

Zw

ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

onder leiding van

Prof.dr. B. van Rootselaar

cursus 1966-1967



mei 1967

ZW

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium "Onderwerpen uit de modeltheorie"

Spreker: B. van Rootselaar.

Ruw gezegd zijn de vragen van modeltheorie de vragen naar de samenhang tussen wiskundige systemen en hun beschrijvingen door middel van een formule taal, i.h.b. vormen van de eerste orde predicatenrekening.

De ingrediënten van een dergelijke taal L zijn:

objectsymbolen (indiv.constanten) :	$a, b, c, \dots$
variabelen :	$x, y, \dots$
relatiesymbolen (predicaatletters):	$A(), B(,), \dots$
logische tekens :	$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \equiv.$
quantoren :	$(\dots), (E.)$
en haakjes [,]	

Uitgaande van atomen, welke ontstaan door in predicaatletters objectsymbolen en/of variabelen te substitueren - b.v. $A(a), B(a, x)$ -, bouwt men formules op met de logische tekens en de quantoren (en haakjes). Een variabele, welke in het bereik van een quantor valt heet gebonden, b.v. x in $(x) B(a, x)$; wanneer dat niet zo is heet de variabele vrij (komt de variabele vrij voor). We zijn in het bijzonder geïnteresseerd in zinnen (uitspraken) van L , d.w.z. in formules zonder vrije variabelen.

Naast de taal hebben we wiskundige structuren, d.w.z. verzamelingen M met deelverzamelingen van $M, M^2, M^3, \dots$ (relaties).

Om de uitspraken van L betekenis te geven in een structuur M legt men verband door een 1 - 1 afbeelding van de verzameling M in de verzameling der objectsymbolen van L en van de verzameling der relaties in die van de predicaatletters van L (afb. f).

Een zin X van L heet gedefinieerd in M als de in X voorkomende objectsymbolen en predicaatletters onder f corresponderen met elementen van M en relaties van M (orde trouw, d.w.z. $B(,)$ correspondeert met een relatie $B^1 \subset M^2$, enz.).

Hiermede zijn we er nog niet: we moeten nog afspreken wanneer een zin X van L in M zal gelden. Dit leggen we inductief vast:

1. Is X atoom, dan geldt X in M als fX (op vanzelfsprekende wijze gedefinieerd) in M waar is, is X b.v. $B(a, b)$ en is $fB = B^1 \subset M^2$ en $fa = a^1$ en $fb = b^1$ dan geldt $B(a, b)$ in M als $(a^1, b^1) \in B^1$.
(Let wel $B(a, x)$ wordt niet geïnterpreteerd, want $B(a, x)$ is geen zin).

De geldigheid van ingewikkelder zinnen brengt men terug tot die van eenvoudiger:

2. $\neg X$ als fX niet waar is in M .
3. $X \vee Y$ als fX of fY waar is in M .
4. $X \wedge Y$ als fX en fY waar zijn in M .
5. $(\exists y)X(y)$ als er een object symbool a is zodat $X(a)$ geldt.
6. $(\forall y)X(y)$ als $X(a)$ geldt voor elk objectsymbool a met $fa \in M$.

M heet model van de verzameling zinnen V als M model is van elke $X \in V$, d.w.z. als elke $X \in V$ geldt in M .

Een centrale stelling met vele interessante toepassingen is de zogenaamde compactheidsstelling.

Als elke eindige deelverzameling van een verzameling K van zinnen een model heeft, dan heeft K een model.

Verscheidene interessante kwesties zijn:

0. gevolgen voor de mathematische structuren van uitdrukbaarheid in de eerste orde logica, i.h.b. toepassingen van de compactheidsstelling (zie [5], hoofdstuk 2).
1. vragen naar de karakterisering van structuren door verzamelingen van zinnen ([7]), i.h.b. de gevolgen van het bestaan van niet-bedoelde modellen ([5], [6], [7]).
2. wat is er voor gemeenschappelijks in de modellen van een verzameling zinnen (modeltheoretische invarianten; Kreisel, b.v. in [1]).

3. volledige theorieën, d.w.z. verzamelingen T van zinnen, zodat voor elke X , die geen andere ingredienten gebruikt dan T juist een van de twee verzamelingen $T \cup \{X\}$ en $T \cup \{\neg X\}$ een model heeft.
4. onafhankelijkheidsonderzoek van axioma's van de verzamelingsleer, b.v. Cohen in [1].
5. modeltheoretische fundering van logische systemen (Beth, Kripke in [3]).
6. generalisaties van de modeltheorie (continue modeltheorie [2]).

Ik wil voorstellen om met het onder 1. genoemde onderwerp te beginnen, omdat daarin een, vanuit wiskundig standpunt interessante, ontwikkeling is ontstaan in de zogenaamde non-standaard analyse met toepassingen op vele gebieden. We kunnen dan later zien of onze belangstelling ons nog tot andere onderwerpen voert.

Om een voorlopige indruk van het onderwerp te geven zal ik in het kort schetsen waarom het gaat.

Onbedoelde modellen van axiomastelsels der rekenkunde zijn geconstrueerd door Skolem (zie [7]).

Hij gaat daarbij als volgt te werk.

Laat N de rij der natuurlijke getallen en $M = \{f_n(t)\}$ een rij arithmetische functies zijn, d.w.z. $f_i : N \rightarrow N$, dan is er een monotoom stijgende functie $g : N \rightarrow N$ zodat bij elk paar (i, j) een t_{ij} is, zodat voor $t > t_{ij}$ geldt $f_i g(t) < f_j g(t)$ óf $f_i g(t) = f_j g(t)$ óf $f_i g(t) > f_j g(t)$.

Hierdoor is het mogelijk van M een geordende rij N^* te maken door de definities:

$$f_i < f_j \quad \leftrightarrow \quad \text{voor alle } t > t_{ij} \text{ geldt } f_i g(t) < f_j g(t)$$

$$f_i = f_j \quad \leftrightarrow \quad \text{voor alle } t > t_{ij} \text{ geldt } f_i g(t) = f_j g(t)$$

$$f_i > f_j \quad \leftrightarrow \quad \text{voor alle } t > t_{ij} \text{ geldt } f_i g(t) > f_j g(t).$$

Door de elementen van N te identificeren met de constante functies verkrijgt men $N \subset N^*$. Verder is $1 \leq f$ voor alle $f \in N^*$ en elke $f \in N^*$ heeft

een opvolger $f + 1$. Dus is N een beginsegment van N^* . De identiteitsfunctie is als element van N^* groter dan elke $n \in N$ en dus is N een echt beginsegment van N^* .

Om nu een model van de rekenkunde te krijgen moeten ook de arithmetische functies $N^k \rightarrow N$ getransponeerd worden tot $N^{**k} \rightarrow N^*$. Hiertoe moet men verlangen, dat de rij M afgesloten is t.o.v. samenstellen van functies. Zij nu $F : N^k \rightarrow N$ dan definieert men $F^* : N^{**k} \rightarrow N^*$ door

$$F^*(f_1, \dots, f_n)(t) = F(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

Als voorbeelden noemen we de som van twee functies door $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, het product $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$.

Door een geschikte rij M te kiezen kan Skolem nu bewijzen dat alle zinnen, opgebouwd uit atomen welke vergelijkingen of ongelijkheden tussen arithmetische functies zijn, die waar zijn in N ook waar zijn in N^* .

Daar N en N^* niet isomorf zijn kan hieruit geconcludeerd worden, dat een aftelbaar 1e orde axioma stelsel de rij der natuurlijke getallen niet karakteriseert, zie verder [7].

Onbedoelde modellen van de analyse kan men construeren met behulp van de ultramacht $Re^N (= Re^*)$ van de verzameling Re der reële getallen; zie [4], [5], [6].

Elementen van Re^* worden de functies $f : N \rightarrow Re$.

Zij D een ultrafilter in N , d.w.z. een klasse van deelverzamelingen van N , zodat

1. $\emptyset \notin D$
2. $A, B \in D \rightarrow A \cap B \in D$
3. $A \in D$ en $A \subset B \subset N \rightarrow B \in D$
4. $A \subset N \rightarrow A \in D$ of $N - A \in D$

De relaties R op Re - dus i.h.b. de functies $Re^N \rightarrow Re$ - worden nu als volgt op Re^* uitgebreid tot relaties R^* :

$$(f_1, \dots, f_m) \in R^* \leftrightarrow \{n ; (f_1(n), \dots, f_m(n)) \in R\} \in D.$$

Voorbeelden:

1. $f = g$ (eigenlijk $f = {}^*g$).

$$f = g \leftrightarrow \{n ; f(n) = g(n)\} \in D.$$

= is op Re^* een equivalentie. We laten zien dat uit $f = g$ en $g = h$ volgt $f = h$. N.l. we zien uit de veronderstelling met 2 en 3 van de ultrafilter definitie:

$$\{n ; f(n) = h(n)\} \supset \{n ; f(n) = g(n)\} \cap \{n ; g(n) = h(n)\} \in D, \text{ dus } f = h.$$

Opmerking: Luxemburg werkt met de equivalentieklassen $[f] = \{g ; g = f\}$ als elementen van het model, Robinson met de functies zelf.

2. Optelling: $f + g = h \leftrightarrow \{n ; f(n) + g(n) = h(n)\} \in D.$

3. Inverse.

$f = 0 \leftrightarrow \{n ; f(n) = 0\} \in D$, dus $f \neq 0 \leftrightarrow \{n ; f(n) = 0\} \notin D$, dan is volgens 4 van de definitie van ultrafilter dus $\{n ; f(n) \neq 0\} \in D$.

Voor g met $g(n) = f(n)^{-1}$ als $f(n) \neq 0$ en $g(n) = 1$ als $f(n) = 0$ geldt $fg = 1$, daar

$$\{n ; f(n) g(n) = 1\} = \{n ; f(n) \neq 0\} \in D.$$

4. Ordening.

$$f \leq g \leftrightarrow \{n ; f(n) \leq g(n)\} \in D.$$

Hierdoor wordt Re^* een geordend lichaam (zie [4]).

$\cap D = \emptyset$ dan is Re^* niet isomorf met Re , dan is n.l. Re^* niet archimedisches geordend (in de strikte zin dat er niet bij elke $f > 0$ en $g > 0$ in Re^* een $n \in \mathbb{N}$ bestaat met $nf > g$).

Zij namelijk $f \in \text{Re}^*$ gedefinieerd door $f(n) = n$ en stel $f < m$ ($m \in \mathbb{N}$), dan $\{1, \dots, m-1\} \in D$ waaruit volgt $\cap D \neq \emptyset$, dus er is geen m met $f < m$, d.w.z. voor alle $m \in \mathbb{N}$ is $f \geq m$, dus ook $f > m$.

Er geldt $\mathbb{N}^* \subset \text{Re}^*$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ en $\text{Re} \subset \text{Re}^*$ (echt).

Alle eerste orde zinnen, die in Re gelden, gelden ook in Re^* .

Men heeft in $\mathbb{N}^*$ oneindig grote getallen en in Re^* zowel oneindig grote als oneindig kleine getallen. Deze zijn toepasbaar in de analyse en rechtvaardigen interpretaties en karakterisering als:

1. De rij $\{S_n\}$ in Re is juist dan begrensd (in Re) als de elementen van $\{S_n\}$ in Re^{**} alle eindig zijn, d.w.z. in Re zijn. Bedenk hierbij dat $\{S_n\}$ in Re^{**} een functie $S : N^{**} \rightarrow Re^{**}$ is.
2. $S \in Re$ is limiet van $\{S_n\}$ in Re juist dan als in Re^{**} geldt $|S_n - S|$ oneindig klein voor alle oneindige n (d.w.z. in $N^{**} - N$).

Men kan eenvoudige bewijzen leveren van bekende stellingen der analyse (Bolzano - Weierstrass) maar ook interessante karakteriseringen in de topologie (Robinson), en nieuwe resultaten verkrijgen, b.v. in de theorie der lineaire operatoren (zie [6]).

In concreto stel ik voor om uit [6] te bespreken de hoofdstukken (of gedeelten daarvan):

- II. (logica)
- III. (elementaire analyse)
- IV. (topologie)
- VII. (lineaire ruimten).

Literatuur

1. Addison, Henkin, Tarski: The theory of models, Amsterdam, 1965.
(+ bibliographie van 50 p.)
2. Chang, Keisler: Continuous model theory. Annals of Math. Studies 58 (1966).
3. Crossley, Dummett: Formal systems and recursive functions, Amsterdam, 1965.
4. Luxemburg: Lectures on A. Robinson's theory of infinitesimals and infinitely large numbers. Cal. Inst. Techn. Pasadena, 1962, 1964, 1966.
5. Robinson: Introduction to modeltheory and to the metamathematics of algebra. Amsterdam, 1963.
6. Robinson: Non-standard analysis. Amsterdam, 1966.
7. Skolem: Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. Fund. Math. 23(1934), 150-161.

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker: B. van Rootselaar.

We zullen nu voorbereidingen treffen om de compactheidsstelling (zie p.2) te bewijzen. Ter vereenvoudiging veronderstellen we hierbij, dat $\rightarrow$ en $\equiv$ niet in de taal L voorkomen (hierdoor verliezen we niets).

Het bewijs zal geschieden door de constructie van een model van K in de vorm van een ultraproduct voor een verzameling zinnen in prenexenormaalvorm, d.w.z. van de gedaante

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) A(x_1, \dots, x_n)$$

waarbij Q_i quantoren zijn en A geen quantoren bevat.

Het bewijs is dan algemeen, omdat bij elke zin X een daarmee equivalente zin X' bestaat, in prenexenormaalvorm, d.w.z. een prenexenormaal X' met dezelfde constanten en relatiesymbolen als X met de eigenschap dat X' juist dan geldt in een structuur als X daarin geldt.

We geven nu eerst de algemene definitie van het ultraproduct (1), dan een schets van de reductie op prenexenormaalvorm (2) en daarna het bewijs van de compactheidsstelling (3).

1. Twee structuren heten gelijksoortig als al hun relatiesinterpretaties zijn van dezelfde verzameling van relatiesymbolen.

Het ultraproduct Q_D van een klasse $Q = \{M_v; v \in I\}$ van gelijksoortige structuren M_v wordt als volgt gedefiniëerd.

$D \subset P(I)$ is een ultrafilter, d.w.z. voor D gelden de eigenschappen:

$U_1(D) : \emptyset \notin D$; $U_2(D) : \text{Als } A, B \in D \text{ dan } A \cap B \in D$;

$U_3(D) : \text{Als } A \in D \text{ en } A \subset B, \text{ dan } B \in D$; $U_4(D) : \text{Voor elke } A \in P(I) \text{ geldt } A \in D \text{ of } A' \in D$.

De elementen van Q_D zijn de functies

$$f: I \rightarrow \cup Q$$

zodat $f(v) \in M_v$ voor alle $v \in I$.

Bij elk relatie-symbool R , dat in alle M_v geïnterpreteerd is behoort een relatie R gedefiniëerd door

$$(f_1, \dots, f_n) \in R \leftrightarrow \{v; (f_1(v), \dots, f_n(v)) \in R\} \in D.$$

N.B. In $(f_1(v), \dots, f_n(v)) \in R$ staat R voor de interpretatie van het relatiesymbool R in M_v .

2. Een met X equivalente X' verkrijgt men door de vervanging van deelformules van X van de vorm

$$\begin{array}{ll} \neg(Y \vee Z) & \text{door } \neg Y \wedge \neg Z \\ \neg(Y \wedge Z) & \text{door } \neg Y \vee \neg Z \\ \neg(Ey)Z & \text{door } (y)\neg Z \\ \neg(y)Z & \text{door } (Ey)\neg Z \end{array}$$

wat resulteert in een met X equivalente formule X_1 , waarin toepassing van $\neg$ voorafgaat aan die van $\vee$, $\wedge$, $(E.)$, $(.)$, en vervanging in X_1 van deelformules van de vorm

$$((Ey)Z) \vee Y \quad \text{door} \quad (Eu)(Z' \vee Y),$$

waar u niet in de eerste formule voorkomt en Z' uit Z ontstaat, door y te vervangen door u . Analoge vervanging van $\wedge$ i.p.v. $\vee$ en $(.)$ i.p.v. $(E.)$ levert dan een equivalente X' in prenexen normaalvorm.

Voorbeeld:

$$X = \neg(Ey)R(a,y) \vee \neg((y)(Q(y) \vee (Ez)S(y,z)))$$

(eerste stap: $\neg$ naar binnen)

$$X_1 = (y)\neg R(a,y) \vee (Ey)(\neg Q(y) \wedge (z)\neg S(y,z))$$

(tweede stap: quantoren naar buiten)

$$X_{21} = (u)(\neg R(a,u) \vee (Ey)(\neg Q(y) \wedge (z)\neg S(y,z)))$$

$$X_{22} = (u)(Ev)(\neg R(a,u) \vee (\neg Q(v) \wedge (z)\neg S(v,z)))$$

$$X_{23} = (u)(Ev)(\neg R(a,u) \vee (w)(\neg Q(v) \wedge \neg S(v,w)))$$

$$X' = (u)(Ev)(x)(\neg R(a,u) \vee (\neg Q(v) \wedge \neg S(v,x)))$$

Opm.: Voor volledig bewijs zie b.v.

D. Hilbert, W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik.

A.H. Lightstone: The axiomatic method.

Zinnen in prenexe normaalvorm interpreteren we in structuren door toevoeging van functiesymbolen (Skolem functoren). Hierbij overschrijden we het bestek van onze taal L .

Dat $(x)(\exists y)R(x,y)$ in M geldt betekent, dat bij elke constante a een b bestaat, zodat $R(a,b)$ in M geldt. In M is er dus een functie f , zodat voor alle $x \in M$ geldt $(x, f(x)) \in R$. We voegen nu een functiesymbool ϕ toe aan onze taal met f als interpretatie in M en we zeggen, dat $R(x, \phi(x))$ in M geldt als voor elke constante die in M geïnterpreteerd is $R(a, \phi(a))$ in M geldt. Deze definities zijn dus zo ingericht, dat $R(x, \phi(x))$ in M geldt juist dan als $(x)(\exists y)R(x,y)$ in M geldt.

Op deze wijze wordt bijvoorbeeld de met $X \equiv (x)(\exists y)(z)(\exists u)R(x,y,z,u)$ corresponderende formule:

$$R(x, \phi(x), z, \psi(x,z)).$$

3. De compactheidsstelling.

Laat K een verzameling zinnen in prenexe normaalvorm zijn, zodat elke eindige deelverzameling een model heeft. De klasse der eindige deelverzamelingen van K noemen we $P_0(K)$, met elementen $\mu, \nu, \dots$. Bij elke ν kiezen we een model M_ν en we zorgen ervoor, dat de in K voorkomende relatiesymbolen in alle M_ν geïnterpreteerd zijn, door ze zo nodig in M_ν door een lege relatie te interpreteren. De objectsymbolen van K worden in een ultraproduct over $\mathcal{Q}$ door functies f , waarbij $f(\nu)$ een in M_ν aanwezige interpretatie is of indien zo'n interpretatie er niet is, een willekeurig element uit M_ν .

We moeten nu een geschikt ultrafilter D definiëren, zodat elke $X \in K$ in $\mathcal{Q}_D$ geldt.

Dat gaat als volgt.

Zij $d(\nu) = \{\mu; \nu \subset \mu\}$
 en $D_0 = \{d(\nu); \nu \in P_0(K)\} \subset P_0(K)$.
 Dan gelden $U_1(D_0)$ en $U_2(D_0)$, omdat $\emptyset \notin D_0$ en $d(\nu) \cap d(\mu) = d(\nu \cup \mu)$.

We beschouwen nu de deelverzamelingen van $P_0(K)$, die D_0 bevatten en waarvoor U_1 en U_2 gelden. Deze verzameling is partiëel geordend door inclusie en bevat volgens Zorn een maximaal element, zeg D . Er geldt nu $U_3(D)$, want als we definiëren

$$D' = \{B; \text{er is een } A \in D \text{ met } A \subset B\}$$

dan gelden $U_1(D')$, $U_2(D')$ en $U_3(D')$, terwijl $D \subset D'$. Wegens maximaliteit van D is $D = D'$ en dus geldt $U_3(D)$. Tenslotte ziet men als volgt, dat $U_4(D)$ geldt.

Zij $A \in P_0(K)$. Definiëert men

$$D(A) = \{B; \text{er zijn } F \text{ en } C \text{ met } F \in D, A \subset C \text{ en } B = F \cap C\},$$

dan geldt $D \subset D(A)$ en $A \in D(A)$. Verder geldt $U_2(D(A))$ en als $U_1(D(A))$ geldt, dan volgt wegens maximaliteit van D , dat $D(A) = D$ en dus $A \in D$. Analoog voor $D(A')$.

Is nu $\phi \in D(A) \cap D(A')$, dan zijn er F en G in D met $A \cap F = A' \cap G = \phi$ en dus $F \cap G = \phi \in D$, zodat uit $U_1(D)$ volgt $U_1(D(A))$ of $U_1(D(A'))$ en dus $A \in D$ of $A' \in D$.

We moeten nu aantonen, dat de zinnen van K in Q_D gelden. Dit laten we zien aan de hand van de zin

$$X \equiv (x)(Ey)(z)(Eu)R(x,y,z,u),$$

waarbij we veronderstellen, dat R is:

$$\neg R_1(x,y) \vee (R_2(x,z) \wedge \neg R_3(z,u)),$$

waarin R_1, R_2, R_3 atomen zijn.

Het komt er dus op neer, dat we laten zien, dat $R(f, \phi(f), g, \psi(f, g)) \equiv \neg R_1(f, \phi(f)) \vee (R_2(f, g) \wedge \neg R_3(g, \psi(f, g)))$ in Q_D geldt.

De Skolem functoren ϕ en ψ zijn hierbij op Q_D geïnterpreteerd door

$$\phi(f)(v) = \phi(f(v)) \quad \text{voor alle } v \in P_0(K)$$

$$\text{en} \quad \psi(f, g)(v) = \psi(f(v), g(v)) \quad \text{voor alle } v \in P_0(K).$$

N.B. De ϕ en ψ in de rechterleden staan voor de interpretaties van ϕ en ψ in M_v .

Als afkorting gebruiken we $R_i[v]$ voor $R_i(f(v), \phi(f(v)))$ en analoog voor de andere formules.

Zij nu

$$A_i = \{v; R_i[v]\}$$

dan geldt R in Q_D , volgens definitie van gelden in een structuur en de definitie van Q_D , als

$$A'_1 \cup (A_2 \cap A'_3) \in D$$

(A'_1 is complement van A_1), dit moet dus worden aangetoond.

Zij nu $B = \{v; R[v]\}$.

Indien $\lambda = \{X\}$ dan geldt $R[\lambda]$ en als $\mu \in d(\lambda)$ dan geldt $R[\mu]$, dus $d(\lambda) \subset B$, zodat volgens definitie van D ook $B \in D$.

Verder als $\lambda \in B$, dan $\lambda \in A'_1 \cup (A_2 \cap A'_3)$ en dus

$$B \subset A'_1 \cup (A_2 \cap A'_3) \quad \text{en dus}$$

$$A'_1 \cup (A_2 \cap A'_3) \in D.$$

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker: L.E. Fleischhacker.

In vele takken van de wiskunde hebben variabelen behalve op elementen van een zekere verzameling vaak ook betrekking op deelverzamelingen, relaties, i.h.b. functies, etc. De gebruikte logica wordt dan dus geïnterpreteerd als een "hogere orde" logica. Aangezien deze interpretatie tot tegenspraken kan leiden moeten enige beperkingen aan het logische systeem worden opgelegd. Een van de methoden hierbij is de theorie der logische typen. De hier gebruikte typentheorie wijkt iets af van de gebruikelijke vormen.

We zullen eerst de "hogere orde structuren" definiëren die ons als modellen zullen dienen, daarna een "gelaagde" taal die deze modellen kan beschrijven.

Definitie 1. Typen

i) $0 \in T$

ij) $\tau_1, \dots, \tau_n \in T \implies (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in T$

We noemen de elementen van T typen.

Definitie 2. Hogere orde-structuur

Als gegeven is een verzameling $A \neq \emptyset$, een stelsel verzamelingen $\{B_\tau\}_{\tau \in T}$ en een afbeelding ϕ , dan vormt $\{B_\tau\}_{\tau \in T}$ een hogere orde structuur over A met interpretatie ϕ als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

i) ϕ gedefiniëerd op $\bigcup_{\tau \in T} B_\tau$

ij) $\phi[B_0] = A$

iiij) als $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ dan geldt:

$$\phi[B_\tau] \subseteq \mathcal{P}(\phi[B_{\tau_1}] \times \dots \times \phi[B_{\tau_n}]). \quad *$$

Als ϕ 1-1 duidelijk is noemen we de structuur Normaal. Als in $*$ de gelijkheid geldt voor alle τ spreken we van een volle structuur.

Bij elke verzameling A behoort dus o.a. de volgende volle-normale structuur:

$$i) \quad A_0 = A$$

$$ij) \text{ als } \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ dan is } A_\tau = \mathcal{P}(A_{\tau_1} \times \dots \times A_{\tau_n})$$

waarbij ϕ de identiteit is.

Er geldt $\phi[B_\tau] \subseteq A_\tau$ waaruit onmiddellijk volgt dat de verzamelingen B_τ disjunct moeten zijn.

We zullen de elementen van A_τ "relaties van type τ " noemen en als $\tau = 0$ ook wel "individueen".

De elementen van B_τ noemen we "constanten van type τ " en als $\tau = 0$ ook wel individu-constanten.

De elementen van $\phi[B_\tau]$ noemen we inwendige relaties, die van $A_\tau \setminus \phi[B_\tau]$ uitwendige relaties van de structuur $\{B_\tau\}_{\tau \in T}$.

In een vol systeem zijn dus alle relaties inwendig.

We definiëren nu twee talen Λ en Λ' om de h.o. structuren te beschrijven. Eerst enige syntactische begrippen:

Definitie 3. "hogere orde" taal Λ . Deze bestaat uit:

- i) Bij elk type τ een verzameling C_τ van constanten zo, dat

$$\tau_1 \neq \tau_2 \implies C_{\tau_1} \cap C_{\tau_2} = \emptyset.$$
- ij) Bij elk type $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ een $n+1$ plaatsig relatiesymbool ϕ_τ waarbij we aan de plaatsen de typen resp. $\tau, \tau_1, \dots, \tau_n$ toekennen.
- iiij) Variabelen en logische constanten als in de 1e orde taal.

Definitie 4. de taal Λ' .

Behalve het bepaalde onder i, ij, iiij is in deze taal ook nog aanwezig:

- iv) bij elk type τ een 1-plaatsig relatiesymbool θ_τ .

Definitie 5. Vocabulair.

Als X een formule en K een verzameling formules van Λ is definiëren we de volgende verzamelingen.

$\text{Voc}_\tau(X)$, $\text{Voc}_\tau(K)$ verzameling der variabelen en constanten die op plaatsen van type τ in X resp. een formule $Y \in K$ voorkomen.

$\text{Voc}(X)$, $\text{Voc}(K)$ idem, zonder typespecificatie.

$\text{Vocc}_\tau(X)$ $\text{Vocc}_\tau(K)$ alleen de constanten.

Definitie 6. Gelaagd

Een formule $X \in \Lambda$ is gelaagd als de verzamelingen $\text{Voc}_\tau(X)$ voor verschillende τ disjunct zijn.

Een verzameling formules K is gelaagd als alle formules ervan gelaagd zijn en bovendien de verzamelingen $\text{Vocc}_\tau(K)$ disjunct zijn.

Met behulp van de volgende semantische begrippen leggen we de interpretatie van de zinnen van Λ in de structuren $\{B_\tau\}_{\tau \in T}$ vast.

Definitie 7. toelaatbaar

Een formule X van Λ is toelaatbaar in $M = \{B_\tau\}_{\tau \in T}$ als:

- i) X gelaagd is;
- ij) voor alle τ geldt $\text{Vocc}_\tau(X) \subseteq B_\tau$.

In afwijking van het door Robinson in [6] gevolgde procédé identificeren we hier dus wel de constanten van Λ met de elementen van B_τ maar we onderscheiden de elementen van B_τ steeds van de relaties uit A_τ .

Zij nu M een hogere orde-structuur en $\Lambda(M)$ de verzameling van in M toelaatbare formules, dan definiëren we

Definitie 8. Diagram $\mathcal{D}(M)$ van M

Als $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$:

- i) $\phi_\tau(a, b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{D}(M) \iff a \in B_\tau, b_i \in B_{\tau_i}, i = 1, \dots, n$ en $\langle \phi(b_1), \dots, \phi(b_n) \rangle \in \phi(a)$
- ij) $\neg \phi_\tau(a, b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{D}(M) \iff a \in B_\tau, b_i \in B_{\tau_i}, i = 1, \dots, n$ en $\langle \phi(b_1), \dots, \phi(b_n) \rangle \notin \phi(a)$.

Definitie 9. De verzameling $\mathcal{K}(M)$ van zinnen toelaatbaar en geldig in M is de semantische afsluiting van $\mathcal{D}(M)$ in $\Lambda(M)$ (vergelijk 1e orde). Het is gemakkelijk na te gaan dat $\Lambda(M)$, $\mathcal{D}(M)$ en $\mathcal{K}(M)$ gelaagde verzamelingen zijn.

Als we de formules van Λ als eerste orde-formules willen opvatten moeten we de voorwaarde van gelaagdheid in deze formules zelf opnemen. Dit geschiedt op de volgende wijze.

Definitie 10. type-transformatie $\lambda: \Lambda \rightarrow \Lambda'$

- i) Als X een atomaire formule is: $\lambda X = X$, λ is distributief t.o.v. alle logische connectieven.
- ij) $\lambda(\exists x)Z = (\exists x)\theta_{\tau}(x) \wedge \lambda Z$ als $x \in \text{Voc}_{\tau}(Z)$ en
 $\lambda(\exists x)Z = (\exists x)\theta_0(x) \wedge \lambda Z$ als $x \notin \text{Voc}(Z)$.
- iiij) $\lambda(\forall x)Z = (\forall x)\theta_{\tau}(x) \supset \lambda Z$ als $x \in \text{Voc}_{\tau}(Z)$ en
 $\lambda(\forall x)Z = (\forall x)\theta_0(x) \supset \lambda Z$ als $x \notin \text{Voc}(Z)$.

We beschouwen tevens bij elke h.o. structuur $M = \{B_{\tau}\}$ een 1e orde structuur $M_{\lambda} = \langle B, \{S_{\tau}\}_{\tau \in T} \cup \{F_{\tau}\}_{\tau \in T} \rangle$ waarbij $B = \bigcup_{\tau \in T} B_{\tau}$ en S_{τ} en F_{τ} interpretaties resp. van θ_{τ} en ϕ_{τ} zijn.

Schematisch laat de situatie zich als volgt voorstellen.

$$\begin{array}{ccc}
 \{A_{\tau}\} \xleftarrow{\phi} \{B_{\tau}\} = M & & M_{\lambda} = \langle B, \{S_{\tau}\} \cup \{F_{\tau}\} \rangle \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{D}(M) \subset \mathcal{K}(M) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{K}_{\lambda}(M)
 \end{array}$$

We kunnen nu bewijzen:

Stelling (2.7.1) Als $X \in \Lambda(M)$ dan:
 $X \in \mathcal{K}(M) \iff \lambda X \in \mathcal{K}(M_{\lambda})$

Bewijs: Voor het geval X geen quantoren bevat volgt de conclusie direct uit Def. 10 en uit

$$\langle a, b_1, \dots, b_n \rangle \in F_{\tau} \iff \phi_{\tau}(a, b_1, \dots, b_n)$$

Stel nu: $Z \in \mathcal{K}(M) \iff \lambda Z \in \mathcal{K}(M_{\lambda})$ en $X = (\exists x)Z$ dan zijn er twee gevallen mogelijk:

i) $x \in \text{Voc}_T(Z)$ dan hebben we de volgende equivalentieketen:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{K}(M) &\iff Z(a) \in \mathcal{K}(M) \text{ voor zekere } a \in B_T \iff \\ &\iff \lambda Z(a) \in \mathcal{K}(M_\lambda) \text{ en } a \in S_T \iff \theta_T(a) \wedge \lambda Z(a) \in \mathcal{K}(M_\lambda) \iff \\ &\iff \lambda X \in \mathcal{K}(M_\lambda). \end{aligned}$$

ij) $x \notin \text{Voc}(Z)$ dan, daar $B_0 \neq 0$: $(\exists x)\theta_0(x) \in \mathcal{K}(M_\lambda)$ dus $X \equiv Z$ en $\lambda X \equiv \lambda Z$ waaruit de conclusie van de stelling voor X volgt.

Als $X = (\forall x)Z$ is de redenering geheel analoog.

Nu kunnen wij de compactheidsstelling overdragen op hogere orde zinnen en modellen.

Stelling (2.8.1). Als K een gelaagde verzameling zinnen van Λ is en elke eindige deelverzameling van K heeft een model, dan heeft K een model.

Het bewijs verloopt volgens dit schema:

$$\begin{array}{ccc} \forall K' \exists M' : K' \in \mathcal{K}(M') & & K \in \mathcal{K}(M) \\ \downarrow (2.7.1) & & \uparrow * \\ \lambda[K'] \in \mathcal{K}(M'_\lambda) & & \\ \downarrow & & \\ \lambda[K'] \cup H'_0 \cup H'_c \in \mathcal{K}(M'_\lambda) & \xrightarrow{(2.5.1)} & \lambda[K] \cup H_0 \cup H_c \in \mathcal{K}(N) \end{array}$$

waarbij H_0 een formulering in Λ' van de type- en extensionaliteitsvoorwaarden is. B.v.

$$\begin{aligned} &(\forall x) [\neg \theta_\tau(x) \vee \neg \theta_\sigma(x)] \in H_0 \text{ als } \tau \neq \sigma \text{ en} \\ &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u) [\theta_{\tau_1}(z) \wedge \theta_{\tau_2}(x) \wedge \theta_{\tau_2}(y) \wedge \theta_{\tau_3}(u) \supset [[\phi_{\tau_2}(x, z) \equiv \phi_{\tau_2}(y, z)] \supset \\ &\supset [\phi_{\tau_3}(u, x) \equiv \phi_{\tau_3}(u, y)]]] \in H_0 \end{aligned}$$

en verder

$$H_c = \{\theta_\tau(a) \mid \tau \in T, a \in \text{Vocc}_\tau(K)\}.$$

(2.5.1) is de compactheidsstelling voor de 1e orde.

Het bewijs bestaat hoofdzakelijk uit verificaties betreffende het vervuld zijn der type-voorwaarden.

Bij π wordt uit het 1e orde-model $N = \langle B, \{S_\tau\} \cup \{F_\tau\} \rangle$ van $\lambda, [K] \cup H_0 \cup H_c$ een hogere orde structuur $M = \{B_\tau\}$ opgebouwd op de volgende wijze.

$$A_0 = B_0 = S_0 \quad \phi \upharpoonright B_0 \text{ is de identiteit.}$$

$$B_\tau = S_\tau$$

Stel ϕ reeds gedefiniëerd op $B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_n}$ dan wordt als $b \in B_\tau$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$\phi(b) = \{ \langle \phi(b_1), \dots, \phi(b_n) \rangle \mid \langle b, b_1, \dots, b_n \rangle \in F_\tau \}.$$

(Er kunnen dus elementen van B zijn die in geen enkele B_τ voorkomen.)

Opmerking: Het model M dat hier ontstaan is heeft niet vol noch normaal te zijn. Zoals verderop zal blijken is het wel altijd mogelijk een normaal model voor K te vinden. Het kan echter voorkomen dat van een verzameling K alle eindige deelverzamelingen een vol model hebben en K zelf uitsluitend niet-volle modellen. We zullen zien dat elke verzameling zinnen tot een dergelijk systeem is uit te breiden.

Een eenvoudig voorbeeld is de uitbreiding van een theorie der natuurlijke getallen met de zinnenverzameling $\{a > n\}_{n=1}^\infty \cup \{a \in \mathbb{N}\}$ waarbij a een van alle getalaanduidingen verschillende constante is.

Een model $\{B_\tau\}$ van de uitgebreide theorie kan nooit vol zijn, immers de oorspronkelijke verzameling van natuurlijke getallen N_0 moet uitwendig zijn. Om dit in te zien beschouwen we het inductie-axioma.

$$\begin{aligned} & (\forall x) [\phi_{(0)}(x, 1) \wedge (\forall y)(\forall z) [\phi_{(0,0)}(s, z, y) \wedge \phi_{(0)}(x, y) \supset \phi_{(0)}(x, z)] \supset \\ & \supset (\forall u) \phi_{(0)}(x, u) \end{aligned}$$

waarbij s de opvolger-relatie aanduidt.

Stel N_0 werd aangeduid door een constante v .

Substitutie van v voor x en a voor u leidt tot de conclusie $\phi_{(0)}(v, a)$ waarmee v dus automatisch een andere interpretatie krijgt dan we bedoelden, d.w.z. $N_0 \notin \phi[B_{(0)}]$.

Zie voor dit voorbeeld en het daarmee verbonden begrip ω -consistentie Tarski 1933.

We zullen nu volle modellen van een theorie Standaard-modellen noemen.

In het volgende wordt nu een algemene methode beschreven om een theorie uit te breiden tot een die alleen niet-standaard modellen heeft.

Definitie 11. De logische afsluiting $\bar{K}_\Lambda$ van K in Λ is de verzameling zinnen X van Λ zodanig dat $\{X\} \cup K$ geen enkel model bezit.

Definitie 12. Samenlopende relaties.

Zij K een gelaagd stelsel zinnen van Λ , $b \in \text{Voc}_{(\tau_1, \tau_2)} K$ dan definiëren we $\Delta_b = \{x \in B_{\tau_1} \mid (\exists y) [\phi_{(\tau_1, \tau_2)}(b, x, y)] \in \bar{K}_\Lambda\}$ (in een model van K is dus $\phi[\Delta_b]$ het domein van $\phi(b)$).

b is samenlopend (notatie: $b \in \Gamma_0$) als voor alle eindige verzamelingen $\{g_1, \dots, g_n\} \subset \Delta_b$ geldt

$$(\exists y) [\phi_{(\tau_1, \tau_2)}(b, g_1, y) \wedge \dots \wedge \phi_{(\tau_1, \tau_2)}(b, g_n, y)] \in \bar{K}_\Lambda.$$

Enige voorbeelden van samenlopende relaties:

Ongelijkheid in een oneindige verzameling; relaties die een gerichte halfordening definiëren; de $\in$ relatie van type $((\tau)\tau)$ als alle eindige deelverzamelingen van B_τ tot $B_{(\tau)}$ behoren; de $\ni$ relatie in een gekit stelsel verzamelingen.

Definitie 13. Vergroting

K als bij def. 12, $B \subset \Gamma_0$ dan is H_B de B -vergroting van K als

$$H_B = K \cup \{\phi_\tau(b, a, a_b) \mid b \in B \cap B_\tau, a \in \Delta_b, \tau \in T\}$$

waarbij a_b een constante is zodanig dat $a_b \notin \text{Voc } K$.

Als $B = \Gamma_0$ spreken we kortweg van de vergroting.

Als $K = \mathcal{K}(M)$ en M een volle normale structuur dan noemen we M^* een vergroting van M als M^* een model is van de vergroting H van K .

We zullen nu het bewijs schetsen van een stelling die het bestaan van vergrotingen van structuren bevestigt.

Stelling (2.9.5). Als K een consistente verzameling zinnen van Λ is, is ook elke vergroting H_B van K consistent.

Bewijs: Als $K \subset \mathcal{K}(M)$ en H' is een eindige deelverzameling van H_B dan beschouwen we de eindige verzameling van de zinnen van de vorm

$\phi_{\tau_i}(b_i, a_j, a_{b_j})$ uit H' met $\tau_i = (\tau_{i,1}, \tau_{i,2})$ $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m_i$. Wegens $b_i \in \Gamma_0$ zijn er volgens def. 12 constanten $c_1, \dots, c_n$ met $c_i \in B_{\tau_{i,2}}$ zodat voor alle $j \leq m_i$

$$\phi_{\tau_i}(b_i, a_j, c_i) \in \bar{K}_\Lambda \subset \mathcal{K}(M).$$

We definiëren nu $B'_{\tau_{i,2}} = B_{\tau_{i,2}} \cup \{a_{b_j} \mid \tau_{i,2} = \tau_{j,2}\}$ en we zetten ϕ voort tot $B'_{\tau_{i,2}}$ door $\phi(a_{b_k}) = \phi(c_k)$.

Dan geldt voor alle constanten $p, q_1, \dots, q_n$

$$\phi_\tau(p, q_1, \dots, q_{k-1}, a_{b_j}, q_{k+1}, \dots, q_n) \in \mathcal{K}(M') \iff$$

$$\iff \phi_\tau(p, q_1, \dots, q_{k-1}, c_j, q_{k+1}, \dots, q_n) \in \mathcal{K}(M)$$

daar immers de geldigheid van atomaire formules alleen van de beelden onder ϕ der constanten afhangt. Inductief bewijzen we gemakkelijk $K \subset \mathcal{K}(M')$ en voor alle $i \leq n$ en $j \leq m_i$ $\phi_{\tau_i}(b_i, a_j, a_{b_j}) \in \mathcal{K}(M')$ d.w.z. M' is een model van H' .

Volgens stelling (2.8.1) heeft dus ook H_B een model.

Opmerking: Hoewel dus bij alle eindige deelverzamelingen van H_B het bijbehorende model op triviale wijze ontstaat, en telkens $\phi(a_b) = \phi(c)$ voor een reeds aanwezig element c van B_{τ_2} behoeft dit bij het model van H_B niet het geval te zijn. Bij elke eindige deelverzameling H' vinden we immers een element $c(H')$ zodat in het als ultraproduct ontstane totaalmodel a_b is te interpreteren als de aeq klasse van de functie f met $f(H') = \phi(c(H'))$.

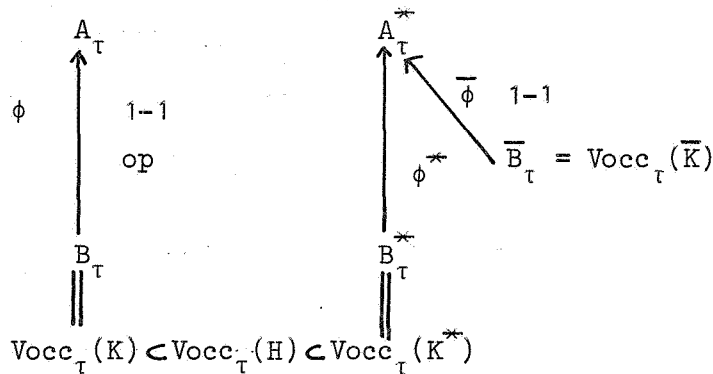
Conclusie: Elke volle-normale structuur M heeft een vergroting M^* (die noch vol, noch normaal behoeft te zijn) en waarvoor geldt:

$$B_\tau \subset B_\tau^* \quad \text{en} \quad \mathcal{K}(M) \subset \mathcal{K}(M^*)$$

dus M^* is een uitbreiding van M waarvoor alle toelaatbare Λ -zinnen geldig blijven.

M^* is een echte uitbreiding en is niet vol als B_0 oneindig is (bewijs m.b.v. het voorbeeld van Tarski).

We kunnen de situatie door het volgende schema voorstellen:



Waarbij $K = \mathcal{K}(M)$, $H = H_T(K)$, $K^* = \mathcal{K}(M^*)$.

$\bar{B}_T$ en $\bar{K}$ hebben betrekking op het met M^* corresponderende volle systeem in termen waarvan wij de gehele situatie bestuderen, b.v. onderscheid maken tussen inwendige en uitwendige relaties.

We noemen de relaties uit $\phi^*[B_T]$ standaard relaties.

Is b een standaard relatie, dan geldt:

$$\langle \phi(b_1), \dots, \phi(b_n) \rangle \in \phi(b) \implies \langle \phi^*(b_1), \dots, \phi^*(b_n) \rangle \in \phi^*(b).$$

Het omgekeerde behoeft niet het geval te zijn.

De standaard verzameling N in het voorbeeld van Tarski bevat b.v. ook het niet-standaard element aangeduid door a .

Opmerking: De machtigheid van de vergroting behoeft niet hoger te zijn dan die van de oorspronkelijke structuur.

We zullen veronderstellen dat de structuren $\{A_T\}$ en $\{A_T^*\}$ in dezelfde verzamelingstheoretische zin vol zijn.

Literatuur

- Th. Skolem 1962 Interpretation of mathematical theory in the
first order predicate calculus. (Fraenkel
Anniversary Vol. Hebrew Un. Press).
- A. Tarski 1933 Einige betrachtungen über die Begriffe der
 ω -Widerspruchsfreiheit und die ω -Vollständig-
keit. (Monatsheft f. Math. & Phys. 40).
- L. Henkin 1950 Completeness of the theory of types. (Journal
of Symb. Logic. 14 p. 159).
- P.C. Gilmore 1957 The monadic theory of types in the lower
pred. calculus. (Summaries of talks at the
Summer-institute of symbolic logic in 1957
at Cornell University p. 309).

Spreker: P. van Emde Boas

Voorbeelden van vergrotingen:

1. Neem voor A de gebruikelijke verz. der Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ met hierbij de volgende uitverkoren relaties: e de identiteit, s de optelling, p de vermenigvuldiging en q de ordening (e, q zijn van type $(0,0)$, s en p van type $(0,0,0)$). Bekijk de volledige eerste orde structuur op A , dus $M = \{B_\tau\}$ met $B_0 = A$, $B_{(0,0,0,\dots,0)} = A_{(0,0,0,\dots,0)}$ en $B_\tau = \emptyset$ voor $\tau \neq (0, 0, \dots, 0)$.

K is de verzameling van alle toelaatbare geldige zinnen op M . q is een samenlopende relatie aangezien er bij ieder eindig stel natuurlijke getallen een grotere bestaat.

Neem $B = \{q\}$ dan is de B -vergroting van M een voorbeeld van een elementair niet standaard model van de rekenkunde.

2. Neem voor A de gebruikelijke verzameling der reële getallen $\mathbb{R}$ en definiëer e, q, s en p als boven. De structuur M zij analoog gedefiniëerd en K evenzo. De relatie q is opnieuw samenlopend.

Neem $B = \{q\}$ dan is de B -vergroting van M een voorbeeld van een elementair niet standaard model van de Analyse.

3. Zij A, p, q, e, s gedefiniëerd als in 1.

Zij $M = \{B_\tau\}$ waarbij $B_\tau = A_\tau$ voor ieder type τ . M is dus de volle normale structuur op $\mathbb{N}$.

K is de verzameling van alle zinnen die in M gelden (geformuleerd in termen van constanten, eerste of hogere orde relaties).

Neem weer $B = \{q\}$. De B -vergroting van M is een voorbeeld van een hogere orde niet standaard model van de Rekenkunde.

4. Zij A, p, q, e, s gedefiniëerd als in 2.

M is weer de volle normale structuur op A . K is weer de collectie van alle geldige zinnen van M . $B = \{q\}$. Dan is de B -vergroting van M een voorbeeld van een hogere orde niet standaard model van de Analyse.

Gedrag van de identiteitsrelaties:

Laat A een willekeurige verzameling zijn en M een volledige (maar niet noodzakelijk normale) structuur op A . $M = \{B_\tau\}$ en $\phi[B_\tau] = A_\tau$ voor iedere τ . Zij verder $M^* = \{B_\tau^*\}$ een vergroting van M . Dan is bekend dat M^* een deelstructuur M' bevat zodanig dat M' en M isomorf zijn. Dit wil niet zeggen dat de verschillende elementen in M' en M op dezelfde wijze geïnterpreteerd worden.

Een speciaal voorbeeld van deze moeilijkheden vinden we bij de vergroting identiteitsrelaties.

Als $\phi(e) = E$ de identiteitsrelatie van type $(0,0)$ is op A en $\phi^*(e) = E^*$ dezelfde relatie is in de vergroting M^* dan is het best mogelijk dat E^* niet de identiteitsrelatie is op A . Wel geldt in ieder geval dat E^* een equivalente relatie is. Immers de zin

$$(X) (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w) [[\phi_{(0,0)}(e, x, x)] \wedge \phi_{(0,0)}(e, y, z) \equiv \\ \equiv \phi_{(0,0)}(e, z, y)] \wedge [[\phi_{(0,0)}(e, u, v) \wedge \phi_{(0,0)}(e, v, w)] \supset \phi_{(0,0)}(e, u, w)]]$$

geldt in M dus ook in M^* .

Algemeen zij e_τ een element met $\phi(e_\tau) = E_\tau$ waarbij E_τ de identiteitsrelatie van type (τ, τ) is dan geldt dat E_τ^* een equivalentie relatie op A_τ^* is.

De relaties E_τ^* bezitten alle eigenschappen van de identiteiten E_τ die zich laten uitdrukken door zinnen uit K . De belangrijkste zijn

substitutie eigenschap

$$(\forall_{x,x'}) (\forall_{y,y'}) \dots (\forall_{y_n,y_n'}) [[\phi_{(\tau,\tau)}(e_\tau, x, x') \wedge \phi_{(\tau_1,\tau_1)}(e_{\tau_1}, y_1, y_1') \dots \\ \dots \wedge \phi_{(\tau_n,\tau_n)}(e_{\tau_n}, y_n, y_n') \wedge \phi_\tau(x, y_1, \dots, y_n)] \supset \phi_\tau(x', y_1', \dots, y_n')].$$

Dit wil zeggen dat een relatie vervuld is dan en slechts dan als een equivalente relatie door een equivalent n , tuppel is vervuld.

extensionaliteits eigenschap

$$(\forall_{x,x'}) [(\forall_{y_1}) \dots (\forall_{y_n}) [\phi_{\tau}(x, y_1, \dots, y_n) \equiv \phi_{\tau}(x', y_1, \dots, y_n)] \supset \\ \supset \phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, x, x')].$$

Dus relaties die dezelfde n-tuppels bevatten zijn e_{τ} -equivalent.

Indien e_{τ} en e'_{τ} beiden de identiteit E_{τ} aangeven dan ware het in principe nog mogelijk dat in een vergroting $\bar{M} \cdot \phi^*(e_{\tau})$ en $\phi^*(e'_{\tau})$ verschillende relaties zijn. We zullen laten zien dat dit niet kan.

Immers in M en M^* geldt de zin:

$$(\forall_{y,y'}) [\phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, y, y') \supset [\phi_{(\tau, \tau)}(e'_{\tau}, y, y') \equiv \phi_{(\tau, \tau)}(e'_{\tau}, y, y')]]$$

dit is een gevolg van de substitutie eigenschap.

Aangezien $\phi_{(\tau, \tau)}(e'_{\tau}, y, y')$ altijd waar is volgt

$$(\forall_{y,y'}) [\phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, y, y') \supset \phi_{(\tau, \tau)}(e'_{\tau}, y, y')].$$

De symmetrie leert ons nu dat

$$(\forall_{y,y'}) [\phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, y, y') \equiv \phi_{(\tau, \tau)}(e'_{\tau}, y, y')].$$

Dus E_{τ}^* en E_{τ} worden door precies dezelfde paren elementen van A_{τ} voldaan. Het is dus één en dezelfde relatie die twee keer wordt aangegeven.

Samenvattend geldt dus $\phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, x, y)$ dan en slechts dan als x en y dezelfde relatie aangeven.

De $\phi^*(e_0) = E_0^*$ is een equivalentie relatie op A^* . Uit A^* leid ik een nieuwe verzameling individuen A' af door uit elke E_0^* equivalentie klasse één element te kiezen. Hierdoor wordt $E'_0 = E_0^* \upharpoonright A'$ een echte identiteit.

Na deze identificatie moet ik aan ieder element uit de B_{τ}^* een nieuwe interpretatie toekennen. Gezien het feit dat de E_0^* equivalente elementen zich als gelijken gedroegen bij ieder der relaties volgt dat deze wijziging der interpretatie moeiteloos verloopt. Noem in de nieuwe structuur $M' = \{B'_{\tau}\}$ dan volgt dat $\{B'_{\tau}\}$ een model is van de oorspronkelijke verzameling zinnen $\mathcal{K}(M)$.

Bovendien geldt ook nog dat de structuur M' een vergroting is van M . Zij $\phi(q)$ een samenlopende relatie op A . Dan is er een a_b in B_0^* met $\phi_{(0,0)}(q, x, a_b)$ voor iedere x in domein q . Als nu $\phi_0(e_0, a_b, a')$ en $a' \in B_0'$ volgt dat

$$\phi_{(0,0)}(q, x, a') \text{ voor iedere } x \text{ in domein } q.$$

Dus M' is een vergroting.

We kunnen de structuur $\{B_\tau'\} = M'$ normaal maken door e_τ -equivalente elementen uit B_τ' te identificeren.

Hierdoor worden alle e_τ echte identiteits symbolen en verder geldt $\phi(r) = \phi(r')$ alleen als $\phi_{(\tau, \tau)}(e_\tau, r, r')$ geldt. De symbolen r en r' blijven als ze verschillend zijn niet beiden behouden.

Gevolg: Er zijn normale niet standaard al dan niet hogere orde modellen voor de Analyse en de rekenkunde.

Opm. Indien $M^* = \{B_\tau^*\}$ een normale structuur is dan mag ik gezien de één eenduidige betekenis de elementen van B_τ rustig relaties noemen.

Inwendige en uitwendige relaties:

Laat M^* de normale volledige structuur van een verzameling individuen A zijn en laat M^* een normale B -vergroting zijn van M waarbij $B = \Gamma_0$. We mogen veronderstellen dat M zit ingebed in M^* . Bij deze inbedding blijft de extensionaliteit bewaard aangezien de identiteiten door een constante e_τ worden aangegeven.

We kunnen naast de structuur $M^* = \{B_\tau^*\}$ de volle structuur $\{A_\tau^*\}$ over A^* bekijken. In het algemeen zal het niet waar zijn dat $A_\tau^* = B_\tau^*$. Voor $\tau = 0$ is dit wel juist.

De relaties uit B_τ^* heten inwendige relaties.

Indien een inwendige relatie ook al is bevat in B_τ dan spreek ik van een standaard relatie. Deze wordt dus aangeduid door een constante uit een van de zinnen uit $\mathcal{H}(M)$.

Een relatie uit $A_\tau^* \setminus B_\tau^*$ heet een uitwendige relatie.

Uitwendige relaties kunnen worden gebruikt om vermeende tegenstrijdigheden in de theorie aan te geven. Omgekeerd zal een ieder die als buitenstaander een onwaarheid in het niet standaard model wil aanwijzen hiervoor gebruik moeten maken van een uitwendige relatie.

Indien de betrokken relatie een functie is spreek ik op analoge wijze over standaard, inwendige en uitwendige functies.

Gegeneraliseerde gekitte stelsels:

Stelling: Zij M^* een normale Γ_0 -vergroting van een volle normale structuur M . Laat B een gegeneraliseerd gekit stelsel van type $((\tau))$ zijn uit M . D.w.z. B is een familie verzamelingen met als elementen relaties van het type τ waarvan de eindige doorsneden niet leeg zijn. Dan is er een inwendige relatie F van type τ in M^* zodanig dat $F \in G^*$ voor iedere standaard G^* in B^* .

Bewijs: Duidelijk geldt $G^* \in B^* \iff G \in B$ waarbij G^* een standaard verzameling is en G en G^* door eenzelfde constante g worden aangegeven. Immers beide formules zijn equivalent met $\phi_{(\tau)}(b, g)$.

Bekijk de relatie R van type $((\tau), \tau)$ aangegeven door r voldaan door het paar (G, s) als s van type τ is en bevat is in G die van type (τ) is, en bevat is in B .

Deze relatie R is samenlopend want iedere eindige doorsnede van G is niet leeg. Er is dus een inwendige $F \in B_\tau^*$ met $(G^*, F) \in R^*$ voor iedere standaard G^* in het domein van R^* hetwelk juist B^* is.

Het voorkomen van niet standaard inwendige elementen:

Stelling: Zij R een verzameling in M van type (τ) . Dan bevat R^* een niet standaard inwendig element dan en slechts dan als R oneindig is.

Bewijs: a) Zij $R = 0$. Aangezien $0^* = 0$ volgt $R^* = 0$. Dus in dit geval bevat R geen niet standaard element.

Zij vervolgens R een eindige verzameling $R = (S_1, S_2, \dots, S_n)$
aangegeven door $r \quad s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_n$.

Dan geldt

$$\forall x [\phi_{(\tau)}(r, x) \supset [\phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, s_1, x) \vee \phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, s_2, x) \vee \dots \vee \phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, s_n, x)]].$$

Deze zin geldt ook voor R^* . Ook R^* bevat dus alleen de n elementen $s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*$ en geen niet-standaard elementen.

Laat nu R een oneindige verzameling zijn. Dan is de relatie F_{τ} aangegeven door f_{τ} die is gedefiniëerd door

$$\phi_{(\tau, \tau)}(f_{\tau}, x, y) \equiv [\neg \phi_{(\tau, \tau)}(e_{\tau}, x, y) \wedge \phi_{(\tau)}(r, x) \wedge \phi_{(\tau)}(r, y)]$$

een samenlopende relatie F_{τ} met domein R .

Er is dus een element T in R^* met $(X^*, T) \in F_{\tau}$ voor iedere standaard X^* in R^* . T is dus een niet-standaard element van R^* .

Hiermede is het bewijs voltooid.

Deelstructuren en vergrotingen:

A is een verzameling en M is de volle structuur op A .

Zij A' een deelverzameling van A aangeduid door a' . Een deelstructuur M' op A' van M laat zich als volgt definiëren:

De relaties van type $(0, \dots, 0)$ zijn juist die relaties van het corresponderende type waarbij de elementen uit de domeinen van de relatie alle bevat zijn in A' . Dit geeft de verzameling $A'_{(0, \dots, 0)}$. Verder zij $A'_1, \dots, A'_n$ gedefiniëerd en $\tau = (\tau_1 \dots \tau_n)$ dan bestaat A'_τ juist uit al die relaties uit A_τ die alleen voldaan zijn voor n tuppels gekozen uit de respectievelijke A'_{τ_i} .

We definiëren nu een normale structuur M' als volgt:

$$M' = \{B'_\tau\} \quad \text{waarbij} \quad \phi[B'_\tau] = A'_\tau.$$

M' is opnieuw een volle structuur.

Zij M^* een vergroting van M . Dan geeft het element $a' \in B^*_{(0)}$ een verzameling A'^* aan.

Als boven kiezen we nu uit de (niet volle) structuur M^* alle relaties die betrekking hebben op de deelverzameling A'^* .

Op deze wijze vinden we een structuur $M'^{\sim} = \{B'_\tau\}$. $M'^{\sim}$ is weer normaal gedefiniëerd.

Nu zijn de $\phi[B'_\tau]$ alle inwendige verzamelingen die aangegeven worden door dezelfde constanten die de $\phi[B'_\tau]$ aangaven. Immers de definitie van de B'_τ en de $B'^{\sim}_\tau$ is in zinnen uit te drukken en deze zinnen zijn voor beide gevallen gelijkloidend.

Voorbeeld van zo'n zin: $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ en $\phi(a'_\tau) = A'_\tau$

$$(\forall_x) [\phi_{(\tau)}(a'_\tau, x) \equiv (\forall_{y,z}) [\phi_\tau(x, y, z) \supset [\phi_{(\tau_1)}(a'_{\tau_1}, y) \wedge \phi_{(\tau_2)}(a'_{\tau_2}, z)]]].$$

De aldus gevonden structuur $M'^{\sim}$ is geconstrueerd door middel van de vergroting $M^{\sim}$. Er blijkt ook rechtstreeks te gelden:

Stelling: $M'^{\sim}$ is een vergroting van M' .

Bewijs: Bekijk de verzameling K' van zinnen die toelaatbaar zijn en gelden in M' . Dit zijn in het algemeen geen zinnen uit $K = \mathcal{H}(M)$.

Wel is het mogelijk bij iedere zin in K' een equivalente zin in K aan te wijzen:

construeer een afbeelding $\mu: K' \rightarrow K$ als volgt.

$\mu(X) = X$ voor een atomaire formule X .

$\mu(X \vee Y) = \mu(X) \vee \mu(Y)$ en analoog voor andere connectieven

$$\mu(\exists(y) [Z(y)]) = \exists(y) [\phi_{(\tau)}(a'_\tau, y) \wedge Z(y)] \quad \text{waarbij } \tau \text{ het type van } y \text{ is in } Z(y)$$

(als y niet in $Z(y)$ voorkomt kan ik nemen $\tau = 0$).

$$\mu(\forall(y) [Z(y)]) = \forall(y) [\phi_{(\tau)}(a'_\tau, y) \supset Z(y)] \quad \tau \text{ gedefiniëerd als boven.}$$

De familie zinnen $\mu(K')$ is een familie toelaatbare geldende zinnen in M dus zij gelden ook voor $M^{\sim}$.

Hiernaast kan bewezen worden dat een toelaatbare zin X geldt in $M'^{\sim}$ dan en slechts dan als $\mu(X)$ geldt in $M^{\sim}$.

Voor deze bewijzen hoeft men alleen met volledige inductie de constructie van de zinnen te volgen. Vergelijk het overeenkomstig bewijs bij de typetransformatie. We vinden dus dat K' geldt voor $M'^{\sim}$.

Laat r' een relatie R uit een A'_T aangeven die samenlopend is.

$\tau = (\tau_1, \tau_2)$. Dan is R ook een samenlopende relatie uit A'_T . Bovendien kan het feit dat aan R alleen is voldaan voor paren elementen uit A'_{τ_1} en A'_{τ_2} door een zin X worden uitgedrukt.

In de vergroting is een element S met $R(R_1, S)$ voor iedere R_1 uit A'_{τ_1} waarvoor aan $R(R_1, R_2)$ voor een $R_2 \in A'_{\tau_2}$ is voldaan. De geldigheid van de zin X in M^* leert ons dat deze S gekozen kan worden uit $A'^*_{\tau_2}$.

Hieruit volgt het bestaan van een $s \in B'^*_{\tau_2}$ met $\phi_T(r', r_1, s)$ geldt voor iedere r_1 uit het oorspronkelijke domein van r' .

M'^* is dus inderdaad een vergroting van M' .

Uit deze stelling kunnen we afleiden dat een vergroting van de Reële getallen vanzelf een vergroting van de natuurlijke getallen induceert.

De conceptie deelstructuur laat zich in dit bewijs ook nog als volgt generaliseren:

In plaats van A'_0 als deelverzameling van A_0 te kiezen mogen we ook $A'_0 \subset A'_T$ veronderstellen. Dit heeft tot gevolg dat een element in de beide structuren een verschillend type krijgt.

Analoog aan het geval $A'_0 \subset A_0$ definiëren we M' als de volle normale structuur op A'_0 . Ieder element uit $M' = \{B'_T\}$ komt ook voor in $M = \{B_T\}$ met een type dat als volgt wordt verhoogd:

type 0 $\rightarrow$ type τ

als type $\tau_1 \rightarrow \tau'_1, \dots, \tau_n \rightarrow \tau'_n$ dan gaat type $(\tau_1 \dots \tau_n) \rightarrow (\tau'_1, \dots, \tau'_n)$.

Zij a'_0 de constante die A'_0 aangeeft en M^* een vergroting van M .

Een structuur M'^* wordt nu gevonden door uitgaande van de verzameling A'^*_0 al die relatie constanten uit M^* te kiezen die betrekking hebben op A'^*_0 volgens het reeds eerder toegepaste procédé, ermee rekening houdend dat het type dient te worden aangepast.

De uitspraak dat M'^* een vergroting is van M' geldt ook voor dit algemene geval.

Bij het geheel analoog verloopende bewijs dient alleen rekening gehouden te worden met het veranderende type der objecten.

Op deze wijze vindt men in een vergroting van de Reële getallen ook een vergroting voor de ruimte van de op $[a, b]$ Riemann-integreerbare functies, etc.

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker: Albert Verbeek.

Niet-standaard Rekenkunde en Niet-standaard Analyse

Laten N^* en R^* hogere orde niet-standaard modellen der natuurlijke en reële getallen, N en R , zijn, zoals in vb. 3 en 4 op blz. 23. We veronderstellen dat N^* en R^* normaal zijn, zodat, als $\phi(e_\tau)$ de identiteits-relatie van type τ in R of N is, $\phi^*(e_\tau)$ ook de identiteits-relatie van type τ in R^* , resp. N^* is (zie blz. 24).

Verder nemen we aan dat $N \subset N^*$, $R \subset R^*$ en ook dat $N^* \subset R^*$. Immers $N \subset R$, en volgens de stelling op blz. 29 is er dan een vergroting N^* van N met $N^* \subset R^*$. Deze vergroting is niet-standaard: in R dus ook in R^* geldt:

$$(\forall x)(\exists y)(\phi_{(0,0)}(<,x,y) \wedge \phi_{(0)}(v,y))$$

waarbij $\phi_{(0,0)}(<,x,y)$ geïnterpreteerd wordt als $\psi(x) < \psi(y)$ en $\phi_{(0)}(v,y)$ als: y is een natuurlijk getal, d.w.z. in R : $\psi(y)$ is een constante uit N ; in R^* : $\psi^*(y)$ is een constante uit N^* . We weten dat R^* oneindige getallen bevat, dus moet N^* ook oneindige getallen bevatten, dus is N^* niet-standaard.

Hoewel R , R^* , N , N^* etc. eigenlijk niet de verzamelingen der reële getallen, etc., zijn, zullen we toch soms $n \in N$, $r \in R^* \setminus R$ schrijven, en dan bedoelen: n is een standaard natuurlijk getal, r is een niet-standaard reëel getal, etc.

De tot nu toe bewezen modeltheorie kan aldus samengevat worden:

- 1) elk wiskundig begrip dat betekenis heeft in het systeem N , heeft ook betekenis in het systeem N^* ;
- 2) elke wiskundige uitspraak die geldt in N geldt ook in N^* , mits we relaties (dus ook functies, verzamelingen, e.d.) in die uitspraak in N , in N^* interpreteren als inwendige relaties (van hetzelfde type).

Denk b.v. aan het inductieaxioma; dan blijkt dat de verzameling N geen inwendige verzameling in N^* kan zijn.

- 3) Het systeem inwendige relaties heeft de volgende eigenschappen:
als S een inwendige n -plaatsige relatie is en $(S_1, \dots, S_n) \in S$,
dan zijn $S_1, \dots$ en S_n inwendig.
- 4) $\exists a \in N^* \forall n \in N \ a > n$.

Dezelfde eigenschappen 1) - 4) gelden als we overal voor $N: R$ en voor $N^*: R^*$ lezen.

Voor uitspraken in het systeem N^* of N (R^* of R) bedienen we ons in principe van de hogere orde taal Λ (blz. 14 def. 3). Vaak is het echter voldoende te vermelden dat een uitspraak in de taal Λ te formuleren is. Daarom, en om de formules makkelijker leesbaar te maken zullen we vaak een semiformele notatie gebruiken, zó dat daaruit direct blijkt dat een formulering in Λ ook mogelijk is.

Als e_τ , q , s b.v. de identiteitsrelatie van orde $\tau: =_\tau$, $<$, resp. $+$ voorstellen schrijven we i.p.v.:

$$[\Phi_{(0,0)}(e_0, a, b)] \quad : \quad a = b \text{ of } a =_0 b$$

$$[\Phi_{(0,0,0)}(s, a, b, c)] \quad : \quad c = a + b$$

en als a een functie f en v de functie $||$ is, i.p.v.:

$$[\Phi_{(0,0)}(a, b, c) \wedge \Phi_{(0,0)}(v, c, d)] \quad : \quad d = |f(b)|.$$

We moeten wel opletten, dat de formules als steeds gelaagd verondersteld zijn, dus als we schrijven:

$$(\forall a)(\forall b) [a =_0 b \implies b =_0 a]$$

bedoelen we

$$(\forall a)(\forall b) [\Phi_{(0,0)}(e_0, a, b) \implies \Phi_{(0,0)}(e_0, b, a)].$$

In bewijzen van stellingen zullen we vaak gebruik maken van het volgende lemma:

Lemma 1. Als $X \in \mathcal{K}(M^*)$ en X is toelaatbaar in M (d.w.z. in X komen geen niet-standaard constanten of relaties voor), dan is X waar in M^* dan en slechts dan als X waar is in M .

Bewijs. "dan" is zonder meer duidelijk.

"slechts dan": Stel dat het niet zo is dat X waar is in M , dus $X \notin \mathcal{K}(M)$, dus $\neg X \in \mathcal{K}(M)$, dus $\neg X \in \mathcal{K}(M^*)$, dus $X \notin \mathcal{K}(M^*)$. Tegenspraak.

We spreken af dat we alle individuen van N^* , R^* natuurlijke resp. reële getallen noemen. De individuen van R en N heten eindig of standaard, en die van $R^* \setminus R$ en $N^* \setminus N$ heten niet-standaard. Elementen die groter zijn dan alle standaard elementen heten oneindig. We zullen later zien dat alle individuen van $N^* \setminus N$, en sommige van $R^* \setminus R$ oneindig zijn.

We gaan nu eerst enkele eigenschappen van N^* bekijken.

1) N en $N^* \setminus N$ zijn uitwendige verzamelingen in N^* .

Bewijs: In N geldt:

$$(\forall x)(\forall z)((\theta_{(0)}(x) \wedge 1 \in x \wedge (y \in x \implies y + 1 \in x)) \implies z \in x).$$

Stel nu dat N een inwendige relatie, en a een oneindig getal in N^* is, dan geldt in N^* dus:

$$\theta_{(0)}(N) \wedge 1 \in N \wedge (y \in N \implies (y + 1) \in N)$$

$$\text{en} \quad (\theta_{(0)}(N) \wedge 1 \in N \wedge (y \in N \implies (y + 1) \in N)) \implies (a \in N)$$

dus $a \in N$. Tegenspraak.

In N geldt bovendien:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg \phi_0(x, z)) \equiv (\phi_{(0)}(y, z)))$$

dus in N en ook in N^* geldt: het complement van een inwendige (uitwendige) verzameling is een inwendige (uitwendige) verzameling. Dus ook $N^* \setminus N$ is uitwendig.

2) Voor alle $n \in N$ geldt: n is kleiner dan alle andere getallen (in N^*), behalve $1, 2, \dots, n-1$. Dus alle elementen van $N^* \setminus N$ zijn oneindig.

Opmerking. Deze zin kan niet zo in een zin van de taal Λ bij N^* geformuleerd worden daar N geen inwendige verzameling in N^* is.

Bewijs: In N , dus in N^* geldt voor ieder natuurlijk getal n :

$$(\forall x)(x = 0 \vee x = 1 \vee \dots \vee x = n \vee x > n).$$

3) Er is geen kleinste oneindig getal in N^* .

Bewijs: $(\forall a)(\exists b)(a \neq 0) \implies (a = b + 1) \wedge (b < a)$ geldt in N dus in N^* , dus in het bijzonder geldt voor elk oneindig getal a :
 $(\exists b)(a = b + 1) \wedge (b < a)$.

4) Het ordetype α van N^* is van de vorm

$$\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\theta$$

waarbij θ een dicht ordetype zonder eerste of laatste element is.

Bewijs: In N^* definiëren we de volgende relatie $\sim$: $a \sim b$ als $|a - b|$ eindig is.

Het is duidelijk dat dit een equivalentierelatie is. De relatie is uitwendig aangezien, omdat N een volle structuur is,

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\phi_{(0,0)}(x, \alpha, z) \equiv \phi_{(0)}(y, z))$$

in N , en dus in N^* geldt. Is x dus een in N en N^* gedefiniëerde en inwendige equivalentierelatie, dan zijn de equivalentieklassen dus ook inwendige verzamelingen. We weten dat de equivalentieklasse van t.o.v. $0 \in N$ is, dus uitwendig in N^* , zodat $\sim$ geen inwendige relatie kan zijn.

Als a een oneindig natuurlijk getal is, is de equivalentieklasse D_a van a t.o.v. $\sim$ de verzameling $\{\dots, a-2, a-1, a, a+1, a+2, \dots\}$.

Nu geldt voor alle $n \in N$, $x \in D_a$:

$$n < x.$$

En er geldt: $\forall b' \in D_a, \forall b \in D_a, D_a \cap D_a = \emptyset \wedge a' < a \implies b' < b$, zoals gemakkelijk is in te zien.

Dus is $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\theta$.

We gaan nu θ nader bepalen:

In N dus in N^* geldt:

$$(\forall a)(2 \mid a \vee 2 \mid a+1).$$

Als D_a, D_b twee verschillende equivalentieklassen zijn en $a \notin N, b \notin N$, mogen we a en b dus even onderstellen, d.w.z. $(\exists a', b' \in N^*) (a = 2a' \wedge b = 2b')$.

Het is duidelijk dat $a' \notin N$, $b' \notin N$, en $a-a' \notin N$. Dus $D_{a'} < D_a < D_{2a}$ (d.w.z. voor alle $x \in D_{a'}$, $y \in D_a$, $z \in D_{2a}$ $x < y < z$). Dus θ heeft geen eerste of laatste element.

Ook geldt: $a < b \vee a = b \vee a > b$. Onderstel $a < b$. Dan is $a' + a' = a < a' + b' < b = b' + b'$, en eveneens $a' + b' - a \notin N$, $b - a' + b' \notin N$, dus:

$$D_a < D_{a'+b'} < D_b.$$

Dus θ is ordetype van een overal dichte verzameling.

5) p noemen we priem in N^* als

$$(\forall q)(\forall q')((qq' = p) \implies (q = 1 \vee q = p)).$$

Het is duidelijk dat priemgetallen in N ook in N^* priem zijn: we beschouwen de uitbreiding p^* in N^* van de 1 plaatsige relatie P der priemgetallen in N . De (uitgebreide) verzameling priemgetallen is dan ook inwendig. Hij bevat ook niet-standaard getallen:

$$(\forall n)(\exists p)(p \in P \wedge n < p) \text{ geldt in } N, \text{ dus}$$

$$(\forall n)(\exists p)(p \in P^* \wedge n < p) \text{ geldt in } N^*.$$

Elk natuurlijk getal is, afgezien van de volgorde op 1 manier te schrijven als product van eindig veel priemgetallen.

Deze zin is in Λ (met interpretatie in N) te beschrijven, en geldt dus ook in N^* , mits we "eindig veel" vervangen door het zwakkere:

"een aantal $n \in N^*$ ". Dat we "eindig" niet kunnen handhaven blijkt aldus:

Zij $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ naar grootte geordend dan heeft de rij (= relatie van type $(0,0)$) $Q = \{\prod_{k=1}^i p_k\}_i$ een voortzetting $Q^* = \{r_n\}$ in N^* . Dus

voor alle eindige i : $r_i = \prod_{k=1}^i p_k$. In N geldt:

$$(\forall n)(\forall m)(m < n \implies (p_m \mid r_n \wedge p_m^2 \nmid r_n)),$$

dus dit geldt ook in N^* , en voor $n \in N^* \setminus N$ is r_n dan deelbaar door alle eindige priemgetallen.

Veel van wat voor N^* gezegd is kan ook op R^* toegepast worden, terwijl we al onderstelden dat $N^* \subset R^*$. (Alle inwendige verzamelingen en relaties in N^* zijn dus ook inwendig in R^*). Over de structuur van de (vergrote) verzameling der reële getallen valt o.a. het volgende op te merken:

R^* is een geordend lichaam, daar R dit is;

R^* is niet-archimedisch:

$$(\forall k)(\forall l)(\exists n) \in (n \in N \wedge ((k > 0 \wedge l > 0) \implies (nk - l > 0))),$$

geldt wel in R , en dus met N^* i.p.v. N ook in R^* , maar daar hoeft n niet eindig te zijn: voor elk eindig getal n en een willekeurig oneindig getal a in R geldt immers $(n \cdot 1 - a < 0)$.

Eerst geven we nu enkele definities:

In R^* definiëren we: $|a| \begin{cases} = a & \text{als } a \geq 0 \\ = -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$

dan is deze functie de uitbreiding van de absolute waarde in R , dus inwendig.

$a \in R^*$ heet eindig als er een $n \in R$ is met $|a| < n$, $n \in N$.

$a \in R^*$ heet oneindig als a niet eindig is.

$a \in R^*$ heet infinitesimaal of oneindig klein als voor elk positief standaard getal ε $|a| < \varepsilon$.

Als $a-b$ infinitesimaal is zeggen we: a en b zijn bijna gelijk, en we schrijven $a \approx b$.

We merken op:

- a) De eindige getallen vormen een ring M_0 in R^* .
- b) a is oneindig $\equiv a^{-1}$ is infinitesimaal (dus M_0 is geen lichaam).
- c) De infinitesimale getallen vormen een ring M_1 in R^* ; M_1 is een ideaal in M_0 , en $M_0/M_1 \cong R$.

Bewijs van c:

Laat $A \in M_0/M_1$ (dus $A \subset R^*$). $A \cap R$ bevat dan hoogstens één element: als $r_1, r_2 \in A \cap R$ dan: $|r_1 - r_2| \in M_1$, dus voor alle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$:

$$|r_1 - r_2| < \varepsilon, \text{ dus } r_1 = r_2.$$

$A \cap R$ bevat minstens (dus precies) één element.

A is niet leeg, zij $a \in A$, beschouw $d = \inf D$, $D = \{x \mid x \in R, x \geq a\}$, ($d \in R$) (daar a eindig is, is er een $m \in R$ met $a \leq |a| < m$, dus D is niet leeg).

Als $d \in D$, dan is $d \geq a$ en voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$: $d - \varepsilon < a$

d.w.z. $|d - a| < \varepsilon$ voor elke standaard $\varepsilon > 0$

d.w.z. $(d - a) \in M_1$, dus $d \in A$.

Als $d \notin D$ dan geldt: $d \leq a$, en voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ geldt nu $d + \varepsilon > a$,
dus $|a - d| < \varepsilon$ dus $(a - d) \in M_1$, dus $d \in A$.

Voor elk eindig getal a in $\mathbb{R}^*$ noemen we het unieke reële getal b dat bijna gelijk is aan a , het standaard deel van a . Notatie: $b = {}^0a$.

We vonden dus $a \approx {}^0a = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (${}^0a \in \mathbb{R}$).

Voor elk getal a in $\mathbb{R}^*$ noemen we $\{x \mid x \approx a\}$ de monade van a . Notatie: $\mu(a)$.

Anders gezegd: $\mu(a)$ is de equivalentieklasse van a in $\mathbb{R}^*$ modulo M_1 , en M_0/M_1 bestaat uit alle monaden die tot M_0 behoren.

We gaan nu eerst van enige verzamelingen aantonen dat ze uitwendig zijn:

1) $\mathbb{R}$ is een uitwendige verzameling in $\mathbb{R}^*$.

Bewijs: Als A en B inwendige verzamelingen zijn in een structuur, dan is $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ ook inwendig. $\mathbb{N}^*$ is inwendig in $\mathbb{R}^*$, en $\mathbb{N}$ is niet inwendig in $\mathbb{R}^*$ (bewijs identiek met het bewijs in $\mathbb{N}^*$), en $\mathbb{N} = \mathbb{R} \cap \mathbb{N}^*$, dus $\mathbb{R}$ is niet inwendig in $\mathbb{R}^*$.

2) M_0 is een uitwendige verzameling.

Bewijs: $\mathbb{N} = M_0 \cap \mathbb{N}^*$, zie verder 1).

3) Voor alle $a \in \mathbb{R}^*$ is $\mu(a)$ een uitwendige verzameling.

Bewijs: Stel voor zekere a is $\mu(a)$ inwendig. Dan is ook $\mu(0) = \{b \mid b = c - a \wedge c \in \mu(a)\}$ inwendig, en dus is ook $\{x \mid x^{-1} \in \mu(0)\} = \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ inwendig, dan zou echter $\mathbb{R}$ inwendig zijn. Tegenspraak.

Convergentie

Laat $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een rij zijn in $\mathbb{R}$, d.w.z. een functie van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$.

Dan wordt $\{s_n\}$ in $\mathbb{R}^*$ voortgezet als $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: een functie van $\mathbb{N}^*$ naar $\mathbb{R}^*$; immers $\{s_n\}$ voldoet aan:

$$(\forall x)((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((\exists y)(\Phi_{(0,0)}(s, x, y)))) \wedge \\ \wedge (\forall x)(\forall y)(\exists z)((\Phi_{(0,0)}(s, x, y) \wedge \Phi_{(0,0)}(s, x, z)) \Rightarrow (y = z))$$

(waarbij $\Phi_{(0,0)}(s, x, y)$ 'betekent' dat $s_x = y$).

Voor elk eindig natuurlijk getal n is nu

$$\Phi_{(0,0)}(s, n, s_n) \in \mathcal{K}(R) \text{ dus } \in \mathcal{K}(R^*)$$

dus $s_n = s'_n$ in R^* . Derhalve kunnen we $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ zonder verwarring aangeven als $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, of zelfs als $\{s_n\}$ (in R^*). Nu is dus $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de restrictie van $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ tot R .

Stelling 1. De rij $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in R is begrensd, dan en slechts dan als de elementen van $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ in R^* alle eindig zijn.

Bewijs: i) slechts dan:

Er is een natuurlijk getal m zodat:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N})(|s_n| < m) & \text{ geldt in } R, \text{ dus} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)(|s_n| < m) & \text{ geldt in } R^*, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

(Het is misschien goed op te merken dat deze zinnen in formele notatie geschreven kunnen worden als:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\Phi_{(0,0)}(s, x, y) \wedge \Phi_{(0,0)}(\text{abs.}, y, z)) \implies (\Phi_{(0,0)}(<, z, m))).$$

ij) dan:

Voor elk positief oneindig getal r in R^* geldt:

$$(\forall n)(|s_n| < r)$$

dus $(\exists m)(\forall n)(|s_n| < m)$ geldt in R^* en dus volgens lemma 1 in R . q.e.d.

Stelling 2. Voor elke rij $\{s_n\}$ in R geldt:

$\{s_n\}$ heeft in R de limiet s , d.e.s.d. als in R^* voor alle oneindige n $s_n \approx s$.

Bewijs: slechts dan:

Voor elke $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ is er een $v \in \mathbb{N}$ zó dat $(\forall n)(n > v \implies |s_n - s| < \varepsilon)$ in R , dus in R^* geldt.

In R^* geldt dus voor elk oneindig getal $n \in \mathbb{N}^*$, $n > v$ dus $|s_n - s| < \varepsilon$, voor elke $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$. Dat is voor vaste n juist de definitie van $s_n \approx s$.

dan:

In R^* geldt voor elke $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$:

$$(\exists n)(\forall m)(m > n \implies |s_m - s| < \varepsilon).$$

Kies namelijk n willekeurig oneindig. Volgens lemma 1 geldt deze zin ook in R , hetgeen juist de definitie is van $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

We hebben, als $\lim s_n = s$, in $\mathcal{K}(R^*)$ behalve $s_n \approx s$ voor oneindige n , natuurlijk ook nog de zin:

$$(\forall \varepsilon)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*)((\varepsilon > 0 \wedge m > n) \implies |s_m - s| < \varepsilon),$$

daar de analoge zin in R geldt. Dit is de definitie van $\lim s_n = s$ in R^* . In R^* geldt dus:

Stelling 3. De standaard rij $\{s_n\}$ heeft limiet $s \leftrightarrow s \approx s_n$ voor alle oneindige n .

Met behulp van stelling 2 zijn enkele standaardstellingen (d.w.z. stellingen uit R) direct in te zien; bijvoorbeeld: $\lim s_n = s \wedge \lim t_n = t \implies s - s_n \in M_1 \wedge t - t_n \in M_1$ voor n oneindig $\implies (s - s_n) + (t - t_n) \in M_1$ voor n oneindig $\implies \lim (s_n + t_n) = s + t$, etc.

Stelling 4. Als $\{s_n\}$ in R een oneindige rij is, dan is de verzameling limietpunten van $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in R de verzameling $s' = \{s_n^0 \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}, s_n \text{ eindig}\}$.

Bewijs: $\implies$: Als s limietpunt van $\{s_n\}$ in R is, dan is $(\forall x)(\forall y)((x > 0) \implies ((\exists z)((z > y) \wedge (|s_z - s| < x)))$ waar in R , dus in R^* , dus als a een infinitesimaal positief getal is, en n een oneindig natuurlijk getal, is er een (oneindig) natuurlijk getal m , zó dat $m > n$ en $|s_m - s| < a$ d.w.z. $s = s_m^0$, en daar $|s_m| < |s| + 1$ is s_m ook eindig. Dus $s \in s'$.

$\Leftarrow$: Zij n een oneindig, natuurlijk getal, s_n eindig, dan is $|s_n^0 - s_n|$ infinitesimaal. Zij $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ en $v \in \mathbb{N}$, dan is dus

$$(\exists x)(x > v \wedge |s_n^0 - s_x| < \varepsilon) \text{ waar in } R^*,$$

dus in R volgens lemma 1 (in s_n^0 komt n namelijk niet voor: s_n^0 is een vast getal $\in R$). Daar dit voor elke $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ en $v \in \mathbb{N}$ geldt is s_n^0 dus een limietpunt van $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in R .

Voor een begrensde rij $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in R geldt nu volgens stelling 1 dat voor elke $n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ s_n eindig is, dus s_n bestaat, zodat s' niet leeg is. Dit bewijst de standaard stelling:

Gevolg. In R heeft elke begrensde oneindige rij een limietpunt.

Geheel analoog aan de zojuist ingevoerde uitbreiding van rijen, kunnen we ook dubbelrijen $\{s_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}^*}$ in R^* beschouwen. Een dubbelrij is dan een (inwendige) functie: $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow R^*$. Als $\{t_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}^*}$ de uitbreiding in R^* is van de dubbelrij $\{s_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ in R , schrijven we weer

$\{s_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}^*} = \{t_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}^*}$. In R (of R^*) heet s de limiet van de dubbelrij $\{s_{nm}\}$ (notatie: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{nm} = s$), als $(\forall \varepsilon)(\exists v \in \mathbb{N})(\varepsilon > 0 \wedge n > v \wedge m > v)$

$\implies (|s_{nm} - s| < \varepsilon)$. Geheel analoog aan het bewijs van stelling 2 verloopt het bewijs van:

Stelling 5. Als $\{s_{nm}\}$ een dubbelrij in R is, dan heeft $\{s_{nm}\}$ de limiet s , dan en slechts dan als voor alle oneindige m en n $s_{nm} \approx s$ (in R^*).

Dat de Cauchyvoorwaarde ($\lim_{m \rightarrow 0} (s_n - s_m) = 0$) voor de convergentie van een rij $\{s_n\}$ equivalent is met de uitspraak: $\{s_n\}$ convergeert, is in een zin in Λ uit te drukken, dus geldt ook in R^* . Gecombineerd met stelling 5 geeft dit direct:

Stelling 6. Een (inwendige) rij $\{s_n\}$ convergeert dan en slechts dan als in R^* voor alle oneindige m en n geldt dat $s_n \approx s_m$.

Opmerking: Dit geldt dus zowel voor een rij $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in R , als voor een standaard rij $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ in R^* .

Stelling 7. Als $\{s_n\}$ een inwendige rij in R^* is, en er is een reëel getal $m \in R^*$, zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ $|s_n| < m$, dan is er een getal $v \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \in \mathbb{N}^*$ $n < v \implies |s_n| < m$.

Bewijs: $(\forall s)(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\phi_{(0)}(y,z) \equiv (|s_z| \geq x))$

is een zin die geldt in R , dus ook

$$A = \{n \mid |s_n| \geq m\}$$

is een inwendige verzameling in R^* . Als deelverzameling van N^* heeft deze verzameling een kleinste element, daar N de analoge eigenschap heeft, die in Λ uit te drukken is. Dit kleinste element kan dienen als r uit het te bewijzen.

Stelling 8. Laat $\{s_n\}$ een inwendige rij in R^* zijn, zó dat voor zekere $m \in R^*$ en alle $n \in N^* \setminus N$ $|s_n| \leq m$. Dan is er een getal $r \in N$, zó dat $|s_n| \leq m$ voor alle $n > r$, $n \in N^*$.

Bewijs: Als boven is $A = \{n \mid |s_n| \leq m\}$ inwendig in R^* , dus bezit een kleinste element r . $A \supset N^* \setminus N$, $N^* \setminus N$ heeft geen kleinste element, dus $r \in N$. Het te bewijzen volgt nu gemakkelijk.

Stelling 9. Als $\{s_n\}$ een inwendige rij in R^* is, zó dat voor alle $n \in N$ $s_n \approx 0$, dan is er een $r \in N^* \setminus N$ zó dat voor alle $n < r$, $n \in N^*$ $s_n \approx 0$.

Bewijs: Met $\{s_n\}$ is ook $\{t_n\} = \{n \cdot s_n\}$ een inwendige rij met voor alle $n \in N$ $t_n \approx 0$, dus $|t_n| < 1$. Volgens stelling 7 is er nu een $r \in N^* \setminus N$ zó, dat voor alle $n < r$, $n \in N^*$ $|t_n| < 1$ d.w.z. $s_n < \frac{1}{n}$, d.w.z. ook voor $n \in N^* \setminus N$, $n < r$ geldt: $s_n \approx 0$.

Precies zo hebben we als gevolg van stelling.8:

Stelling 10. Laat $\{s_n\}$ een inwendige rij in R^* zijn, zo, dat s_n eindig is voor oneindige n . Dan is er een getal $r \in N$ zo, dat $n > r$, $n \in N^*$ $\implies s_n$ is eindig.

Bewijs: Met $\{s_n\}$ is ook $\{t_n\} = \{\frac{s_n}{n}\}$ een inwendige rij met voor alle $n \in N^* \setminus N$ $t_n \approx 0$, dus $|t_n| \leq 1$. Volgens nu stelling 8 is er een $r \in N$ zo, dat $n > r$, $n \in N^*$ $\implies |t_n| \leq 1$ dus $|s_n| \leq n$, hetgeen te bewijzen was.

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker: W. van den Camp

Continuïteit, differentiëren

Neem $f(x)$, gedefiniëerd op (a,b) , a, b standaard, f neemt op het differentie-interval waarden in R aan. f wordt in R bepaald door een binaire relatie, en de bijbehorende binaire relatie in R^* bepaalt een functie, die de uitbreiding van f is, en we schrijven ook daarvoor $f(x)$, $x \in R^*$, $x \in (a,b)$.

Stelling 11. $\lim_{x \uparrow b} f(x) = c$ dan en dan alleen als voor alle $x \approx b$ geldt:
 $f(x) \approx c$.

Bewijs: " $\rightarrow$ ":

bij elke positieve standaard ε bestaat er een positieve standaard h , zodat voor alle $x \in R^*$

$$a < x < b \text{ en } |x - b| < h \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Is nu $x \approx b$, dan is $|x - b|$ infinitesimal, dus $|f(x) - c| < \varepsilon$ voor elke stand. $\varepsilon > 0$ zodat $f(x) \approx c$.

" $\leftarrow$ ":

Kies $h > 0$, $h \approx 0$, dan geldt voor alle $\varepsilon > 0$, ε standaard:

$$(\forall x)(|x - b| < h \wedge a < x < b \implies |f(x) - c| < \varepsilon) \text{ in } R^*,$$

of: $(\exists y)(y > 0 \wedge (\forall x)(|x - b| < y \wedge a < x < b \implies |f(x) - c| < \varepsilon))$,

deze zin is volgens lemma 1 (blz. 32) ook waar in R .

Dus $\lim_{x \uparrow b} f(x) = c$.

We kunnen analoge stellingen formuleren voor $\lim_{x \uparrow a} f(x) = c$ en $\lim_{x \rightarrow d} f(x) = c$ ($a < d < b$).

Stelling 12. $f(x)$ is continu in standaardpunt x_0 , $a < x_0 < b$ dan en dan alleen als voor $x \approx x_0$ geldt: $f(x) \approx f(x_0)$.

De nodige en voldoende voorwaarde is equivalent met:

" f beeldt de monade van x_0 af in de monade van $f(x_0)$ ".

Stelling 13 (Standaard). Als $f(x)$ continu in $[a, b]$ en $f(a) < 0 < f(b)$ dan is er een c met $f(c) = 0$ ($c \in (a, b)$).

Bewijs: Neem $w \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, dan is $\{x_0, \dots, x_w\}$ met $x_j = a + (j/w)(b - a)$ een inwendige rij in $\mathbb{R}^*$.

$P = \{j; f(x_j) > 0\}$. P is niet leeg ($w \in P$), inwendig, en bezit een kleinste element, zeg p . Nu is $x_p - x_{p-1} = (1/w)(b - a)$, dus infinitesimaal. Dan geldt ${}_0x_p = {}_0x_{p-1} = c$.

Nu geldt volgens stelling 12: $0 \leq f(x_p) \approx f(c) \approx f(x_{p-1}) \leq 0$

$$\underbrace{f(c) \geq 0 \quad \quad \quad f(c) \leq 0}_{f(c) = 0} \quad (f(c) \in \mathbb{R})$$

Een standaardfunctie $f(x)$ heet begrensd, ($f(x)$ gedefiniëerd op (a, b) , a, b standaard) in $x_0 \in (a, b)$, als voor zekere standaard $h > 0$, $m > 0$:

$$(\forall x)(|x - x_0| < h \implies |f(x)| < m).$$

Stelling 14. $f(x)$ is begrensd in x_0 dan en slechts dan als $f(x)$ eindig is in de monade van x_0 in $\mathbb{R}^*$.

Bewijs: " $\rightarrow$ ": er is een standaard y en z zodat

$$(\forall x)(y > 0 \quad z > 0 \quad |x - x_0| < y \implies |f(x)| < z)$$

waar x is in $\mathbb{R}$, dus in $\mathbb{R}^*$, zodat in $\mathbb{R}^*$:

$$x \approx x_0 \implies |f(x)| < z.$$

" $\leftarrow$ ": $f(x)$ is eindig in de monade x_0 in $\mathbb{R}^*$.

Kies $h \approx 0$ en $m > 0$, oneindig. Dan is in $\mathbb{R}^*$: $(\forall x)(|x - x_0| < h \implies |f(x)| < m)$ waar. De zin $(\exists y)(\exists z)(\forall x)[|x - x_0| < y \implies |f(x)| < z]$ geldt dan in $\mathbb{R}^*$ dus ook in $\mathbb{R}$.

Stelling 15. $f(x)$ is continu in $x_0 \implies f(x)$ begrensd in x_0 ($f(x)$, x_0 als tevoren).

Bewijs: Er geldt: $(\forall x)(x \approx x_0 \implies f(x) \approx f(x_0))$ vanwege de continuïteit. x_0 is standaard, dus $f(x_0)$ standaard, dus eindig, en voor $x \approx x_0$ geldt dan: $f(x)$ is begrensd.

Neem f gedefiniëerd op $[a, b]$, a, b standaard, $x_0 \in (a, b)$, x_0 standaard. $k(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ is in $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$ gedefiniëerd voor alle $x \in (a, b)$ waarvoor $x \neq x_0$.

Stelling 16. Het standaardgetal c is de afgeleide van $f(x)$ in x_0 dan en alleen dan als $k(x) \approx c$ voor alle $x \neq x_0$ met $x \approx x_0$.

Stelling 17. Is $f(x)$ differentiëerbaar in x_0 in R , dan is $f(x)$ continu in x_0 .

Bewijs. $(\forall x)(x \neq x_0 \quad x \approx x_0 \implies f(x) - f(x_0) \approx c \cdot (x - x_0))$ waar $c = f'(x_0)$.

Dan geldt: voor $x \approx x_0$ ($x \neq x_0$) is $f(x) - f(x_0) \approx 0$.

"Differentiëerbaar in $x_0 \in (a,b)$ " is eenvoudig uit te breiden tot "differentiëerbaar in (a,b) ", en de gewone regels zijn m.b.v. stellingen 14, 15, 17 eenvoudig af te leiden.

Definitie. $f(x)$ heeft maximum in x_0 (in R) als er een standaard $h > 0$ is zodat

$$(\forall x)(|x - x_0| < h \implies f(x) \leq f(x_0)).$$

Stelling 18. $f(x)$ bezit een maximum in x_0 dan en alleen dan als $f(x) \leq f(x_0)$ voor alle $x \approx x_0$.

Stelling 19. Heeft $f(x)$ een maximum in het standaardpunt x_0 , en is $f(x)$ daar differentiëerbaar (x_0 is inwendig punt van het definitie-interval), dan is $f'(x_0) = 0$.

Stelling 20. Is $f(x)$ standaard, gedefiniëerd en continu in $[a,b]$, dan is er een standaard getal $c \in [a,b]$ zodat $f(c) \geq f(x)$ als $x \in [a,b]$.

Bewijs. In R geldt: iedere rij $\{r_0, \dots, r_n\}$ bevat een element r_i , zodat $r_i \geq r_j$ ($0 \leq j \leq n$).

Zij w in N^* en $a_j = a + (j/w)(b - a)$, dan geldt voor de rij $\{f(a_0), \dots, f(a_w)\}$: er is een $j \in N^*$, $j \leq w$ zodat $f(a_j) \geq f(a_i)$ voor $i \leq w$, etc. (Zie het bewijs van stelling 13.)

Stelling 21 (Rolle) (Standaard). Is $f(x)$ gedefiniëerd en continu op $[a,b]$ en differentiëerbaar in (a,b) , en $f(a) = f(b)$, dan is er een c , $c \in (a,b)$ zodat $f'(c) = 0$.

Stelling 22 (Middelwaardestelling). Is $f(x)$ gedefiniëerd, continu op $[a,b]$ en differentiëerbaar in (a,b) ($a \neq b$), dan is er een $c \in (a,b)$ met $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Deze stellingen, evenals de uitgebreide middelwaardestelling, zijn eenvoudig te bewijzen.

Integreren

Is $f(x)$ een standaardfunctie, continu in $a \leq x \leq b$, a en b standaard, $a < b$.

Een fijne verdeling van (a, b) is een rij $\{x_0, x_1, \dots, x_w\}$, $w \in \mathbb{N}^*$ met:
 $i < j \implies x_i < x_j$, $x_0 = a$, $x_w = b$ en $x_i - x_{i-1} \approx 0$.

Er zijn inwendige verdelingen, bv. die uit het bewijs van stelling 20.

Zij $\pi = \{x_0, \dots, x_w\}$ een inwendige verdeling, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_w\}$ een inwendige rij, zodat $x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+1}$ voor $j = 0, 1, \dots, w-1$, dan definiëren we:

$$S(\pi, \xi) = \sum_{j=1}^w f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

We kunnen nu een beroep doen op de standaard-theorie over integratie, ofwel bewijzen, dat ${}^0S(\pi, \xi)$ bestaat en dat de keuze van w niet ter zake doet, mits $w \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

In het eerste geval:

Stelling 23. Voor iedere inwendige verdeling en voor iedere ξ als genoemd geldt:

$$\int_a^b f(x)dx = {}^0S(\pi, \xi).$$

Bewijs. In R geldt:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \{x_i\}_{i=0}^n)[(\forall j < n)(x_0 = a \wedge x_n = b \wedge \\ & \wedge x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+1} \wedge |x_j - x_{j-1}| < \delta) \implies \left| \int_a^b f(x)dx - \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon]. \end{aligned}$$

Deze bewering geldt ook in R^* . Neemt men nu voor $\{x_i\}_{i=0}^n$ een fijne verdeling π dan geldt $x_j \approx x_{j-1}$, zodat

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^w f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

voor alle standaard $\varepsilon > 0$. Dus $\int_a^b f(x)dx \approx S(\pi, \xi)$.

Volgen we de tweede manier om de integraal in te voeren dan moeten we voor $S(\pi, \xi)$ aantonen (a) eindigheid en (b) onafhankelijkheid van π voor ${}^0S(\pi, \xi)$.

(a) $f(x)$ is op $[a, b]$ continu dus begrensd. Voor elke oneindige $r > 0$ geldt dan $|f(x)| < r$, dus $|S(\pi, \xi)| < r(b - a)$.

Hieruit volgt dat $|S(\pi, \xi)|$ kleiner is dan alle positieve oneindige getallen en dus eindig.

(b) Zij π' een verfijning van π , ξ' de bijbehorende rij en

$x_i < \xi'_k < \dots < \xi'_1 < x_{i+1}$, x_i, x_{i+1} punten van π .

Dan geldt voor alle v ($k \leq v \leq 1$) $f(\xi_v) \approx f(\xi_i)$ wegens de continuïteit van f .

Zij $m_i = \max_{k \leq v \leq 1} |f(\xi_i) - f(\xi_v)|$ en $m = \max_{0 \leq i \leq w} m_i$ (deze maxima

bestaan volgens de redenering in het bewijs van stelling 19) dan is

$m_i \approx 0$ en dus ook $m \approx 0$. Het is gemakkelijk na te gaan dat

$|S(\pi, \xi) - S(\pi', \xi')| \leq m(b - a)$ dus $S(\pi, \xi) \approx S(\pi', \xi')$.

De rest van het bewijs verloopt op de gebruikelijke wijze.

Stelling 24. Als $f(x)$ continu is op (a, b) dan bestaat $\int_a^x f(x)dx = F(x)$, en $F'(x) = f(x)$.

Bewijs. Is x_0 standaard, $a < x_0 < b$, en $h > 0$, standaard met $x_0 + h \leq b$,

dan is $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$.

Neem $x_j = x_0 + (j/w) \cdot h$, $0 \leq j \leq w$ en $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_w\}$ met $\xi_j = x_{j+1}$, dan:

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \left(\sum_{j=1}^w f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \right) = h \left(\frac{1}{w} \sum_{j=1}^w f(x_{j-1}) \right).$$

Stel $f(x)$ neemt op $|x_0, x_0+h|$ in ξ' , ξ'' het absolute maximum resp. minimum aan, dan:

$$f(\xi') \leq \frac{1}{w} \sum_{j=1}^w f(x_{j-1}) \leq f(\xi''), \text{ zodat } f(\xi') \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq f(\xi'').$$

Is h infinitesimaal, dan is $x_0 \approx \xi' \approx \xi''$, dus $f(\xi') \approx f(x_0) \approx f(\xi'')$,

zodat $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \approx f(x_0)$.

Is de standaardfunctie $f(x)$ gedefiniëerd en continu op $[a, \infty)$, a standaard, dan is m.b.v. stelling 6 eenvoudig te bewijzen:

Stelling 25. Nodig en voldoende voor het bestaan van $\int_a^\infty f(x)dx$ is, dat

$$\int_n^\zeta f(x)dx \approx 0 \quad \text{voor } \zeta, n > 0, \text{ oneindig.}$$

Stelling 26. $f(x)$ is gedefiniëerd en continu voor $x \geq a$, w is een vast getal $\in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Dan is er een oneindig positief getal b , zodat voor n, ζ met $a \leq n < \zeta \leq b$ geldt:

$$\int_n^\zeta f(x)dx \approx \frac{\zeta - n}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j), \text{ waar } x_{j+1} = \xi_j.$$

Bewijs. Is n eindig, dan geldt voor c, d willekeurig, $a \leq c < d \leq n \implies$

$$\left(\int_c^d f(x)dx - \frac{d-c}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \right) \approx 0, \text{ dus in } \mathbb{R}^* \text{ geldt:}$$

$$n. \left| \int_c^d f(x)dx - \left(\sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \right) \frac{d-c}{w} \right| < 1 \text{ als } x_j = c + (j/w)(d-c).$$

Noemen we deze bewering, waarin w door m wordt vervangen, $X(n, m)$, (waarbij $X(n, m)$ in de formele schrijfwijze van onze taal), dan geldt in $\mathbb{R}$: $(\forall m)[(\exists y) X(y, m) \implies (\exists z)((\forall x)((x < z) \implies X(x, m)) \wedge \neg X(z, m))]$ en deze zin geldt ook in $\mathbb{R}^*$, dus:

Als $X(y, w)$ geldt voor enige y , dan is er een $n_0 \in \mathbb{N}^*$, zodat n_0 het kleinste getal in $\mathbb{N}^*$ waarvoor $X(j, w)$.

Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt steeds $X(n, w)$, zodat, als n_0 bestaat, dan is $n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Neem $b = n_0 - 1$ als n_0 bestaat, anders willekeurig > 0 , en oneindig $\in \mathbb{R}^*$.

Steeds geldt dan: $\left| \int_c^d f(x)dx - \frac{d-c}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \right| < 1/n$, voor alle c, d

met $a \leq c < d \leq n$, dus voor $n = b$ geldt:

$$\int_c^d f(x)dx \approx \frac{d-c}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \text{ voor } a \leq c < d \leq b.$$

Stelling 27. Voor $f(x)$ als eerder genoemd, geldt: $\int_a^\infty f(x)dx$ bestaat dan en alleen dan als voor een oneindig natuurlijk getal w en voor een oneindig positief getal b in $\mathbb{R}^*$ geldt:

voor alle ζ, η met $\eta < \zeta \leq b$ en η, ζ oneindig, is $\frac{\zeta - \eta}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \approx 0$.

Bewijs. " $\Rightarrow$ ": voor alle positieve oneindige ζ, η geldt $\int_\eta^\zeta f(x)dx \approx 0$

volgens stelling 25. Is w willekeurig uit $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ en b als in de vorige stelling, dan:

$$\text{als } a \leq \eta < \zeta \leq b \text{ dan } \frac{\zeta - \eta}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \approx \int_\eta^\zeta f(x)dx.$$

Dus voor η, ζ oneindig is

$$\frac{\zeta - \eta}{w} \sum_{j=0}^w f(x_j) \approx 0.$$

" $\Leftarrow$ ": Neem aan dat de voorwaarde vervuld is.

Voor de gegeven w en voor voldoende kleine $b' > 0$, b' oneindig, geldt

$$\frac{\zeta - \eta}{w} \sum_{j=0}^{w-1} f(x_j) \approx \int_\eta^\zeta f(x)dx \text{ voor } a \leq \eta < \zeta \leq b'.$$

dus: voor alle η, ζ (oneindig) als $\eta < \zeta < \min(b, b')$ dan $\int_\eta^\zeta f(x)dx \approx 0$.

Voor willekeurige standaard $\epsilon > 0$ en $p \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ geldt dan:

$$\text{als } p \leq \eta < \zeta \leq \min(b, b') \text{ dan } \left| \int_\eta^\zeta f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Noem P de verzameling van alle $p \in \mathbb{N}^*$ waarvoor dit geldt. P is inwendig, dus bevat een kleinste element, dat eindig moet zijn, zodat

$$(\forall \epsilon)(\exists n)(\forall \eta)(\forall \zeta)(n \leq \eta < \zeta \leq \min(b, b') \implies \left| \int_\eta^\zeta f(x)dx \right| < \epsilon).$$

Dus: zijn η, ζ standaard, dan geldt: als $n \leq \eta < \zeta$ dan $\left| \int_\eta^\zeta f(x)dx \right| < \epsilon$.

Dit is waar in $\mathbb{R}^*$, dus in $\mathbb{R}$, maar daar is het nodig en voldoende voor convergentie.

Stelling 28. $\{s_n\}$ is een standaard oneindige rij.

Als er een $v \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^*$ is zodat $s_n \approx 0$ voor alle $n < v$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ in $\mathbb{R}$.

De eis van deze stelling is zwakker dan die uit stelling 3, het bewijs gebruikt de methode uit het tweede deel van het bewijs van stelling 27.

Differentialen

$\{a_1, \dots, a_n\}$ is steeds een verzameling getallen uit $\mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$,

$a = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$.

We definiëren $O(a_1, \dots, a_n) = \{r_1 a_1 + \dots + r_n a_n; r_i \in M_0 \text{ voor } 1 \leq i \leq n\}$

$o(a_1, \dots, a_n) = \{r_1 a_1 + \dots + r_n a_n; r_i \in M_1 \text{ voor } 1 \leq i \leq n\}$.

(M_0 is de verzameling van alle eindige getallen uit $\mathbb{R}^*$, M_1 die van alle infinitesimale).

Het is duidelijk, dat $O(1) = M_0$, $o(1) = M_1$, $O(a_1, \dots, a_n) = O(a)$

(idem voor o).

$O(a)$ en $o(a)$ zijn additieve groepen.

Neem een afbeelding ϕ zodat $\phi(m) = ma$, dan is ϕ een isomorfisme

$M_0 \rightarrow O(a)$, en ook $M_1 \rightarrow o(a)$.

Dan is $O(a)/o(a)$ isomorf met de additieve groep $\mathbb{R}$.

Is $y = f(x)$ een inwendige functie, gedefiniëerd in (a, b) met (a, b)

standaard, en is $dx > 0$ infinitesimaal, dan definiëren we:

$dy = df = f(x + dx) - f(x)$. Algemeen: $d^0 y = y$, $d^n y = d(d^{n-1} y)$,

gedefiniëerd op $a < x < b - n \cdot dx$.

Zijn x , $f(x)$ standaard, $x \in (a, b)$ dan geldt:

als $f(x)$ differentiëerbaar in x dan geldt $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$.

Onder nader te bepalen omstandigheden blijkt

$\frac{d^n y}{dx^n} \approx f^{(n)}(x)$ te gelden, hetgeen impliceert dat $(d^n y/dx^n) - f^{(n)}(x) \in o(1)$.

Dan geldt ook: $d^n y - f^{(n)}(x) dx^n \in o(dx^n)$, dus $d^n y \approx f^{(n)}(x) \bmod o(dx^n)$.

Stelling. Bezit $f(x)$ binnen het definitie-interval $[a, b]$ continue n^e orde afgeleiden, a, b, n, f standaard, dan geldt voor eindige reële x met $0 < x \in (a, b)$: $d^n y/dx^n \approx f^{(n)}(x)$ en $d^n y \approx f^{(n)}(x) dx^n \bmod o(dx^n)$.

Bewijs. Voor $a < x < x+nh < b$ in R geldt volgens de klassieke gegeneraliseerde middelwaardestelling:

$$(\exists \theta)(0 < \theta < 1) \wedge \frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x+n\theta h)$$

waar $\Delta^n f(x)$ de n^e differentie is.

Dit geldt in R , dus in R^* . Neem $h = dx^n$, dan wordt $\Delta^n f(x) = d^n y$, en

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x + n\theta dx) \quad (0 < \theta < 1).$$

Bovendien geldt: $^0x \in (a, b)$, $f^{(n)}(x)$ continu in 0x dus $f^{(n)}(^0x) \approx f^{(n)}(x) \approx f^{(n)}(x + n\theta dx)$, dus $(d^n y/dx^n) \approx f^{(n)}(x)$.

Totale differentiaal

Zij $f(x_1, \dots, x_n)$ een functie van n variabelen in R , $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ een punt zodat het gebied bepaald door $\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 \leq r^2$ geheel binnen het domein van f ligt. Deze functie f kan tot R^* worden uitgebreid.

Stelling. Is $f(x_1, \dots, x_n)$ als genoemd, en continu in $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ dan: als $\{(x'_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x'_n - \xi_n)^2\}^{\frac{1}{2}} \approx 0$ dan $f(x'_1, \dots, x'_n) \approx f(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Stelling. $f(x_1, \dots, x_n)$ is een standaardfunctie, die continue eerste afgeleiden bezit binnen het genoemde definitiegebied om $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, (ξ_i, r) standaard. Noem $(x'_1, \dots, x'_n) = x'$, x' binnen het definitie-interval, dan:

$$\text{als } ^0x'_i = \xi_i \quad (1 \leq i \leq n) \text{ en } dx_1, \dots, dx_n \text{ allen } \approx 0$$

$$\text{dan } df \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x'} dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{x'} dx_n \text{ mod } o(dx_1, \dots, dx_n)$$

$$\text{waarbij } df = f(x'_1 + dx_1, \dots, x'_n + dx_n) - f(x'_1, \dots, x'_n).$$

Bewijs. $(x'_1, \dots, x'_n)$, $(h_1, \dots, h_n)$ zijn standaard, zodat $(x'_1 + h_1, \dots, x'_n + h_n)$ in het definitie interval. Noem $f(x'_1 + h_1 t, \dots, x'_n + h_n t) = g(t)$, dan is

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \quad (x_i = x'_i + h_i t).$$

De middelwaardestelling geeft dan:

$$g(1) - g(0) = f(x'_1 + h_1, \dots, x'_n + h_n) - f(x'_1, \dots, x'_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) h_1 + \dots \\ \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) h_n,$$

waar de partiële afgeleiden in het punt $(x'_1 + \theta h_1, \dots, x'_n + \theta h_n)$ ($0 < \theta < 1$) zijn genomen.

In $\mathbb{R}^*$ kiezen we $(x'_1, \dots, x'_n)$ zodat $x'_i = \xi_i$, we nemen $h_i = dx_i \approx 0$, niet allen gelijk aan 0.

$df = f(x'_1 + dx_1, \dots, x'_n + dx_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)$ (de totale differentiaal) voldoet aan:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 dx_n + \sum_{i=1}^n r_i dx_i \text{ waar } r_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\theta - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0.$$

Alle r_i zijn infinitesimaal: is $(\partial f / \partial x_i)_\xi$ de partiële afgeleide van $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ dan is volgens de vorige stelling:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\xi \text{ als } (\sum (x'_i - \xi_i)^2)^{\frac{1}{2}} \approx 0,$$

en evenzo $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\theta \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\xi$, zodat $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\theta$, dus $r_i \approx 0$.

Dan is ook $r_1 dx_1 + \dots + r_n dx_n \in o(dx_1, \dots, dx_n)$, dus

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 dx_n \text{ mod } o(dx_1, \dots, dx_n).$$

Elementaire differentiaalmeetkunde

Een kurve K in een driedimensionale ruimte met reële assen (standaard), wordt bepaald door $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ met $0 \leq t \leq 1$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ bezitten continue afgeleiden van $t \in [0, 1]$.

Bij overgang naar $\mathbb{R}^*$ kiezen we een positief infinitesimaal getal dt , en dan geldt $dx = x(t + dt) - x(t)$, etc.

Zij $P = (x(t), y(t), z(t))$ en $P' = (x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt))$ dan is de lengte van koorde PP' : $ds = |(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}|$.

Een punt P heet standaard, als de coördinaten van $P = (x, y, z)$ standaard zijn. Zijn A, B twee standaardpunten op K , met resp. $t = a$ en $t = b$, $0 < a < b < 1$, a en b standaard, dan bepalen we het polygoon $P_0, \dots, P_w$ als volgt:

$P_j = (x(t_j), y(t_j), z(t_j))$ en $t_j = a + j \, dt = a + j \left(\frac{b-a}{w}\right)$, $w \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, w vast. We nemen $d(x_j) = x(t_{j+1}) - x(t_j)$ ($j \leq w-1$) etc., zodat de koorde $P_j P_{j+1}$ een lengte $ds_j = \{d(x_j)^2 + d(y_j)^2 + d(z_j)^2\}^{\frac{1}{2}}$ heeft.

Dan is de lengte l van het polygoon:

$$l = \sum_{j=0}^{w-1} ds_j = \sum_{j=0}^{w-1} \left\{ \left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt \quad (\text{we nemen verder}$$

steeds de positieve wortel).

De lengte van boog K van A tot B wordt door l bepaald; we kunnen dit beschouwen als definitie, of afleiden, uitgaande van de definitie uit R. We gaan het eerste geval na.

Volgens de middenwaardestelling geldt: $dx_j = x(t_{j+1}) - x(t_j) = x'(t_j + \theta dt)$ ($0 < \theta < 1$), en vanwege de continuïteit van $x'(t)$: $x'(t_j + \theta dt) \approx x'(t_j)$ dus $(dx_j/dt) \approx x'(t_j)$, etc., dus

$$ds_j = \{(x'(t_j) + \xi_j)^2 + (y'(t_j) + \eta_j)^2 + (z'(t_j) + \zeta_j)^2\}^{\frac{1}{2}} dt = \\ = \{x'(t_j)^2 + y'(t_j)^2 + z'(t_j)^2 + \rho_j\}^{\frac{1}{2}} dt. \quad (\xi_j, \eta_j, \zeta_j, \rho_j \text{ zijn infinitesimaal}).$$

Dan is er een $\sigma_j \approx 0$ zodat $ds_j = \{(x'(t_j)^2 + y'(t_j)^2 + z'(t_j)^2)\}^{\frac{1}{2}} + \sigma_j\} dt$.

Is nu $\sigma = \max_{0 \leq j \leq w-1} |\sigma_j|$, dan is

$$l = \sum_{j=0}^{w-1} ds_j = \sum_{j=0}^{w-1} \sqrt{w(t_j)} dt + \sum_{j=0}^{w-1} \sigma_j dt \quad \text{waar } w(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2.$$

$$\left| \sum_{j=0}^{w-1} \sigma_j dt \right| \leq \sum_{j=0}^{w-1} |\sigma| dt = \sigma(b-a) = \tau, \text{ en } \sigma \text{ infinitesimaal, dus ook } \tau.$$

Dus is er een $\lambda \approx 0$ zodat $l = \sum_{j=0}^{w-1} (w(t_j))^{\frac{1}{2}} dt + \lambda$. $\sqrt{w(t)}$ is continu in $[a, b]$ dus

$$\left(\sum_{j=0}^{w-1} (w(t_j))^{\frac{1}{2}} dt \right) = \int_a^b \sqrt{w(t)} dt, \text{ zodat}$$

$$l = \int_a^b \{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2\}^{\frac{1}{2}} dt. \quad \text{q.e.d.}$$

Bepaling van de raaklijn aan K ; stel $w(t) \neq 0$ binnen het definitie-interval. $P = (x_0, y_0, z_0)$ met $x_0 = x(t_0)$ etc, t_0 standaard en $0 < t_0 < 1$. $dt \approx 0$, we nemen verder $x_1 = x(t_0 + dt)$ etc, $dx = x_1 - x_0$, etc., en wel zo, dat $Q = (x_1, y_1, z_1)$ ook op de curve door P ligt. Dan is $PQ = \Delta = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \{(x'(t_0 + \theta_1 dt))^2 + (y'(t_0 + \theta_2 dt))^2 + (z'(t_0 + \theta_3 dt))^2\}^{\frac{1}{2}} dt$ en $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 1)$. Vanwege de continuïteit van $x'(t), y'(t), z'(t)$ geldt: $\Delta/dt \approx (w(t_0))^{\frac{1}{2}}$, dus Δ/dt is niet infinitesimaal.

In parametervoorstelling is de bepaling van de rechte door P en Q als volgt:

(1) $x = x_0 + \frac{dx}{\Delta} \tau$, $y = y_0 + \frac{dy}{\Delta} \tau$, $z = z_0 + \frac{dz}{\Delta} \tau$, waaruit blijkt, dat

$$\frac{dx}{\Delta} \approx \frac{x'(t_0)}{(w(t_0))^{\frac{1}{2}}} \text{ etc.}$$

Voor standaardwaarde van τ ligt het punt, bepaald door (1) infinitesimaal dicht bij dat, bepaald door

$$(2) x = x_0 + \frac{x'(t_0)}{(w(t_0))^{\frac{1}{2}}} \tau \text{ etc.}$$

Algemener: het punt, bepaald door (1) voor willekeurige eindige τ is bijna gelijk aan dat, bepaald door (2) voor ${}^0\tau$.

Nemen we (3): $x = \xi + \alpha\tau'$, $y = \eta + \beta\tau'$, $z = \zeta + \gamma\tau'$, waar $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ standaard, en α, β, γ zijn richtings-cosinussen, en τ' is een parameter. Stel dat voor iedere eindige waarde van τ in (1), het bepaalde punt bijna gelijk is aan een standaardpunt, bepaald door (2).

Als $\tau = 0$ in (1) correspondeert met $\tau' = \tau'_0$, dan is $x_0 = \xi + \alpha\tau'_0$, etc., dus (3) wordt:

$$x = x_0 + \alpha(\tau' - \tau'_0), \text{ etc.}$$

Stel, $\tau = 1$ correspondeert met $\tau' = \tau'_1$, dan:

$${}^0\left(\frac{dx}{\Delta}\right) = \alpha(\tau'_1 - \tau'_0), \text{ etc.}$$

Dit geeft dan $(\tau'_1 - \tau'_0)^2 = 1$, dus $\alpha = {}^0(\frac{dx}{\Delta})$, $\beta = {}^0(\frac{dy}{\Delta})$, $\gamma = {}^0(\frac{dz}{\Delta})$,
 wanneer we m.b.v. de parameter voor het +-teken zorgen.

Dan is ${}^0(dx/\Delta) = \frac{x'(t_0)}{(w(t_0))^{\frac{1}{2}}}$ etc., zodat (2) en (3) gelijk zijn.

De tangent door P aan K wordt dan bepaald (of gedefiniëerd) als de unieke rechte l in R, zodat voor ieder eindig punt p op de rechte door P en Q (Q bijna gelijk P) een punt q op l bestaat, dat oneindig dicht bij p ligt.

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker E. Wattel

Niet-standaard Topologie

§ 1. Standaard en niet standaard topologische ruimten

Definitie 1 (standaard) Een topologische ruimte is een verzameling X , tezamen met een uitgekozen stelsel van deelverzamelingen $\mathcal{T}$, dat voldoet aan de eigenschappen:

1e. $X \in \mathcal{T}$

2e. $\emptyset \in \mathcal{T}$

3e. Als $A \in \mathcal{T}$ en $B \in \mathcal{T}$ dan ook $A \cap B \in \mathcal{T}$

4e. Als $\mathcal{Y} \subset \mathcal{T}$ dan is ook $\bigcup \{ U \mid U \in \mathcal{Y} \} \in \mathcal{T}$

In de standaard topologie is het gebruikelijk om de structuur als vol te beschouwen, wat aanvankelijk wil zeggen, dat alle deelverzamelingen en alle verzamelingen van deelverzamelingen enzovoort zonder extra aannamen in de beschouwingen kunnen worden opgenomen.

Om tot de niet-standaard topologie over te gaan, zullen we moeten bekijken, op welke wijze dan de vergroting van $(X, \mathcal{T})$ zal kunnen worden gedefinieerd.

Expliciet: We nemen aan:

Er is een taal $\mathcal{L}$ met een deelcollectie K , zodanig dat K alle zinnen bevat die gelden in $(X, \mathcal{T})$, waarmee we bedoelen een volle structuur $(X, \mathcal{T})$ met een uitverkoren element $\mathcal{T} \in X_{(0)}$ dat voldoet aan 1e, 2e, 3e, 4e.

Uit blz. 11-20 volgt, dat als de verzameling K een model heeft, $(X, \mathcal{T})$ dan zijn ook vergrotingen van $(X, \mathcal{T})$ modellen van K , en in het bijzonder de vergroting t.o.v. alle samenlopende relaties. Noemen we deze vergroting $(X^*, \mathcal{T}^*)$ dan heeft $(X^*, \mathcal{T}^*)$ de eigenschap, dat elke samenlopende relatie in $(X, \mathcal{T})$ een inwendig object in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ definieert, dat niet in $(X, \mathcal{T})$ aanwezig was, die bovendien

een naam krijgt, in $H \sqcup K$.

Het is duidelijk dat een zin, die formuleerbaar is in $\Lambda((X, \mathcal{T}))$, dan en slechts dan geldt in $(X, \mathcal{T})$ als zij ook geldt in $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Nu bezien we eerste de zinnen uit K , die garanderen dat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is.

- 1) $\phi_{((0))}(\mathcal{T}, X)$ (X zit in $\mathcal{T}$, oftewel X is open)
- 2) $\phi_{((0))}(\mathcal{T}, \phi)$ (ϕ zit in $\mathcal{T}$, oftewel ϕ is open)
- 3) $(\phi_{((0))}(\mathcal{T}, U) \wedge \phi_{((0))}(\mathcal{T}, V)) \rightarrow \phi_{((0))}(\mathcal{T}, U \cap V)$.
(Als U open is en V is open, dan is ook $U \cap V$ open. $U \cap V$ is apart te definieren als $(\forall p) \phi_{(0)}(U \cap V, p) \equiv (\phi_{(0)}(U, p) \wedge \phi_{(0)}(V, p)).$)
- 4) $(\forall \mathcal{Y})(\forall U)(\forall W)(\forall p) (\phi_{((0))}(\mathcal{Y}, U) \rightarrow \phi_{((0))}(\mathcal{T}, U)) \rightarrow ((\phi_{(0)}(W, p) \equiv (\exists V)(\phi_{((0))}(\mathcal{Y}, V) \wedge \phi_{(0)}(V, p))) \rightarrow \phi_{((0))}(\mathcal{T}, W)).$
(Als $\mathcal{Y}$ een deelcollectie van $\mathcal{T}$ is, dan is de verzameling W , die de vereniging is van alle elementen van $\mathcal{Y}$, een verzameling uit $\mathcal{T}$).

Deze formules zitten in K , en daarom zijn de formules ook waar voor $(X^*, \mathcal{T}^*)$. In de taal Λ bestaat echter de $*$ niet, en symbolen met of zonder ster, zijn identieke symbolen in K .

De formules voor $(X^*, \mathcal{T}^*)$ zijn door het plaatsen van sterren te verkrijgen uit de formules voor $(X, \mathcal{T})$. Als voorbeeld:

$$4^*). (\forall \mathcal{Y})(\forall U)(\forall W)(\forall p) (\phi_{((0))}(\mathcal{Y}, U) \rightarrow \phi_{((0))}(\mathcal{T}^*, U)) \rightarrow ((\phi_{(0)}(W, p) \equiv (\exists V)(\phi_{((0))}(\mathcal{Y}, V) \wedge \phi_{(0)}(V, p))) \rightarrow \phi_{((0))}(\mathcal{T}^*, W)).$$

Hierbij lopen de variabelen over de objectsymbolen van $H \sqcup$. Dit impliceert dat hier in 4^* alleen een eis staat voor die stelsels open verzamelingen, die te formuleren zijn in $H \sqcup$. Een vast voor-gekozen punt p uit $(X, \mathcal{T})$, gaat in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ over in een punt, want het is formuleerbaar in Λ , dat het kardinaalgetal van de verzameling $\{p\}$ precies 1 is, en zo gaat ook elke eindige verzameling over in een verzameling met eindig veel elementen. Het is echter binnen $H \sqcup$ niet uit te maken, op p in $(X, \mathcal{T})$ voorkomt of niet.

Een verzameling U uit $(X, \mathcal{T})$ zal overgaan in een verzameling U^* uit $(X^*, \mathcal{T}^*)$, die echter niet steeds behoeft te bestaan uit de verzameling van punten van $(X, \mathcal{T})$, die erin bevat zijn, want bij een oneindige verzameling is steeds de samenlopende relatie:

$$(\forall p_1)(\forall p_2) \dots (\forall p_n)(\phi_{(0)}(U, p_1) \wedge \dots \wedge \phi_{(0)}(U, p_n)) (\exists q)(\phi_{(0)}(U, q) \wedge \wedge \phi_{(0,0)}(\neq_0, p_1, q) \wedge \dots \wedge \phi_{(0,0)}(\neq_0, p_n, q))$$

wat betekent, dat bij elk eindig aantal punten uit U , er steeds een punt is aan te wijzen, ongelijk aan elk van het eindige aantal, dat toch in U ligt, wat impliceert, dat er ook een punt is in U^* , dat ongelijk is aan alle standaard punten van U .

Op volkomen dezelfde wijze zit in elk oneindig stelsel (open) standaardverzamelingen $\mathcal{V}$ uit $(X, \mathcal{T})$ in $\mathcal{V}^*$ uit $(X^*, \mathcal{T}^*)$ een niet-standaardverzameling.

In het bijzonder is voor de niet-standaard topologie de verzameling van alle open omgevingen om een vast voorgekozen punt belangrijk.

Zij p een punt uit $(X, \mathcal{T})$. De verzameling $\mathcal{O}_p$ van alle open omgevingen van p is gedefinieerd en heeft een naam in K .

De doorsnede van elk eindig aantal open verzamelingen uit $(X, \mathcal{T})$ bevat weer een open verzameling uit $(X, \mathcal{T})$, wat dus voor $(X^*, \mathcal{T}^*)$ betekent: Er is een verzameling W^* , die een open omgeving is van p , en die bevat is in alle U^* , die de vergroting zijn van zekere U uit $\mathcal{O}_p$.

We kunnen nu gaan beschouwen de verzameling van alle standaard open verzamelingen van p , ook al is dit niet mogelijk binnen de taal .

De doorsnede hiervan noemen wij de monade van p , en die bevat dus een inwendige omgeving van het punt p . Wij noteren de monade van een standaardpunt p als $\mu(p)$, en we hebben dus bewezen, het:

Lemma: Binnen de monade $\mu(p)$ van een standaardpunt p ligt een inwendige open verzameling, van $(X^*, \mathcal{T}^*)$ die p omvat.

Stelling 1: Als voor twee standaardpunten p en q geldt: $q \in \mu(p)$ dan geldt: $\mu(q) \subset \mu(p)$.

Bewijs: In $(X, \mathcal{T})$ geldt: elke open omgeving van p bevat q , dus elke open omgeving van p bevat een open omgeving van q dus $\bigcap_0 \mu_p \subset \bigcap_0 \mu_q$ wat in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ betekent: $\mu(q) \subset \mu(p)$.

Stelling 2: Een verzameling U in $(X, \mathcal{T})$ is open, dan en slechts dan als geldt voor alle p uit U : $\mu(p) \subset U^*$ in $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Bewijs: U open in $(X, \mathcal{T})$ en $p \in U$, dan is er een standaard open omgeving van p , die in U zit, dus de monade van p zit in U^* .

Stel andersom: U^* bevat alle monades van alle punten p uit U .

Dan geldt voor elke vaste standaard p de zin volgens het lemma:

$\Phi_{(0)}(U^*, p) \rightarrow (\exists V)(\Phi_{((0))}(\mathcal{T}, V) \wedge \Phi_{(0)}(V, p) \wedge \Phi_{((0),(0))}(\subset, V, U^*))$
(als p in U^* zit, dan is er een open omgeving van p , die ook nog in U^* zit).

Deze zin is geldig in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ dus in K , wat daar impliceert, dat U omgeving is van elk van zijn punten, dus open is.

Gevolg: Een verzameling G uit $(X, \mathcal{T})$ is gesloten, dan en slechts dan als voor alle p uit $X \setminus G$ geldt, dat $\mu(p) \subset (X \setminus G)^*$ in $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Bewijs: Het complement van een verzameling is definieerbaar in K , en dus als G^* inwendig en gesloten is dan en slechts dan is $(X \setminus G)^*$ inwendig en open, en zowel $(X \setminus G) \cup G = X$ als $(X \setminus G) \cap G = \emptyset$ geldt in K , dus ook $(X \setminus G)^* \cup G = X^*$ en $(X \setminus G)^* \cap G = \emptyset$, dus: $(X \setminus G)^* = X^* \setminus G^*$. Nu volgt de stelling direct uit (2).

Gevolg: Een standaardpunt p ligt in de afsluiting van een standaardverzameling A , dan en slechts dan als $\mu(p) \cap A^* \neq \emptyset$.

Bewijs: Volgt uit gevolg 1 en stelling 1.

Gevolg: Een standaardpunt p ligt op de rand van een standaardverzameling A , dan en slechts dan als $\mu(p) \cap A^* \neq \emptyset$ en $\mu(p) \cap (X^* \setminus A^*) \neq \emptyset$.

Bewijs: Uit twee maal toepassen van de vorige stelling.

Stelling 3: Als S een verzameling is in $(X, \mathcal{T})$, dan bestaat er een interne open verzameling V in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ zodanig dat $S \subset V \subset \mu(S)$, waarbij $\mu(S)$ de doorsnede is van alle standaard-open verzamelingen, die S^* omvatten.

Bewijs: Binnen de doorsnede van elk eindig stelsel open verzamelingen, die S omvatten, ligt een open verzameling in $(X, \mathcal{T})$. Dit is een samenlopende relatie, zodat voor $(X^*, \mathcal{T}^*)$ het gestelde volgt.

Stelling 4: Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is dan en slechts dan een T_1 ruimte, als voor elke twee verschillende punten p en q uit X geldt in $(X^*, \mathcal{T}^*)$: $p \notin \mu(q)$.

Bewijs: Stel $(X, \mathcal{T})$ is T_1 , dan is er om q een omgeving V_q , die p niet bevat, dus zeker geldt in $(X^*, \mathcal{T}^*)$: $p \notin \mu(q)$.

Stel voor alle standaard p en q uit $(X^*, \mathcal{T}^*)$ dat als $p \neq q$, $p \notin \mu(q)$.

Kies twee vaste punten p_0 en q_0 , en neem aan p_0 en q_0 zijn individuele constanten in K . Volgens het lemma

ligt er binnen $\mu(q_0)$ een inwendige open verzameling om q_0 . Daarvoor geldt de zin uit K : $(\exists V)(\phi_{(0)}(\mathcal{T}^*, V) \wedge \phi_{(0)}(V, q_0) \wedge \neg \phi_{(0)}(V, p))$ en deze zin is ook geldig in $(X, \mathcal{T})$, zodat voor elke twee punten in $(X, \mathcal{T})$ is er een open verzameling, die de eerste niet bevat, maar de tweede wel. Dit betekent dat de ruimte T_1 is.

Op dezelfde wijze is te bewijzen:

Stelling 5: Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is dan en slechts dan Hausdorffs, als voor elke twee standaardpunten p en q geldt: $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$.

Stelling 6: Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is dan en slechts dan Regulier, als voor elke gesloten verzameling S en elk punt erbuiten, p in $(X, \mathcal{T})$ geldt: $\mu(S) \cap \mu(p) = \emptyset$, in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ (Voor definitie $\mu(S)$ zie stelling 3).

Stelling 7: Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is dan en slechts dan normaal, als voor elke twee disjuncte gesloten verzamelingen S en R in $(X, \mathcal{T})$, in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ geldt: $\mu(S) \wedge \mu(R) = \emptyset$.

Stelling 8: Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is compact, dan en slechts dan als elk punt van $(X^*, \mathcal{T}^*)$ in de monade van een standaardpunt ligt.

Bewijs: Stel $(X, \mathcal{T})$ niet compact, dan is er een open overdekking van $(X, \mathcal{T})$, die niet kan worden uitgedund tot een eindige deeloverdekking. Noem deze overdekking $\mathcal{U}$.

Dan geldt de samenlopende relatie: Voor elk eindig stelsel verzamelingen uit $\mathcal{U}$ is er een punt, dat niet in de vereniging van die eindig veel elementen ligt.

Dit impliceert: In $(X^*, \mathcal{T}^*)$ ligt een punt $\mathcal{S}$ dat niet in de vereniging van alle U^* , met $U \in \mathcal{U}$ ligt, dus voor elk punt p uit $(X, \mathcal{T})$ is een omgeving V aan te geven, zodat $\mathcal{S} \in V^*$, dus $\mathcal{S} \in \mu(p)$ dus S ligt niet in de monade van enige p uit $(X, \mathcal{T})$.

Omgekeerd: Stel er is een punt $\mathcal{S}$ in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ dat niet in de monade ligt van enig standaardpunt p , dan is er om elk standaardpunt p in $(X, \mathcal{T})$ een open omgeving U_p , zodanig dat $\mathcal{S} \notin U_p$. Deze collectie $\{U_p\}$ overdekt X . Stel $(X, \mathcal{T})$ was compact, dan was er een eindige deelcollectie $U_{p_1}, U_{p_2}, U_{p_3} \dots U_{p_n}$ die X overdekte. Deze regel is formuleerbaar in K , n.l.:

$$(\forall q) \phi_{(0)}(X, q) \equiv (\phi_{(0)}(U_{p_1}, q) \vee \phi_{(0)}(U_{p_2}, q) \vee \dots \vee \phi_{(0)}(U_{p_n}, q)),$$

$$\text{dus: } U_{p_1}^* \cup U_{p_2}^* \cup \dots \cup U_{p_n}^* = X^*$$

$\mathcal{S} \notin U_{p_1}^* \cup U_{p_2}^* \cup \dots \cup U_{p_n}^*$. Dit levert een tegenspraak, dus $(X, \mathcal{T})$ kan niet compact zijn.

Opmerking:

Een punt, dat in de monade van een standaardpunt ligt, noemen wij wel "Bijna-standaard", zodat de stelling kan worden geformuleerd als:

De topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is compact, dan en slechts dan als elk punt van $(X^*, \mathcal{T}^*)$ bijna standaard is.

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker: E. Wattel.

§2. Rijen en Filters

In de analyse is het gebruikelijk om na te gaan of een verzameling gesloten is door te controleren, of elk verdichtingspunt van de verzameling er toe behoort.

Dit gebeurt met behulp van rijen, die gelegen zijn binnen de verzameling. Een verzameling is dan en slechts dan gesloten, als elke rij, die binnen de verzameling ligt ook al haar verdichtingspunten in de verzameling heeft.

Ook in de topologie is de rij te definiëren, en de rij convergeert naar een punt p , dan en slechts dan als in elke omgeving van p bijna alle termen van de rij liggen.

In de niet standaard topologie is een limiet van een rij te definiëren als een punt p zodanig dat voor alle $n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ geldt: $p_n \in \mu(p)$ evenals dit is gebeurd in de voorgaande hoofdstukken van de syllabus.

Er komen echter twee moeilijkheden.

- 1e. Een rij kan convergeren naar meerdere punten.
- 2e. Het is mogelijk, dat een verzameling niet gesloten is, hoewel elk verdichtingspunt van elke rij binnen de verzameling tot de verzameling behoort.

De eerste moeilijkheid is inhaerent aan het begrip topologie, en deze levert verder weinig consequenties.

Om de tweede moeilijkheid te ondervangen, heeft men generalisaties van rijen ingevoerd.

- 1e. De Netten (E.H. Moore, H.L. Smith. Zie b.v. Kelley en Robinson).
- 2e. De Filters (H. Cartan).

De beide generalisaties zijn onderling equivalent, maar in de niet-standaard topologie heeft het gebruik van filters voordelen.

Definitie: Een stelsel verzamelingen $\mathcal{F}$ heet een filter indien:

$$1e) \quad A \in \mathcal{F} \text{ en } B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}.$$

$$2e) \quad A \in \mathcal{F} \text{ en } A \subset C \Rightarrow C \in \mathcal{F}.$$

$$3e) \quad \emptyset \notin \mathcal{F}.$$

Een stelsel verzamelingen $\mathcal{B}$ heet een filterbasis indien:

$$A \in \mathcal{B} \text{ en } B \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists C : C \in \mathcal{B} \text{ en } C \subset A \cap B.$$

$$\emptyset \notin \mathcal{B}.$$

Het is duidelijk, dat het stelsel van al die verzamelingen, die een deelverzameling hebben die in een gegeven filterbasis $\mathcal{B}$ ligt, een filter is. Deze filter is de filter die door $\mathcal{B}$ wordt opgespannen.

Een filter $\mathcal{F}$ is bevat in een filter $\mathcal{G}$ dan en slechts dan als elke verzameling, die in $\mathcal{F}$ zit, ook in $\mathcal{G}$ zit. Wij zeggen ook wel, dat $\mathcal{G}$ $\mathcal{F}$ omvat.

Een filter, die niet bevat is in een grotere filter, heet wel een Ultrafilter.

Voorbeeld: In een willekeurige topologische ruimte, vormen alle verzamelingen die een open omgeving van een vast punt p bevatten, een filter. Deze heet de omgevingsfilter van het punt p . We duiden hem meestal aan met $\mathcal{V}_p$.

Alle open omgevingen van p vormen een filterbasis.

Nu definiëren wij: Een filter $\mathcal{F}$ convergeert naar een punt p dan en slechts dan als elk element van de filter $\mathcal{V}_p$ een element van de filter $\mathcal{F}$ bevat.

Anders geformuleerd: Elke omgeving van p bevat een verzameling uit $\mathcal{F}$.

Stelling 1: Een filter $\mathcal{F}$ in de ruimte $(X, \mathcal{T})$ convergeert dan en slechts dan naar een punt p , als in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ een inwendig element $F \in \mathcal{F}^*$ bestaat, zodanig dat $F \subset_{\mu}(p)$.

Bewijs: a) Zij $\mathcal{F}$ een filter, die naar p convergeert, dan ligt binnen de doorsnede van elke eindige verzameling van omgevingen van p een element

van $\mathcal{F}$. Dit is een samenlopende relatie, en daarom kunnen wij concluderen dat er in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ een element van $\mathcal{T}^*$ binnen de doorsnede van alle uitbreidingen van omgevingen van p zit.

In formule is dit precies: $(\exists F)(F \in \mathcal{F}^*) \wedge (F \subset \mu(p))$.

b) Neem aan: $(\exists F)(F \in \mathcal{F}^*) \wedge (F \subset \mu(p))$.

Kies een willekeurige omgeving U van p in $(X, \mathcal{T})$.

Dan geldt in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ $F \subset \mu(p) \subset U^*$, dus geldt de zin in K :

$(\exists F)(F \in \mathcal{F}^*)(F \subset U^*)$.

Deze zin is vertaalbaar voor $(X, \mathcal{T})$: $(\exists F)(F \in \mathcal{F})(F \subset U)$

wat wil zeggen; Voor elke willekeurige doch vaste open omgeving van p , U bestaat een element van het filter $\mathcal{F}$, dat binnen U gelegen is. Dus de filter $\mathcal{F}$ convergeert naar het punt p .

Een punt p heet adhaerentiepunt van een filter $\mathcal{F}$ indien elke open verzameling om p elk element van $\mathcal{F}$ doorsnijdt oftewel als

$\mathcal{F}_p = \{F \cap V_p \mid F \in \mathcal{F}, V_p \in \mathcal{V}_p\}$ een filter is.

Hiermee is direct bewezen: Als p een adhaerentiepunt van de filter $\mathcal{F}$ is, dan is er een filter $\mathcal{F}_p$, die $\mathcal{F}$ omvat, en die naar p convergeert.

Stelling 2: In $(X, \mathcal{T})$ is een punt p adhaerentiepunt van een filter $\mathcal{F}$ dan en slechts dan als in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ elk element van $\mathcal{T}^*_{\mu(p)}$ doorsnijdt.

Bewijs: a) Stel p is adhaerentiepunt van $\mathcal{F}$.

Dan geldt: $(\forall F)(\forall V)((F \in \mathcal{F}) \wedge (V \in \mathcal{V}_p) \rightarrow F \cap V \neq \emptyset)$.

Deze zin is vertaalbaar voor $(X^*, \mathcal{T}^*)$

$(\forall F)(\forall V)((F \in \mathcal{F}^*) \wedge (V \in \mathcal{V}^*_p) \rightarrow F \cap V \neq \emptyset)$.

Er is een verzameling V'_p van $\mathcal{V}^*_p$, die inwendig is en bevat in $\mu(p)$.

Voor deze verzameling geldt $(\forall F \in \mathcal{F}^*) F \cap V'_p \neq \emptyset$ dus zeker doorsnijdt elk element van $\mathcal{T}^*$, $\mu(p)$.

b) Stel elk element van $\mathcal{T}^*$ doorsnijdt $\mu(p)$. Dan geldt voor elk element U uit $\mathcal{V}_p$ in $(X, \mathcal{T})$: $(\forall F)((F \in \mathcal{F}^*) \rightarrow (F \cap U^*) \neq \emptyset)$.

Deze zin is weer vertaalbaar voor $(X, \mathcal{T})$ en daar betekent zij:

De omgeving U van p doorsnijdt alle elementen van de filter $\mathcal{F}$.

Dit geldt echter voor alle U , dus $\mathcal{F}$ heeft p als adhaerentiepunt.

Opmerking: Er zijn verscheidene equivalenten voor deze stelling.

Dit is mogelijk, daar de zwakke eis: $(\forall F \in \mathcal{F}^*) F \cap \mu(p) \neq \emptyset$, in $(X, \mathcal{F})$ impliceert, dat p adhaerentiepunt van $\mathcal{F}$ is, en dus geldt in $(X^*, \mathcal{F}^*)$ ook de bewering: $(\forall F \in \mathcal{F}^*)(\forall V \in \mathcal{V}_p^*) F \cap V \neq \emptyset$, zodat we kunnen zeggen, dat de eerste eis de tweede impliceert. Dit komt, omdat de eis: p is een standaardpunt vrij sterk is.

Verder is het bij filters niet noodzakelijk, om indexverzamelingen te beschouwen. Bij rijen bestaan deze indexverzamelingen wel, en wil men op juiste wijze in de topologie over geïndiceerde stelsels spreken, dan zal men er rekening mee moeten houden, dat bij vergroting van de ruimte alleen gebruik mag worden gemaakt van vergrootte indexverzamelingen. Wanneer er oneindig veel indexverzamelingen zijn, dan kan ook de verzameling van indexverzamelingen vergroot worden.

Deze situatie doet zich voor bij het beschouwen van netten als convergentie criterium.

Stelling 3: Een verzameling A in $(X, \mathcal{F})$ is dan en slechts dan gesloten, als alle filters, die A als element bevatten, al hun adhaerentiepunten binnen A hebben.

Bewijs: Volgt onmiddellijk uit Gevolg 1 van Stelling 2 van §1, en uit de voorgaande stelling.

Stelling 4: Elke filter is bevat in een ultrafilter.

Bewijs: Zij $\mathcal{F}$ een filter in de volle normale structuur $X_{(\tau)}$ op de verzameling X . Dan bestaat voor $\mathcal{F}$ de samenlopende relatie

$$R(F, p) \equiv_D p \in F \in \mathcal{F} \\ (\forall F_1)(\forall F_2)(\forall F_3) \dots (\forall F_n)((F_1 \in \mathcal{F}) \wedge (F_2 \in \mathcal{F}) \wedge \dots \wedge (F_n \in \mathcal{F}) \rightarrow (\exists p)((p \in F_1) \wedge \dots \wedge (p \in F_n))).$$

Er is in X^* dus een punt ζ zodanig dat $\zeta \in F^*$ voor alle F uit $\mathcal{F}$.

Bezie nu in X^* de filter $\mathcal{G}$ van alle verzamelingen die ζ omvatten, en bezie verder de verzameling $\mathcal{U}$, bestaande uit alle standaardverzamelingen, waarvan de uitbreiding in $\mathcal{G}$ ligt.

Bewering: $\mathcal{U}$ is een ultrafilter, die $\mathcal{F}$ omvat.

Stel U is een willekeurige verzameling, die een element van $\mathcal{U}$ bevat, dan zit zekere ζ in U^* .

Stel U en V zijn twee verzamelingen uit $\mathcal{U}$ dan is $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$ en daar $U^* \cap V^*$ het punt ζ bevat, moet ook $(U \cap V)^*$ het punt ζ bevatten, dus $U \cap V \in \mathcal{U}$. Conclusie: $\mathcal{U}$ is een filter.

Wegens het feit dat ζ is gedefinieerd uit het filter $\mathcal{F}$ geldt natuurlijk ook $\mathcal{F}$ is bevat in $\mathcal{U}$.

Verder is $\mathcal{U}$ een ultrafilter daar voor elke standaardverzameling V^* in X^* geldt: $\text{of } V^*, \text{ of } X^* \setminus V^*$ zit in $\mathcal{U}$, wat betekent: Voor elke deelverzameling V van X geldt: $\text{of } V \in \mathcal{U}, \text{ of } (X \setminus V) \in \mathcal{U}$.

§3. Compacte verzamelingen

Een verzameling van een topologische ruimte is compact indien elke overdekking van die verzameling met open verzamelingen uit de ruimte, een eindige deelloverdekking bezit.

Het is duidelijk, dat ook hier de equivalentie geldt van §1 stelling 8 oftewel:

Een verzameling A van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is compact dan en slechts dan als in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ geldt: Elk punt van A^* ligt in de monade van een standaardpunt.

Stelling 1: In de vergroting van een compacte Hausdorffruimte vormen de monades om de standaardpunten een partitie van de ruimte.

Bewijs: Uit §1 stelling 5 volgt, dat elke twee monades disjunct zijn, en uit §1 stelling 8 volgt, dat elk punt bijna-standaard is.

Gevolg: De topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ is een compacte Hausdorffruimte, dan en slechts dan als de monades een partitie van de ruimte vormen.

Stelling 2: Een compacte deelverzameling van een Hausdorffruimte is gesloten.

Bewijs: Zij A een compacte deelverzameling van een Hausdorffruimte, dan is in A^* elk punt bijna-standaard, en daar bij een Hausdorffruimte de

monades disjunct zijn, moet dus wel gelden, dat van elke monade, waarmee A^* een punt gemeen heeft, ook het standaardpunt in A^* ligt. Dit is precies het criterium voor A is gesloten uit stelling 2 van §1.

Stelling 3: Een compacte Hausdorffruimte is normaal.

Bewijs: Zij G een gesloten verzameling uit een compacte Hausdorffruimte $(X, \mathcal{T})$. Dan is G gesloten en compact. Bezie nu een overdekking van G met om elk punt een omgeving. Deze heeft een eindige deelooverdekking. De vereniging daarvan is een open verzameling om G . Noem deze U . Bezien we voor al de op deze wijze verkregen verzamelingen U de U^* , dan geldt $U^* \supset G^*$, en de doorsnede van alle U^* is $\mu(G)$.

Steeds geldt: $\bigcup_{p \in G} \mu(p) \subset \mu(G)$, maar hier geldt ook: $\mu(G) \subset \bigcup_{p \in G} \mu(p)$.

want: Stel $\zeta \notin \bigcup_{p \in G} \mu(p)$, dan is om elke $p \in G$ een open verzameling V_p , zodanig dat $\zeta \notin V_p^*$. De vereniging van alle V_p overdekt G , dus is er een eindige deelooverdekking met behulp van V_p 's.

Maar bezien we deze overdekking van V_p 's in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ dan is het stelsel eindig en overdekt G^* , en de vereniging bevat ζ niet. Hieruit volgt dus dat $\mu(G) = \bigcup_{p \in G} \mu(p)$.

Nu is het bewijs verder triviaal, want, kies twee gesloten disjuncte verzamelingen A en B dan geldt: $\mu(A) = \bigcup_{p \in A} \mu(p)$ en $\mu(B) = \bigcup_{p \in B} \mu(p)$ maar nu geldt: de monades zijn disjunct.

Dus $\mu(A) \cap \mu(B) = \emptyset$ en nu volgt de stelling uit §1 stelling 7.

Gevolg van het bewijs: Voor elke compacte verzameling C van een Hausdorffruimte $(X, \mathcal{T})$ geldt in $(X^*, \mathcal{T}^*)$: $\mu(C) = \bigcup_{p \in C} \mu(p)$.

Stelling 4: Als $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ twee topologieën zijn op de verzameling X , en $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ dan volgt uit $(X, \mathcal{T}_1)$ is Hausdorffs dat $(X, \mathcal{T}_2)$ is Hausdorffs en uit $(X, \mathcal{T}_2)$ is compact, dat $(X, \mathcal{T}_1)$ is compact.

Bewijs: a) $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ dus voor elk standaardpunt p uit X geldt in X^* : $\mu_1(p) \supset \mu_2(p)$. Daar steeds geldt: $\mu_1(p) \cap \mu_1(q) = \emptyset$ als $p \neq q$, geldt ook $\mu_2(p) \cap \mu_2(q) = \emptyset$, wat betekent, dat $(X, \mathcal{T}_2)$ Hausdorffs is.

b) $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ dus voor elk standaard p geldt: $\mu_1(p) \supset \mu_2(p)$.

Als nu $(X, \mathcal{T}_2)$ compact is, is elk punt uit X^* gelegen in een monade $\mu_2(p)$ voor zekere p , dus zeker in de monade $\mu_1(p)$ voor dezelfde p , dus $(X, \mathcal{T}_1)$ is compact.

Voor de laatste stelling uit deze paragraaf zullen wij na moeten gaan, wat voor soorten equivalenten bestaan van het begrip compact.

Hier volgt een lijst met de meest gebruikelijke. De bewijzen zijn alle triviaal.

- a) Elke open overdekking heeft een eindige deelloverdekking.
- b) Elk stelsel gesloten verzamelingen met ledige doorsnede heeft een eindig deelstelsel met ledige doorsnede.
- c) Elk stelsel gesloten verzamelingen, met de eigenschap, dat ieder eindig deelstelsel een niet lege doorsnede heeft, heeft een niet ledige doorsnede. Een dergelijk stelsel heet wel een gekit stelsel.
- d) Elke filter heeft een adhaerentiepunt.
- e) Elke ultrafilter convergeert.

Verder heet een verzameling A compact ten opzichte van een stelsel gesloten verzamelingen $\mathcal{S}$, indien ieder deelstelsel $\mathcal{S}'$ van $\mathcal{S}$, waarvoor geldt dat $\mathcal{S}' \cup \{A\}$ gekit is, een niet ledige doorsnede heeft binnen A .

Wanneer wij nu voor $\mathcal{S}$ een gesloten subbasis voor een topologie ^{*)} nemen, dan kunnen wij ons afvragen: Bestaat er verband tussen de compacta ten opzichte van $\mathcal{S}$ en de compacta in de topologie die $\mathcal{S}$ voortbrengt. Het antwoord is ja.

Stelling 5. Het lemma van Alexander.

Een ruimte is dan en slechts dan compact ten opzichte van een subbasis $\mathcal{S}$ van gesloten verzamelingen, als zij compact is ten opzichte van de topologie, die door $\mathcal{S}$ wordt voortgebracht.

*) Een stelsel verzamelingen $\mathcal{S}$ heet gesloten subbasis voor een topologie $\mathcal{T}$, wanneer $\mathcal{T}$ bestaat uit: De lege verzameling, de hele verzameling en alle verenigingen van eindige doorsneden van complementen van verzamelingen uit $\mathcal{S}$.

Bewijs: Het is duidelijk, dat als een ruimte $(X, \mathcal{T})$ compact is, dat zij dan ook compact is ten opzichte van een subbasis voor de topologie. Omgekeerd. Stel X is niet compact in $(X, \mathcal{T})$. Dan is er een niet-standaardpunt ζ , dat niet in enige monade ligt van een standaard punt in $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Zij $\mathcal{T}'$ het stelsel van alle inwendige gesloten subbasisverzamelingen in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ die ζ omvatten. Dan is $\mathcal{T}'$ een gekit stelsel van gesloten subbasisverzamelingen.

Bezie nu de verzameling van alle standaardsubbasisverzamelingen $\mathcal{F}$ in $(X^*, \mathcal{T}^*)$ die ook in $\mathcal{T}'$ liggen. Dit stelsel is ook gekit, dus ook het stelsel van al die verzamelingen F uit $(X, \mathcal{T})$ waarvoor geldt, dat $F^* \in \mathcal{F}$, want gekit zijn is formuleerbaar in Λ .

Noem dit laatste stelsel $\mathcal{F}$. Dit is een stelsel subbasis elementen van $(X, \mathcal{T})$. We zullen nu bewijzen, dat dit stelsel een lege doorsnede heeft. Stel daartoe $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Dan is er een punt p in $\cap \mathcal{F}$.

$\zeta \notin \mu(p)$ dus er is een open verzameling U_p om p , zodanig dat $\zeta \notin U_p^*$.

Zij G_p het complement van U_p in X . G_p is de doorsnede van gesloten basiselementen, dus er is een basiselement B_p , dat p niet omvat.

Maar B_p is de vereniging van eindig veel subbasiselementen $\{S_{pi}\}_{i=1}^n$, dus $B_p^* = \bigcup_{i=1}^n S_{pi}^*$. Er is dus een S_{pi}^* , die p niet omvat, maar ζ wel. Deze S_{pi}^* ligt zeker in $\mathcal{F}$, dus S_{pi} ligt in $\mathcal{F}$, dus $p \notin \cap \mathcal{F}$, dit is in tegenspraak met het gestelde, dus $\cap \mathcal{F} = \emptyset$.

Het feit, dat X niet compact is, impliceert dus, dat er een gekit stelsel gesloten subbasiselementen bestaat, met lege doorsnede wat te bewijzen was.

Merk op dat $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}^*$, want $\cap \mathcal{F} = \emptyset$ en dit is formuleerbaar in de taal Λ , dus ook moet gelden $\cap \mathcal{F}^* = \emptyset$. $\cap \mathcal{F}'$ bevat echter het punt ζ .

Bij het bewijs van stelling 5, evenals bij het bewijs van §2 stelling 4 is geen gebruik gemaakt van het keuze-axioma, of enige verzwakking daarvan. Bij de opzet van de non-standard theorie is gebruik gemaakt van het bestaan van ultrafilters zodat we nu kunnen formuleren de stelling:

Het bestaan van de vergroting ten opzichte van alle samenlopende relaties in een volle structuur is equivalent met het verzwakte keuzeaxioma in de vorm: Elke filter is bevat in een ultrafilter.

Het bestaan van de vergroting ten opzichte van alle samenlopende relaties in een volle structuur is equivalent met het verzwakte keuzeaxioma in de vorm: Elke filter is bevat in een ultrafilter.

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker E. Wattel.

§ 4 Functies, Deelruimten en Producten

Wanneer wij functies definieren, zullen wij er rekening mee moeten houden, dat we bij iedere functie een definitiegebied en een beeldruimte afzonderlijk zullen moeten beschouwen. Om moeilijkheden te voorkomen, zullen wij er goed aan doen, door in de standaardruimten, of consequent in de vergrotingen te rekenen, en niet bij voorbeeld de vergroting van de beeldruimte bekijken, tezamen met het standaard definitiegebied. Daarom denken wij ons het definitiegebied en de beeldruimte beiden ingebed in een grotere volle structuur.

Zij $M_{(\tau)}$ een volle structuur, die is opgebouwd op een grondverzameling M_0 . Zij verder in M_0 gegeven twee, niet noodzakelijk disjuncte, deelverzamelingen X en Y , die aanleiding geven tot volle deelstructuren $X_{(\tau)}$ en $Y_{(\tau)}$ van $M_{(\tau)}$.

Een relatie f van het type $(0,0)$ heet een functie van X in Y indien voldaan is aan de volgende eigenschappen

- 1) $(\forall x)(\forall y) (f(x,y) \rightarrow ((x \in X) \wedge (y \in Y)))$
- 2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z) ((f(x,y) \wedge f(x,z)) \rightarrow (y=z))$
- 3) $(\forall x) ((x \in X) \rightarrow (\exists y)(f(x,y)))$

Uit de formules 2e en 3e volgt, dat er voor elke $x \in X$ één en precies één $y \in Y$ bestaat, zodanig, dat $f(x,y)$ geldt. Deze y duiden we aan met $f(x)$.

Zo duiden wij ook de verzameling van alle punten uit Y , die beeld zijn van een $x \in V \subseteq X$ aan met $f(V)$.

De verzameling van alle punten uit X , die worden afgebeeld op zekere $y \in Y$ worden geschreven als $f^{-1}(y)$; en $f^{-1}(W)$ is de verzameling van al die punten van x , waarvoor geldt: $f(x) \in W \subseteq Y$.

De verzameling X heet het definitiegebied van de functie f , en de verzameling $f(X)$ heet het waardegebied. Uit (1e) volgt, dat het waardegebied een deelverzameling is van de beeldruimte.

Is het waardegebied gelijk aan de beeldruimte, wat geformuleerd kan worden, in 3' analoog met 3) : $(\forall y) ((y \in Y) \rightarrow (\exists x)(f(x,y)))$ dan heet de functie op.

Indien ieder punt van het waardegebied slechts één punt in het definitiegebied heeft, zodat het daarmee in de relatie f staat, wat kan worden geformuleerd analoog met (2) : 2')

$(\forall y)(\forall x)(\forall z)((f(x,y) \wedge f(x,z)) \rightarrow (x=z))$ dan heet de functie

1-1 duidelijk.

Opnieuw kunnen wij in X een topologie $\mathcal{T}_1$; en in Y een topologie $\mathcal{T}_2$ definiëren. Nu kunnen wij continuïteit invoeren, door de definitie: Het oerbeeld van een open verzameling in Y moet open zijn in X .

4) $(\forall V)((V \in \mathcal{T}_2) \rightarrow (\exists W)((W \in \mathcal{T}_1) \wedge (W \subseteq f^{-1}(V)))$.

Men kan ook eerst de continuïteit in een punt $x \in X$ invoeren, door te definiëren: f is continu in een punt $p \in X$ als binnen elke omgeving van $f(p)$ het beeld van een omgeving om p zit.

In formule: $(\forall U)((U \in \mathcal{T}_2) \wedge (f(p) \in U) \rightarrow (\exists V)((V \in \mathcal{T}_1) \wedge (f(V) \subseteq U) \wedge (p \in V)))$.

Het is duidelijk dat een functie dan en slechts dan continu is, als zij continu is in elk punt van het definitiegebied.

Dit criterium voor continuïteit is goed te vertalen in de niet-standaard theorie. We gaan nu de vergroting van M construeren. M^* zal dan twee niet-standaard topologische ruimten $(X^*, \mathcal{T}_1^*)$ en $(Y^*, \mathcal{T}_2^*)$ bevatten.

We kunnen nu ook de functie f meenemen en vergroten tot een functie $f^{(*)}$.

Stelling 1 : Een functie $f: X \rightarrow Y$ is continu in een punt $p \in X$ dan en slechts dan indien in M^* geldt: $f(p) \in U \subseteq f(V)$.

Bewijs: a) Stel f is continu in p , dan geldt: $(\forall U \in \mathcal{T}_2)$

$((f(p) \in U) \rightarrow (\exists V \in \mathcal{T}_1)((p \in V) \wedge (f(V) \subseteq U)))$. Dus nu geldt in $(Y^*, \mathcal{T}_2^*)$:

$f(\cap V_p^*) \subseteq \cap (f(V_p^*)) \subseteq \cap (U_{f(p)}^*)$,

waarbij wij aannemen, dat de doorsneden genomen worden over alle standaardomgevingen V_p van p , resp. $U_{f(p)}$ van $f(p)$.

Uit deze formule volgt: $f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))$.

b) Stel $f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))$. Zij $U_{f(p)}^*$ een willekeurige standaardomgeving van $f(p)$ in Y^* . Binnen $\mu(p)$ in X^* ligt een inwendige omgeving van p . Derhalve geldt in M^* : $(\exists V_p)((p \in V_p) \wedge (V_p \in \mathcal{T}_1^*) \wedge (f(V_p) \subset U_{f(p)}^*))$. Deze zin is geformuleerd in Λ , en dus waar voor M , zodat in M geldt: Binnen elke vaste omgeving van $f(p)$ ligt het beeld van een omgeving van p . Conclusie: f is continu in het punt p .

Gevolg: Een functie $f: X \rightarrow Y$ is dan en slechts dan continu, indien voor elk punt p van X geldt: $f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))$.

Een 1-1 duidelijke continue functie van X op Y heet een homeomorfisme als ook de inverse relatie continu is.

X en Y heten homeomorf als er een homeomorfisme tussen X en Y bestaat.

Stelling 2: Een éénéénduidige functie van X op Y is dan en slechts dan een homeomorfisme indien geldt in M^* : $f(\mu(p)) = \mu(f(p))$ voor alle $p \in X$.

Bewijs: volgt onmiddellijk uit stelling 1.

Definitie Een topologische ruimte $(A, \mathcal{T}_1)$ heet een deelruimte van de ruimte $(X, \mathcal{T})$, indien $A \subset X$ en

$$(\forall U)((U \in \mathcal{T}_1) \equiv (\exists V)((V \in \mathcal{T}) \wedge (V \cap A = U))).$$

In woorden: De open verzamelingen van A zijn precies die verzamelingen, die kunnen worden geschreven als de doorsnede van een open verzameling uit X met A .

Stelling 3: Een topologische ruimte $(A, \mathcal{T}_1)$ is dan en slechts dan een deelruimte van de topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ als voor elk punt $p \in A$ geldt:

$$\mu_A(p) = \mu_X(p) \cap A^*.$$

Bewijs: Volgt eenvoudig uit het lemma van § 1.

Het is duidelijk uit deze stelling 3, dat een deelruimte van een Hausdorffruimte, resp. reguliere ruimte, resp. T_1 ruimte, weer Hausdorffs, resp. regulier, resp. T_1 is. Verder ook, dat een gesloten deelruimte van een compacte, resp. normale ruimte weer compact resp. normaal is.

Definitie : Zij voor zekere indexverzameling A met elementen α een stelsel verzamelingen X_α gegeven. Nu kunnen wij het Carthesisch product definieren als de verzameling F van alle functies ϕ van A naar $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ met de eigenschap dat voor alle $\alpha \in A$ geldt $\phi(\alpha) \in X_\alpha$.

In formule:

$$F = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \equiv \{ \phi: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid (\forall \beta \in A) (\phi(\beta) \in X_\beta) \}$$

Wanneer nu elke verzameling X_α van een topologie $\mathcal{T}_\alpha$ is voorzien, kunnen wij op natuurlijke wijze een topologie voor F definieren; namelijk door als open subbasis S een stelsel van verzamelingen $F(\alpha, U)$ te nemen, met de eigenschap, dat elke $F(\alpha, U)$ bestaat uit juist die functies ϕ , waarvoor geldt, dat $\phi(\alpha) \in U \in \mathcal{T}_\alpha$.

In formule:

$$(\forall \alpha \in A) (\forall U \in \mathcal{T}_\alpha) (F(\alpha, U) \equiv \{ \phi \mid (\phi \in F) \wedge (\phi(\alpha) \in U \in \mathcal{T}_\alpha) \}).$$

$$S \equiv \bigcup_D \{ F(\alpha, U) \mid (\alpha \in A) \wedge (U \in \mathcal{T}_\alpha) \}$$

De topologie die hierdoor gedefinieerd wordt heet de producttopologie voor $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$; en de ruimte $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ heet het topologische- of Tychonoffproduct van de ruimten $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.

Wanneer we nu trachten om een op deze wijze gedefinieerd product uit te breiden tot een niet-standaardstructuur, kiezen wij daartoe een structuur $M_{(\tau)}$, die zowel A als $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ omvat in M_0 . Wij nemen aan, dat $M_{(\tau)}$ vol is. Dan is ook elk stelsel van tweeplaatsige relaties inwendig, en dus ligt $(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$ in $M_{(0,0)}$, terwijl de producttopologie $\mathcal{T}$ een element is van $M_{(((0,0)))}$.

De uitbreiding van M t.o.v. alle samenlopende relaties omvat dus de uitbreiding van elke X_α ; de uitbreiding van A , alsmede de uitbreiding van het topologische product. In het bijzonder bevat M^* topologische ruimten X_α^* ook voor de α uit $A^* \setminus A$.

Een standaardpunt p uit het product F^* is dus een functie ϕ^* , met de eigenschap dat ϕ^* precies de uitbreiding is van een functie ϕ uit F . Nu geldt voor de monade van p :

Stelling 4 Voor elk standaardpunt $p \in \prod_{\alpha \in A}^* (X_\alpha^*, \mathcal{T}_\alpha)$ bestaat $\mu(p)$ precies uit die functies ψ ; waarvoor geldt: $\psi(\alpha) \in \mu(p(\alpha))$ voor alle $\alpha \in A$.

Bewijs: Stel $\psi(\alpha) \notin \mu(p(\alpha))$ voor zekere $\alpha \in A$. Dan is er een standaard open verzameling $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ met $p \in U_\alpha$ en $\psi(\alpha) \notin U_\alpha^*$.

Dit betekent, dat de subbasis verzameling $F(\alpha, U_\alpha)$ de eigenschap heeft, dat $p \in F(\alpha, U_\alpha)$ maar $\psi \notin F^*(\alpha, U_\alpha)$; dus de doorsnede van alle standaard open verzamelingen om p bevat ψ niet in F^* .

Ligt omgekeerd $\psi(\alpha)$ in $\mu(p(\alpha))$ voor alle $\alpha \in A$, dan ligt $\psi(\alpha)$ binnen alle standaard subbasisverzamelingen om p dus ook in $\mu(p)$.

Gevolg: Het product van Hausdorffruimten is een Hausdorffruimte.

Bewijs: Kies twee standaardpunten p en q . Als $p \neq q$ dan bestaat er een $\alpha \in A$ zodanig dat $p(\alpha) \neq q(\alpha)$, dus $\mu(p(\alpha)) \cap \mu(q(\alpha)) = \emptyset$, en derhalve is ook $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$.

Stelling 5 Het product van compacte ruimten is compact (Tychonoff).

Bewijs: Kies een niet-standaard punt ψ uit F^* .

$$(\forall \alpha \in A)(\exists x \in X_\alpha)(\psi(\alpha) \in \mu(x) \subset X_\alpha^*).$$

Daar de verzamelingen: $P_\alpha \equiv \{x | (x \in X_\alpha) \wedge \psi(\alpha) \in \mu(x)\}$ niet leeg zijn, is ook hun product niet leeg (precies het keuze-axioma).

Er is dus een punt p in $\prod_{\alpha \in A} (P_\alpha)$.

Dit punt is dan standaardpunt in F^* , en volgens stelling 4 is ψ dus bijna standaard.

Conclusie: de ruimte is compact.

Stelling 6 : De afbeelding $\pi_\alpha : F \rightarrow X_\alpha$ die gedefinieerd wordt door $\pi_\alpha(\phi) = \phi(\alpha)$ is continu.

Bewijs: Zij $\psi \in \mu(p)$ voor zekere standaard p uit F^* , dan geldt $\psi(\alpha) \in \mu(p(\alpha))$, dus:

$$\pi_\alpha(\mu(p)) \subset \mu(\pi_\alpha(p)) \text{ q.e.d.}$$

Colloquium "Onderwerpen uit de Modeltheorie"

Spreker: J.W. Robbin

§1. Non Standard Analysis of a TVS

Definition. A topological vector space (henceforth called a TVS) is a (real) vector space E with a T1 topology (i.e. points are closed) such that the maps

$$E \times E \rightarrow E : (x,y) \rightarrow x + y \quad (\text{addition})$$

and

$$R \times E \rightarrow E : (a,x) \rightarrow ax \quad (\text{scalar multiplication})$$

are continuous.

Notation: E and F for TVS's.

R for the real numbers. For any object Q of the standard model, Q^* (or sometimes Q) denotes the corresponding element of the enlargement. For $A \subseteq R$ and $X, Y \subseteq E$ (or $A \subseteq R^*$ and $X, Y \subseteq E^*$) AX is the set of all ax with $a \in A$ and $x \in X$ and $X + Y$ is the set of all $x + y$ with $x \in X$ and $y \in Y$. For $x \in E$ standard, $\mu_E(x)$ is the monad of x in E^* . For $a \in R^*$ $\mu_R(a)$ is the monad of a ; i.e. the set of all $b \in R^*$ with $|a - b|$ infinitesimal.

Remark: The usual definition of a TVS does not require that the topology be T1.

Proposition 1. $a \in R$; $x, y \in E$ all standard. Then

$$(1) \mu_E(x) + \mu_E(y) \subseteq \mu_E(x + y)$$

$$(2) \mu_R(a)\mu_E(x) \subseteq \mu_E(ax)$$

$$(3) \mu_E(x + y) = x + \mu_E(y)$$

$$(4) \mu_E(ax) = a\mu_E(x) \text{ if } a \neq 0.$$

Proof: (1) and (2) say that $(x, y) \rightarrow x + y$ and $(a, x) \rightarrow ax$ are continuous while (3) and (4) say that $y \rightarrow x + y$ and $x \rightarrow ax$ are homeomorphisms.

Corollary: - $\mu_E(0) = \mu_E(0) = \mu_E(0) + \mu_E(0)$.

Proposition 2. $T : E \rightarrow F$ linear standard. Then the following are equivalent:

- (1) T is continuous
- (2) Tx is continuous at $x = 0$
- (3) $T\mu_E(0) \subseteq \mu_F(0)$.

Proof: (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) are trivial.

(3) $\implies$ (1) because $T\mu_E(x) = T(x + \mu_E(0)) = Tx + T\mu_E(0) \subseteq Tx + \mu_F(0) = \mu_F(Tx)$.

Definition. $T : E \rightarrow F$ is a toplinear isomorphism iff T is linear, and T is a homeomorphism. E and F are toplinearly isomorphic (in symbols, $E \approx F$) iff there exists a toplinear isomorphism $T : E \rightarrow F$.

Corollary: A linear bijection $T : E \rightarrow F$ is a toplinear isomorphism if and only if $T\mu_E(0) = \mu_F(0)$.

Theorem. Characterization of the finite dimensional TVS.

Let E be a TVS. Then the following are equivalent:

- (1) E is finite dimensional.
- (2) $E \approx \mathbb{R}^n$ for some n .
- (3) E is locally compact.

Proof: (2) $\implies$ (1) is trivial and (2) $\implies$ (3) follows from the Heine Borel theorem. (1) $\implies$ (2) follows immediately from

Lemma 1. Let $e_1, \dots, e_n \in E$ be linearly independent (and standard). Then

$$\sum_i a_i e_i \in \mu_E(0) \iff a_1, \dots, a_n \in \mu_R(0).$$

Proof: ($\Leftarrow$) the map $\mathbb{R}^n \rightarrow E : (a_1, \dots, a_n) \rightarrow \sum_i a_i e_i$ is continuous.

($\Rightarrow$) suppose $x = \sum_i a_i e_i$ where some $a_i \notin \mu_R(0)$. Define

$$\lambda = 1/\max \{1, |a_1|, \dots, |a_n|\}.$$

Then

- (i) $0 < \lambda \leq 1$.
- (ii) $\lambda a_1, \dots, \lambda a_n$ are all finite.
- (iii) $\lambda a_j \notin \mu_R(0)$ for some j .

Write $\lambda a_i = b_i + c_i$ where b_i standard and $c_i \in \mu_R(0)$. Then

$$\lambda x = y + z$$

where

$$y = \sum_i b_i e_i \quad z = \sum_i c_i e_i.$$

By ($\Leftarrow$) $z \in \mu_E(0)$. By (iii) and the linear independence of $e_1, \dots, e_n$ $y \neq 0$. But y is standard. Since E is T1, $y \notin \mu_E(0)$.

If $x \in \mu_E(0)$, then since λ is finite, $\lambda x \in \mu_E(0)$. Then

$y = \lambda x - z \in \mu_E(0) - \mu_E(0) \subseteq \mu_E(0)$, a contradiction. Hence $x \notin \mu_E(0)$.

Corollary. Any finite dimensional subspace of E is closed.

Now for (3) $\Rightarrow$ (1). Let E be locally compact. Then there is an open neighbourhood U of 0 in E with $K = \overline{U}$ compact. (The bar denotes closure.)

By the continuity of $+$ take an open neighbourhood W of 0 with

$W + W \subseteq U \subseteq K$ and set $V = W \cap (-W)$. Then

- (a) $V + V \subseteq U$; and
- (b) $V = -V$.

Now recall that a set has compact closure if and only if all its points are near standard.

Lemma. If F is a closed, proper subspace of E (i.e. $F \neq E$), then there exists $x \in U$ with $(x + V) \cap F = \emptyset$.

Proof: Suppose not. Then $(x + v) \cap F$ is non empty for every $x \in U$.

Hence $U \subseteq F + V$. Hence $V + V \subseteq F + V$. Repeating m times we get $mV \subseteq F + V$ for $m = 1, 2, \dots$. Hence

$$(*) \quad V \subseteq F + \frac{1}{m} V \quad m = 1, 2, \dots$$

Claim: $V \subseteq F$. To see this choose $v \in V$ standard. Take m infinite in $(*)$. Then $v = y + \frac{1}{m} w$ where $y \in F$ and $w \in V$. But $w \in V \subseteq K$. Hence w is near standard. Hence $\frac{1}{m} w \in \mu_E(0)$. Hence $y = v - \frac{1}{m} w \in v - \mu_E(0) = \mu_E(v)$. Thus $F \cap \mu_E(v)$ is non-empty and since F is closed it follows that $v \in F$. This proves the claim that $V \subseteq F$. But from the fact that F contains an open set follows the fact that $F = E$. This contradicts the hypothesis that F is proper and proves the lemma.

We now prove that E is finite dimensional. If not, by the last corollary, every finite dimensional subspace $F \subseteq E$ is closed and proper. By the lemma we have

$$\forall F \exists x \in U : (x + V) \cap F = \emptyset.$$

The sentence is to be interpreted in the standard model with F ranging over finite dimensional subspaces. Passing to the enlargement we see that there is an $x \in U^*$ with

$$(x + V^*) \cap F^* = \emptyset$$

for every standard finite dimensional subspace F . In particular, taking F to be the one dimensional subspace spanned by a standard point y we see that x is not near standard. But $x \in U^* \subseteq K^*$, contradicting the assumption that K is compact. This completes the proof that (3) $\implies$ (1).

§2. Non-Standard Analysis of a Normed Space

Definition. A norm on a vector space E is a map

$$E \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow ||x||$$

such that

- (1) $||x|| \geq 0$ for all $x \in E$;
- (2) $||x|| = 0$ if and only if $x = 0$;
- (3) $||ax|| = |a| ||x||$ for $a \in \mathbb{R}$, $x \in E$;
- (4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ for $x, y \in E$.

E is then a metric space (and a TVS) with a metric d defined by $d(x, y) = ||x - y||$.

Note that for $x \in E$, $\mu_E(x)$ is the set of all $y \in E^*$ with $||x - y||$ infinitesimal. Hence $y \in E^*$ is near standard iff there exists standard $x \in E$ with $||x - y||$ infinitesimal. We say $y \in E^*$ is finite iff $||y||$ is finite.

Proposition 1. (1) Every near standard point is finite.

(2) The converse holds if and only if E is finite dimensional.

Proof: (1) is immediate from $||y|| \leq ||x|| + ||y - x||$.

The converse is equivalent to the assertion that the closed balls of finite radius centered at 0 are compact. This in turn is equivalent to the assertion that E is locally compact which by §1 is equivalent to the assertion that E is finite dimensional.

Definition. An operator on E is a linear map $T : E \rightarrow E$. T is bounded iff there is a real number K such that

$$||Tx|| \leq K ||x|| \quad \text{for all } x \in E.$$

The smallest such K is called the norm of T and denoted by $||T||$. The space of operators on E may be given the structure of a vector space by defining aT ($a \in \mathbb{R}$) and $T_1 + T_2$ by

$$(aT)x = a(Tx)$$

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x \quad \text{for } x \in E.$$

This space also admits a natural multiplication: i.e. for operators T_1 and T_2 , $T_1 \circ T_2$ is defined by

$$(T_1 \circ T_2)x = T_1(T_2x).$$

The set of bounded operators on E is denoted by $L(E, E)$.

Proposition 2. $L(E, E)$ is a normed algebra; i.e.

- (1) $L(E, E)$ is closed under addition, scalar multiplication, and composition;
- (2) $|| \cdot ||$ is a norm on the vector space $L(E, E)$.
- (3) $||T_1 \circ T_2|| \leq ||T_1|| ||T_2||$ for $T_1, T_2 \in L(E, E)$.

The proof is trivial and standard and is left to the reader.

Proposition 3. Characterization of bounded linear operators.

Let $T : E \rightarrow E$ be a (standard) operator. Then the following are equivalent:

- (1) T is bounded (i.e. $T \in L(E, E)$).
- (2) T is continuous.
- (3) $T\mu_E(0) \subseteq \mu_E(0)$.
- (4) T maps near standard points to near standard points.
- (5) T maps finite points to finite points.

Proof: (1) $\implies$ (2) is immediate from

$$||Tx - Ty|| = ||T(x-y)|| \leq ||T|| ||x - y||.$$

(2) $\implies$ (3) because (3) asserts that T is continuous at $x = 0$.

(3) $\implies$ (4) because for x standard: $T\mu_E(x) = T(x + \mu_E(0)) = Tx + T\mu_E(0) \subseteq Tx + \mu_E(0) = \mu_E(Tx)$.

We prove (4) $\implies$ (1) and (5) $\implies$ (1) simultaneously. If (1) fails, T is not bounded. Then for every integer n there exists $x_n \in E$ with $\|x_n\| = 1$ and $n^2 < \|Tx_n\|$. Take n infinite and set $y = \frac{1}{n} x_n$. Then $\|y\| = 1/n$ so that $y \in \mu_E(0)$ and is thus near standard and finite. But

$$n = \frac{n^2}{n} < \frac{\|Tx_n\|}{n} = \|Ty\|.$$

Thus Ty is not finite and certainly not near standard. Hence both (4) and (5) fail.

Finally (1) $\implies$ (5) because $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$.

Definition. An operator $T : E \rightarrow E$ is compact iff T maps bounded sets to sets with compact closure.

One sees that T is compact iff TB has compact closure where B is the unit ball about 0.

Proposition 4. Characterization of compact operators.

Let $T : E \rightarrow E$ be a standard linear operator. Then

- (1) T is compact $\iff$ T maps finite points to near standard points.
- (2) Hence a compact operator is bounded.

Proof: TB has compact closure $\iff$ all its points are near standard.

Remark: A compact operator is sometimes called completely continuous.

§3. A Lemma

Throughout this § E denotes a normed vector space. Everything said holds equally well for an arbitrary metric space. We write $x \approx y$ iff $||x - y||$ is infinitesimal.

Proposition 1. Let $\langle s_n \rangle_n$ be an internal sequence of real numbers and suppose $s_n \in \mu_R(0)$ for all finite n . Then there exists an infinite integer ω such that $s_n \in \mu_R(0)$ for all $n \leq \omega$.

Proof: Let S be the (internal) set of all n such that $|s_n| < \frac{1}{n}$. Then S contains all finite n . If S is not everything, take $\omega + 1$ to be the smallest member of its complement.

Proposition 2. Let $\langle x_n \rangle_n$ be a standard infinite sequence in E . Then either

- (1) x_n has a (standard) limit point; or
- (2) x_n is not near standard for all infinite n .

Proof: Assume (2) fails. Then for some infinite ω and some standard y we have $x_\omega \approx y$. Choose a standard $\epsilon > 0$ and a finite integer n . The sentence

$$\exists m > n : ||x_m - y|| < \epsilon$$

holds in the enlargement (take $m = \omega$) and therefore holds in the standard model. Thus y is a limit point of $\langle x_n \rangle_n$.

Lemma. Let $\langle x_n \rangle_n$ be an infinite internal sequence in E either Q -finite or not. Suppose $\epsilon > 0$ is standard and

$$||x_i - x_j|| \geq \epsilon$$

for all finite integers i and j with $i \neq j$. Then for some integer k , x_k is not near standard.

Proof: Suppose not. Then x_k is near standard for all k . Define a standard sequence y_k by setting $y_k = {}^o(x_k)$ for k finite. Then $x_j \approx y_j$ for all finite integers j . Thus

$$(*) \quad ||y_i - y_j|| \geq \epsilon/2$$

for all finite i and j with $i \neq j$. The sequence of real numbers $s_j = ||x_j - y_j||$ is infinitesimal for all finite j and therefore also for sufficiently small infinite j by proposition 1. By assumption, x_j is always near standard; hence y_j is near standard for sufficiently small infinite j . But by (*), y has no limit point. Hence by proposition 2, y_j is not near standard for all infinite j : a contradiction.

§4. The Spectral Theorem for compact Self Adjoint Operators

In this section H denotes a separable complex Hilbert space. C denotes the field of complex numbers. (x, y) denotes the inner product on H , so that

- (1) (x, x) is real and ≥ 0 .
- (2) $(x, x) = 0$ only if $x = 0$.
- (3) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.
 $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.
- (4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
- (5) $(ax, y) = a(x, y)$, $(x, ay) = \overline{a}(x, y)$ for $a \in C$.

Here $\overline{a}$ denotes the complex conjugate of $a \in C$. Define a norm on H by

$$(6) \quad ||x|| = \sqrt{(x, x)}.$$

A sequence $\langle e_n \rangle$ (finite or infinite) is called orthonormal iff $||e_n|| = 1$ for all n and $(e_i, e_j) = 0$ for all $i \neq j$. If in addition

$$x = \sum_n (x, e_n) e_n$$

for all $x \in H$, we say that $\langle e_n \rangle$ is an orthonormal basis. In that case the expression for x in terms of the e_n is unique. For if $x = \sum_n x_n e_n$ then

$$\begin{aligned} (x, e_n) &= \left(\sum_j x_j e_j, e_n \right) \\ &= \sum_j x_j (e_j, e_n) \\ &= x_n. \end{aligned}$$

We assume the reader is familiar with the following:

- I. $|(x,y)| \leq ||x|| ||y||$ (Schwarz inequality)
 II. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Minkowski inequality)
 III. Every orthonormal sequence extends to an orthonormal basis (with reindexing).

For proofs see Halmos, An Introduction to Hilbert Space, chapter 1.

Let $T : H \rightarrow H$ be a linear operator. A vector $v \in H$ is an eigenvector of T iff $v \neq 0$ and for some $\lambda \in \mathbb{C}$

$$Tv = \lambda v.$$

We then say λ is an eigenvalue of T .

T is self-adjoint iff

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

for all $x, y \in H$.

We now state

The Spectral Theorem for Compact Self-Adjoint Operators. Let T be a compact, self adjoint operator on H . Then H has an orthonormal basis $\langle v_n \rangle$ where each v_n is an eigenvector of T .

Remark: With respect to such a basis, T has "diagonal form"; i.e. if

$$x = \sum x_n v_n$$

is a point of H (where $x_n = (x, v_n)$), then

$$Tx = \sum \lambda_n x_n v_n.$$

Proof of the Spectral Theorem: In case H is finite dimensional, the theorem is practically trivial. Let v_1 be any eigenvector of T , say

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1.$$

Dividing v_1 by $\|v_1\|$ we may assume $\|v_1\| = 1$. Let H' be the subspace of all vectors perpendicular to v_1 , i.e. $x \in H'$ iff $(v_1, x) = 0$. For $x \in H'$

$$(v_1, Tx) = (Tv_1, x) = (\lambda_1 v_1, x) = \lambda_1 (v_1, x) = 0$$

so that $Tx \in H'$. Thus H' is invariant under T and the theorem follows by induction on the dimension of H .

We will prove the infinite dimensional case from the finite dimensional case via non-standard analysis.

Let $\{e_n\}$ be an orthonormal basis for H . Select an infinite integer ω and let $\tilde{H}$ be the subspace of H spanned by $e_1, e_2, \dots, e_\omega$.

Let $P : H \rightarrow \tilde{H}$ be the perpendicular projection; i.e.

$$P\left(\sum_n x_n e_n\right) = x_1 e_1 + \dots + x_\omega e_\omega.$$

Let $\tilde{T} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ denote the restriction of $P \circ T \circ P$ to $\tilde{H}$.

Proposition 1. $Px \approx x$ for x near standard.

Proof: Recall that $x \approx y$ means that $\|x - y\|$ is infinitesimal. Suppose x is standard. Since $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j e_j = x$ we have that $\left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j - x \right\|$ is infinitesimal for n infinite; and in particular for $n = \omega$. If $x \approx y$ where y is standard, then $Px \approx Py \approx y \approx x$.

Proposition 2. If x is finite, $PTPx$ is near standard.

Proof: Let x be finite. Since $\|Px\| \leq \|x\|$, Px is finite. Since T is compact, TPx is near standard; say $TPx \approx y$ where y is standard. Then $PTPx \approx Py$. But $Py \approx y$. Hence $PTPx \approx y$.

Proposition 3. Let $v \in \tilde{H}$ and suppose $\tilde{T}v = \lambda v$ and $\|v\| = 1$. Then if λ is not infinitesimal, v and λ are near standard.

Proof: $\tilde{T}v = PTPv$ is near standard by proposition 2. Hence, since $1/\lambda$ is not infinite so is $\frac{\tilde{T}v}{\lambda} = v$.

Since $|\lambda| \leq ||T||$, λ is not infinite.

Now $\tilde{H}$ is $\mathbb{Q}$ -finite-dimensional. Hence by transfer of the finite dimensional theorem we select an orthonormal basis

$$\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_\omega$$

for $\tilde{H}$ and complex numbers $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_\omega$ with

$$\tilde{T} \tilde{v}_j = \tilde{\lambda}_j \tilde{v}_j \quad j = 1, \dots, \omega.$$

We may also assume

$$|\tilde{\lambda}_1| \geq |\tilde{\lambda}_2| \geq \dots \geq |\tilde{\lambda}_\omega|.$$

By proposition 3, $\tilde{\lambda}_j$ and $\tilde{v}_j$ are near standard.

Proposition 4. Let $\varepsilon > 0$ be standard and $|\tilde{\lambda}_j| \geq \varepsilon$ for $j = 1, \dots, k$. Then k is finite.

Proof: Since the $\tilde{v}_j$ are orthonormal,

$$||\tilde{v}_i - \tilde{v}_j|| = \sqrt{2}$$

for $i \neq j$. By proposition 3, $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k$ are near standard. Hence by the lemma of §3, k is finite.

Proposition 5. Let x be near standard. Then $Tx \approx \tilde{TP}x$.

Proof: Without loss of generality assume x is standard. $x \approx Px$ by proposition 1. Hence $Tx \approx TPx$. Hence $PTx \approx PTPx$. Again by proposition 1, $Tx \approx PTx$. Since $PPx = Px$ we have

$$Tx \approx PTx \approx PTPx = PTPPx = \tilde{TP}x.$$

Now let W be the set of all integers j such that $\tilde{\lambda}_j$ is not infinitesimal. By proposition 4, W contains no infinite j . Hence there are two cases: case 1. $W = \{1, \dots, k\}$ k finite, and case 2. $W =$ all finite integers.

Case 1. $W = \{1, \dots, k\}$ when k is finite. By proposition 3, $\tilde{v}_j$ and $\tilde{\lambda}_j$ are near standard for $j \in W$. Define

$$\begin{aligned} v_j &= {}^o(\tilde{v}_j) \\ \lambda_j &= {}^o(\tilde{\lambda}_j) \quad \text{for } j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Then $v_j \approx \tilde{v}_j$ for $j = 1, \dots, k$ so that $(v_i, v_j) \approx (\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0$ for $i \neq j$. Since (v_i, v_j) is standard, $(v_i, v_j) = 0$.

Similarly $\|v_i\| = 1$ for $i = 1, \dots, k$.

Extend $v_1, \dots, v_k$ to an orthonormal basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots$ of H and let $\lambda_j = 0$ for $j = k+1, k+2, \dots$.

Choose $x \in H$. Then $Px \in \tilde{H}$ and

$$Px = \tilde{x}_1 \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{x}_\omega \tilde{v}_\omega$$

where $\tilde{x}_j = (x, \tilde{v}_j)$. But

$$\tilde{TP}x = \tilde{x}_1 \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{x}_\omega \tilde{\lambda}_\omega \tilde{v}_\omega.$$

Hence

$$\begin{aligned} & \| \tilde{TP}x - (\tilde{x}_1 \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{x}_k \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_k) \| \\ &= \| \tilde{x}_{k+1} \tilde{\lambda}_{k+1} \tilde{v}_{k+1} + \dots + \tilde{x}_\omega \tilde{\lambda}_\omega \tilde{v}_{k+1} \| \\ &\leq \tilde{\lambda}_{k+1} \|x\|. \end{aligned}$$

Since $\tilde{\lambda}_{k+1}$ is infinitesimal, this says that

$$\tilde{TP}x \approx \tilde{x}_1 \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{x}_k \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_k.$$

By proposition 5, $Tx \approx \tilde{TP}x$. Hence

$$\begin{aligned} Tx &\approx \tilde{TP}x \\ &\approx \tilde{x}_1 \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{x}_k \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_k \\ &= (x, \tilde{v}_1) \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 + \dots + (x, \tilde{v}_k) \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_k \\ &\approx (x, v_1) \lambda_1 v_1 + \dots + (x, v_k) \lambda_k v_k. \end{aligned}$$

Hence since both sides are standard

$$Tx = \lambda_1 (x, v_1) v_1 + \dots + \lambda_k (x, v_k) v_k.$$

Case 2. W is the set of all (finite) natural numbers. Then each $\tilde{\lambda}_j$ for j finite is near standard and so by proposition 3 we may define (for finite j)

$$\begin{aligned} v_j &= {}^o(\tilde{v}_j) \\ \lambda_j &= {}^o(\tilde{\lambda}_j). \end{aligned}$$

As before the set $\langle v_n \rangle$ is orthonormal. By proposition 4, $|\lambda_n| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Choose x H standard. For n finite,

$$\begin{aligned} &||Tx - (\lambda_1 (x, v_1) v_1 + \dots + \lambda_n (x, v_n) v_n)|| \\ &\approx ||\tilde{TP}x - (\tilde{\lambda}_1 (x, \tilde{v}_1) \tilde{v}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n (x, \tilde{v}_n) \tilde{v}_n)|| \\ &= ||\tilde{\lambda}_{n+1} (x, \tilde{v}_{n+1}) \tilde{v}_{n+1} + \dots + \tilde{\lambda}_\omega (x, \tilde{v}_\omega) \tilde{v}_\omega|| \\ &\leq \tilde{\lambda}_{n+1} ||x|| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$; i.e.

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x, v_n) v_n.$$

$\langle v_n \rangle$ may be extended to an orthonormal base (the new basis vectors are eigenvectors of the eigenvalue 0).

This completes the proof of the spectral theorem.

