ECONOMETRIC INSTITUTE

A TWISTED DUALITY THEOREM FOR LIE ALGEBRA COHOMOLOGY

M. HAZEWINKEL

REPRINT SERIES no. 187

This article appeared in "Mat. Sbornik", 83 (125), 1970

ERASMUS UNIVERSITY ROTTERDAM,
P.O. BOX 1738, ROTTERDAM, THE NETHERLANDS

УДК 519.48+513.836

Теорема двойственности для когомологии алгебр Ли*

Михил Хазевинкель (Амстердам)

Пусть k — коммутативное кольцо с единицей. Мы будем рассматривать только свободные алгебры Ли $\mathfrak{h}$ с конечным числом образующих над k. Пусть M — модуль над $\mathfrak{h}$, $M^* = \mathrm{Hom}(M, k)$ — k-линейно двойственный модуль. Действие $\mathfrak{h}$ на M описывается условием $(fu, m) + (f, mu) = 0$, где $u \in \mathfrak{h}$, $m \in M$, $f \in M^*$ ((f, m)—каноническое спаривание $M^* \times M \to k$, т. е. $(f, m) = f(m)$).

Для всякого $u \in \mathfrak{h}$ положим $c_u = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u)$. Пусть M — модуль над $\mathfrak{h}$ с соответствующим представлением $u \mapsto \rho(u)$, тогда $u \mapsto \rho(u) - c_u \cdot 1_M$ определяет новое представление алгебры $\mathfrak{h}$ (потому что $c_{[u,v]} = 0$ для всех $u, v \in \mathfrak{h}$ и $c_u \cdot 1_M$ коммутирует с $\rho(v)$ для всех $u, v \in \mathfrak{h}$). Обозначим через M^{tw} модуль этого нового представления; как k-модуль он совпадает с M. Мы докажем следующую теорему двойственности.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{h}$ — n-мерная алгебра Ли над полем k. Тогда существуют канонические изоморфизмы*

$$H^s(\mathfrak{h}, (M^{tw})^*) \simeq (H^{n-s}(\mathfrak{h}, M))^*, \tag{1}$$

*где * обозначает линейно двойственные модули и M^{tw} — модуль скрученного представления $u \mapsto \rho(u) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u) \cdot 1_M$ (где $u \mapsto \rho(u)$ — представление, соответствующее модулю M). Если $\mathfrak{h}$ — нильпотентна или если $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$, то $M^{tw} = M$ (но в общем случае $(M^{tw})^* \neq (M^*)^{tw}$).*

Для доказательства теоремы 1 мы построим изоморфизм между комплексом $C(\mathfrak{h}; (M^{tw})^*)$ коцепей со значениями в $(M^{tw})^*$ и линейно двойственным комплексом $C(\mathfrak{h}; M)^*$; s-мерная коцепь алебры $\mathfrak{h}$ со значениями в $(M^{tw})^*$ — это k-линейная функция $\overset{s}{\wedge} \mathfrak{h} \to (M^{tw})^*$. Выбрав базис $u_1, \ldots, u_n$ в $\mathfrak{h}$, отождествим модуль этих коцепей с $\sum\limits_{i_1 < \ldots < i_s} ((M^{tw})^*_{i_1 \ldots i_s}) \simeq \Big(\sum\limits_{i_1 < \ldots < i_s} M^{tw}_{i_1 \ldots i_s}\Big)^*$.

Элемент этого модуля — функция f с компонентами $f_{i_1 \ldots i_s}$, $i_1 < \ldots < i_s$. Если $m = (m_{i_1 \ldots i_s}) \in \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_s} M^{tw}_{i_1 \ldots i_s}$, то $f(m) = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_s} (f_{i_1 \ldots i_s}, m_{i_1 \ldots i_s})$. Нам будет удобно доопределить $f_{j_1 \ldots j_s} = \mathrm{sign}(\sigma) f_{i_1 \ldots i_s}$ для всех перестановок σ, $\sigma(j_t) = i_t$, $t = 1, 2, \ldots, s$, и полагать $f_{j_1 \ldots j_s} = 0$ каждый раз, когда два из индексов $j_1, \ldots, j_s$ равны. Кроме того, положим $f_{i_1 \ldots i_{s-1}[i_s i_{s+1}]} = \sum\limits_{t=1}^{n} \gamma^t_{i_s i_{s+1}} f_{i_1 \ldots i_{s-1} t}$,

* Исследование выполнено при финансовой помощи Z. W. O. (Организация Нидерландов для поддержки научных исследований.)

где $[u_{i_s}, u_{i_{s+1}}] = \sum_{t=1}^{n} \gamma^t_{i_s i_{s+1}} u_t$ (т. е. γ^k_{ij} — структурные константы алгебры $\mathfrak{h}$). Аналогично определяются $m_{j_1 \ldots j_s}$ и т. д. В этих обозначениях комплекс коцепей со значениями в $(M^{tw})^*$ имеет вид:

$$\ldots \to \Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_s} M_{i_1 \ldots i_s}\Big)^* \xrightarrow{\delta^1_s} \Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_{s+1}} M_{i_1 \ldots i_{s+1}}\Big)^* \to \ldots, \tag{2}$$

где

$$(f\delta^1_s)((m_{i_1 \ldots i_{s+1}})) = \sum_{i_1 < \ldots < i_{s+1}} \sum_{q=1}^{s+1} (-1)^{s+1+q} (f_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{s+1}}(u_{i_q} - c_{i_q}), m_{i_1 \ldots i_{s+1}}) +$$

$$+ \sum_{i_1 < \ldots < i_{s+1}} \sum_{q<r} (-1)^{q+r} (f_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots \hat{i}_r \ldots i_{s+1} [i_q i_r]}, m_{i_1 \ldots i_{s+1}}), \tag{3}$$

где $c_{i_q} = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} u_{i_q})$ и мы опустили ^{tw} в обозначении M^{tw}, потому что это скручивание влияет только на формулу для $f\delta^1_s$. Аналогично мы отождествляем $\operatorname{Hom}_k(\bigwedge^{n-s} \mathfrak{h}, M)$ и $\sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} M_{i_1 \ldots i_{n-s}}$ (употребляя тот же базис $u_1, \ldots, u_n$ $\mathfrak{h}$). Перейдя к линейно двойственному комплексу, получим

$$\ldots \to \Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} M_{i_1 \ldots i_{n-s}}\Big)^* \xrightarrow{\delta^*_{n-s}} \Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s-1}} M_{i_1 \ldots i_{n-s-1}}\Big)^* \to \ldots, \tag{4}$$

где формула для δ^*_{n-s} имеет вид

$$(f\delta^*_{n-s})(m) = \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} (f_{i_1 \ldots i_{n-s}}, \sum_{q=1}^{n-s} (-1)^{n-s+q} m_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{n-s}} u_{i_q}) +$$

$$+ \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} (f_{i_1 \ldots i_{n-s}}, \sum_{q<r} (-1)^{q+r} m_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots \hat{i}_r \ldots i_{n-s} [i_q i_r]}) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV},$$

где

$$\mathrm{I} = \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} \sum_{q=1}^{n-s} (f_{i_1 \ldots i_{n-s}}, m_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{n-s}} u_{i_q}) (-1)^{n-s+q}, \tag{5}$$

$$\mathrm{II} = \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} \sum_{q<r} (f_{i_1 \ldots i_{n-s}}, m_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots \hat{i}_r \ldots i_{n-s} i_q}) (-1)^{r+q} \gamma^{i_q}_{i_q i_r}, \tag{6}$$

$$\mathrm{III} = \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} \sum_{q<r} (f_{i_1 \ldots i_{n-s}}, m_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots \hat{i}_r \ldots i_{n-s} i_r}) (-1)^{r+q} \gamma^{i_r}_{i_q i_r} \tag{7}$$

$$\mathrm{IV} = \sum_{i_1 < \ldots < i_{n-s}} \sum_{q<r} \sum_{t \neq i_1, \ldots, i_{n-s}} (f_{i_1 \ldots i_{n-s}}, m_{i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots \hat{i}_r \ldots i_{n-s} t}) (-1)^{r+q} \gamma^t_{i_q i_r}. \tag{8}$$

Пусть $\left(\sum_{i_1<\ldots<i_{n-s}} M_{i_1\ldots i_{n-s}}\right)^* \xrightarrow{\tau} \left(\sum_{j_1<\ldots<j_s} M_{j_1\ldots j_s}\right)^*$ — изоморфизм,

$$(\tau f)((m_{j_1\ldots j_s})) = \sum_{i_1<\ldots<i_{n-s}} (f_{i_1\ldots i_{n-s}}, m_{j_1\ldots j_s}) \operatorname{sign}(i_1 \ldots i_{n-s} j_1 \ldots j_s),$$

где $f = (f_{i_1\ldots i_{n-s}})$ и $(j_1, \ldots j_s)$ — дополнение к $(i_1, \ldots, i_{n-s})$ в $(1, 2, \ldots, n)$. Положим $\delta_s^2 = \tau\delta_{n-s}^* \tau^{-1}$. Получим новый комплекс

$$\ldots \to \left(\sum_{j_1<\ldots<j_s} M_{j_1\ldots j_s}\right)^* \xrightarrow{\delta_s^2} \left(\sum_{j_1<\ldots<j_{s+1}} M_{j_1\ldots j_{s+1}}\right)^* \to \ldots \tag{9}$$

(Заметим, что модули в комплексах (2) и (9) те же самые.) Группы когомологий комплекса (9), конечно, изоморфны с группами когомологий комплекса (4) при замене индексов: $s \mapsto n-s$.

Имеет место

Предложение 1. $\delta_s^2 = (-1)^{s+1}\delta_s^1$.

Доказательство. Вычислим $(\delta_s^2 f)(m)$, где $f = (f_{j_1\ldots j_s})$, $m = (m_{i_1\ldots i_{s+1}})$. Первый член I дает (см. (5))

$$\sum_{j_1<\ldots<j_s} \sum_{t\neq j_1,\ldots j_s} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t} u_t)(-1)^{n-s+q}(-1)^{s-l} \operatorname{sign}(i_1 \ldots i_{n-s} j_1 \ldots j_s) \times$$
$$\times \operatorname{sign}(i_1 \ldots \hat{i}_q \ldots i_{n-s} j_1 \ldots j_l t j_{l+1} \ldots j_s) =$$
$$= \sum_{j_1<\ldots<j_s, t\neq j_1,\ldots,j_s} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t} u_t)(-1)^s = \mathrm{I}' \tag{10}$$

$j j_1, \ldots, j_s$ — дополнение к $i_1, \ldots, i_{n-s}$, $t = i_q$ и l — такое число, что $(_l < t < j_{l+1})$; второй член II (см. (6)) дает

$$\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s, i_q<t\\ t, i_q\neq j_1,\ldots,j_s}} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t}) \gamma_{i_q t}^{i_q}(-1)^{r+q}(-1)^{s-l}(-1)^{n-s-q-1} \operatorname{sign}(i_1 \ldots i_{n-s} j_1 \ldots j_s) \times$$
$$\times \operatorname{sign}(i_1 \ldots \hat{i}_r \ldots i_{n-s} j_1 \ldots j_l t j_{l+1} \ldots j_s) =$$
$$= \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s\\ t\neq j_1,\ldots,j_s}} \sum_{\substack{i_q<t\\ i_q\neq j_1,\ldots,j_s}} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t}) \gamma_{i_q t}^{i_q}(-1)^{s-1} = \mathrm{II}' \tag{11}$$

$(j_1, \ldots, j_s$ — дополнение к $i_1, \ldots, i_{n-s}$, $t = i_r$ и l — такое число, что $j_l < t < j_{l+1})$.

Аналогично находим, что третий член III (см. (7)) дает

$$\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s\\ t\neq j_1,\ldots,j_s}} \sum_{\substack{i_r>t\\ i_r\neq j_1,\ldots,j_s}} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t}) \gamma_{t i_r}^{i_r}(-1)^s = \mathrm{III}'. \tag{12}$$

Для вычисления вклада члена IV (см. (8)) разобьем этот член на три части: $i_q < i_r < t$, $i_q < t < i_r$, $t < i_q < i_r$. Для первой находим, что

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{s-1}} \sum_{\substack{a,b,x\neq j_1,\ldots,j_{s-1}\\ a<b<x}} [(f_{j_1\ldots j_{s-1}x}, m_{j_1\ldots j_{s-1}ab})(-1)^{q+r}(-1)^{s-1-l}(-1)^{s-1-z}\times$$

$$\times(-1)^{n-s-w}\chi\gamma^x_{ab}\,\mathrm{sign}\,(i_1\ldots i_{n-s}j_1\ldots j_l x j_{l+1}\ldots j_{s-1})\times$$

$$\times\,\mathrm{sign}\,(i_1\ldots \hat{i}_q\ldots \hat{i}_r\ldots i_w t i_{w+1}\ldots i_{n-s}j_1\ldots j_z a j_{z+1}\ldots j_y b j_{y+1}\ldots j_{s-1})] =$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_{s-1}} \sum_{\substack{a,b,x\neq j_1,\ldots,j_{s-1}\\ a,b\neq x,a<b}} (f_{j_1\ldots j_{s-1}x}, m_{j_1\ldots j_{s-1}ab})\,\gamma^x_{ab}(-1)^s,$$

где $j_1, \ldots, j_{s-1}$ — дополнение к $i_1, \ldots, i_{n-s}, t$, $x=t$, $a=i_q$, $b=i_r$ и w, z, y, l — такие числа, что $i_w<t<i_{w+1}$, $j_z<a<j_{z+1}$, $j_y<b<j_{y+1}$, $j_l<t<j_{l+1}$. (В первой части $q<r\leqslant w$.)

Преобразуя другие две части таким же способом, получим следующую формулу для (IV):

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{s-1}} \sum_{\substack{a,b,x\neq j_1,\ldots,j_{s-1}\\ a,b\neq x,\ a<b}} (f_{j_1\ldots j_{s-1}x}, m_{j_1\ldots j_{s-1}ab})\,\gamma^x_{ab}(-1)^s = \mathrm{IV}'. \qquad (13)$$

С другой стороны, в силу (3) $(\delta^1_s f)(m)$ имеет вид

$$\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q=1}^{s+1}(-1)^{s+1+q}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}}, -m_{i_1\ldots i_{s+1}}u_{i_q}) +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q=1}^{s+1}(-1)^{s+1+q}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}}, m_{i_1\ldots i_{s+1}})\,c_{i_q} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q<r}(-1)^{q+r}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}i_q}, m_{i_1\ldots i_{s+1}})\,\gamma^{i_q}_{i_q i_r} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q<r}(-1)^{q+r}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}i_r}, m_{i_1\ldots i_{s+1}})\,\gamma^{i_r}_{i_q i_r} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q<r} \sum_{t\neq i_1,\ldots,i_{s+1}} (f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}t}, m_{i_1\ldots i_{s+1}})\,\gamma^t_{i_q i_r} =$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q=1}^{s+1}(-1)^{s+1+q}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}}, m_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}i_q}u_{i_q})(-1)^{s+1-q}\cdot(-1) +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q=1}^{s+1}(-1)^{s+1+q}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}}, m_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}i_q})\,c_{i_q}(-1)^{s+1-q} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q<r}(-1)^{q+r}(f_{i_1\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}}, m_{i_1\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}i_r})\,\gamma^{i_q}_{i_q i_r}(-1)^{s+1-q-1}(-1)^{s+1-r} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q<r}(-1)^{q+r}(f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}}, m_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots i_{s+1}i_q})\,\gamma^{i_r}_{i_q i_r}(-1)^{s+1-r}(-1)^{s+1-q} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_{s+1}} \sum_{q<r} \sum_{t\neq i_1,\ldots,i_{s+1}} (f_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}t}, m_{i_1\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_{s+1}i_q i_r})\,\gamma^t_{i_q i_r}\times$$

$$\times(-1)^{r+q}(-1)^{2s+2-q-r-1} = \mathrm{I}'' + \mathrm{V}'' + \mathrm{II}'' + \mathrm{III}'' + \mathrm{IV}'',$$

где

$$\mathrm{I}'' = -\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s \\ t\neq j_1,\ldots,j_s}} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t}u_t),$$

$$\mathrm{II}'' = -\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s \\ t\neq j_1,\ldots,j_s}} \sum_{j_z<t} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t})\, \gamma_{j_z t}^{j_z},$$

$$\mathrm{III}'' = \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s \\ t\neq j_1,\ldots,j_s}} \sum_{j_z>t} (f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t})\, \gamma_{t j_z}^{j_z},$$

$$\mathrm{IV}'' = -\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_{s-1} \\ x\neq j_1,\ldots,j_{s-1}}} \sum_{\substack{a,b\neq j_1,\ldots,j_{s-1} \\ a,b\neq x,\ a<b}} (f_{j_1\ldots j_{s-1}x}, m_{j_1\ldots j_{s-1}ab})\, \gamma_{ab}^{x},$$

$$\mathrm{V}'' = \sum_{\substack{j_1<\ldots<j_s \\ t\neq j_1,\ldots,j_s}} (f_{j_1,\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t})\, c_t.$$

Сравнивая это с формулами для $(\delta_s^2 f)(m)$ видим, что $\mathrm{IV}'' = (-1)^{s+1}\,\mathrm{IV}'$ и $\mathrm{I}'' = (-1)^{s+1}\mathrm{I}'$. Далее, коэффициент при $(f_{j_1\ldots j_s}, m_{j_1\ldots j_s t})$ для любого выбора $j_1 < \ldots < j_s, t\neq j_1, \ldots, j_s$ в $\mathrm{II}'' + \mathrm{III}'' + \mathrm{V}'' + (-1)^s\mathrm{II}' + (-1)^s\mathrm{III}'$ равен

$$c_t - \sum_{j_z<t} \gamma_{j_z t}^{j_z} + \sum_{j_z>t} \gamma_{t j_z}^{j_z} - \sum_{\substack{i_q\neq j_1,\ldots,j_s \\ i_q<t}} \gamma_{i_q t}^{i_q} + \sum_{\substack{i_r\neq j_1,\ldots,j_s \\ i_r>t}} \gamma_{t i_r}^{i_r} =$$

$$= c_t - \sum_{x=1}^{n} \gamma_{xt}^{x} = c_t - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u_t) = 0.$$

Предложение 1 доказано.

Когомологии комплекса (4) $C = C(\mathfrak{h};\ M)^*$ связаны с когомологиями $C(\mathfrak{h};\ M)$ через теорему универсальных коэффициентов. В силу предложения 1, имеет место

Теорема 2. *Пусть k — наследственное кольцо (т. е. каждый идеал в k проективный). Пусть $\mathfrak{h}$ — n-мерная алгебра Ли над k (свободная как k-модуль) и M — конечномерный модуль над $\mathfrak{h}$, проективный как модуль над k. Тогда имеет место каноническая расщепляющаяся точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Ext}(H^{s+1}(\mathfrak{h} M), k) \to H^{n-s}(\mathfrak{h}, (M^{tw})^*) \to (H^s(\mathfrak{h}, M))^* \to 0.$$

Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 2.

Следствие 1. *Существует такая структура $\mathfrak{h}$-модуля на k, что $H^n(\mathfrak{h}, k)\neq 0$;* если *$k$ — поле, структура с таким свойством единственна.*

Пусть $u \mapsto$ (умножение на $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u)) \in \mathrm{Hom}(k, k)$; тогда $H^n(\mathfrak{h}, k) \simeq k$. Исследуя непосредственно комплекс коцепей, можно получить более точную информацию об $H^n(\mathfrak{h}, k)$ для различных структур $\mathfrak{h}$-модуля на k.

Например, если k — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и $u \mapsto c_u$ — такая структура $\mathfrak{h}$-модуля на k, что $c_u - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u) \in \mathfrak{m}$ для всех $u \in \mathfrak{h}$, то $H^n(\mathfrak{h}, k) \neq 0$. Таким образом можно убедиться, что предположение о наследственности k в следствии 1 излишне; для структуры $u \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u)$ всегда $H^n(\mathfrak{h}, k) \simeq k$.

Следствие 2. *Пусть k — поле и $\mathfrak{h}$ — n-мерная алгебра Ли над k; снабдим k тривиальной структурой $\mathfrak{h}$-модуля. Тогда*

$$H^n(\mathfrak{h}, k) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, u) = 0 \text{ для всех } u \in \mathfrak{h}.$$

(Последнее условие, конечно, выполняется, если $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$ или если $\mathfrak{h}$ нильпотентна.)

Следствие 3. *Если k — поле конечной характеристики и $\mathfrak{h}$ — n-мерная алгебра Ли над k, то существует такой (конечномерный) $\mathfrak{h}$-модуль M, что $H^{n-1}(\mathfrak{h}, M) \neq 0$.*

(Потому что существует такой конечномерный $\mathfrak{h}$-модуль, что $H^1(\mathfrak{h}, N) \neq 0$, т. е. существует конечномерное представление, которое не вполне приводимо.) Последний результат подсказывает следующие предположения (см. [2], гл. V, § 3, стр. 102). *Если $\mathfrak{h}$ — n-мерная алгебра Ли над полем конечной характеристики, то для всех $i = 0, 1, \ldots, n$ существует такой конечномерный $\mathfrak{h}$-модуль M, что $H^i(\mathfrak{h}, M) \neq 0$.* Оно теперь доказано для $i = 0, 1, n-1, n$.

(Поступила в редакцию 28/V 1970 г.)

Математический Институт Университета Амстердама.
Голландия
Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР.
Москва

Литература

1. N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, 1962.
2. G. B. Seligman, Modular Lie algebras, Springer-Verlag, 1967.