamma/H)N$. On a donc une suite spectrale des foncteurs composés

$$H_q(\Gamma/H, H_p(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(\Gamma, M),$$

qui engendre la suite exacte habituelle des termes de bas degré

$$H_2(\Gamma, M) \to H_2(\Gamma/H, M/\mathbf{I}(H)M) \to H_0(\Gamma/H, H_1(H, M)) \to$$
$$H_1(\Gamma, M) \to H_1(\Gamma/H, M/\mathbf{I}(H)M) \to 0.$$

D'où en particulier une suite exacte

$$H_1(H, M) \to H_1(\Gamma, M) \to H_1(\Gamma/H, M/\mathbf{I}(H)M).$$

Supposons maintenant Γ non cyclique. Comme Γ est résoluble (1.7), on peut choisir H tel que $H \neq \{1\}$, Γ. Soit L le corps des invariants de H $(K \subset L \subset T)$. Posant $M = T^*$ dans la suite exacte ci-dessus et raisonnant par récurrence sur $[T: K]$, on a $H_1(H, T^*) = 0$ par hypothèse par récurrence. D'autre part, $M/\mathbf{I}(H)M \simeq L^*$ d'après 3.7 et 4.4. D'où aussi $H_1(\Gamma/H, L^*) = 0$, ce qui prouve notre lemme.

n° 5 Extensions cycliques de degré premier

5.1 Soit T/K une extension cyclique de degré premier q, totalement ramifiée. Désignons par Γ le groupe de Galois $\Pi(T/K)$; nous nous proposons d'étudier l'extension de U_K par Γ_k donnée par la suite exacte (4.2)

$$1 \longrightarrow \Gamma_k \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} U_T/\mathfrak{V}_{T/K} \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} U_K \longrightarrow 1.$$

5.2 Supposons d'abord $q \neq p$. D'après 1.6, on a alors $T = K(\omega)$ où $\omega^q = u\pi$, avec $u \in k^*$ (on identifie k^* à un sous-groupe de K^* au moyen de la section de Teichmüller (V, § 4, 3.2)); si $\sigma \in \Gamma$, posons $\zeta(\sigma) = \sigma(\omega)/\omega \neq 1$; on a $\zeta(\sigma)^q = 1$, donc $\zeta(\sigma) \in k^* \simeq U_T^m(k)$ (V, § 4, 3.2) (car $\zeta(\sigma)$ induit un homomorphisme $\Gamma_k \to U_T$ et Γ_k est multiplicatif!). L'application $\sigma \mapsto \zeta(\sigma)$ induit un isomorphisme $\Gamma_k \simeq {}_q\mu_k$ (II, §5, 1.6). Identifions les parties multiplicatives de U_K et U_T à μ_k; d'après 3.5 b) et la définition de $\mathfrak{i}_{T/K}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Gamma_k \arrow[r, "\mathfrak{i}_{T/K}"] & U_T/\mathfrak{V}_{T/K} \arrow[r, "\mathfrak{n}_{T/K}"] & U_K \arrow[r] & 1 \\
0 \arrow[r] & {}_q\mu_k \arrow[r, "\text{incl.}"] \arrow[u, "\wr"] & \mu_k \arrow[r, "q\,\mathrm{Id}"] \arrow[u] & \mu_k \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que l'extension cherchée s'obtient à partir de la suite exacte du bas à l'aide des isomorphismes $\Gamma_k \simeq {}_q\mu_k$ et $\mathrm{Ac}_k^1(U_K, \Gamma_k) \simeq \mathrm{Ac}_k^1(\mu_k, \Gamma_k)$.

Inversement, *tout élément non nul de* $\mathrm{Ac}_k^1(U_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k)$ *s'obtient à partir de l'extension* $T = K(\omega)$, *ou* $\omega^q = \pi$, *et d'un isomorphisme* $\Pi(T/K) \simeq \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. En effet, on a des isomorphismes (V, § 3, 3.10 et 5.2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ac}_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k) &\simeq \mathrm{Ac}_k^1(\mu_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k) \simeq \mathrm{Ac}_k(\mathfrak{D}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k)\\ &\simeq \mathrm{Ac}_k(\mathfrak{D}(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k).\end{aligned}$$

Ce groupe est donc nul si k ne contient pas de racines q-ièmes de l'unité $\neq 1$ et isomorphe à $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ dans le cas contraire, ce qui implique l'assertion annoncée.

5.3 Supposons maintenant $q = p$. Posons $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{T/K}$, $N_{T/K}(\pi_T) = u\pi$, $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1 + v\pi_T^t$, si σ est un générateur de $\Gamma = \Pi(T/K)$, et $\mathrm{Tr}_{T/K}(\pi_T^t) = w\pi^t$, avec $v \in A_T^*$ et u, $w \in A^*$. Soient $\alpha: \Gamma_k \to \alpha_k$ et $\beta: \alpha_k \to \alpha_k$ les homomorphismes tels que $\alpha(r \bmod p) = r\bar{v}$ et $\beta(a) = \bar{w}a + \bar{u}^t a^p$, où $\bar{v}$ et $\bar{u}$, $\bar{w}$ désignent les classes de v et u, w modulo π_T et π. Enfin, soit $\mathfrak{i}$ le composé

$$\alpha_k \xrightarrow{\mathfrak{i}_t^T} U_T^t/U_T^{t+1} \xrightarrow{\text{can.}} U_T^t/(U_T^t \cap \mathfrak{V})U_T^{t+1}.$$

Lemme*: *Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Gamma_k \arrow[r, "\mathfrak{i}_{T/K}"] & U_T/\mathfrak{V} \arrow[r, "\mathfrak{N}_{T/K}"] & U_K \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Gamma_k \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & U_T^t/U_T^t \cap \mathfrak{V} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{can.}"'] \arrow[d, "\mathrm{can.}"] & U_K^t \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{can.}"'] \arrow[d, "\mathrm{can.}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Gamma_k \arrow[r] & U_T^t/(U_T^t \cap \mathfrak{V})U_T^{t+1} \arrow[r] & U_K^t/U_K^{t+1} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Gamma_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, equal] & \alpha_k \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "\mathfrak{i}"'] & \alpha_k \arrow[r] \arrow[u, "\mathfrak{i}_t^K"'] & 1
\end{tikzcd}$$

les lignes sont exactes.

En effet, la première ligne est exacte d'après 4.2. Dans la deuxième ligne les morphismes sont induits par $\mathfrak{i}_{T/K}$ (qui se factorise à travers $U_T^t/U_T^t \cap \mathfrak{V}$ par définition de t) et $\mathfrak{N}_{T/K}$ (qui envoie U_T^t dans U_K^t d'après 3.5 c)); on voit comme pour $\mathfrak{N}_{T/K}$ que le morphisme induit $U_T^t \to U_K^t$ est un épimorphisme, ce qui implique l'exactitude de la seconde ligne. Pour prouver l'exactitude de la troisième ligne, posons $\mathfrak{W} = U_T^{t+1}(U_T^t \cap \mathfrak{V})/U_T^t \cap \mathfrak{V}$; il est alors clair que l'homomorphisme $\mathfrak{W} \to U_K^{t+1}$ induit par $U_T^t/U_T^t \cap \mathfrak{V} \to U_K^t$ est un épimorphisme; il suffit donc de prouver l'égalité $\Gamma_k \cap \mathfrak{W} = e_k$, qui équivaut à la relation $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1+v\pi_T^t \notin ((U_T^t \cap \mathfrak{V})U_T^{t+1})(k)$, et résulte manifestement des relations $1+v\pi_T^t \notin U_T^{t+1}(k)$ et $\mathfrak{V}_{\mathrm{red}} \subset U_T^{t+1}$. Pour prouver cette dernière inclusion, posons $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ker}\, \mathfrak{N}_{T/K}$ et $\mathfrak{C}_i = U_T^{\chi(i)} \cap \mathfrak{C}$ avec les notations de 3.5. D'après 3.5 A et B, $\mathfrak{C}_i/\mathfrak{C}_{i+1}$ est fini pour $i \leqq t$; par conséquent, $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_{t+1}$ est fini et l'on a $\mathfrak{V}_{\mathrm{red}} = \mathfrak{C}_{\mathrm{red}}^0 \subset \mathfrak{C}_{t+1} \subset U_T^{t+1}$.

Considérons enfin la dernière ligne: la commutativité du carré contenant β (resp. α) résulte de la démonstration de 3.5 (resp. des définitions). On a donc $\mathfrak{i}_t^K\beta\alpha = 0$, d'où $\beta\alpha = 0$, puisque $\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{i}_t^K$ est infinitésimal. Comme $\mathfrak{Ker}\, \beta$ est manifestement une forme de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k$, la dernière ligne est exacte.

5.4 ***Exemple*:** Supposons que K contienne une racine p-ième de l'unité $\zeta \neq 1$ (on a donc $p \cdot 1_K \neq 0$ et $e < +\infty$). Soit $T = K(\omega)$ avec $\omega^p = \pi$. On a alors $(p-1)(t+1) = v_T(p\omega^{p-1})$ (3.4), donc $(p-1)(t+1) = pe+p-1$, d'où $t = pe_1$ avec $e_1 = e/(p-1)$. Identifions Γ à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ en choisissant comme générateur de Γ l'élément σ tel que $\sigma(\omega) = \zeta\omega$; on a

$$t = v_T(\sigma(\omega)-\omega)-1 = v_T(\zeta-1) = pv(\zeta-1).$$

Il en résulte que e_1 est entier et que $\zeta = 1 + h\pi^{e_1}$, où $h \in A^*$. On a aussitôt $u = (-1)^{p-1}$ et $w = p\pi^{-e}$; la dernière ligne du diagramme 5.3 s'identifie donc à l'extension

$$0 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{\alpha}_k \xrightarrow{\beta} \boldsymbol{\alpha}_k \to 0,$$

où $\alpha(r \bmod p) = r\bar{h}$ et $\beta(a) = \bar{w}a + a^p$.

5.5 ***Exemple (extensions d'Artin-Schreier)***: Soient n un entier tel que $1 \leqq n < pe/(p-1)$ et $(n, p) = 1$, et λ un élément de K tel que $v(\lambda) = -n$. Posons $T = K(x)$ avec $x^p - x = \lambda$.

Nous montrons d'abord que *l'extension T/K est galoisienne, totalement ramifiée de degré p, et que l'on a $t = n$*: de $x^p - x = \lambda$, on déduit $v_T(x) < 0$, puis $v_T(\lambda) = pv_T(x)$, d'où $v_T(x) = -v_T(\pi)n/p$. Comme $(n, p) = 1$, p divise $v_T(\pi)$; d'où $p \leqq v_T(\pi) \leqq [T\colon K] \leqq p$ et $v_T(x) = -n$.

Considérons d'autre part l'équation

$$(x+Y)^p - (x+Y) - \lambda = Y^p - Y + \sum_{i=1}^{p-1} a_i Y^i = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} v_T(a_i) &= v_T\left(\binom{p-1}{i-1}\frac{px^{p-i}}{i}\right) \\ &= v_T(px^{p-i}) = pv(p) - n(p-i) > pv(p)\left(1 - \frac{p-i}{p-1}\right) \geqq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $a_i \equiv 0 \bmod \pi_T$; or l'équation réduite modulo π_T, $Y^p - Y = 0$, a p racines $0, 1, \ldots, p-1$. Notre équation $(x+Y)^p - (x+Y) - \lambda = 0$ a donc p racines $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ dans A_T telles que $y_i \equiv i \bmod \pi_T$ (lemme de Hensel; *Alg. comm.*, chap. III, §4, cor. 1 au th. 2). Ceci montre que T/K est galoisienne.

Soit $\sigma \in \Pi(T/K)$ tel que $\sigma(x) = x + y_1$. On a alors $\sigma(x) - x \equiv 1 \bmod \pi_T A_T$, d'où $(\sigma(x)/x) - 1 \equiv x^{-1} \bmod \pi_T^{n+1} A_T$. D'un autre côté, soit $x = \pi_T^{-n} u$, avec $u \in A_T^*$; *par définition de t, on a $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1 + z$, avec $v_T(z) = t$* et l'on sait qu'alors $\sigma(a) - a \in \pi_T^{t+1} A_T$ pour tout $a \in A_T$, $(\sigma(u)/u) - 1 \in \pi_T^{t+1} A_T$ et $(\sigma(x)/x) - 1 \equiv -nz \bmod \pi_T^{t+1}$. Comparant les deux congruences obtenues pour $(\sigma(x)/x) - 1$, on obtient $t = n$ et $z \equiv -x^{-1}/n \bmod \pi_T^{t+1} A$.

Déterminons enfin la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k \xrightarrow{\alpha} \boldsymbol{\alpha}_k \xrightarrow{\beta} \boldsymbol{\alpha}_k \to 0.$$

Posons $-x^{-1}/n = h\pi_T^t$, avec $h \in A_T^*$, de sorte que $i_t^T\colon \boldsymbol{\alpha}_k \to U_T^t/U_T^{t+1}$ est défini par $\mathrm{i}_t^T(a) = 1-ah^{-1}x^{-1}$; on a $\sigma(\pi_T)/\pi_T = 1+z \equiv 1-x^{-1}/n$, ce qui entraine $\alpha(1) = \bar{h}/n$ et $\alpha(r \bmod p) = r\bar{h}/n$. De même, $\mathfrak{N}_{T/K}(1-ah^{-1}x^{-1}) = \mathfrak{N}_{T/K}(ah^{-1}-x)/\mathfrak{N}_{T/K}(-x) = 1-\lambda^{-1}((a/h)^p - a/h)$ (calculer les termes constants des équations minimales de $-x$ et $a-x$ sur K); si $\lambda^{-1} = \pi^n\mu$, on a donc $\mathfrak{N}_{T/K}(\mathrm{i}_t^T(a)) = \mathrm{i}_t^K(-\bar{\mu}((a/\bar{h})^p - a/\bar{h}))$, ce qui signifie que $\beta(a) = -\bar{\mu}((a/\bar{h})^p - a/\bar{h})$, $a \in R \in M_k$.

Lorsque λ (et donc $\bar{\mu}$) varie, *on obtient ainsi tous les éléments de* $\mathrm{Ac}_k^1(\alpha_k, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$ (III, § 6, 5.4; puisque k est parfait, on a $k[\mathbf{F}] = k + (\mathbf{F}-1)k[\mathbf{F}]$).

5.6 A chaque extension T/K cyclique totalement ramifiée de degré p, et à chaque isomorphisme $\varphi: \Pi(T/K) \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on associe donc un élément $\mathscr{E}(T, \varphi)$ de $\mathrm{Ac}_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$ (4.2). La proposition suivante sera fondamentale pour la suite:

> ***Proposition***: *Lorsque T parcourt les extensions cycliques totalement ramifiées de degré p de k, les $\mathscr{E}(T, \varphi)$ engendrent le groupe $\mathrm{Ac}_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$.*

Démontrons d'abord deux lemmes:

5.7 ***Lemme***: *Pour tout $n \geqq 1$, soient $\mathrm{j}_n: U_K^n/U_K^{n+1} \to U_K/U_K^{n+1}$ l'inclusion et*

$$\mathrm{j}_n^*: \mathrm{Ac}_k^1(U_K/U_K^{n+1}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k) \to \mathrm{Ac}_k^1(U_K^n/U_K^{n+1}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$$

l'application induite. Si $e = v(p)$ et $e_1 = e/(p-1)$, on a $\mathrm{Im}\, \mathrm{j}_n^* = 0$ *dans les trois cas suivants*:

a) $n > pe_1$;

b) $n < pe_1$ *et* $p|n$;

c) $n = pe_1$ *et* 1 *est la seule racine p-ième de* 1 *dans K.*

De plus, si $n = pe_1$, on a toujours $\mathrm{Im}\, \mathrm{j}_n^* = 0$ *ou* $\mathrm{Im}\, \mathrm{j}_n^* \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

En effet, posons $m = n/p$ dans le cas b) et $m = n-e$ sinon. Soit $\mathfrak{f}$ l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de U_K. D'après V, § 4, 3.5, $\mathfrak{f}$ induit un épimorphisme $\mathfrak{f}_m: U_K^m/U_K^{m+1} \to U_K^n/U_K^{n+1}$ tel que $(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{f}_m)_{\mathrm{red}} = 0$ dans les cas a) et b); si $n = pe_1$, $(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{f}_m)_{\mathrm{red}}$ est de marque multiplicative $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k$, mais ne lui est pas isomorphe dans le cas c) (V, § 4, 3.6).

Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} U_K^m/U_K^{m+1} & \xleftarrow{\alpha} & U_K^m/U_K^{n+1} & \xrightarrow{\beta} & U_K/U_K^{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{f}_m} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{f}'} \\ U_K^n/U_K^{n+1} & & \xrightarrow{\mathrm{j}_n} & & U_K/U_K^{n+1}, \end{array}$$

où $\mathfrak{f}'$ est induit par $\mathfrak{f}$, et où α et β sont les morphismes évidents. Posant $H(\mathfrak{X}) = Ac_k^1(\mathfrak{X}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$ pour tout $\mathfrak{X} \in Ac_k$, on en déduit le diagramme

$$\begin{tikzcd} H(U_K^m/U_K^{m+1}) \arrow[r, "H(\alpha)"] & H(U_K^m/U_K^{n+1}) & H(U_K/U_K^{n+1}) \arrow[l, "H(\beta)"'] \\ H(U_K^n/U_K^{n+1}) \arrow[u, "H(\mathfrak{f}_m)"] & & H(U_K/U_K^{n+1}). \arrow[ll, "\mathfrak{i}_n^*"] \arrow[u, "H(\mathfrak{f}')"'] \end{tikzcd}$$

Comme la multiplication par p annule $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on a $H(\mathfrak{f}') = 0$. Comme $H(\alpha)$ est injectif (car $Ac_k(U_K^{m+1}/U_K^{n+1}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k) = 0$), on a $H(\mathfrak{f}_m)\mathfrak{i}_n^* = 0$. Or $\operatorname{Ker} H(\mathfrak{f}_m)$ est l'image de $Ac_k(\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{f}_m, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k) \simeq Ac_k((\mathfrak{Ker}\, \mathfrak{f}_m)_{\text{red}}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$; d'où le lemme d'après ce qui précède.

5.8 ***Lemme***: *Si G est un sous-groupe de $Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$, considérons les assertions suivantes*:

(i) $G = Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$.

(ii) *Pour tout $n < pe/(p-1)$ tel que $(n,p) = 1$, l'image de G dans $Ac_k^1(U_K^n, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$ contient celle de $Ac_k^1(U_K^n/U_K^{n+1}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$.*

(iii) *L'assertion* (ii) *est satisfaite et, de plus, si $n = pe/(p-1)$, l'intersection des images de G et de $Ac_k^1(U_K^n/U_K^{n+1}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$ dans $Ac_k^1(U_K^n, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$ n'est pas nulle.*

Alors (iii) $\Rightarrow$ (i) *si K contient p racines p-ièmes de 1 et* (ii) $\Rightarrow$ (i) *sinon.*

En effet, si l'on pose $H(\mathfrak{X}) = Ac_k^1(\mathfrak{X}, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k)$, on a le diagramme commutatif et exact

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & H(U_K/U_K^n) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H(U_K/U_K^n) \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & H(U_K/U_K^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{i}_n^*"'] & H(U_K) \arrow[r] \arrow[d] & H(U_K^{n+1}) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & H(U_K^n/U_K^{n+1}) \arrow[r] & H(U_K^n) \arrow[r] & H(U_K^{n+1}). \end{tikzcd}$$

On en tire que $\operatorname{Im} \mathfrak{i}_n^* = \bar{H} \cap H(U_K^n/U_K^{n+1})$, si $\bar{H}$ désigne l'image de $H(U_K)$ dans $H(U_K^n)$. En outre, comme on a $H(U_K) \simeq \bigcup_n H(U_K/U_K^n)$ d'après V, § 2, 3.9, on peut supposer avoir déjà prouvé que G contient $H(U_K/U_K^n)$ (remarquer que $H(U_K/U_K^1) \simeq H(\mu_k) = 0!$), et montrer que G contient $H(U_K/U_K^{n+1})$; cela revient à montrer que l'image $\bar{G}$ de G dans $H(U_K^n)$ contient celle de $H(U_K^n/U_K^{n+1})$. Cela est clair dans les cas a), b) et c) de 5.7. Lorsque $n < pe/(p-1)$ et $(n, p) = 1$ cela résulte évidemment des hypothèses faites ((ii) ou (iii)). Enfin, si $n = pe/(p-1)$ et si K contient p racines p-ièmes de l'unité, on a $\bar{G} \cap \operatorname{Im} \mathfrak{j}_n^* = \bar{G} \cap H(U_K^n/U_K^{n+1}) \neq 0$ par hypothèse, donc $\bar{G} \supset \operatorname{Im} \mathfrak{j}_n^*$ d'après la dernière assertion de 5.7.

5.9 Revenons à la démonstration de 5.6; gardons les notations ci-dessus et prenons pour G le sous-groupe engendré par les $\mathscr{E}(T, \varphi)$ où T parcourt les extensions cycliques totalement ramifiées d'ordre p. On a un diagramme canonique

$$H(U_K) \xrightarrow{\mathfrak{j}_n^*} H(U_K^n) \xleftarrow{u_n} H(U_K^n/U_K^{n+1}) \xrightarrow{H(\mathfrak{i}_n^K)} H(\alpha_k).$$

Remarquons que $H(\mathfrak{i}_n^K)$ est bijectif puisque $\mathfrak{i}_n^K$ est un épimorphisme de noyau infinitésimal. D'autre part, si l'on revient au diagramme 5.3, où l'on identifie Γ à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et si l'on note $\mathscr{E}_i(T)$ la classe d'extensions définie par la i-ème ligne ($i = 1, 2, 4$) de ce diagramme, on a

$$\mathfrak{j}_t^*(\mathscr{E}_1(T)) = \mathscr{E}_2(T) = u_t H(\mathfrak{i}_t^K)^{-1}(\mathscr{E}_4(T)).$$

On a vu en 5.5 que pour tout n tel que $1 \leqq n < pe/(p-1)$ et $(n, p) = 1$, et pour tout élément $\mathscr{E}$ de $H(\alpha_k)$, on pouvait trouver une extension T/K du type envisagé telle que $t = n$ et que $\mathscr{E}_4(T) = \mathscr{E}$; d'autre part, si K contient p racines p-ièmes de 1, on a vu en 5.4 qu'il existait une extension T/K du type envisagé, avec $t = pe/(p-1)$, et telle que $\mathscr{E}_4(T)$ soit non nulle (donc $\mathscr{E}_2(T)$ non nulle, puisque u_n est injectif). On peut donc appliquer 5.8, ce qui achève la démonstration.

n° 6 Extensions abéliennes de K et extensions de U_K

6.1 ***Lemme:*** *Soient T et S deux extensions galoisiennes finies totalement ramifiées de K telles que $S \subset T$. Le diagramme ci-dessous, où $\mathfrak{n}$ est induit par $\mathfrak{N}_{T/S}$, est commutatif. Ses lignes et ses colonnes sont exactes.*

En effet si $\gamma \in \Pi(T/K)$, on a $N_{T/S}(\gamma(\pi_T)/\pi_T) = \gamma(N_{T/S}(\pi_T))/N_{T/S}(\pi_T)$. L'égalité $\mathfrak{n} \circ \mathfrak{i}_{T/K} = \mathfrak{i}_{S/K} \circ \mathrm{can.}$ résulte donc de ce que $N_{S/T}(\pi_T)$ est une uniformisante de S (confer par exemple 1.5 a)). Les lignes sont exactes (4.2), ainsi que la première colonne; la seconde l'est donc aussi.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
 & \Pi(T/S)_k^{ab} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \Pi(T/S)_k^{ab} \arrow[d, "\mathfrak{i}_{T/K}\circ\text{can.}"] & & \\
1 \arrow[r] & \Pi(T/K)_k^{ab} \arrow[r, "\mathfrak{i}_{T/K}"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \arrow[r, "\mathfrak{n}_{T/K}"] \arrow[d, "\mathfrak{n}"] & U_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Pi(S/K)_k^{ab} \arrow[r, "\mathfrak{i}_{S/K}"] \arrow[d] & U_S/\mathfrak{B}_{S/K} \arrow[r, "\mathfrak{n}_{S/K}"] \arrow[d] & U_K \arrow[r] & 1 \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

6.2 ***Lemme:*** *Soient T et S deux extensions galoisiennes, finies, totalement ramifiées telles que $T \otimes_K K_{\mathrm{nr}} \simeq S \otimes_K K_{\mathrm{nr}} = L$. Identifions $\Pi(T/K)$ et $\Pi(S/K)$ à $\Pi(L/K_{\mathrm{nr}})$ au moyen des isomorphismes canoniques. Alors les extensions*

$$\mathscr{E}_{T/K} \quad 1 \longrightarrow \Pi(L/K_{\mathrm{nr}})_k^{ab} \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} U_T/\mathfrak{B}_{T/K} \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} U_K \longrightarrow 1$$

et

$$\mathscr{E}_{S/K} \quad 1 \longrightarrow \Pi(L/K_{\mathrm{nr}})_k^{ab} \xrightarrow{\mathfrak{i}_{S/K}} U_S/\mathfrak{B}_{S/K} \xrightarrow{\mathfrak{n}_{S/K}} U_K \longrightarrow 1$$

sont équivalentes.

En effet, les extensions $\mathscr{E}_{T/K} \otimes_k \bar{k}$ et $\mathscr{E}_{S/K} \otimes_k \bar{k}$, déduites de $\mathscr{E}_T$ et $\mathscr{E}_S$ par extension des scalaires, s'identifient toutes deux à $\mathscr{E}_{\hat{L}/\hat{K}_{\mathrm{nr}}}$. Leurs classes d'équivalences diffèrent d'un élément de

$$\mathrm{Ker}\,(Ac_k^1(U_K, \Gamma_k) \to Ac_k^1(U_K \otimes_k \bar{k}, \Gamma_k \otimes_k \bar{k})),$$

si $\Gamma = \Pi(L/K_{\mathrm{nr}})^{ab}$. Or d'après III, § 6, 3.5 (*mutatis mutandis*), ce noyau s'identifie à $\tilde{\tilde{H}}^1(k, \mathfrak{Ex}^0(U_K, \Gamma_k))$. Comme $\mathfrak{Ex}^0(U_K, \Gamma_k) = \mathfrak{Gr}(U_K, \Gamma_k) = \mathfrak{e}_k$ parce que U_K est connexe, le noyau en question est donc nul.

6.3 Soient T une extension galoisienne finie, totalement ramifiée de K et X un groupe commutatif fini. La suite exacte $\mathscr{E}_{T/K}$ induit la suite exacte habituelle des groupes d'extensions

$$(*) \qquad 0 \to Ac_k(\Pi(T/K)_k^{ab}, X_k) \xrightarrow{\partial_T} Ac_k^1(U_K, X_k) \to Ac_k^1(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}, X_k).$$

Désormais nous identifions $Gr(\Pi(T/K), X)$ d'abord à $Ac_k(\Pi(T/K)_k^{ab}, X_k)$ au moyen de l'isomorphisme évident, puis à un sous-groupe de $Ac_k^1(U_K, X_k)$ au moyen de ∂_T. Autrement dit, un homomorphisme $f\colon \Pi(T/K) \to X$ sera identifié à la classe de l'extension $\mathscr{E}_{T/K}f'$, $f'\colon \Pi(T/K)^{ab} \to X$ étant l'homomorphisme déduit de f par passage au quotient. Le lemme 6.1 montre alors que $Gr(\Pi(S/K), X)$ est identifié à un sous-groupe de $Gr(\Pi(T/K), X)$ lorsque $S \subset T$, et que l'inclusion s'identifie à l'application canonique $Gr(\Pi(S/K), X) \to Gr(\Pi(T/K), X)$.

Théorème d'existence: *Soient X un groupe commutatif fini et T_∞ une extension abélienne totalement ramifiée maximale du corps K. On a alors*

$$Ac_k^1(U_K, X_k) = \bigcup Gr(\Pi(T/K), X),$$

où T parcourt les sous-extensions finies de T_∞.

Le théorème d'existence signifie que, pour toute extension de k-groupes affines commutatifs

$$1 \to X_k \xrightarrow{\mathfrak{u}} \mathfrak{E} \xrightarrow{\mathfrak{v}} U_K \to 1$$

il y a une sous-extension finie T de T_∞ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi(T/K)_k & \xrightarrow{i_{T/K}} & U_T/\mathfrak{B}_{T/K} & \xrightarrow{n_{T/K}} & U_K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_k} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \Vert & & \\ 1 & \longrightarrow & X_k & \xrightarrow{\mathfrak{u}} & \mathfrak{E} & \xrightarrow{\mathfrak{v}} & U_K & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Pour démontrer notre théorème, nous pouvons évidemment supposer que $X = \mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z}$, q premier. Pour toute extension finie totalement ramifiée T/K, notons alors

$$\nu_{T/K}\colon Ac_k^1(U_K, X_k) \to Ac_k^1(U_T, X_k)$$

l'homomorphisme $Ac_k^1(\mathfrak{N}_{T/K}, X_k)$. Si T/K est galoisienne, les suites exactes $(*)$ et

$$0 = Ac_k(\mathfrak{B}_{T/K}, X_k) \to Ac_k^1(U_T/\mathfrak{B}_{T/K}, X_k) \to Ac_k^1(U_T, X_k)$$

entraînent que $\operatorname{Ker} \nu_{T/K} = Gr(\Pi(T/K), X)$. Il s'agit donc de prouver que, pour tout $x \in Ac_k^1(U_K, X_k)$, *il existe une sous-extension finie T de T_∞ telle que $\nu_{T/K}(x) = 0$.*

Montrons d'abord que, pour tout $x \in Ac_k^1(U_K, X_k)$, on peut trouver une extension séparable finie totalement ramifiée T' de K telle que $\nu_{T'/K}(x) = 0$. Raisonnons par récurrence sur n: l'assertion est triviale pour $n = 0$; lorsque $n = 1$, elle résulte de 5.2 pour $q \neq p$, de 5.6 pour $q = p$; supposons $n \geqq 1$.

Comme $Ac_k(U_K, Y_k) = 0$ pour tout groupe commutatif fini Y, le foncteur $Y \mapsto Ac_k^1(U_K, Y_k)$ est exact à gauche en Y, et on a une suite exacte

$$0 \to Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k) \to Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k) \xrightarrow{q} Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k).$$

Si $x \in Ac_k^1(U_K, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k)$, on a $q(q^{n-1}x) = 0$ et $q^{n-1}x$ provient donc d'une extension de U_K par $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})_k$; en vertu de ce qui précède, il existe une extension séparable finie totalement ramifiée T_1 de K telle que $\nu_{T_1/K}(q^{n-1}x) = 0$. L'élément $\nu_{T_1/K}(x)$ de $Ac_k^1(U_{T_1}, (\mathbf{Z}/q^n\mathbf{Z})_k)$ est donc annulé par q^{n-1}, donc provient d'une extension de U_{T_1} par $(\mathbf{Z}/q^{n-1}\mathbf{Z})_k$ en vertu d'une suite exacte analogue à la précédente. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une extension séparable finie totalement ramifiée T' de T_1 telle que

$$\nu_{T'/K}(x) = \nu_{T'/T_1}(\nu_{T_1/T}(x)) = 0.$$

Il nous suffit donc de démontrer le lemme suivant:

6.4 ***Lemme***: *Pour toute extension séparable finie totalement ramifiée T'/K, il existe une sous-extension finie T de T_∞ telle que*

$$\operatorname{Ker}(\nu_{T'/K}) \subset \operatorname{Ker}(\nu_{T/K}).$$

On peut agrandir T', donc supposer que $T'_{nr} = T' \otimes_K K_{nr}$ est une extension galoisienne de K (si S' est une extension galoisienne finie contenant T', remplacer T' par une sous-extension totalement ramifiée maximale de $S'K_{nr}$ (2.1 et 2.2)). Posons $\Pi_1 = \Pi(T'_{nr}/K)$ et $\Pi_2 = \Pi(T'_{nr}/K_{nr})$, et soit L le corps des invariants de $\overline{(\Pi_1, \Pi_2)}$. Soit T_1 une sous-extension totalement ramifiée maximale de L; on a $T_1 \otimes_K K_{nr} \cong L$; comme $\Pi(L/K_{nr}) = \Pi_2/\overline{(\Pi_1, \Pi_2)}$ est central dans $\Pi(L/K) = \Pi_1/\overline{(\Pi_1, \Pi_2)}$, l'extension T_1/K est abélienne (2.3); il existe donc $T \subset T_\infty$ telle que $T_{nr} \cong T_{1nr} \cong L$ (d'après 2.3 on a $\Pi(K_{ab}/K) = \Pi(K_{ab}/K_{abnr}) \times \Pi(K_{ab}/T_\infty)$; si l'on pose

$$\Gamma = \Pi(K_{ab}/K_{abnr}) \cap \Pi(K_{ab}/T_1),$$

on choisira T de telle manière que $\Pi(K_{ab}/T) = \Gamma \times \Pi(K_{ab}/T_\infty)$). Montrons que T répond à la question:

Appliquant 2.1 à l'extension T'_{nr}/T_{nr}, on voit qu'il existe une extension totalement ramifiée $T'' \supset T$ telle que $T''_{nr} = T'_{nr}$. Si $x \in Ac_k^1(U_K, X_k)$, on a les équivalences (*confer* la démonstration de 6.2):

$$(x \in \operatorname{Ker} \nu_{T'/K}) \Leftrightarrow (x \otimes_k \bar{k} \in \operatorname{Ker} \nu_{\hat{T}'_{nr}/\hat{K}_{nr}}) \Leftrightarrow (x \in \operatorname{Ker} \nu_{T''/K});$$

on peut donc supposer $T'' = T'$, i.e. $T' \supset T$. Soient $\mathfrak{V}_{T'/K}$ la composante neutre de $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{N}_{T'/K})$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{Ker}(U_{T'}/\mathfrak{V}_{T'/K} \to U_K)$; la suite

$$1 \to \mathfrak{C} \to U_{T'}/\mathfrak{V}_{T'/K} \to U_K \to 1$$

donne par extension des scalaires à $\bar{k}$ la suite exacte $\mathscr{E}_{\hat{T}'_{\mathrm{nr}}/\hat{K}_{\mathrm{nr}}}$. On a donc $\mathfrak{C} \otimes_k \bar{k} \simeq \Pi(T'_{\mathrm{nr}}/K_{\mathrm{nr}})^{ab}_{\bar{k}} = \Pi^{ab}_{2\bar{k}}$; il en résulte que $\mathfrak{C}$ est étale et que $\mathfrak{C}(\bar{k}) \simeq \Pi_2^{ab}$. On vérifie aussitôt que $\Pi(\bar{k}/k) = \Pi(K_{\mathrm{nr}}/K) = \Pi_1/\Pi_2$ y opère par automorphismes intérieurs. Il en résulte que le plus grand quotient constant de $\mathfrak{C}$ s'identifie à $(\Pi_2/(\Pi_1, \Pi_2))_k = \Pi(T/K)_k$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & Ac_k(\mathfrak{C}, X_k) & \longrightarrow & Ac^1_k(U_K, X_k) & \xrightarrow{\nu_{T'/K}} & Ac_k(U_{T'}, X_k) \\
& \uparrow f & & \| & & \uparrow \nu_{T'/T} \\
0 \longrightarrow & Ac_k(\Pi(T/K)_k, X_k) & \longrightarrow & Ac^1_k(U_K, X_k) & \xrightarrow{\nu_{T/K}} & Ac^1_k(U_T, X_k),
\end{array}$$

f est un isomorphisme, ce qui entraîne $\mathrm{Ker}\,\nu_{T/K} = \mathrm{Ker}\,\nu_{T'/K}$.

n° 7 Groupes de Galois des extensions abéliennes d'un corps local

7.1 Soit T une extension galoisienne, finie, totalement ramifiée de K. La suite exacte

$$1 \longrightarrow \Pi(T/K)^{ab}_k \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} U_T/\mathfrak{V}_{T/K} \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} U_K \longrightarrow 1$$

de 4.2 induit une suite exacte des groupes d'homotopie (V, § 3, 4.1)

$$\pi_1(U_T/\mathfrak{V}_{T/K}) \xrightarrow{\pi_1(\mathfrak{n}_{T/K})} \pi_1(U_K) \xrightarrow{\partial} \Pi(T/K)^{ab}_k \longrightarrow 1$$

(remarquer que $\pi_0(U_T/\mathfrak{V}_{T/K}) = 1$ et $\pi_0(\Pi(T/K)^{ab}_k) = \Pi(T/K)^{ab}_k$).
De même, comme on a $\pi_0(\mathfrak{V}_{T/K}) = 0$ par construction, la suite exacte canonique $1 \to \mathfrak{V}_{T/K} \to U_T \to U_T/\mathfrak{V}_{T/K} \to 1$ induit une surjection $\pi_1(U_T) \to \pi_1(U_T/\mathfrak{V}_{T/K}) \to e$. Composant cette surjection avec $\pi_1(\mathfrak{n}_{T/K})$, on obtient la suite exacte

$$\pi_1(U_T) \xrightarrow{\pi_1(\mathfrak{N}_{T/K})} \pi_1(U_K) \xrightarrow{\partial} \Pi(T/K)^{ab}_k \longrightarrow 1.$$

Rappelons maintenant quelques notations de V, § 3, n° 4: pour tout k-groupe affine commutatif $\mathfrak{U}$, soit $\Gamma(\mathfrak{U})$ le plus grand quotient *proconstant de* $\mathfrak{U}$, et posons $\gamma(\mathfrak{U}) = \Gamma(\pi_1(\mathfrak{U}))(k)$. Remplaçant dans la suite exacte précédente chaque groupe $\mathfrak{G}$ par $\Gamma(\mathfrak{G})(k)$, on aboutit à la *suite exacte de Serre*

$$\gamma(U_T) \xrightarrow{\gamma(\mathfrak{N}_{T/K})} \gamma(U_K) \xrightarrow{v_{T/K}} \Pi(T/K)^{ab} \longrightarrow 1.$$

On dira que la surjection $v_{T/K}$, qui est déduite de l'application-bord ∂, est *l'homomorphisme de Serre relatif à* T/K.

7.2 Soit S une sous-extension galoisienne de T. Reprenant les constructions de 7.1, on voit que le diagramme de 6.1 induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\gamma(U_T) & \xrightarrow{\gamma(\mathfrak{R}_{T/K})} & \gamma(U_K) & \xrightarrow{v_{T/K}} & \Pi(T/K)^{ab} & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma(\mathfrak{R}_{T/S})} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \text{can.}} & & \\
\gamma(U_S) & \xrightarrow{\gamma(\mathfrak{R}_{S/K})} & \gamma(U_K) & \xrightarrow{v_{S/K}} & \Pi(S/K)^{ab} & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Ceci nous amène à considérer plus généralement une *extension galoisienne, totalement ramifiée, non nécessairement finie N de K.* Par passage à la limite projective les homomorphismes de Serre $v_{T/K}$, relatifs aux sous-extensions finies T/K de N/K, induisent l'homomorphisme de Serre $v_{N/K} = \varprojlim v_{T/K}$ relatif à N/K:

$$v_{N/K}: \gamma(U_K) \to \Pi(N/K)^{ab} \simeq \varprojlim_{T \subset N} \Pi(T/K)^{ab}.$$

Comme $\gamma(U_K)$ est compact et que les $v_{T/K}$ sont continus et surjectifs, $v_{N/K}$ est *continu et surjectif.* Son noyau est la limite projective des Ker $v_{T/K}$, i.e.

$$\operatorname{Ker} v_{N/K} = \bigcap_{T \subset N} \operatorname{Im} \gamma(\mathfrak{N}_{T/K}).$$

7.3 ***Théorème sur les groupes de Galois:*** *Soit T_∞ une extension abélienne totalement ramifiée maximale du corps local K. Alors l'homomorphisme de Serre*

$$v_{T_\infty/K} : \gamma(U_K) \to \Pi(T_\infty/K)$$

est un isomorphisme.

En effet, si X est un groupe commutatif fini et G un groupe topologique, notons Hom (G, X) le groupe des homomorphismes continus de G dans X, muni de la topologie discrète. Il suffit de montrer que, pour tout X et tout $f \in \operatorname{Hom}(\gamma(U_K), X)$, il y a un $T \subset T_\infty$ et un $g: \Pi(T/K) \to X$ tels que $[T: K] < \infty$ et $f = g v_{T/K}$; cela signifie que

$$\varinjlim_{T \subset T_\infty} \operatorname{Hom}(v_{T/K}, X): \varinjlim \operatorname{Hom}(\Pi(T/K), X) \to \operatorname{Hom}(\gamma(U_K), X)$$

est bijectif. Or, si U_K^c est l'extension proconstante universelle de U_K (V, § 3, 4.2), la suite exacte canonique

$$1 \to \gamma(U_K)_k \xrightarrow{\mathfrak{x}} U_K^c \xrightarrow{\mathfrak{y}} U_K \to 1$$

induit des isomorphismes

$$\partial(X): \operatorname{Hom}(\gamma(U_K), X) \simeq Ac_k(\gamma(U_K)_k, X_k) \simeq Ac_k^1(U_K, X_k).$$

D'après 6.3, il reste donc à voir que, pour tout T, le composé

$$\partial(X) \circ \mathrm{Hom}(v_{T/K}, X) \colon \mathrm{Hom}(\Pi(T/K, X) \to Ac_k^1(U_K, X_k)$$

coïncide avec l'injection de 6.3 qui nous a permis d'identifier $\mathrm{Hom}(\Pi(T/K), X)$ à un sous-groupe de $Ac_k^1(U_K, X_k)$: pour cela, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \gamma(U_K)_k & \xrightarrow{\mathfrak{x}} & U_K^c & \xrightarrow{\mathfrak{y}} & U_K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (v_{T/K})_k} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{z}} & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \Pi(T/K)_k & \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} & U_T/\mathfrak{V}_{T/K} & \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} & U_K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_K} & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & X_k & \xrightarrow{\mathfrak{u}} & \mathfrak{E} & \xrightarrow{\mathfrak{v}} & U_K & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

où $\mathfrak{z}$ est l'unique homomorphisme tel que $\mathfrak{n}_{T/K}\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$. L'injection de 6.3 et $\partial(X)$ associent respectivement à f et à $f \circ v_{T/K}$ la classe d'équivalence de la dernière ligne!

7.4 Nous pouvons donc appliquer les résultats de V, § 3 et § 4 pour déterminer la structure de $\gamma(U_K) \simeq \Pi(T_\infty/K)$. En particulier, *lorsque k est fini et a p^r éléments*, on sait que $\gamma(U_K) \simeq U_K(k) = U_K$:

De façon plus précise, soit T une extension galoisienne, finie, totalement ramifiée de K et considérons le diagramme (III, § 5, 7.3)

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \Pi(T/K)_k^{ab} & \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} & U_T/\mathfrak{V}_{T/K} & \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} & U_K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{a} = \mathfrak{F}^r - \mathrm{Id} = 0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{b} = \mathfrak{F}^r - \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{c} = \mathfrak{F}^r - \mathrm{Id}} & & \\
1 & \longrightarrow & \Pi(T/K)_k^{ab} & \xrightarrow{\mathfrak{i}_{T/K}} & U_T/\mathfrak{V}_{T/K} & \xrightarrow{\mathfrak{n}_{T/K}} & U_K & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

On a $\mathfrak{Ker}\,\mathfrak{b} \simeq (U_T/\mathfrak{V}_{T/K}(k))_k$, $\mathfrak{Ker}\,\mathfrak{c} = (U_K)_k$, $\mathfrak{Coker}\,\mathfrak{a} = \Pi(T/K)_k^{ab}$ et $\mathfrak{Coker}\,\mathfrak{b} = 0$ (III, § 5, 7.2). Le lemme du serpent (*Alg. comm.* I, § 1, prop. 2) fournit une suite exacte

$$(U_T/\mathfrak{V}_{T/K}(k))_k \xrightarrow{n_{T/K}} (U_K)_k \xrightarrow{\tau} \Pi(T/K)_k^{ab} \longrightarrow 1,$$

d'où une suite exacte

$$U_T \xrightarrow{N_{T/K}} U_K \xrightarrow{\tau_{T/K}} \Pi(T/K)^{ab} \longrightarrow 1,$$

si l'on pose $\tau_{T/K} = \tau(k)$.

Lemme: *L'homomorphisme $\tau_{T/K}$ coïncide avec l'homomorphisme de Serre $v_{T/K}$.*

En effet, l'extension proconstante universelle de U_K s'identifie à la suite exacte

$$1 \longrightarrow (U_K)_k \longrightarrow U_K \xrightarrow{\mathfrak{F}^r - \mathrm{Id}} U_K \longrightarrow 1.$$

Or le diagramme (*) montre que l'homomorphisme $\mathfrak{z}$ de 7.3 est l'unique homomorphisme factorisant $\mathfrak{b}$ à travers $\mathfrak{n}_{T/K}$ ($\mathfrak{b} = \mathfrak{z}\mathfrak{n}_{T/K}$). Le morphisme $(v_{T/K})_k$: $\mathfrak{Ker}\ \mathfrak{c} \to \mathfrak{Ker}\ \mathfrak{n}_{T/K}$ coïncide manifestement avec τ.

Lorsque T parcourt les sous-extensions finies d'une extension abélienne totalement ramifiée maximale T_∞, $\mathrm{Ker}\, v_{T/K}$ parcourt les sous-groupes ouverts de $\gamma(U_K) \simeq U_K$ d'après 7.3. Nous avons donc prouvé:

Théorème du corps de classes local: *Soient K un corps local de corps résiduel fini et T_∞ une extension abélienne totalement ramifiée maximale de K. L'application $T \mapsto N_{T/K}(U_T)$ met en correspondance bijective les sous-extensions finies de T_∞ et les sous-groupes ouverts de U_K.*

7.5 ***Remarque***: Soient K_{ab} une clôture abélienne de K et K_{abnr} la plus grande sous-extension non ramifiée de K. Si T_∞ est une sous-extension totalement ramifiée maximale de K_{ab}, on déduit de 2.5 et 7.3 des isomorphismes

$$\gamma(U_K) \simeq \Pi(T_\infty/K) \simeq \Pi(K_{\mathrm{ab}}/K_{\mathrm{abnr}}).$$

L'isomorphisme v: $\gamma(U_K) \to \Pi(K_{\mathrm{ab}}/K_{\mathrm{abnr}})$ obtenu est indépendant du choix de T_∞, comme il résulte aussitôt de 6.2.

7.6 ***Remarque***: Pour quelques compléments, en particulier pour l'étude de l'application de réciprocité et des extensions abéliennes non nécessairement totalement ramifiées, nous renvoyons le lecteur à M. Hazewinkel, Abelian extensions of local fields, thèse, 18 juin 1969, Amsterdam.