stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 18/77 OKTOBER

G.L. WANROOIJ

# TOEPASSINGEN VAN COÖPERATIEVE SPELTHEORIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

5777.903

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

*Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.*

*The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).*

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 90D45, 90D12

Toepassingen van coöperatieve speltheorie

door

G.L. Wanrooij

SAMENVATTING

In deze syllabus voor de werkweek "Modelvorming met speltheorie" worden een vijftal toepassingen van de coöperatieve speltheorie beschreven.
De eerste drie toepassingen liggen op het gebied van de verdeling van gezamenlijk gemaakte kosten of winst. De vierde toepassing is een marktmodel.
Tot slot een toepassing op stemproblemen.

# 1. INLEIDING.

De toepassingen van coöperatieve speltheorie kunnen we onderverdelen in toepassingen op praktische problemen en toepassingen bij de theorievorming in andere wetenschappen.

De praktische problemen waarop coöperatieve speltheorie is toegepast zijn situaties waarbij gezamenlijk gemaakte winst of kosten verdeeld moeten worden. In 1962 werd door SHUBIK [32] de aandacht gevestigd op de mogelijkheid coöperatieve speltheorie toe te passen bij de interne prijsstelling in een gedecentraliseerde organisatie. Een gedecentraliseerde organisatie bestaat uit een aantal afdelingen die ieder bepaalde beslissings bevoegdheden bezitten. Uit de voorbeelden in zijn artikel blijkt dat bij zeer gebruikelijke methoden van interne prijsstelling de afdelingen uit eigenbelang beslissingen kunnen nemen die de organisatie als geheel schaden.

Hij formuleert een aantal eisen waaraan een interne prijsstelling zou moeten voldoen. Zijn eisen komen overeen met een kostenverdeling volgens een oplossingsconcept uit de coöperatieve speltheorie. Door een groot aantal inspirerende voorbeelden komen in dit artikel de mogelijkheden die coöperatieve speltheorie kan hebben voor praktische problemen duidelijk tot uitdrukking.

In 1970 werd door LITTLECHILD [9] coöperatieve speltheorie toegepast bij het vaststellen van telefoontarieven. Zijn meest bekende voorbeeld, de bepaling van landingstarieven voor het vliegveld in Birmingham [11, 10, 12 en 13], zal worden uitgewerkt in §2.

Een toepassing op de kostenverdeling bij gemeenschappelijke drinkwatervoorziening is afkomstig van SUSUKI & NAKAYAMA [34] en wordt behandeld in §3.

Een soortgelijke toepassing n.l. de verdeling van de voordelen van het in samenwerking opwekken van elektrische energie over de participanten staat beschreven in §4. Deze toepassing is afkomstig van GATELY [8] en is een voorbeeld van een praktische situatie die aanleiding heeft gegeven tot nieuwe theorievorming.

De economie is de wetenschap die voor haar theorievorming het meest intensief van de speltheorie gebruik maakt. Andersom is de economie altijd de grootste inspiratiebron voor de speltheorie geweest. In verschillende tijdsperioden zijn boeken verschenen waarin deze verbondenheid tot uitdrukking komt, bijvoorbeeld [17, 30 en 6]. De artikelen op economisch-speltheoretisch gebied zijn talrijk. De coöperatieve speltheorie is veelvuldig toegepast bij het modelleren van ruilmarkten of van ruil- en produktie markten, bijvoorbeeld [21, 22, 31, 4, 26, 24, 27 en 29]. Een toepassing op een markt waar ondeelbare produkten worden verhandeld, SHAPLEY & SHUBIK [28], wordt beschreven in §5.

In de sociale wetenschappen wordt voor de modelvorming eveneens van de speltheorie gebruik gemaakt. Een groot aantal toepassingen van coöperatieve speltheorie wordt gevonden bij de theorie van het stemmen, bijvoorbeeld [14, 23, 15, 33 deel III, 5 en 16]. Een methode om machtindices toe te kennen aan de fracties in een parlement afkomstig van OWEN [19] wordt behandeld in §6. De speltheoretische begrippen die in deze syllabus worden gebruikt zijn behandeld in [36].

## 2 BEPALING VAN LANDINGSTARIEVEN.

Voor spelen met veel spelers is de Shapley waarde i.h.a. moeilijk te berekenen. OWEN [18] geeft een manier om de Shapley waarde te benaderen. LITTLECHILD & OWEN [11] laten zien dat voor spelen met een speciale structuur de Shapley waarde zonder veel rekenwerk exact bepaald kan worden. Als voorbeeld geven ze het bepalen van landingstarieven voor Birmingham Airport. BAKER [1] en THOMPSON [35] hebben eerder landingstarieven voor vliegvelden onderzocht en kwamen tot de conclusie dat de investering nodig voor het aanleggen van een landingsbaan uitsluitend afhankelijk is van het grootste type vliegtuig dat er moet kunnen landen. Zij stellen de volgende regel voor om de jaarlijkse kosten die uit deze investering voortvloeien over de landingen te verdelen. Verdeel de kosten die ontstaan als alleen het kleinste type vliegtuig zou landen gelijkelijk over het aantal landingen van alle vliegtuigen tezamen. Verdeel vervolgens de meerdere kosten die ontstaan als ook het één na kleinste type vliegtuig zou landen gelijkelijk over het aantal landingen van alle typen vliegtuigen behalve die van het kleinste type. Ga zo voort totdat tenslotte de meerdere kosten om het grootste type vliegtuig te doen landen (boven de kosten van het op één na grootste type) gelijkelijk verdeeld wordt over de landingen van het grootste type.

Deze tariefbepaling komt precies overeen met de Shapley waarde van een op passende manier gedefinieerd spel waarbij de landingen die in een jaar plaatsvinden als spelers worden beschouwd.

Meer in het algemeen tonen Littlechild en Owen aan dat, als de karakteristieke functie bestaat uit een "kosten"-functie waarvan de waarde afhangt van het "grootste" type speler in de desbetreffende deelverzameling, de Shapley waarde op deze eenvoudige manier bepaald kan worden. Zo'n kostenfunctie is subadditief maar het tegengestelde van deze functie is dan automatisch superadditief. Normaal is de karakteristieke functie in termen van opbrengsten geformuleerd. Echter de Shapley waarde van het spel gebaseerd op het tegengestelde van de kostenfunctie is het tegengestelde van de Shapley waarde van het spel gebaseerd op de kosten functie.
We noteren $N_i$ voor de verzameling spelers van type i, voor $i = 1,\dots,m$, waarbij $n_i$ het aantal spelers is van type i. Laat $N = \bigcup_{i=1}^m N_i$ en $n = \sum_{i=1}^m n_i$. Laat $c_i$ de "kosten" verbonden aan een speler van type i zijn.
We veronderstellen dat de spelers zo genummerd zijn dat geldt:

$$(2.1) \qquad 0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_m.$$

We definiëren een spel met N als spelersverzameling door de subadditieve karakteristieke functie

$$(2.2) \qquad C(\emptyset) = 0, \quad C(S) = \max\,\{c_i\},$$

waarbij gemaximaliseerd wordt over alle i z.d.d. $N_i \cap S \neq \emptyset$.

We noteren: $R_k = \bigcup_{i=k}^m N_i$ en $r_k = \sum_{i=k}^m n_i$ voor $k = 1,\dots,m$. (dus $R_1 = N$ en $r_1 = n$).

De Shapley waarde voor het spel (N,C) kunnen we schrijven als:

$$\phi_j(N,C) = \sum_{\substack{S:S\subset N\\ j\in S}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [C(S)-C(S-\{j\})] \quad \text{voor } j \in N \tag{2.3}$$

waarbij s het aantal spelers is in de deelverzameling S.

STELLING. *Voor het spel gedefiniëerd door* (2.2) *kunnen we de Shapley waarde schrijven als*

$$\phi_j(N,C) = \sum_{k=1}^{i} (c_k-c_{k-1})/r_k \quad \text{voor } j \in N_i, \quad i = 1,\dots,m. \tag{2.4}$$

BEWIJS. De Shapley waarde van de som van twee spelen is gelijk aan de som van de Shapley waarden van de twee spelen afzonderlijk. De karakteristieke functie C kan worden geschreven als de som van m spelen die op grond van symmetrie een eenvoudig te bepalen Shapley waarde hebben.

We definiëren de karakteristieke functie $C_k$ voor $k = 1,\dots,m$ op $2^N$ als volgt:

$$\begin{aligned} C_k(S) &= 0 \quad \text{als} \quad S\cap R_k = \emptyset \\ &= c_k-c_{k-1} \quad \text{als} \quad S\cap R_k \neq \emptyset \end{aligned} \tag{2.5}$$

In dit spel vormen de spelers $R_k$ een drager en het spel is symmetrisch voor de spelers $R_k$. Dus de Shapley waarde voor $(N,C_k)$ is:

$$\begin{aligned} \phi_j(N,C_k) &= 0 \quad \text{als} \quad j \notin R_k \\ &= c_k-c_{k-1}/r_k \quad \text{als } j \in R_k \end{aligned} \tag{2.6}$$

Laat $S \subset N$ en $k_0$ het "grootste" type speler in S zijn. Uit (2.5) en (2.2) volgt:

$$\sum_{k=i}^{m} C_k(S) = \sum_{k=1}^{k_0} C_k(S) = \sum_{k=1}^{k_0} c_k-c_{k-1} = c_{k_0} - c_0 = c_{k_0} = C(S) \tag{2.7}$$

en dus

$$\phi_j(N,C) = \sum_{k=1}^{m} \phi_j(N,C_k) \tag{2.8}$$

Als $j \in N_i$ dan geldt:

(2.9) $\phi_j(N,C) = 0$ als $k > i$ en
$= c_k - c_{k-1}/r_k$ als $k \leq i$

Dus

(2.10) $\phi_j(N,C) = \sum_{k=1}^{i} (c_k - c_{k-1})/r_k$ voor $j \in N_i$, $i = 1,\ldots,m$. □

<u>GEVOLG</u>: Noteren we $\Phi_i$ voor $\phi_j(N,C)$ als $j \in N_i$, $i = 1,\ldots,m$ dan geldt:

(2.11) $\Phi_i = \Phi_{i-1} + (c_i - c_{i-1})/r_i$.

Als i.h.b. $n_i = 1$ voor alle $i$ dan kunnen we dit schrijven als:

(2.12) $\Phi_i = \Phi_{i-1} + (c_i - c_{i-1})/|n-i+1|$.

Op de volgende bladzijde zijn in een tabel de resultaten voor Birmingham airport weergegeven.
In het jaar 1968-69 vonden er op Birmingham airport 13.572 landingen plaats van 11 verschillende typen vliegtuigen. Onderhoudskosten worden opgegeven per landing, terwijl investeringskosten afhangen van het grootste type vliegtuig. De onderhoudskosten per landing vermeerderd met een bijdrage in de investeringskosten vormt het landingstarief. De tarieven gebaseerd op de Shapley waarde ($\Phi_i + m_i$) wijken voor het kleinste en voor het grootste type vliegtuig aanzienlijk af van de huidige tarieven ($f_i$). In latere artikellen LITTLECHILD [10] en LITTLECHILD & VAIDYA [13] zijn de nucleolus respectievelijk de uittreenucleolus voor dit voorbeeld berekend. De uittreenucleolus zal worden behandeld in §4. De berekende waarden zijn in de laatste kolommen van de tabel opgenomen.

De resultaten voor Birmingham airport (bedragen in ponden) zijn als volgt:

| vliegtuig type | aantal landingen | jaarlijkse invest. kosten | Shapley waarde invest. kosten | onderhouds kosten per landing | landingstar. gebaseerd op de Shapley waarde | huidig (68-69) landings tarief | Nucleolus invest. kosten | Uittree nucleolus invest. kosten |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $n_i$ | $c_i$ | $\Phi_i$ | $m_i$ | $\Phi_i + m_i$ | $f_i$ | $\mathcal{N}_i$ | $\mathcal{D}_i$ |
| 1 | 42 | 65.899 | 4,86 | 5,23 | 10,09 | 5,80 | 7,89 | 6,24 |
| 2 | 9.555 | 76.725 | 5,66 | 6,09 | 11,75 | 11,40 | 7,89 | 7,27 |
| 3 | 288 | 95.200 | 10,30 | 7,55 | 17,85 | 21,70 | 7,89 | 9,02 |
| 4 | 303 | 97.200 | 10,85 | 7,71 | 18,56 | 29,80 | 7,89 | 9,21 |
| 5 | 151 | 97.436 | 10,92 | 7,73 | 18,65 | 20,30 | 7,89 | 9,23 |
| 6 | 1.315 | 98.142 | 11,13 | 7,79 | 18,92 | 16,70 | 7,89 | 9,30 |
| 7 | 505 | 102.496 | 13,40 | 8,13 | 21,53 | 26,40 | 7,89 | 9,71 |
| 8 | 1.128 | 104.849 | 15,70 | 8,32 | 23,39 | 29,40 | 7,89 | 9,93 |
| 9 | 151 | 113.322 | 44,80 | 8,99 | 53,79 | 34,70 | 40,16 | 39,84 |
| 10 | 112 | 115.440 | 60,61 | 9,16 | 69,77 | 48,30 | 40,17 | 40,58 |
| 11 | 22 | 117.676 | 162,24 | 9,34 | 171,58 | 66,70 | 103,46 | 103,50 |

## 3. KOSTENDELING BIJ GEMEENSCHAPPELIJKE DRINKWATERVOORZIENING.

Een ander voorbeeld van verdeling van kosten met gebruikmaking van de nucleolus is afkomstig van SUSUKI en NAKAYAMA [34]. Het probleem is de verdeling van kosten bij gemeenschappelijke drinkwatervoorziening in een bepaald gebied in Japan. Er zijn twee soorten agenten die watervoorraden kunnen exploiteren: landbouwcoöperaties, die voor bevloeiïngsdoeleinden in hun eigen behoefte kunnen voorzien en eventueel van hun watervoorraad een gedeelte kunnen afstaan en stadswaterbedrijven, die meer water verbruiken dan zij zelf ter beschikking hebben.

Laat $N = \{1,...,n\}$ de verzameling agenten (spelers) zijn, A de verzameling van landbouwcoöperaties en B de verzameling van stadswaterbedrijven. Stad $i \in B$ heeft een hoeveelheid $\delta_i$ water tekort. Als $i \in A$ dan $\delta_i = 0$. Er zijn voor de steden twee mogelijkheden om in hun tekort aan water te voorzien:

(i) het bouwen van een dam eventueel in samenwerking met andere steden,
(ii) waterafname van de landbouwcoöperaties.

Ook combinaties van (i) en (ii) zijn mogelijk voor de stadswatervoorziening. Aan het bouwen van dammen en het verplaatsen van water zijn kosten verbonden. Bij gezamenlijke aanpak van de drinkwatervoorziening zijn de kosten lager als in het geval iedere stad afzonderlijk in zijn watertekort gaat voorzien. Het probleem is een "eerlijke" verdeling van de gemeenschappelijke kosten te vinden over de spelers.

Laat S een deelverzameling van spelers zijn en C(S) de minimale kosten om de waterbehoefte van de spelers in S te voorzien als zij geen samenwerking aangaan met spelers niet in S.
Als $S \cap B = \emptyset$ dan geldt $C(S) = 0$, want de landbouwcoöperaties hebben voldoende water voor eigen gebruik. Als $S \cap A = \emptyset$ dan is (i) de enige mogelijkheid om in het watertekort te voorzien, want (ii) vereist samenwerking met landbouwcoöperaties. Als S zowel stadswaterbedrijven als landbouwcoöperaties bevat dan kunnen de minimale kosten C(S) bestaan uit 3 komponenten.

(i) damconstructiekosten
(ii) kosten van verplaatsing van water van de landbouwcoöperaties naar de steden

(iii) kosten van verminderde opbrengst aan landbouwprodukten.

Het bepalen van C(S) is niet altijd gemakkelijk. In het geval de kosten functies in (i), (ii) en (iii) bekend zijn of benaderd kunnen worden wordt het bepalen van C(S) een mathematisch programmeringsprobleem. Als bijvoorbeeld de damconstructiekosten voor de spelers evenredig zijn met de hoeveelheid water die deze dam oplevert dan kunnen we deze kosten schrijven als:

(3.1) $$d^S \sum_{j \in S \cap B} y_j ,$$

waarbij $y_j$ de hoeveelheid water is, die per jaar door de dam aan speler j wordt geleverd en $d^S$ de damconstructiekosten per eenheid water per jaar voor coalitie S zijn. Als de waterverplaatsingskosten tussen een landbouwcoöperatie en een stad evenredig met de hoeveelheid water zijn kunnen we deze kosten schrijven als:

(3.2) $$\sum_{i \in S \cap A} \sum_{j \in S \cap B} e^S_{ij} x_{ij} ,$$

waarbij $x_{ij}$ de hoeveelheid water is, die per jaar door stad j van landbouwcoöperatie i wordt afgenomen en $e^S_{ij}$ de verplaatsingskosten van i naar j per éénheid water per jaar voor coalitie S zijn. Als tenslotte het verlies aan landbouwprodukten voor de coöperatie $i \in A$ evenredig is met de hoeveelheid water die meer wordt afgenomen dan het wateroverschot van i bedraagt dan kunnen we de opbrengstvermindering schrijven als:

(3.3) $$\begin{aligned} F_i\Big(\sum_{j \in S \cap B} x_{ij}\Big) &= c_i\Big(\sum_{j \in S \cap B} x_{ij} - \omega_i\Big) \quad \text{als} \sum_{j \in S \cap B} x_{ij} \geq \omega_i \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{anders} \end{aligned}$$

waarbij $\omega_i$ het wateroverschot van coöperatie i is en $c_i$ de waarde van het verlies aan landbouwprodukten per eenheid water die boven $\omega_i$ wordt afgestaan. In dit geval kan C(S) worden bepaald door het oplossen van het volgende mathematische programmeringsprobleem met als variabelen $y_j$ voor $j \in S \cap B$ en $x_{ij}$ voor $i \in S \cap A$ en $j \in S \cap B$.

Minimaliseer:

$$(3.4)\qquad d^S \sum_{j\in S\cap B} y_j + \sum_{i\in S\cap A}\ \sum_{j\in S\cap B} e^S_{ij}\, x_{ij} + F_i\Big(\sum_{j\in S\cap B} x_{ij}\Big)$$

onder de voorwaarden:

$$(3.5)\qquad y_j + \sum_{i\in S\cap A} x_{ij}\, S_j \geq \delta_j \quad \text{voor alle } j \in S \cap B$$

$$y_j\ ,\ x_{ij} \geq 0.$$

Stel dat alle spelers samenwerken dan moeten we een kostenverdeling $(x_1,\dots,x_n)$ bepalen z.d.d.:

$$(3.6)\qquad x(N) = C(N).$$

Omdat geen speler meer kosten zal willen dragen als hij zou hebben door alleen zijn problemen op te lossen moet gelden:

$$(3.7)\qquad x_i \leq C(\{i\}) \quad \text{voor alle } i \in N.$$

De toewijzing van kosten aan de landbouwcoöperaties zal dus niet positief zijn. Een voorwaarde als (3.7) zouden we ook voor coalities kunnen eisen:

$$(3.8)\qquad x(S) = C(S) \quad \text{voor alle } S \subset N.$$

In veel problemen zal echter geen oplossing gevonden kunnen worden die aan (3.6),(3.7) en (3.8) voldoet, d.w.z. de core is leeg. Teneinde de relatie (3.8) zoveel mogelijk te benaderen wordt de nucleolus als oplossingsconcept gebruikt. In de situatie die SUZUKI en NAKAYAMA hebben bestudeerd zijn er 5 spelers, waarvan 2 landbouwcoöperaties

$$N = \{1,2,3,4,5\} \quad A = \{1,2\} \quad B = \{3,4,5\}.$$

Onderstaande tabel vermeldt het waterteveel respectievelijk watertekort van de spelers:

| speler | $\omega_i$ resp. $\delta_j$ $10^8 m^3$/jaar |
|---|---|
| 1 | 1,67 |
| 2 | 1,28 |
| 3 | 1,48 |
| 4 | 2,28 |
| 5 | 1,94 |

De coëfficienten van de damconstructiekosten en de waterverplaatsingskosten zijn alleen afhankelijk van de steden die zich in deelverzameling S bevinden. De volgende tabel geeft hiervan een overzicht.

| $S \cap B$ | $d^S$(yen/$m^3$/jaar) | $e^S_{ij}$ (yen/$m^3$/jaar) | |
|---|---|---|---|
| 3 | 330,9 | $e^S_{13}$ = 297,3 | $e^S_{23}$ = 328,3 |
| 4 | 327,9 | $e^S_{14}$ = 299,7 | $e^S_{24}$ = 170,6 |
| 5 | 386,5 | $e^S_{15}$ = 353,1 | $e^S_{25}$ = 200,9 |
| 3,4 | 294,3 | $e^S_{13}$ = 225,7 | $e^S_{14}$ = 257,5 |
| | | $e^S_{23}$ = 328,3 | $e^S_{24}$ = 170,6 |
| 3,5 | 324,1 | $e^S_{13}$ = 227,4 | $e^S_{15}$ = 304,4 |
| | | $e^S_{23}$ = 328,3 | $e^S_{25}$ = 200,9 |
| 4,5 | 286,5 | $e^S_{14}$ = 202,8 | $e^S_{15}$ = 232,7 |
| | | $e^S_{24}$ = 170,6 | $e^S_{25}$ = 200,9 |
| 3,4,5 | 272,8 | $e^S_{13}$ = 215,8 | $e^S_{23}$ = 328,3 |
| | | $e^S_{14}$ = 194,8 | $e^S_{24}$ = 170,6 |
| | | $e^S_{15}$ = 224,7 | $e^S_{25}$ = 200,9 |

De coëfficienten voor het verlies aan landbouwprodukten zijn $c_1 = c_2 =$ 14,15 (yen/$m^3$/jaar).

Hieronder volgt een overzicht van de optimale waarden van de mathematische programmeringsproblemen en de waarden van $y_j$ en $x_{ij}$ waarvoor het optimum wordt bereikt.

| Coalitie S | C(S) ($10^8$ yen) | hoeveelheden in $10^8$ $m^3$/jaar | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_{13}$ | $x_{23}$ | $y_3$ | $x_{14}$ | $x_{24}$ | $y_4$ | $x_{15}$ | $x_{25}$ | $y_5$ |
| 1 | 0 | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | | | | | | | | | |
| 3 | 489,7 | | | 1,48 | | | | | | |
| 4 | 747,6 | | | | | | 2,28 | | | |
| 5 | 749,8 | | | | | | | | | 1,94 |
| 12 | 0 | | | | | | | | | |
| 13 | 440,0 | 1,48 | | 0 | | | | | | |
| 14 | 700,5 | | | | 1,67 | | 0,61 | | | |
| 15 | 694,0 | | | | | | | 1,67 | | 0,27 |
| 23 | 486,4 | | 1,28 | 0,20 | | | | | | |
| 24 | 546,3 | | | | | 1,28 | 1,00 | | | |
| 25 | 512,2 | | | | | | | | 1,28 | 0,66 |
| 34 | 1106,5 | | | 1,48 | | | 2,28 | | | |
| 35 | 1108,3 | | | 1,48 | | | | | | 1,94 |
| 45 | 1209,0 | | | | | | 2,28 | | | 1,94 |
| 123 | 440,0 | 1,48 | 0 | 0 | | | | | | |
| 124 | 518,1 | | | | 1,67 | 0,61 | 0 | | | |
| 125 | 490,2 | | | | | | | 0,66 | 1,28 | 0 |
| 134 | 998,0 | 1,48 | | 0 | 0,19 | | 2,09 | | | |
| 135 | 961,4 | 1,48 | | 0 | | | | 0,19 | | 1,75 |
| 145 | 1069,2 | | | | 1,67 | | 0,61 | 0 | | 1,94 |
| 234 | 948,2 | | 0 | 1,48 | | 1,28 | 1,00 | | | |
| 235 | 950,7 | | 0 | 1,48 | | | | | 1,28 | 0,66 |
| 245 | 1069,2 | | | | | 1,28 | 1,00 | | 0 | 1,94 |
| 345 | 1554,3 | | | 1,48 | | | 2,28 | | | 1,94 |
| 1234 | 865,4 | 0,67 | 0 | 0,81 | 1,00 | 1,28 | 0 | | | |
| 1235 | 803,8 | 1,48 | 0 | 0 | | | | 0,19 | 1,28 | 0,47 |
| 1245 | 940,9 | | | | 1,00 | 1,28 | 0 | 0,67 | 0 | 1,27 |
| 1345 | 1424,6 | 0 | | 1,48 | 1,67 | | 0,61 | 0 | | 1,94 |
| 2345 | 1424,3 | | 0 | 1,48 | | 1,28 | 1,00 | | 0 | 1,94 |
| 12345 | 1307,9 | 0,67 | 0 | 0,81 | 1,00 | 1,28 | 0 | 0 | 0 | 1,94 |

Het wateroverschot van de landbouwcoöperaties blijkt in de optimale oplossing van de grote coalitie precies te worden gebruikt. Stad 3 betrekt water van de dam en van speler 1, stad 4 van speler 1 en van speler 2 en stad 5 uitsluiten van de dam.

Berekening van de nucleolus levert de volgende kostenverdeling:

| speler | kosten ($10^8$ yen) |
|---|---|
| 1 | - 70,9 |
| 2 | - 71,2 |
| 3 | 412,4 |
| 4 | 549,6 |
| 5 | 488,0 |

4. UITTREEGEVOELIGHEID.

Een voorbeeld met soortgelijke structuur als de gemeenschappelijke drinkwatervoorziening afkomstig van GATELY [8], wordt in deze § behandeld. In dit voorbeeld wordt de opbrengst verdeeld die voortvloeit uit samenwerking op het gebied van elektrische energievoorziening in 3 districten in India. Hierbij wordt het begrip "uittreegevoeligheid" ingevoerd.

In het algemeen wordt verondersteld dat een spel slechts éénmaal wordt gespeeld. Bij de gemeenschappelijke drinkwatervoorziening en bij dit voorbeeld geldt echter dat de tijd een rol kan spelen. Bijvoorbeeld een speler kan met een tijdelijk ingenomen halstarrige houding in latere tijd zijn voordeel doen. Voor situaties waarbij door het uitvoeren van een dreigement uit de grote coalitie te stappen de onderhandelingspositie van de speler in de toekomst zou kunnen verbeteren is de imputatie met voor alle spelers gelijke uittreegevoeligheid een geloofwaardig oplossingsconcept.

DEFINITIE. Laat $(N,v)$ een spel, $i \in N$ en $x$ een imputatie. De *uittreegevoeligheid* van speler $i$ is:

$$\frac{x(N-\{i\}) - v(N-\{i\})}{x_i - v(\{i\})}$$

; de verhouding tussen het verlies van de overige spelers tot zijn eigen verlies indien de speler de grote coalitie zou verlaten.

We nummeren de 3 districten 1, 2 en 3. De volgende tabel geeft een overzicht van de kosten die bij diverse coalitiestructuren in de districten gemaakt zouden worden om in de energiebehoefte te voorzien. Spelers die tussen één paar haken staan vermeld werken samen onder de gegeven coalitiestructuur.

| Coalitie-structuur | kosten te maken in district nr. (milj. rupias) | | | totale kosten |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| (1),(2),(3) | 5330 | 1870 | 860 | 8060 |
| (1,3),(2) | 2600 | 1870 | 2420 | 6890 |
| (2,3),(1) | 5330 | 480 | 1480 | 7290 |
| (1,2),(3) | 5520 | 1470 | 860 | 7850 |
| (1,2,3) | 3010 | 1010 | 2510 | 6530 |

In de eerste en tweede rij staan dezelfde kosten voor speler 2, dus samenwerking van 1 en 3 heeft geen invloed op de kosten die 2 moet maken om in de eigen elektriciteitsbehoefte te voorzien.
Evenzo heeft samenwerking van 1 en 2 geen invloed op de kosten van 3 en samenwerking van 2 en 3 geen invloed op de kosten van 1. Laat nu voor iedere coalitie S v(S) het voordeel zijn van samenwerking tussen de leden van S boven individueel opereren dan krijgen we:

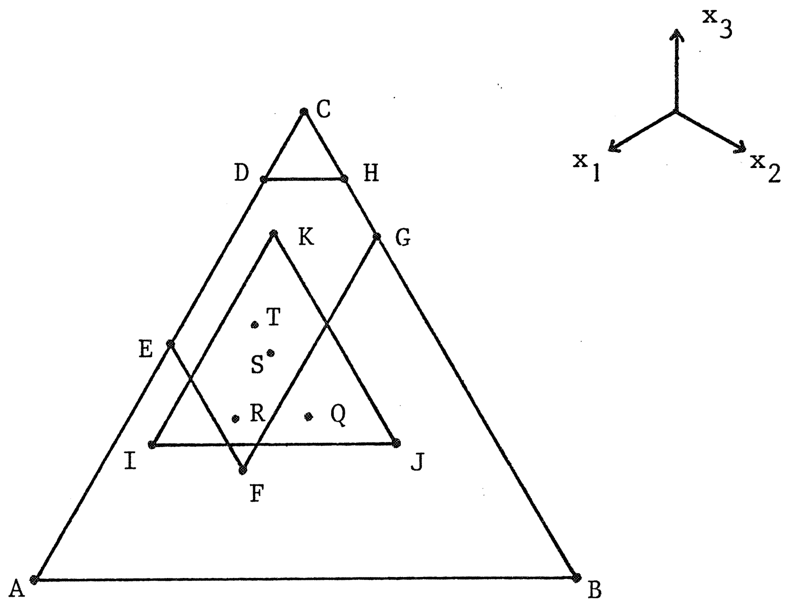
$$v(\{1,3\}) = 1170,\ v(\{2,3\}) = 770,\ v(\{1,2\}) = 210$$
$$v(\{1,2,3\}) = 1530 \text{ en } v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0.$$

De core van dit spel is gelijk aan

$$\{x \in R^3 \mid x_1,x_2,x_3 \geq 0,\ x_1+x_2+x_3 = 1530,\ x_1+x_3 \geq 1170,\ x_2+x_3 \geq 770,\ x_1+x_2 \geq 210\} =$$

$$\{x \in R^3 \mid x_1,x_2,x_3 \geq 0,\ x_1+x_2+x_3 = 1530,\ x_1 \leq 760,\ x_2 \leq 360,\ x_3 \leq 1320\}.$$

Dit kunnen we als volgt in tekening brengen:




De $\Delta ABC$ stelt de verzameling imputaties voor; de vijfhoek DEFGH de core.
De uittreegevoeligheid van speler 1 gegeven imputatie x is

$$\frac{x_2 + x_3 - v(\{2,3\})}{x_1 - v(\{1\})} .$$

Analoge uitdrukkingen gelden voor de uittreegevoeligheid van de spelers 2 en 3. Als bijvoorbeeld x = (30,300,1200) als imputatie wordt genomen dan ontvangt speler 1 een zeer gering gedeelte van het gemeenschappelijk voordeel. De schade die speler 1 zichzelf aandoet door coöperatie te weigeren is in dát geval 30. De overige spelers verliezen echter 1500-770=730. De uittreegevoeligheid van speler 1 is dus $24\frac{1}{3}$. Van spelers met een grote uittreegevoeligheid is de dreiging om de grote coalitie te verlaten zeer

geloofwaardig. Imputaties waarbij er spelers zijn met een grote uittreegevoeligheid kunnen we daarom als mogelijke uitkomst uitsluiten.
B.v. ΔIJK is de verzameling imputaties waarvoor geldt dat alle uittreegevoeligheden kleiner dan of gelijk zijn aan 2. Als een speler geen waarde krijgt toegevoegd is zijn uittreegevoeligheid ∞ ; als $x_i$ de in de core maximale waarde bereikt is de uittreegevoeligheid voor speler i gelijk aan 0.
In de onderstaande tabel zijn voor enige imputaties de bijbehorende uittreegevoeligheden vermeld.

| imputatie | | uittreegevoeligheden voor spelers | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| gelijke verdeling van het voordeel | Q = (510,510,510) | 0,49 | -0,29 | 1,59 |
| gewogen naar de elektriciteitsafname | R = (750,306,474) | 0,01 | 0,18 | 1,78 |
| Shapley waarde | S = $(483\frac{1}{3}, 283\frac{1}{3}, 763\frac{1}{3})$ | 0,58 | 0,27 | 0,78 |
| gelijke uittreegevoeligheden | T = (477,225,828) | 0,59 | 0,59 | 0,59 |

Zodra grote uittreegevoeligheden optreden is de bijbehorende imputatie als uitkomst van het spel niet erg stabiel. Van de imputaties in de tabel zijn alleen de Shapley waarde en de imputatie met gelijke uittreegevoeligheden aanvaardbaar. In een ander voorbeeld van GATELY [7], vallen deze twee imputaties samen.

LITTLECHILD EN VAIDYA [13] stellen voor het begrip uittreegevoeligheid uit te breiden van spelers tot coalities.

<u>DEFINITIE</u>. Laat (N,v) een spel, $x \in (N,v)$ en $S \subset N$ dan is de *uittreegevoeligheid van coalitie* S gelijk aan

$$\frac{x(N-S) - v(N-S)}{x(S) - v(S)} \text{ .}$$

GATELY zoekt naar de imputatie met gelijke uittreegevoeligheden voor alle 1 persoonscoalities. Hetzelfde zouden we kunnen doen voor coalities met $|S| = k < n$. Enige nadelen van deze oplossingsconcepten zijn:

(i) In het algemeen vinden we voor iedere k een andere imputatie.

(ii) De oplossing behorende bij k hangt alleen af van de waarde van de karakteristieke functie voor de coalities S met $|S| = k$, $n - k$ of $n$. Bij het 3 persoonsspel van GATELY was dit geen beperking.

(iii) Als we voor $|S| = k$ de uittreegevoeligheid gelijk maken kunnen er coalities zijn van een andere grootte met een hogere uittreegevoeligheid. Dat bezwaar geldt ook bij GATELY.

(iv) Bij 4 of meer persoonsspelen behoeft de imputatie niet in de core te liggen.

Vanwege deze bezwaren stellen LITTLECHILD en VAIDYA de uittreenucleolus als oplossingsconcept voor. Deze imputatie minimaliseert de maximum uittreegevoeligheid op de lexicografische manier zoals bij de nucleolus het surplus. De waarden van de uittreenucleolus voor het Birmingham airport voorbeeld staan vermeld in §2.

## 5. HET TOEWIJZINGSSPEL.

Door SHAPLEY en SHUBIK [28] wordt een eenvoudig marktmodel geschreven in de vorm van een coöperatief spel. Van dit spel, het toewijzingsspel, bestaat de core uit de optimale oplossingen van een lineair programmeringsprobleem dat het duale is van een toewijzingsprobleem.

Op de markt zijn 2 soorten agenten kopers en verkopers. De goederen die op deze markt verhandeld worden bestaan uit grote ondeelbare eenheden. Voorts wordt er vanuit gegaan dat iedere koper slechts één eenheid vraagt en iedere verkoper één eenheid aanbiedt.

De goederen van deze markt behoeven niet homogeen te zijn. Nut wordt geïdentificeerd met geld en kan zonder beperking worden overgedragen. Voor de beschrijving van het spel wordt een markt voor woonhuizen als voorbeeld genomen. Laten er m verkopers (huiseigenaren) en n (potentiële) kopers zijn. M is de verzameling verkopers, N de verzameling kopers. De nutswaarde die verkoper i aan zijn huis toekent is $c_i$, koper j kent aan ditzelfde huis de nutswaarde $h_{ij}$ toe.

Stel dat $h_{ij} > c_i$ en i zijn huis verkoopt aan j voor de prijs $p_i$, dan is het voordeel van deze transaktie voor i gelijk aan $p_i - c_i$ en voor j gelijk aan $h_{ij} - p_i$. Buiten het betalen van een verkoopsprijs zijn ook nevenbetalingen aan andere spelers mogelijk. Bij de behandeling als coöperatief spel bestaat geen onderscheid tussen de twee soorten betalingen. Men bepaalt allereerst een Pareto optimale verzameling transakties voor de grote coalitie ($N \cup M$) en daarna de verdeling van het door deze transakties ontstane voordeel. De waarde van de karakteristieke functie voor coalitie S : v(S) geeft het voordeel aan dat de coalitie S maximaal kan behalen zonder medewerking van spelers buiten S. Als een coalitie uit alleen kopers of alleen verkopers bestaat zal er geen voordeel behaald kunnen worden:

(5.1) $\quad v(S) = 0 \quad$ als $S \subset M$ of $S \subset N$.

In het bijzonder geldt:

(5.2) $\quad v(S) = 0 \quad$ als $S = \emptyset$ of $|S| = 1$.

De eenvoudigste coalitie die voordeel kan opleveren bestaat uit één koper en één verkoper. In dit geval kunnen we de waarde schrijven als:

(5.3) $\quad v(\{i,j\}) = \max\,(0, h_{ij} - c_i) \quad$ voor alle $i \in M$ en $j \in N$.

Ter vereenvoudiging van de notatie zal deze waarde met $a_{ij}$ worden aangegeven. Bij het bepalen van de waarde voor grotere coalities moeten we allereerst een optimale toewijzing van kopers aan verkopers vinden.

Als $k = \min(|S \cap M|, |S \cap N|)$ dan kunnen we de waarde $v(S)$ schrijven als:

$$(5.4) \qquad v(S) = \max\,[a_{i_1,j_1} + a_{i_2,j_2} + \ldots a_{i_k,j_k}]$$

waarbij het maximum wordt genomen over alle rijtjes van verschillende spelers $i_1,\ldots,i_k \in S \cap M$ en $j_1,\ldots,j_k \in S \cap N$.
Het toewijzingsprobleem voor de grote coalitie kunnen we schrijven als lineair programmeringsprobleem.
Maximaliseer:

$$(5.5) \qquad z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} a_{ij}\, x_{ij}$$

onder de voorwaarden:

$$(5.6) \qquad \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1, \ \sum_{j \in N} x_{ij} \leq 1 \text{ en } x_{ij} \geq 0 \quad \text{voor alle } i \in M \text{ en } j \in N.$$

Dit continue lineair programmeringsprobleem heeft een optimale oplossing waarvoor geldt $x_{ij} = 0$ of $x_{ij} = 1$ voor alle $i \in M$ en $j \in N$.
Als $x_{ij} = 1$ betekent dit toewijzen van i aan j, zodat:

$$(5.7) \qquad z_{max} = v(M \cup N).$$

Het duale probleem is:
minimaliseer

$$(5.8) \qquad w = \sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N} v_j$$

onder de voorwaarden:

$$(5.9) \qquad u_i + v_j \geq a_{ij} \text{ en } u_i, v_j \geq 0 \quad \text{voor all } i \in M \text{ en } j \in N.$$

Als $(u,v) = (u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_m)$ een optimale oplossing is van dit probleem dan geldt:

(5.10) $$\sum_{i\in M} u_i + \sum_{j\in N} v_j = w_{min} = z_{max}' = v(M\cup N).$$

Dus het paar (u,v) is een imputatie van het spel.
Bovendien geldt voor ieder paar $i \in M$ en $j \in N$:

(5.11) $$u_i + v_j \geq a_{ij} = v(\{i,j\})$$

en dus vanwege (5.4):

(5.12) $$\sum_{i\in S\cap M} u_i + \sum_{j\in S\cap N} v_j \geq v(S).$$

De paren (u,v) die een optimale oplossing zijn voor het duale probleem vormen dus precies de core van het spel. Teneinde de betaling $u_i$ te kunnen realiseren moet speler i zijn huis aanbieden voor de prijs:

(5.13) $$p_i = c_i + u_i.$$

Als alle verkopers op deze manier hun huis van een prijs voorzien dan heeft koper j de keuze uit m transakties met als netto voordeel:

(5.14) $$h_{ij} - p_i \quad \text{voor } i \in M.$$

Zijn al deze waarden negatief dan verdwijnt j uit de markt, anders zal hij die transaktie kiezen die hem het grootste voordeel levert. Het maximaliseren van (5.14) is vanwege (5.13) en (5.3) hetzelfde als het maximaliseren van:

(5.15) $$a_{ij} - u_i \quad \text{voor } i \in M.$$

Uit (5.11) volgt dat deze getallen niet groter zijn dan $v_j$ en vanwege het minimaliseren van (5.8) moet tenminste één waarde gelijk zijn aan $v_j$.
De maximale winst voor j is dus precies gelijk aan $v_j$, die wordt bereikt door het kiezen van de beste aanbieding. In het algemeen zal het toewijzingsprobleem een unieke optimale oplossing hebben. Bij degeneratie behoeft er niet één beste aanbieding te bestaan.

In dit geval moet zodanig worden gekozen dat niet hetzelfde huis naar verschillende kopers gaat. De core zal in het algemeen uit meerdere punten bestaan, daarom is de zojuist gegeven prijsstructuur zelden uniek.

VOORBEELD. Gegeven is een markt met 3 verkopers (1,2,3) en 3 kopers (1',2',3') en de volgende nutswaarden.

| huis (i) | nutswaarde verkoper ($c_i$) | nutswaarden kopers ($h_{i1}$) | ($h_{i2}$) | ($h_{i3}$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 180.000 | 230.000 | 260.000 | 200.000 |
| 2 | 150.000 | 220.000 | 220.000 | 210.000 |
| 3 | 190.000 | 210.000 | 210.000 | 170.000 |

De matrix met coëfficiënten $a_{ij}$ (uitgedrukt in 10.000 tallen guldens) ziet ziet er dan als volgt uit:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1' & 2' & 3' & u \\
\hline
1 & 5 & 8 & 2 & 4 \\
2 & 7 & 9 & 6 & 5{,}5 \\
3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
v & 2 & 4 & 0{,}5 &
\end{array}
$$

De optimale toewijzing (uniek) is met cirkels aangegeven en tevens een corevector (u,v). Voor de paren in de optimale toewijzing geldt: $u_i + v_j = a_{ij}$, voor de overige paren: $u_i + v_j > a_{ij}$. De prijzen die bij deze corevector horen zijn respectievelijk 220.000, 205.000 en 190.000 gulden. Met deze prijzen wordt automatisch de optimale toewijzing gerealiseerd. Bij iedere corevector zal men een ander prijzenstelsel vinden. De toewijzing die door de prijzen wordt gerealiseerd zal echter niet veranderen.

VOORBEELD. Dit voorbeeld staat bekend onder de naam paardenmarkt van BÖHM-BAWERK [3]. Op de markt zijn 8 personen die een paard aanbieden en 10 personen die een paard vragen. We veronderstellen dat de paarden allen van eenzelfde kwaliteit zijn. De nutswaarden die de spelers aan het bezitten van één der paarden toekennen is echter verschillend.

| nutswaarden verkopers | nutswaarden kopers |
|---|---|
| 10 | 30 |
| 11 | 28 |
| 15 | 26 |
| 17 | 24 |
| 20 | 22 |
| 21,50 | 21 |
| 25 | 20 |
| 26 | 18 |
| | 17 |
| | 15 |

Het verschil met het vorige voorbeeld is het afwezig zijn van produktdifferentiatie. In dit geval worden de nutswaarden voor de kopers gegeven door een vector $(h_1,\dots,h_m)$. Voor de waarde van de coalities bestaande uit één verkoper en één koper kunnen we schrijven:

$$v(\{i,j\}) = a_{ij} = \max(0, h_j - c_i). \tag{5.16}$$

Voor het bepalen van de waarde van grotere coalities is alleen van belang welke verkopers en kopers aktief zijn (d.w.z. daadwerkelijk verkopen respectievelijk kopen). Laat S een coalitie zijn met s spelers. Als $i_1,\dots,i_\ell$ de verkopers zijn in S geordend maar stijgende $c_i$ en $j_1,\dots,j_{s-\ell}$ de kopers in S geordend naar dalende $h_j$ dan geldt:

(5.17) $\quad v(S) = a_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_2} + \ldots + a_{i_k j_k}$, waarbij $k = \min(\ell, s-\ell)$.

Bepalen we voor het voorbeeld de waarde van de grote coalitie dan vinden we:

(5.18) $\quad v(MUN) = 20 + 17 + 11 + 7 + 2 + 0 + 0 + 0 + = 57.$

Dit is het voordeel dat ontstaat als de eerste vijf verkopers een paard verkopen en de eerste vijf kopers een paard kopen.

Bij een homogeen produkt krijgt ook de core een eenvoudige structuur. Laat (u,v) een element van de core zijn. Een aktieve verkoper i ontvangt een bedrag $c_i + u_i$, een aktieve koper j betaalt een bedrag $h_j - v_j$. Stel dat voor een paar (i,j) geldt $c_i + u_i < h_j - v_j$ dan volgt hieruit:

(5.19) $\quad u_i + v_j < h_j - c_i = a_{ij}$

hetgeen in tegenspraak is met het feit dat (u,v) in de core is gelegen. Dus iedere aktieve verkoper ontvangt tenminste evenveel als iedere aktieve koper betaalt. Dit betekent dat alle transakties tot stand komen tegen dezelfde prijs. Bij prijs p geldt:

(5.20) $\quad u_i = \max(0, p-c_i) \quad$ voor alle $i \in M$

(5.21) $\quad v_j = \max(0, h_j-p) \quad$ voor alle $j \in N$.

Het interval waarover p kan variëren wordt bepaald door de eis dat (5.10) moet gelden. In ieder geval zullen aan beide kanten van de markt evenveel spelers aktief zijn. In het voorbeeld moet voor de prijs p gelden:

(5.22) $\quad 21 \leq p \leq 21{,}50$

hetgeen overeenkomt met de klassieke oplossing van dit probleem.
De core oplossing doet geen recht aan alle argumenten die tijdens een onderhandeling tot uitdrukking zouden worden gebracht. Bijvoorbeeld de aanwezigheid op de paardenmarkt van de koper die bereid is 21 te betalen is van belang voor de aktieve verkopers.

Het verlaten van de markt van deze koper zou de ondergrens van de prijs naar 20 doen dalen. Op grond hiervan zouden niet aktieve kopers wellicht nevenbetalingen mogen verwachten. Hetzelfde geldt voor niet aktieve verkopers. In een artikel van SCHOTTER [20] wordt de paardenmarkt van BÖHM-BAWERK bestudeerd bij diverse methoden van veiling van de paarden.
Een behandeling van het toewijzingsspel als nevenbetalingen op voorhand worden verboden is te vinden in SHAPLEY & SCARF [25].

## 6. POLITIEKE SPELEN.

De theorie van de simpele spelen wordt vaak gebruikt voor de beschrijving van stemsituaties. In SHAPLEY [23] worden een aantal typen simpele spelen onderscheiden. Eén van deze typen is het gewogen meerderheidsspel.

DEFINITIE. Een simpel spel (N,v) is een *gewogen meerderheidsspel* als geldt dat er $q, w_1, \ldots, w_n \in R$ bestaan zodanig dat:

$$(6.1) \qquad v(S) = \begin{cases} 0 \text{ als } w(S) < q \\ 1 \text{ als } w(S) \geq q \end{cases}.$$

Het getal $w_i$ noemen we het *gewicht* van speler i; q noemen we de *drempel*.

In gewogen meerderheidsspelen is het gewicht geen maatstaf voor de macht die een speler in het spel heeft, een grootheid die dit beter aangeeft is de Shapley waarde.

VOORBEELD. Beschouw een N.V. met 100 aandelen en 4 aandeelhouders met respectievelijk 30, 30, 30 en 10 aandelen. De beslissingen worden genomen door aandeelhouders die gezamenlijk een meerderheid aan aandelen achter zich hebben. Deze situatie kan worden beschreven door een gewogen meerderheidsspel met $q = 51$ en $w = (30,30,30,10)$. Speler 4 is in dit spel machteloos; er is geen winnende coalitie die verliezend wordt als speler 4 uittreedt. De Shapley waarde is dan ook $(1/3,1/3,1/3,0)$. Zijn er 3 aandeelhouders met respectievelijk 49, 1 en 50 aandelen dan bezitten de spelers 1 en 2 dezelfde mogelijkheden. De Shapley waarde van het bijbehorende spel is $(1/6,1/6,2/3)$.

De Shapley waarde is veelvuldig als machtsindex voor stemsituaties gebruikt, bijvoorbeeld [2, 5 en 33 deel III]. Omdat de Shapley waarde uitsluitend is gebaseerd op de karakteristieke functie kan zij geen uitdrukking geven aan de voorkeur van spelers met bepaalde andere spelers een coalitie te vormen. In het voorbeeld van de aandeelhoudersvergadering is dit geen ernstig bezwaar, maar bij de beschrijving van bijvoorbeeld een volksvertegenwoordiging, waarbij de spelers de fracties van diverse politieke partijen zijn, speelt de voorkeur van de spelers een belangrijke rol.
De Shapley waarde wordt gegeven door:

$$\phi_i(N,v) = \sum_{\substack{t:T\subset N\\ i\in T}} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}[v(T)-v(T-\{i\})] \text{ voor } i = 1,\ldots,n. \tag{6.2}$$

Zoals beschreven in [36] kunnen we de Shapley waarde opvatten als verwachte opbrengst van het volgende procédé. Bepaal een volgorde van de spelers met een kansexperiment dat aan iedere volgorde dezelfde waarschijnlijkheid toekent. Ken vervolgens aan iedere speler zijn marginale waarde toe.
OWEN [19] stelt een wijziging van de Shapley waarde voor waarbij niet aan iedere volgorde dezelfde waarschijnlijkheid wordt toegekend.

Laten we aan de spelers $1,\ldots,n$ respectievelijk de punten $x^1,\ldots,x^n$ in de $R^{n-1}$ toekennen die zodanig zijn gekozen dat de afstand tussen spelers groot is als hun samengaan onwaarschijnlijk is. Vervolgens beschouwen we de sfeer $S_k$ met minimale dimensie k, die de punten $x_1,\ldots,x_n$ bevat.
De dimensie k is hoogstens gelijk aan n-2, dus voor 3 spelers de rand van een cirkel ($S_1$) en voor 4 spelers het oppervlak van een bol ($S_2$).
Bij iedere punt y van de sfeer $S_k$ kunnen we de punten $x^1,\ldots,x^n$ ordenen naar toenemende afstand tot y. Deze ordening bepaald een bij het punt y behorende volgorde van de spelers. De punten waarvoor geldt dat de afstanden tot sommige punten $x^i$ gelijk zijn vormen een verzameling van Lebesque maat ($\lambda_k$) nul. De maat $\lambda_1$ is de lengte, de maat $\lambda_2$ de oppervlakte van een verzameling. Laat $Y \subset S_k$ zodanig dat bij de punten van Y eenzelfde spelersvolgorde behoort, dat kiezen we de waarschijnlijkheid van deze spelersvolgorde gelijk aan:

(6.3) $\lambda_k(Y) / \lambda_k(S_k)$.

Als de punten $x^1,\ldots,x^n$ de hoekpunten vormen van een regelmatig n simplex dan zijn de waarschijnlijkheden voor alle spelersvolgorden gelijk en krijgen we de oorspronkelijke Shapley waarde. De toegekende waarschijnlijkheden bezitten de volgende eigenschappen:

(i) Een volgorde en de omgekeerde volgorde hebben dezelfde waarschijnlijkheid.

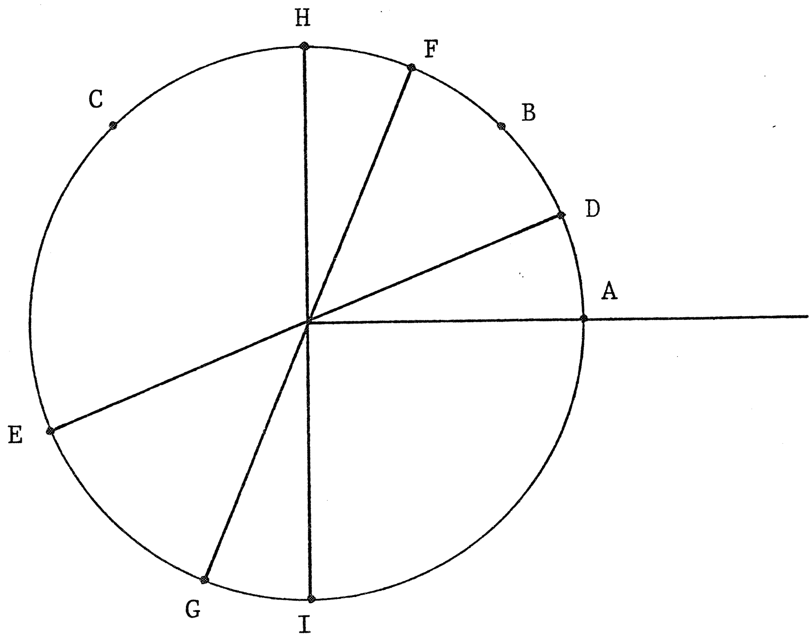
(ii) Verwijdering van spelers verandert de waarschijnlijkheden voor de onderlinge volgorden van de overige spelers niet.

De juistheid van eigenschap (i) kan worden ingezien door te constateren dat bij diametraal gelegen punten op de sfeer $S_k$ een tegenstelde volgorde van spelers behoort. Het bewijs van eigenschap (ii) wordt gegeven in OWEN [19], tevens bewijst hij de volgende stelling.

STELLING. *De gewijzigde Shapley waarde is een imputatie en behalve in de punten waar 2 of meer der $x^i$ samenvallen een continue functie van de punten $x^1,\ldots,x^n$.*

Hoewel een gewijzigde Shapley waarde bij ieder spel kan worden geconstrueerd liggen de meest voor de hand liggende toepassingen bij de gewogen meerderheidsspelen.

VOORBEELD. Beschouw een parlement met drie zetels en drie politieke partijen A, B en C, die ieder een zetel bezitten. De positie van de partijen op een cirkel zullen we aangeven door de hoek $\psi$ die de bijbehorende punten met een vaste as maken uitgedrukt in $\pi$ tallen radialen.
Bijvoorbeeld $\psi(A) = 0$, $\psi(B) = 1/4$, $\psi(C) = 3/4$.




De lijn DE is de lijn met gelijke afstand tot A en B; FG heeft gelijke afstand tot A en C; HI heeft gelijke afstand tot B en C. We kunnen nu de waarschijnlijkheden van de volgorden van de spelers bepalen.

| volgorde | waarschijnlijkheid |
|---|---|
| A,B,C | $1/2\pi$ lengte boog ID = 5/16 |
| B,A,C | $1/2\pi$ lengte boog FD = 2/16 |
| B,C,A | $1/2\pi$ lengte boog HF = 1/16 |
| C,B,A | $1/2\pi$ lengte boog HE = 5/16 |
| C,A,B | $1/2\pi$ lengte boog EG = 2/16 |
| A,C,B | $1/2\pi$ lengte boog GI = 1/16 |

De gewijzigde Shapley waarde van dit spel wordt (1/4,5/8,1/8). Bijvoorbeeld fractie A is doorslaggevend bij de volgordes BAC en CAB; de gewijzigde Shapley waarde voor speler A is dus 2/16 + 2/16. De stem van de "centrum" partij B is dus relatief vaak van doorslaggevende betekenis.

Ook bij grotere aantallen spelers is het mogelijk dat de spelers op een sfeer van lage dimensie blijken te liggen. OWEN plaatste de 11 fracties in de knesset van 1965 op een cirkel en berekende voor deze fracties de gewijzigde Shapley waarde. Doen we hetzelfde voor de huidige 2$^{e}$ kamer (de plaatsing op de cirkel is op niet wetenschappelijke wijze vastgesteld) dan vinden we de volgende resultaten.

| partij | aantal zetels | $\psi$ | gewijzigde Shapley waarde |
|---|---|---|---|
| CPN | 2 | 0,01 | 0 |
| PSP | 1 | 0,20 | 0 |
| PPR | 3 | 0,31 | 0 |
| Pv/dA | 53 | 0,38 | 0,095 |
| D'66 | 8 | 0,44 | 0 |
| DS'70 | 1 | 0,53 | 0 |
| CDA | 49 | 0,56 | 0,815 |
| VVD | 28 | 0,75 | 0,090 |
| GPV | 1 | 0,84 | 0 |
| SGP | 3 | 0,90 | 0 |
| BP | 1 | 0,98 | 0 |

LITERATUUR.

[1] BAKER, M.J. & Associates (1965), *Runway cost impact study*, Report presented to the Association of the Local Transport Airlines, Jackson, Miss.

[2] BANZHAF, J.F. (1968), *One man 3.312 votes: a mathematical analysis of the electral college*, Villanova Law Review, 13, 303-332.

[3] BÖHM-BAWERK, E. von, (1891), *Positive theory of capital* (vertaling 1923), G.E. Steckert, New York.

[4] DEBREU, G. & H.E. SCARF (1963), *A limit theorem on the core of an economy*, International Economic Review, 4, 235-246.

[5] FARQUHARSON, R. (1969), *Theory of voting*, Yale University Press.

[6] FRIEDMAN, J.W. (1977), *Oligopoly and the theory of games*, North-Holland P.C.

[7] GATELY, D. (1972), *Sharing the gains from common markets among developing countries, with reference to East-Africa*, Research Report 7211, Economics Department, University of Western Ontario.

[8] GATELY, D. (1974), *Sharing the gains from regional cooperation: a game theoretic application to planning investment in electric power*, International Economic Review, 15, 195-208.

[9] LITTLECHILD, S.C. (1970), *Peakload pricing of telephone calls*, Bell, J. of Econ. and Man. Sci., 191-210.

[10] LITTLECHILD, S.C. (1974), *A simple expression for the nucleolus in a special case*, International Journal of Game Theory, 3, 21-29.

[11] LITTLECHILD, S.C. & G. OWEN (1973), *A simple expression for the Shapley value in a special case*, Management Science, 20, 370-372.

[12] LITTLECHILD, S.C. & G. OWEN (1976), *A further note on the nucleolus of the "Airport Game"*, International Journal of Game Theory, 5, 91-95.

[13] LITTLECHILD, S.C. & K.G. VAIDYA (1976), *The propensity to disrupt and the disruption nucleolus of a characteristic function game.* International Journal of Game Theory, 5, 151-161.

[14] LUCE, R.D. & A.A. ROGOW (1956), *A game theoretic analysis of congressional power distributions for a two party system*, Behavioral Science, 1, 83-95.

[15] MASCHLER, M. (1963), *The power of a coalition*, Management Science, 10, 8-29.

[16] MC. KELVEY, R.D. & R.E. WENDELL (1976), *Voting eguilibria in multi-dimensional choice spaces*, Mathematics of Operations Research, 1, 144-158.

[17] NEUMANN, J. von & O. MORGENSTERN (1944), *Theory of games and economic behaviour*, Princeton University Press.

[18] OWEN, G. (1972), *Multilineair extensions of games*, Management Science, 18, part 2, p64-p79.

[19] OWEN, G. (1971), *Political games*, Naval Research Logistics Quarterly, 18, 345-355.

[20] SCHOTTER, A. (1974), *Auctioning Böhm-Bawerk's horses*, International Journal of Game Theory, 3, 195-215.

[21] SHAPLEY, L.S. (1955), *Markets as cooperative games*, The Rand Corporation, P629.

[22] SHAPLEY, L.S. (1959), *The solution of a symmetric market game*, Annals of Mathematical Studies, 40, 145-162.

[23] SHAPLEY, L.S. (1962), *Simple games: an outline of the descriptive theory*, Behavioral Science, 7, 59-66.

[24] SHAPLEY, L.S. (1967), *On balanced sets and cores*, Naval Research Logistics Quarterly, 14, 453-560.

[25] SHAPLEY, L.S. & H.E. SCARF (1974), *On cores and indivisibility*, Journal of Mathematical Economics, 1, 23-37.

[26] SHAPLEY, L.S. & M. SHUBIK (1966), *Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences*, Econometrica 34, 805-827.

[27] SHAPLEY, L.S. & M. SHUBIK (1969), *On market games*, Journal of economic theory, 1, 9-25.

[28] SHAPLEY, L.S. & M. SHUBIK (1971), *The assignment game I : the core*, International Journal of Game Theory, 1, 111-130.

[29] SHAPLEY, L.S. & M. SHUBIK (1975), *Competitive outcomes in the cores of market games*, International Journal of Game Theory, 4, 229-237.

[30] SHUBIK, M. (1959), *Strategy and market structure*, John Wiley.

[31] SHUBIK, M. (1959), *Edgeworth market games*, Annals of Mathematical Studies, 40, 267-278.

[32] SHUBIK, M. (1962), *Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs and internal pricing*, Management Science, 8, 325-343.

[33] SHUBIK, M. ed. (1964), *Game theory and related appoaches to social behaviour*, John Wiley.

[34] SUSUKI, M. & M. NAKAYAMA (1976), *The cost assignment of the cooperative waterresource development : a game theoretical approach,* Management Science, 22, 1081-1086.

[35] THOMPSON, G.F. (1971), *Airport cost and pricing,* Ph. D. Thesis, University of Birmingham.

[36] WANROOIJ, G.L. (1977), *Enige begrippen uit de coöperatieve speltheorie.* Rapport BC 17/77, Mathematisch Centrum.