stichting
mathematisch
centrum

AFDELING MATHEMATISCHE BESLISKUNDE BC 20/77 SEPTEMBER

S.H. TIJS

SPELEN IN UITGEBREIDE EN NORMALE VORM EN MATHEMATISCH PROGRAMMEREN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 90D05, 90C30

Spelen in uitgebreide en normale vorm en mathematisch programmeren

door

S.H. Tijs *)

SAMENVATTING

In dit rapport vindt U een samenvatting van twee lezingen welke gehouden zullen worden tijdens de werkweek "MODELVORMING MET SPELTHEORIE" die in september 1977 wordt georganiseerd door de afdeling Mathematische Besliskunde van het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

---

*) S.H.Tijs, Mathematisch Instituut, Katholieke Universiteit, Toernooiveld, Nijmegen.

INHOUD

1. *Inleiding*

(1.1) Speltheoretici houden zich bezig met het ontwerpen en het bestuderen van mathematische modellen voor conflictsituaties - dat zijn situaties waarbij meerdere beslissers (spelers) met uiteenlopende doelstellingen betrokken zijn. Het vak dankt zijn naam aan één van zijn inspiratiebronnen te weten de klasse van gezelschapspelen waaronder vallen pokeren, nim, schaak. Verder is er een vruchtbare wisselwerking met vakken als mathematisch programmeren, dynamisch programmeren, besturingstheorie, economie, statistiek, sociologie en krijgskunde.

(1.2) De grondslag van de speltheorie legde John von Neumann (1903-1957) in zijn artikel

"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", Math.Ann. 100, 1928, 295-320.

Bekendheid in brede kring kreeg het vak pas na het verschijnen in 1944 van het boek

"Theory of Games and Economic Behavior" (Princeton University Press)

van John von Neumann tesamen met Oskar Morgenstern (1902-1977). Sindsdien zijn er op allerlei plaatsen (enkele duizende) artikelen samenhangend met dit vakgebied verschenen. In de behoefte aan een eigen tijdschrift werd voorzien in 1971 door de oprichting van

"International Journal of Game Theory" (Physica Verlag, Vienna).

(1.3) Het is niet verwonderlijk dat niet alle conflictsituaties in één model te vangen zijn. Een onderverdeling in klassen van spelen ligt voor de hand. Deze kan ontstaan door te kijken naar allerlei facetten welke in conflictsituaties relevant zijn zoals

(a) het aantal beslissers (tweepersoonsspelen - spelen met meer dan twee personen),

(b) het al of niet geoorloofd zijn van combinevorming (cooperatieve spelen — niet-cooperatieve spelen),

(c) het hebben van een eenmalige invloed in een partij, ja dan nee (spelen in normale vorm — spelen in uitgebreide vorm, stochastische spelen, differentiaalspelen),

(d) het aantal beschikbare strategieën (eindige spelen — oneindige spelen),

(e) de regeling van de uitbetalingen (nulsomspelen — niet-nulsomspelen),

(f) de hoeveelheid informatie waarover een speler bij het aan zet zijn beschikt (spelen met en zonder volledige informatie).

Voor een zeer uitgebreide (poging tot) klassificatie van spelen verwijzen we naar VOROBEV [36].

De meest bestudeerde klassen van spelen te weten

- spelen in normale vorm
- spelen in uitgebreide vorm
- spelen in karakteristieke functievorm (cooperatieve spelen)
- stochastische spelen
- differentiaalspelen

komen alle in deze werkweek aan de orde.

(1.4) In deze eerste voordracht houden we ons voornamelijk bezig met de klasse van niet-cooperatieve tweepersoonsspelen in normale vorm waarbij de deelklasse van nulsomspelen bijzondere aandacht zal krijgen. Nadat een aantal basisbegrippen is ingevoerd concentreren we ons op problemen als

(a) de existentie van evenwichtspunten (of ε-evenwichtspunten voor elke $\varepsilon > 0$) van niet-nulsomspelen; de existentie van waarde en optimale strategieën voor nulsomspelen.

(b) de existentie van (ε-)evenwichtspunten voor gemengde uitbreidingen van spelen in normale vorm.

(c) het berekenen van waarde en optimale strategieën (resp. evenwichtspunten) voor nulsomspelen (resp. niet-nulsomspelen). Hierbij komen lineaire programmeringsproblemen en lineaire complementariteitsproblemen aan de orde.

(d) de structuur van optimale strategieënruimten (evenwichtspuntverzamelingen).

Tevens wordt in §3 op een informele manier aangegeven hoe spelen in uitgebreide vorm omgezet kunnen worden in spelen in normale vorm.
Voor werken waarin (ook) spelen in normale vorm uitgebreide aandacht krijgen verwijzen we naar BERGE [2], BLACKWELL & GIRSHICK [3], BURGER [5], KARLIN [12,13], LUCE & RAIFFA [17], von NEUMANN & MORGENSTERN [21], OWEN [23], PARTHASARATHY & RAGHAVAN [24], TIJS [31], WALD [38].

2. *Spelen in normale vorm.*

(2.1) Een *tweepersoonsspel* (*in normale vorm*) is een geordend viertal $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ waarbij X en Y niet-lege verzamelingen zijn en waarbij $K_1 : X \times Y \to \mathbb{R}$ en $K_2 : X \times Y \to \mathbb{R}$ reële functies op $X \times Y$ zijn. X, Y, K_1 en K_2 heten achtereenvolgens: (*zuivere*) *strategieënruimte van speler* I, (*zuivere*) *strategieënruimte van speler* II, *uitbetalingsfunctie van speler* I en *uitbetalingsfunctie van speler* II. De elementen van X (resp. Y) noemen we (*zuivere*) *strategieën van speler* I (resp. II).

(2.2) Een partijtje van zo'n spel verloopt als volgt: twee spelers, I en II genaamd, kiezen onafhankelijk van elkaar een element x resp. y uit de verzameling X resp. Y waarna een uitbetaling $K_1(x,y)$ aan speler I en een uitbetaling $K_2(x,y)$ aan speler II volgt.

(2.3) Een tweepersoonsspel $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ noemen we een *nulsomspel* als $K_1+K_2 = 0$. In dat geval geven we het spel ook aan met het geordende drietal $\langle X,Y,K\rangle$ waarbij $K := K_1 = -K_2$. In een nulsomspel vindt de verrekening na een partijtje tussen de spelers onderling plaats.

(2.4) Zij $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ een tweepersoonsspel. Als X en Y beide eindig veel elementen bevatten dan spreken we van een *eindig spel*. Het spel noemen we een *halfoneindig* (resp. een *oneindig*) *spel* als één der (resp. beide) strategieënruimten oneindig veel elementen bevat (resp. bevatten). Als $X = Y = [0,1]$, dan spreekt men van een *spel op het vierkant*.

(2.5) Laat $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ twee m×n-matrices ($m,n \in \mathbb{N}$) van reële getallen zijn. Het tweepersoonsspel $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ met

$$X = \{1,2,\ldots,m\}, \quad Y = \{1,2,\ldots,n\} \quad \text{en}$$

$$K_1(i,j) = a_{ij},\ K_2(i,j) = b_{ij} \quad \text{voor alle } (i,j) \in X \times Y$$

noemen we het (eindige) *bimatrixspel* met *uitbetalingsmatrices* A en B; we geven dit spel aan met (A,B).

Als $B = -A$, dan spreken we van een eindig *matrixspel* (met uitbetalingsmatrix) A. Het is duidelijk dat elk eindig tweepersoonsspel $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ op te vatten is als een eindig bimatrixspel door de elementen van X en Y te nummeren. Evenzo corresponderen halfoneindige (resp. oneindige) spelen waarbij de strategieënruimten aftelbaar zijn met halfoneindige (resp. oneindige) bimatrixspelen.

(2.6) *Voorbeeld* (*Duopolymodel van A. Wald*)

Veronderstel dat een bepaald product geproduceerd wordt door twee producenten I en II welke achtereenvolgens productiecapaciteit $c_1 > 0$ en $c_2 > 0$ hebben. Als I besluit per tijdseenheid een hoeveelheid $x \in [0,c_1]$ te produceren en op de markt te brengen en als II besluit een hoeveelheid $y \in [0,c_2]$ per tijdseenheid aan te bieden, dan brengt het product een prijs $p(x+y) \geq 0$ per eenheid product op. Veronderstel dat bij een productie x (resp. y) door I (resp. II) de productiekosten $k_1(x) \geq 0$ (resp. $k_2(y) \geq 0$) bedragen. Dan is deze marktsituatie om te zetten in het oneindige tweepersoonsspel $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ waarbij $X = [0,c_1]$, $Y = [0,c_2]$, en voor elke $x \in X$, $y \in Y$ geldt:

$$K_1(x,y) = xp(x+y)-k_1(x), \quad K_2(x,y) = yp(x+y)-k_2(y).$$

(2.7) *Voorbeeld* (*Game of timing*)

In een duel tussen "spelers" I en II met van geluiddempers voorziene pistolen zijn de spelregels als volgt: alleen in het tijdsinterval $[0,1]$ mag er gevuurd worden. Elke speler mag hoogstens éénmaal schieten. Als één van de spelers de tegenstander treft dan moet de getroffene één eenheid aan de schutter betalen en mag zelf niet meer vuren. Laten we voor beide spelers de trefkans van de tegenstanders ten tijde t stellen op $p(t)$ ($p(t) \in [0,1]$). [We veronderstellen dus gelijke duelcapaciteit]. We kunnen deze situatie herleiden tot het oneindige tweepersoonsnulsomspel (op het vierkant) $<X,Y,K_1,K_2>$ waarbij $X = Y = [0,1]$ en

$$K_1(x,y) = \begin{cases} p(x)-(1-p(x))p(y) & \text{als } x < y \\ 0 & \text{als } x = y \\ -p(y)+(1-p(y))p(x) & \text{als } x > y \end{cases}$$

$K_2(x,y) = -K_1(x,y)$ voor elke $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.

(2.8) *Voorbeeld* (*Een reclamecampagnemodel*)

Twee producenten I en II van hetzelfde produkt (waarvoor samenwerking verboden is) beheersen op zeker tijdstip ieder de helft van de markt welke voor ieder 8 eenheden per kwartaal opbrengt. Veronderstel dat beide partijen onafhankelijk van elkaar moeten beslissen om òf een reclamecampagne te beginnen welke twee eenheden kost (noem deze beslissing R) òf geen reclame te maken (noem deze beslissing GR). Veronderstel dat het marktaandeel in het dan volgende kwartaal (verder kijken we niet) gelijk blijft als beide of geen van beide reclame maken en dat in de andere gevallen degene die reclame maakt 75% van de markt krijgt in het volgende kwartaal. Deze situatie is op te vatten als een eindig tweepersoonsspel $<X,Y,K_1,K_2>$ waarbij $X = Y = \{GR,R\}$, $K_1(GR,GR) = 8$, $K_1(GR,R) = 4$, $K_1(R,GR) = 10$, $K_1(R,R) = 6$ en $K_2(GR,GR) = 8$, $K_2(GR,R) = 10$, $K_2(R,GR) = 4$, $K_2(R,R) = 6$, en dus ook als bimatrixspel (A,B) waarbij

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} GR & R \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} GR \\ R \end{array} \end{array} \quad , \quad B = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} GR & R \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} GR \\ R \end{array} \end{array}$$

ook wel verkort weer te geven door $(A,B) = \begin{bmatrix} (8,8) & (4,10) \\ (10,4) & (6,6) \end{bmatrix}$

(2.9) *Voorbeeld*

Partijtjes van het volgende merkwaardige spel (van A. Wald) verlopen als volgt: speler I en speler II noemen onafhankelijk van elkaar een natuurlijk getal. Daarna krijgt de speler die het hoogste getal genoemd heeft *f* 1,- van de ander en er volgt geen uitbetaling als beide hetzelfde getal noemden. Dit spel correspondeert met het $\infty\times\infty$-matrixspel met uitbetalingsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix}$$

(2.10) *Voorbeeld*

Zij $S \subset \mathbb{N}$. Zij $\langle\{1,2\}, \mathbb{N}, K\rangle$ het nulsomspel met

$$K(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{als } i+j \in S \\ -1 & \text{als } i+j \notin S \end{cases} \qquad (i \in \{1,2\},\ j \in \mathbb{N})$$

Als $S = \{3,6,9,\ldots\}$, dan correspondeert dit spel met het $2\times\infty$-matrixspel

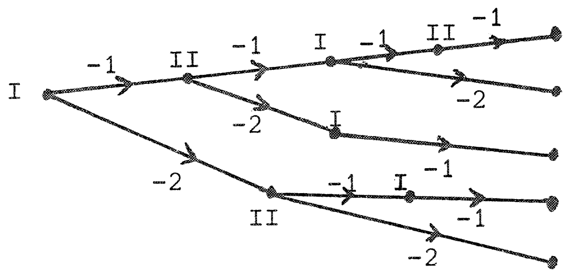
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & \cdots \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \end{bmatrix}$$

3. *Het normaliseren van spelen in uitgebreide vorm.*

(3.1) In een tweepersoonsspel in normale vorm doen beide spelers één zet en wel onafhankelijk van elkaar. Gezelschapsspelen zijn meestal meerzetsspelen. Hierbij zetten de spelers om de beurt en een speler komt vaak meermalen aan zet terwijl soms ook het toeval een rol speelt (verdelen kaarten). John van Neumann merkte op dat in principe de meeste gezelschapsspelen te reduceren zijn tot spelen in normale vorm (en zelfs vaak tot eindige matrixspelen). Het idee hierbij is (grofweg) om onder een *strategie* van een speler te verstaan: een volledig uitgewerkt speelplan vooraf dat de speler (of een vervanger) precies vertelt wat te doen in elke situatie van elke mogelijke partij waarin de bewuste speler een zet moet doen. Als beide spelers elk zo'n speelplan aan een scheidsrechter opsturen, dan kan deze uitmaken tot welke uitbetalingen de gekozen strategieën leiden.

(3.2) De gezelschapsspelen waarop in (3.1) wordt gedoeld, kunnen opgevat worden als voorbeelden van *spelen in uitgebreide vorm* zoals deze in KUHN [15] worden ingevoerd. Alvorens precies te kunnen vertellen wat spelen in uitgebreide vorm zijn, dient men een aantal begrippen zoals gerichte graph, (spel)boom met wortel, alternatievenpartitie, spelerspartitie, kanszet, spelerszet, informatiepartitie, partij en uitbetalingsfunctie in te voeren. Vervolgens kan men dan precies aangeven wat een strategie voor een speler in zo'n spel is en laten zien dat deze spelen gereduceerd kunnen worden tot eindige spelen in normale vorm. Het zou teveel werk kosten (en waarschijnlijk ook niet de moeite lonen) om hier deze formele weg bij de behandeling van spelen in uitgebreide vorm te volgen. Laten we daarom proberen een en ander aan enkele voorbeelden te demonstreren.

(3.3) *Voorbeeld* (*Nimspel met één hoopje*)
Er is één hoopje van n lucifers ($n \in \mathbb{N}$). De spelers I en II dienen in een partijtje om de beurt 1 of 2 lucifers van het hoopje te nemen totdat alle lucifers weg zijn. Speler I begint. Degene die de laatste lucifer neemt krijgt van de andere speler ƒ 1,- uitbetaald. Voor het geval dat n = 4 kunnen we het spel als volgt visualiseren.



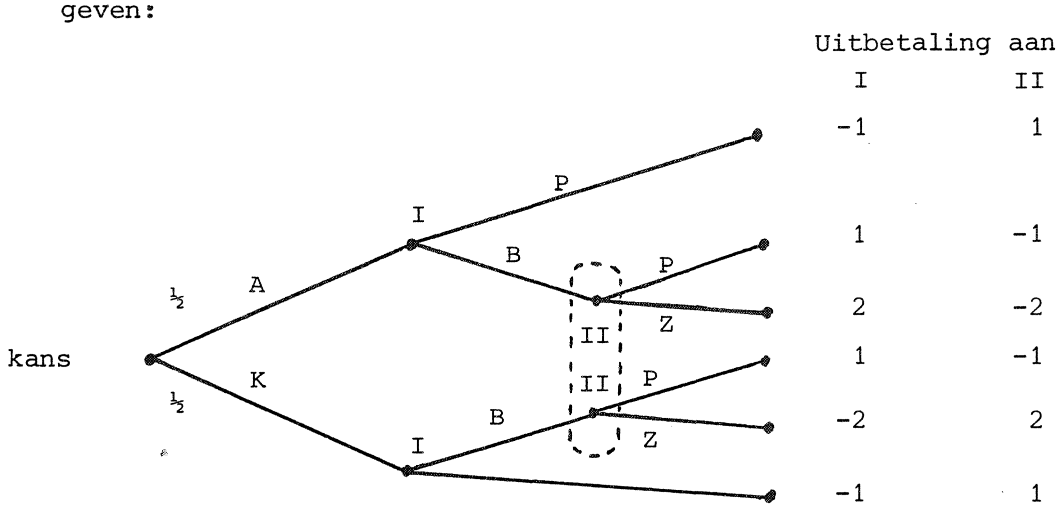
UITBETALING AAN I	II
-1	+1
+1	-1
+1	-1
+1	-1
-1	+1

In de figuur is bij de punten, die met zetten corresponderen, de persoon aangegeven die aan zet is. Bij de punten corresponderend met het einde van een partij staan de uitbetalingen aan de personen vermeld. -1 (resp. -2) bij een pijl correspondeert met het wegnemen van 1 (resp. 2) lucifer(s).
We gaan dit spel normaliseren. Daartoe merken we allereerst op dat speler I drie strategieën ter beschikking heeft welke we zullen aangeven met (1;1), (1;2) en (2). Hierbij wordt met (2) bedoeld de strategie: "neem de eerste keer 2 lucifers en neem ingeval men nogmaals aan zet komt de laatste lucifer ". Met (1;j) waarbij j $\in \{1,2\}$ wordt het volgen-

de speelplan bedoeld: "neem bij de eerste zet 1 lucifer; als speler II vervolgens 1 lucifer neemt, pak dan de tweede keer j lucifers; neemt II na de eerste zet twee lucifers, neem dan de laatste lucifer".
Speler II heeft 4 strategieën ter beschikking welke we zullen aangeven met (i,j), waarbij $i,j \in \{1,2\}$, en waarbij (i,j) het volgende speelplan voor speler II is: "neem i resp. j lucifers als speler I in de eerste zet 1 resp. 2 lucifers genomen heeft (en maak zo nodig de partij op de triviale manier af). Het is nu wel duidelijk dat bovenstaand spel correspondeert met het 3×4-matrixspel met de volgende uitbetalingsmatrix:

$$\begin{array}{c} \\ (1;1) \\ (1;2) \\ (2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(3.4) *Voorbeeld* (*Een simpel pokerspel*)
We bekijken een spel waarin een kanselement een rol speelt. Aan het begin van een partij krijgt (trekt) speler I één van de kaarten uit een stok {K,A} bestaande uit een koning en een aas en wel met kans ½ een K en met kans ½ een A. Speler I bekijkt dan (onzichtbaar voor speler II) de getrokken kaart en zegt vervolgens: pas of bied (naar eigen keuze). Als speler I past, moet hij ƒ 1,- betalen aan speler II. Als speler I biedt komt speler II aan zet. Hij kan dan passen of zien. Past speler II dan moet hij ƒ 1,- betalen aan speler I. Ziet speler II dan betaalt resp. ontvangt hij ƒ 2,- van speler I al naar gelang I een aas resp. een koning getrokken had. We kunnen dit spel als volgt schematisch weergeven:

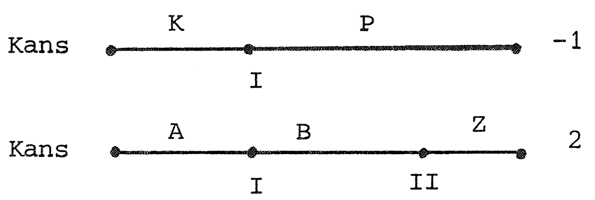


(P = pas, B = bied, Z = zien).

In dit tweepersoonsspel is speler II, wanneer hij aan zet (bod) komt niet volledig geïnformeerd over het verloop van de partij tot dan toe. Hij weet wel wat speler I gedaan heeft maar niet wat het toeval (ook wel de kansspeler genoemd) deed aan het begin van de partij. (In voorafgaande figuur is dit met stippeltjes aangegeven).
We gaan dit spel nu in normale vorm brengen. De 4 strategieën van speler I geven we aan met

$$x_1 = \binom{A \;\; K}{P \;\; P}, \quad x_2 = \binom{A \;\; K}{P \;\; B}, \quad x_3 = \binom{A \;\; K}{B \;\; P}, \quad x_4 = \binom{A \;\; K}{B \;\; B}$$

waarbij bijv. $\binom{A \;\; K}{B \;\; P}$ de strategie is: "bied ingeval een aas getrokken is en pas als een koning getrokken is" enz..
Speler II heeft 2 strategieën welke we aangeven met P (pas) en Z (zien). Veronderstel dat speler I vóór een match besluit tot strategie $\binom{A \;\; K}{B \;\; P}$ en speler II tot strategie Z. Dan kan dit, afhankelijk van het kansmechanisme (uitdelen kaart), resulteren in één van de volgende twee partijen en wel beide met kans ½:



Na de eerste partij volgt een uitbetaling -1, na de tweede een uitbetaling +2 aan I door II. De verwachte uitbetaling van II aan I bij keuze van bovengenoemde strategieën is dan $\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}$. Op analoge manier kunnen de verwachte uitbetalingen aan speler I door speler II in de 7 andere gevallen berekend worden. Het resultaat van de rekenpartij kan in een 4×2 matrix gezet worden:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & \quad Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

[$K_1(x_2,Z) = -1\frac{1}{2}$, $K_2(x_2,Z) = -(-1\frac{1}{2})$ enz.]

(3.5) In het spel uit (3.3) is elke speler, wanneer hij aan zet komt in een partijtje, steeds volledig geïnformeerd over het verloop van de partij tot dan toe. Zulke spelen noemt men *spelen met volledige informatie*. Het spel in (3.4) is niet zo'n spel. Voor dit spel is de vraag: "hoe verstandig te spelen?" niet direct te beantwoorden terwijl dat wel het

geval is voor het volledige informatiespel uit (3.3); in dat spel is (1;2) een winnende strategie voor speler I.
Op dit verschijnsel komen we even terug in (4.5).

4. *Evenwichtspunten van spelen in normale vorm.*

(4.1) Zij $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ een tweepersoonsspel en $\varepsilon \geq 0$. Een punt $(x^*,y^*) \in X \times Y$ waarvoor

$$K_1(x^*,y^*) \geq \sup_{x\in X} K_1(x,y^*)-\varepsilon, \quad K_2(x^*,y^*) \geq \sup_{y\in Y} K_2(x^*,y)-\varepsilon$$

noemen we een ε-*evenwichtspunt* als $\varepsilon > 0$ en een *evenwichtspunt* als $\varepsilon = 0$. De verzameling van ε-evenwichtspunten geven we aan met $E^{\varepsilon}(X,Y,K_1,K_2)$ en de verzameling van evenwichtspunten met $E(X,Y,K_1,K_2)$.

(4.2) Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel en $\varepsilon \geq 0$. Een punt $(x^*,y^*) \in X \times Y$ met

$$K(x,y^*)-\varepsilon \leq K(x^*,y^*) \leq K(x^*,y)+\varepsilon \text{ voor alle } (x,y) \in X \times Y$$

noemen we een ε-*zadelpunt* als $\varepsilon > 0$ en een *zadelpunt* als $\varepsilon = 0$.
De verzameling van ε-zadelpunten noteren we met $Z^{\varepsilon}(X,Y,K)$ en de verzameling van zadelpunten met $Z(X,Y,K)$. Merk op dat $Z(X,Y,K) = E(X,Y,K,-K)$, $Z^{\varepsilon}(X,Y,K) = E^{\varepsilon}(X,Y,K,-K)$ voor elke $\varepsilon > 0$.

(4.3) Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel. Dan heet

$$\underline{v}(X,Y,K) := \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} K(x,y)$$

de *benedenwaarde*

$$\overline{v}(X,Y,K) := \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} K(x,y)$$

de *bovenwaarde* van het spel. Merk op dat

$$-\infty \leq \underline{v}(X,Y,K) \leq \overline{v}(X,Y,K) \leq \infty$$

Als $\underline{v}(X,Y,K) = \overline{v}(X,Y,K)$, dan heet $\underline{v}(X,Y,K)$ de *waarde* van het spel en we geven deze aan met $v(X,Y,K)$. Verder heet dan

$$O_I(X,Y,K) := \{x^* \in X;\ K(x^*,y) \geq v(X,Y,K) \text{ voor elke } y \in Y\}$$

de *optimale strategieënruimte van speler* I en

$$O_{II}(X,Y,K) := \{y^* \in Y;\ K(x,y^*) \leq v(X,Y,K) \text{ voor elke } x \in X\}$$

de *optimale strategieënruimte van speler* II.

(4.4) *Voorbeelden.*

(a) Voor het 2×2-bimatrixspel uit (2.8) is $(R,R) \in \{GR,R\} \times \{GR,R\}$ het enige evenwichtspunt.

(b) Voor het $\infty\times\infty$-matrixspel uit (2.9) is -1 de benedenwaarde en $+1$ de bovenwaarde.

(c) Het $1\times\infty$-matrixspel $[1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} \ldots]$ heeft waarde 0. De optimale strategieënruimte van speler II is $\emptyset$. Er bestaan ε-zadelpunten voor elke $\varepsilon > 0$.

(d) Het matrixspel uit (3.3) heeft waarde 1; $\{2\}$ en $\{1,2,3,4\}$ zijn achtereenvolgens de optimale strategieënruimten van de spelers I en II.

(e) Het eindige matrixspel uit (3.4) bezit geen waarde.

(4.5) Naar aanleiding van de voorbeelden (d) en (e) uit (4.4) merken we op dat in KUHN [15], p.209 bewezen wordt dat spelen in normale vorm, die afkomstig zijn van spelen in uitgebreide vorm met volledige informatie, altijd minstens één evenwichtspunt bezitten. Voor uitbreidingen van dit resultaat verwijzen we naar TIJS [31], p.26.

(4.6) Een prettige eigenschap van nulsomspelen is het feit dat de evenwichtspuntverzameling een z.g. "rechthoekige" verzameling is en dat verschillende evenwichtspunten tot dezelfde uitbetalingen leiden. Precies: Zij $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ een nulsomspel. Als (x_1,y_1) en (x_2,y_2) evenwichtspunten van het spel zijn. Dan geldt:

(1) $K_1(x_1,y_1) = K_1(x_2,y_2)$, $K_2(x_1,y_1) = K_2(x_2,y_2)$

(2) $(x_1,y_2),(x_2,y_1) \in E(X,Y,K_1,K_2)$.

Voor niet-nulsomspelen geldt iets dergelijks niet zoals we zien aan het bimatrixspel $\begin{bmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,1) \end{bmatrix}$.

(4.7) Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel. Dan zijn de volgende twee beweringen equivalent.

i) $\langle X,Y,K\rangle$ bezit een eindige waarde ($v(X,Y,K) \in \mathbb{R}$).

ii) $Z^{\varepsilon}(X,Y,K) = E^{\varepsilon}(X,Y,K,-K) \neq \emptyset$ voor elke $\varepsilon > 0$.

(4.8) Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel. Dan zijn de volgende drie uitspraken equivalent.

(i) $\max_{x\in X} \inf_{y\in Y} K(x,y)$ en $\min_{y\in Y} \sup_{x\in X} K(x,y)$ bestaan en zijn gelijk.

(ii) Er zijn $v \in \mathbb{R}$, $x^* \in X$ en $y^* \in Y$ zo dat

$$K(x^*,y) \geq v \text{ voor elke } y \in Y \text{ en } K(x,y^*) \leq v \text{ voor elke } x \in X.$$

(iii) $Z(X,Y,K) \neq \emptyset$.

(4.9) Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel met waarde v en zij $\varepsilon > 0$. Dan

$$Z(X,Y,K) = O_I(X,Y,K) \times O_{II}(X,Y,K).$$

Verder

$$O_I^{\varepsilon}(X,Y,K) \times O_{II}^{\varepsilon}(X,Y,K) \subset Z^{\varepsilon}(X,Y,K) \subset O_I^{2\varepsilon}(X,Y,K) \times O_{II}^{2\varepsilon}(X,Y,K) \quad \text{als}$$

$$O_I^{\varepsilon}(X,Y,K) := \{x^* \in X;\ K(x^*,y) \geq v-\varepsilon \text{ voor elke } y \in Y\},$$

$$O_{II}^{\varepsilon}(X,Y,K) := \{y^* \in Y;\ K(x,y^*) \leq v+\varepsilon \text{ voor elke } x \in X\}.$$

(4.10) In z.g. *minimaxstellingen* worden voorwaarden aan strategieënruimten en uitbetalingsfunctie opgelegd welke voldoende zijn om de existentie van de waarde van nulsomspelen te garanderen. De eerste minimaxstelling van John von Neumann dateert van 1928 (zie(5.4)). Sindsdien zijn er verschillende andere afgeleid o.a. door VILLE [34], FAN [8], SION [27], KÖNIG [14], TERKELSEN [30],...

Om een indruk te geven van de aard van de gestelde voorwaarden, formuleren we hier zonder explicatie van voorkomende termen en zonder bewijs twee van deze stellingen.

(1) *Minimaxstelling van M. Sion.*

Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel waarbij X en Y convexe deelverzamelingen van topologische vectorruimten zijn en zij Y compact. Zij verder $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ semicontinu en quasi-concaaf-convex. Dan heeft het spel een waarde.

(2) *Minimaxstelling van K. Fan.*

Zij $\langle X,Y,K\rangle$ een tweepersoonsnulsomspel waarbij X en Y compacte verzamelingen zijn en $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ een semicontinue concaaf-convexachtige functie is. Dan heeft het spel een waarde en hebben beide spelers optimale strategieën.

(4.11) In z.g. (ε-)evenwichtspuntstellingen houdt men zich bezig met de existentie van (ε-)evenwichtspunten (voor elke $\varepsilon > 0$) van willekeurige tweepersoonsspelen. Uit (4.7) volgt dat het afleiden van ε-evenwichtspuntstellingen een natuurlijke uitbreiding is van het afleiden van minimaxstellingen. Laten we hier alleen de bekende evenwichtspuntstelling van NIKAIDO-ISODA [22] formuleren en voor meer informatie over ε-evenwichtspuntstellingen verwijzen naar RUPP [25] en TIJS [31].

Evenwichtspuntstelling van H. Nikaido en K. Isoda:

Zij $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ een tweepersoonsspel waarbij X en Y compacte convexe deelverzamelingen van topologische vectorruimten zijn en waarbij K_1 en

K_2 continue functies zijn zo dat

$x \longmapsto K_1(x,y)$ een concave functie op X is voor elke $y \in Y$ en

$y \longmapsto K_2(x,y)$ een concave functie op Y is voor elke $x \in X$.

Dan $E(X,Y,K_1,K_2) \neq \emptyset$.

5. *Gemengde uitbreidingen.*

(5.1) Zoals we gezien hebben in enkele van de voorbeelden in (4.4) is niet voor alle nulsomspelen de benedenwaarde gelijk aan de bovenwaarde. Dit feit vormde de directe aanleiding voor von Neumann om gemengde uitbreidingen voor eindige nulsomspelen in te voeren in de hoop hiermee de kloof tussen benedenwaarde en bovenwaarde te overbruggen.
In deze paragraaf worden gemengde uitbreidingen voor eindige en oneindige nulsomspelen en niet-nulsomspelen ingevoerd en bestudeerd.

(5.2) Laat $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ twee m×n-matrices van reële getallen zijn ($m,n \in \mathbb{N}$). Dan heet het tweepersoonsspel $\langle S^m,S^n,E_A,E_B\rangle$, waarbij

$$S^m := \{p = (p_1,\dots,p_m) \in \mathbb{R}^m;\ p \geq 0,\ \Sigma_{i=1}^m p_i = 1\},$$

$$S^n := \{q = (q_1,\dots,q_n) \in \mathbb{R}^n;\ q \geq 0,\ \Sigma_{j=1}^n q_j = 1\},$$

$$E_A(p,q) := \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j = pAq^t,$$

$$E_B(p,q) := \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j = pBq^t \quad (p \in S^m,\ q \in S^n),$$

de gemengde uitbreiding van het (eindige) *bimatrixspel* (A,B).
De elementen van S^m (resp. S^n) noemen we *gemengde strategieën van speler* I (resp. speler II). De verzameling van evenwichtspunten van $\langle S^m,S^n,E_A,E_B\rangle$ geven we in het volgende aan met E(A,B).
Het tweepersoonsnulsomspel $\langle S^m,S^n,E_A\rangle$, waarbij $E_A : S^m \times S^n \to \mathbb{R}$ is vastgelegd als boven, noemen we de *gemengde uitbreiding van het* (eindige) *matrixspel* A. Waarde en optimale strategieënruimten van $\langle S^m,S^n,E_A\rangle$ zullen we aangeven met v(A), $O_I(A)$ en $O_{II}(A)$.

(5.3) Zij (A,B) een m×n-bimatrix. Een gemengde strategie $(p_1,\dots,p_m) \in S^m$ kan gerealiseerd worden door een kansmechanisme te gebruiken dat uit de zuivere strategieënruimte $\{1,\dots,m\}$ van speler I een element kiest en wel zo dat (rij) i gekozen wordt met kans p_i. Als in een partij speler I de gemengde strategie p gebruikt en speler II (onafhankelijk daarvan) de gemengde strategie q, dan zijn $E_A(p,q)$ en $E_B(p,q)$ te interpreteren als verwachte uitbetaling aan speler I en speler II. Het is duidelijk dat we de zuivere strategie $i \in \{1,\dots,m\}$ van speler I kunnen identificeren met de gemengde strategie $e_i \in S^m$ [e_i is de i-de standaardbasisvector in $\mathbb{R}^m$] en dit verklaart de term "uitbreiding".

(5.4) *Minimaxstelling van J. von NEUMANN* [20].
Zij A een m×n-matrixspel. Dan heeft de gemengde uitbreiding van A een waarde en $O_I(A) \neq \emptyset$, $O_{II}(A) \neq \emptyset$.

Deze stelling volgt direct uit de volgende. [zie ook (6.4)].

(5.5) *Evenwichtspuntstelling van J.F. NASH* [19].
Voor elk m×n-bimatrixspel (A,B) geldt: $E(A,B) \neq \emptyset$ $(m,n \in \mathbb{N})$.
Bewijs: Voor elke $i \in \{1,\dots,m\}$ zij $s_i : S^m \times S^n \to \mathbb{R}$ de continue functie vastgelegd door

$$s_i(p,q) := \max\{0, e_i Aq^t - pAq^t\}.$$

Voor elke $j \in \{1,\dots,n\}$ zij $t_j : S^m \times S^n \to \mathbb{R}$ vastgelegd door

$$t_j(p,q) := \max\{0, pBe_j^t - pBq^t\}$$

M.b.v. de continue afbeeldingen $s = (s_1,s_2,\dots,s_m) : S^m \times S^n \to \mathbb{R}^m$, $t = (t_1,t_2,\dots,t_n) : S^m \times S^n \to \mathbb{R}^n$ definieren we de afbeelding $f : S^m \times S^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ d.m.v.

$$f(p,q) = \left(\frac{p+s(p,q)}{1+\Sigma_{i=1}^m s_i(p,q)}, \frac{q+t(p,q)}{1+\Sigma_{j=1}^n t_j(p,q)}\right).$$

Dan is f een continue afbeelding van de compacte convexe verzameling $S^m \times S^n$ in zichzelf en deze afbeelding bezit dus volgens de dekpuntstelling van Brouwer minstens één vast punt.
Als $(\hat{p},\hat{q})$ zo'n vast punt is, waarvoor dus geldt dat $(\hat{p},\hat{q}) = f(\hat{p},\hat{q})$, dan is het niet moeilijk om in te zien dat $s_i(\hat{p},\hat{q}) = 0$ voor elke $i \in \{1,\dots,m\}$ en $t_j(\hat{p},\hat{q}) = 0$ voor elke $j \in \{1,\dots,n\}$. Hieruit volgt dat $(\hat{p},\hat{q}) \in E(A,B) \neq \emptyset$. ||

(5.6) *Voorbeelden.*

(a) De gemengde uitbreiding van het 4×2-matrixspel uit (3.4) heeft waarde $\frac{1}{3}$ en $(0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ is de enige optimale strategie van speler I (waarbij met kans $\frac{2}{3}$ de strategie x_3 en met kans $\frac{1}{3}$ de "blufstrategie" x_4 wordt gekozen) terwijl $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ de enige optimale strategie voor speler II is.

(b) De evenwichtspuntverzameling van de gemengde uitbreiding van het 2×2-bimatrixspel uit (4.6) bestaat uit de volgende drie punten in $S^2 \times S^2$:

$$(e_1,e_1),(e_2,e_2) \quad \text{en} \quad ((\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}),(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})).$$

(c) Als

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dan $v(A) = 0$, $O_I(A) = \{(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\}$ en $O_{II}(A)$ is het vierkant in de $\mathbb{R}^6$ met hoekpunten $\frac{1}{2}(e_1+e_2)$, $\frac{1}{2}(e_1+e_6)$, $\frac{1}{2}(e_2+e_5)$, $\frac{1}{2}(e_5+e_6)$.

(5.7) De structuur van de optimale strategieënruimten $O_I(A)$ en $O_{II}(A)$ voor eindige matrixspelen A werd uitputtend opgehelderd in de artikelen van SHAPLEY & SNOW [26], BOHNENBLUST, KARLIN & SHAPLEY [4] en GALE & SHERMAN [11] welke alle verschenen in de eerste van de vijf bundels speltheorieartikelen die uitgegeven werden door Princeton University Press getiteld "Contributions to the Theory of Games I". Grofweg kunnen we de resultaten als volgt samenvatten: de optimale strategieënruimten $O_I(A)$ en $O_{II}(A)$ zijn polytopen waartussen een zekere dimensierelatie bestaat en waarvan de extreme punten corresponderen met zekere vierkante deelmatrices van A. Zie ook het overzichtsartikel van VOROBEV [35].
De structuur van de evenwichtspuntverzamelingen van eindige (en oneindige) bimatrixspelen is nog steeds een onderwerp van studie.

(5.8) Laat $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ \infty}$ en $B = [b_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ \infty}$ begrensde $m\times\infty$-matrices zijn ($m \in \mathbb{N}$). Dan noemen we het spel $\langle S^m,S,E_A,E_B\rangle$, waarbij

$$S := \{q = (q_1,q_2,\ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ q_j \geq 0 \text{ voor elke } j \in \mathbb{N},\ \Sigma_{j=1}^{\infty} q_j = 1\},$$

$$E_A(p,q) := \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{\infty} p_i a_{ij} q_j = pAq^t \text{ en } E_B(p,q) = pBq^t$$

voor alle $(p,q) \in S^m \times S$, de (*volle*) *gemengde uitbreiding* van het half-oneindige bimatrixspel (A,B). Er geldt:

Stelling: $E^{\varepsilon}(S^m,S,E_A,E_B) \neq \emptyset$ voor elke $\varepsilon > 0$.

Bewijs: Voor elke $j \in \mathbb{N}$ zij $k_j := Be_j^t$ (de j-de kolom van B). Dan is $V := \{k_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ een begrensde deelverzameling van $(\mathbb{R}^m)^t$. Zij $\varepsilon > 0$. Er is dan een eindige deelverzameling W van V zodanig dat er voor elke $v \in V$ een $w \in W$ is met $||v-w||_{\infty} < \varepsilon$. Zonder de algemeenheid te schaden (herrangschik anders de zuivere strategieën van speler II) veronderstellen we dat $W = \{k_1,\ldots,k_n\}$. Neem $(\hat{p},\hat{q}) \in E(A_n,B_n)$ waarbij $A_n := [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$, $B_n := [b_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$. (Dat $E(A_n,B_n) \neq \emptyset$ volgt uit (5.5)). Zij nu $a_n(\hat{q}) := (\hat{q}_1,\ldots,\hat{q}_n,0,0,\ldots) \in S$. We zullen bewijzen dat $(\hat{p},a_n(\hat{q})) \in E^{\varepsilon}(A,B)$.

Allereerst merken we op dat

(*) $pAa_n(\hat{q})^t = pA_n\hat{q}^t \leq \hat{p}A_n\hat{q}^t = \hat{p}Aa_n(\hat{q})^t$ voor elke $p \in S^m$.

Vervolgens kiezen we voor elke $r \in \mathbb{N}$ een $b(r) \in \{1,\ldots,n\}$ zo dat $||k_r - k_{b(r)}||_\infty < \varepsilon$. Voor elke $j \in \{1,\ldots,n\}$ zij $R(j) := \{r \in \mathbb{N};\ b(r) = j\}$. Voor elke $q \in S$ zij $\tilde{q} = (\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n) \in S^n$ de vector met $\tilde{q}_j := \Sigma_{r\in R(j)}\, q_r$. Dan $Bq^t = \Sigma_{r=1}^\infty q_r k_r \leq \Sigma_{j=1}^n (\Sigma_{r\in R(j)} q_r) k_j + \varepsilon 1_m^t = B_n\tilde{q}^t + \varepsilon 1_m^t$. (Hierbij is $1_m := (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$). Dus

(**) $\hat{p}Bq^t \leq \hat{p}B_n\tilde{q}^t + \varepsilon \leq \hat{p}B_n\hat{q}^t + \varepsilon = \hat{p}Ba_n(\hat{q})^t + \varepsilon$ voor elke $q \in S$.

Uit (*) en (**) volgt dat $(\hat{p}, a_n(\hat{q})) \in E^\varepsilon(A,B)$. ||

(Voor een ander bewijs zie [31], p.95).

(5.9) Met het oog op (4.7) volgt uit stelling (5.8) direct de klassieke *minimaxstelling van* A. WALD [37]:
De gemengde uitbreiding van elk begrensd halfoneindig matrixspel bezit een waarde.

(5.10) Zij A het begrensde $\infty\times\infty$-matrixspel uit (2.9). Men kan gemakkelijk inzien dat de gemengde uitbreiding $<S,S,E_A>$ van dit spel geen waarde bezit.

(5.11) In TIJS [31] worden verschillende typen van gemengde uitbreidingen van halfoneindige en oneindige (bi)matrixspelen (A,B) bestudeerd, waarbij ook niet-begrensde matrices A en B worden toegelaten. Voor halfoneindige matrixspelen wordt daar aangetoond dat alle ingevoerde gemengde uitbreidingen een (en dezelfde) waarde bezitten en wordt er een onderzoek gedaan naar de structuur van de optimale strategieënruimten van de beide spelers. Voor gemengde uitbreidingen van $\infty\times\infty$-matrixspelen worden voldoende voorwaarden gegeven voor de existentie van een waarde. Verder wordt aangetoond dat de c-gemengde uitbreiding van een $m\times\infty$-bimatrixspel (A,B) minstens één ε-evenwichtspunt bezit voor elke $\varepsilon > 0$ als tenminste B een (naar boven) begrensde matrix is. [Dit resultaat volgt ook uit de ε-evenwichtspuntstelling in (5.13)].

(5.12) Gemengde uitbreidingen van nulsomspelen op het vierkant werden voor het eerst bestudeerd door J. VILLE [34]. Deze bewees dat zo'n gemengde uitbreiding een waarde bezit en dat er optimale strategieën bestaan voor de beide spelers als tenminste de uitbetalingsfunctie continu is. Veel informatie over nulsomspelen op het vierkant is te vinden in

KARLIN [13]. Overigens ligt er nog een heel terrein van onderzoek braak op het gebied van niet-nulsomspelen op het vierkant. Ook nulsomspelen op het vierkant zijn niet uitputtend bestudeerd.

(5.13) Zij $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ een tweepersoonsspel. Laten we voor elke $x \in X$ ($y \in Y$) de kansmaat op $X(Y)$ met massa 1 in x (y) aangeven met e_x (e_y). Zij $P^c(X)$ de verzameling van alle convexe combinaties van elementen van $\{e_x; x \in X\}$ en $P^c(Y)$ het convexe omhulsel van $\{e_y; y \in Y\}$. Het tweepersoonsspel $\langle P^c(X), P^c(Y), E_1, E_2\rangle$ met

$$E_1(\mu,\nu) := \iint K_1(x,y)\, d\mu(x) d\nu(y)$$

$$E_2(\mu,\nu) := \iint K_2(x,y)\, d\mu(x) d\nu(y) \text{ voor elke } (\mu,\nu) \in P^c(X) \times P^c(Y)$$

noemen we de *c-gemengde uitbreiding* van het spel $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$. In [32] werd een keten van ε-evenwichtspuntstellingen bewezen startend met de volgende

ε-Evenwichtspuntstelling.

Zij $\langle X,Y,K_1,K_2\rangle$ een tweepersoonsspel waarin X een eindige verzameling is en $K_2 : X \times Y \to \mathbb{R}$ een naar boven begrensde functie. Dan

$$E^{\varepsilon}(P^c(X), P^c(Y), E_1, E_2) \neq \emptyset \text{ voor elke } \varepsilon > 0.$$

6. *Lineaire programma's en matrixspelen.*

(6.1) Er zijn verschillende methoden ontwikkeld om eindige matrixspelen op te lossen. Hiermee bedoelen we het bepalen (of benaderen) van waarde en optimale strategieën van zo'n spel. De meest succesvolle methode werd gesuggereerd door John van Neumann in een gesprek met G.B. Dantzig in de herfst van 1947 (zie [7], blz. 277), n.l. vertaal het matrix in een duaal paar van lineaire programma's en los deze programma's op met de (efficiente) simplexmethode van G.B. Dantzig.
In ditzelfde gesprek uitte von Neumann het vermoeden dat er een grotere samenhang tussen lineaire programmeringstheorie en matrixspeltheorie bestond. Dit vermoeden werd bevestigd in de artikelen GALE, KUHN & TUCKER [10] en DANTZIG [6].
In deze paragraaf belichten we enkele facetten van de wisselwerking tussen lineaire programma's en matrixspelen. Voor boeken waarin aandacht geschonken wordt aan het verband tussen speltheorie en mathematisch programmeren verwijzen we naar DANTZIG [7], GALE [9], KARLIN [12], OWEN [23] en STOER & WITZGALL [29].

(6.2) Laat A een m×n-matrix zijn, $b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^n$. Zij

$P(A,b) := \{y \in \mathbb{R}^n;\ y \geq 0,\ Ay^t \leq b^t\}$,

$D(A,c) := \{x \in \mathbb{R}^m;\ x \geq 0,\ xA \geq c\}$

Dan bekijken we de volgende twee (*lineaire programmerings-*) *problemen*.

(*Hoofdprogramma*) Bepaal

$$v_p(A,b,c) := \sup_{y \in P(A,b)} cy^t$$

en vind (zo mogelijk) een element van

$$O_p(A,b,c) := \{y \in P(A,b);\ cy^t = v_p(A,b,c)\}.$$

(*Duale programma*). Bepaal

$$v_d(A,b,c) := \inf_{x \in D(A,c)} xb^t$$

en vind (zo mogelijk) een element van

$$O_d(A,b,c) := \{x \in D(A,c);\ xb^t = v_d(A,b,c)\}.$$

$P(A,b)$, $v_p(A,b,c)$ en $O_p(A,b,c)$ noemt men achtereenvolgens: *toelaatbaar gebied, de waarde en de oplossingsruimte van het hoofdprogramma corresponderend met* (A,b,c).

$D(A,c)$, $v_d(A,b,c)$ en $O_d(A,b,c)$ heten achtereenvolgens het *toelaatbare gebied, de waarde en de oplossingsruimte van het duale programma corresponderend met* (A,b,c).

Het volgende resultaat staat bekend als de *dualiteitsstelling voor eindige lineaire programma's*. Voor (A,b,c) als boven geldt precies één van de volgende 4 beweringen:

1. $v_p(A,b,c) \in \mathbb{R}$, $v_d(A,b,c) \in \mathbb{R}$, $O_p(A,b,c) \neq \emptyset$, $O_d(A,b,c) \neq \emptyset$ en er is geen dualiteitskloof d.w.z. $v_p(A,b,c) = v_d(A,b,c)$.
2. Het hoofdprogramma is onbegrensd (d.w.z. $v_p(A,b,c) = \infty$) en het duale programma is onuitvoerbaar (d.w.z. $D(A,c) = \emptyset$).
3. Het duale programma is onbegrensd (d.w.z. $v_d(A,b,c) = -\infty$) en het hoofdprogramma is onuitvoerbaar (d.w.z. $P(A,b) = \emptyset$).
4. Beide programma's zijn onuitvoerbaar.

(6.3) Op verschillende manieren is het oplossen van matrixspelen te vertalen in een paar lineaire programmeringsproblemen. Twee ervan worden beschreven in de volgende stellingen.

Stelling. Zij A een $m \times n$-matrix. Zij A^* de $(m+2)\times(m+2)$-matrix

$$\begin{bmatrix} A & -1_m^t & 1_m^t \\ -1_n & 0 & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$b := (0,0,\ldots,0,-1,1) \in \mathbb{R}^{m+2}$ en $c := (0,\ldots,0,-1,1) \in \mathbb{R}^{n+2}$.

[Hierbij is $1_m := (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$, $1_n := (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$.]

Dan geldt:

(1) $v_p(A^*,b,c) = v_d(A^*,b,c) = -v(A)$,

(2) als $(x,\alpha,\beta) \in O_d(A^*,b,c)$, dan $x \in O_I(A)$,

als $(y,\gamma,\delta) \in O_p(A^*,b,c)$, dan $y \in O_{II}(A)$,

(3) $x \in O_I(A) \Rightarrow \exists_{\alpha,\beta\in[0,\infty)}[(x,\alpha,\beta) \in O_d(A^*,b,c)]$,

$y \in O_{II}(A) \Rightarrow \exists_{\gamma,\delta\in[0,\infty)}[(y,\gamma,\delta) \in O_p(A^*,b,c)]$.

Stelling. Zij A een m×n-matrix. Veronderstel dat $v(A) > 0$. Dan

(1) $v_p(A,1_m,1_n) = v_d(A,1_m,1_n) = v(A)^{-1}$

(2) $O_d(A,1_m,1_n) = v(A)^{-1}O_I(A) := \{v(A)^{-1}p;\ p \in O_I(A)\}$,

$O_p(A,1_m,1_n) = v(A)^{-1}O_{II}(A)$.

[De beperking tot matrices met positieve waarde is niet wezenlijk.]

(6.4) We merken op dat de minimaxstelling van von Neumann ook gemakkelijk uit de dualiteitsstelling af te leiden is. Bekijk daartoe bijv. bij een matrixspel A de lineaire programma's corresponderend met (A^*,b,c) als in de eerste stelling van (6.3). Merk op dat $P(A^*,b) \neq \emptyset$ en $D(A^*,c) \neq \emptyset$. Uit de dualiteitsstelling volgt dan dat

$$v_p(A^*,b,c) = v_d(A^*,b,c) \in \mathbb{R},\ O_p(A^*,b,c) \neq \emptyset,\ O_d(A^*,b,c) \neq \emptyset.$$

Neem $(x,\alpha,\beta) \in O_d(A^*,b,c)$. Dan volgt dat $x \in S^m$ en $xAe_j^t \geq -v_d(A^*,b,c)$ voor elke $j \in \{1,\ldots,n\}$. Maar dan geldt voor de benedenwaarde van de gemengde uitbreiding van A dat

$$\underline{v}(S^m,S^n,E_A) \geq \min_j xAe_j^t \geq -v_d(A^*,b,c).$$

Evenzo volgt door een element $(y,\gamma,\delta) \in O_p(A^*,b,c)$ te nemen dat

$$\overline{v}(S^m,S^n,E_A) \leq -v_p(A^*,b,c) = -v_d(A^*,b,c).$$

Dus bezit de gemengde uitbreiding van A een waarde. Verder $x \in O_I(A) \neq \emptyset$, $y \in O_{II}(A) \neq \emptyset$. Hiermee is de minimaxstelling van von Neumann opnieuw bewezen.

(6.5) Omgekeerd kan men ook de dualiteitsstelling afleiden door de volgende stelling uit de speltheorie uit te buiten.

Stelling. Zij A een m×n-matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Zij S het (symmetrische) $(m+n+1)\times(m+n+1)$-matrixspel met uitbetalingsmatrix

$$S = \begin{bmatrix} 0 & A & -b^t \\ -A^t & 0 & c^t \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Dan geldt:

(1) Als er een $p \in O_I(S)$ is met $p_{m+n+1} > 0$, dan $P(A,b) \neq \emptyset$, $D(A,c) \neq \emptyset$ en $v_p(A,b,c) = v_d(A,b,c)$.

(2) Als voor elke $p \in O_I(S)$ geldt: $p_{m+n+1} = 0$, dan is minstens één van de programma's corresponderend met A, b en c onuitvoerbaar.

[Voor een bewijs zie bijv. OWEN [23], Ch. III.]

We merken nog op dat ingeval $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,t) \in O_I(S)$ en $t \neq 0$, er geldt:

$$t^{-1}(x_1,\ldots,x_m) \in O_d(A,b,c),\ t^{-1}(y_1,\ldots,y_n) \in O_p(A,b,c).$$

(6.6) We bekijken de deelklasse $P_{m\times n}$ van lineaire programmeringsproblemen corresponderend met drietallen (A,b,c) waarbij A een $m\times n$-matrix is en b en c vectoren in $\mathbb{R}^m$ resp. $\mathbb{R}^n$ zijn met uitsluitend positieve coördinaten en waarbij $D(A,c) \neq \emptyset$. Omdat voor zulke (A,b,c) ook geldt dat $0 \in P(A,b)$, volgt uit (6.2) dat

$$v_p(A,b,c) = v_d(A,b,c) \in \mathbb{R},\ O_p(A,b,c) \neq \emptyset,\ O_d(A,b,c) \neq \emptyset.$$

$P_{m\times n}$ voorzien we van de metriek d vastgelegd door

$$d((A,b,c),(A',b',c')) := \max\,\{||A-A'||_\infty,\ ||b-b'||_\infty,\ ||c-c'||_\infty\}$$

en vragen ons af wat de invloed van storingen op waarde en oplossingsruimte is. Er geldt:

Stelling. $v_d : P_{m\times n} \to \mathbb{R}$ is een continue functie.
$O_p : P_{m\times n} \to \mathbb{R}^n$, $O_d : P_{m\times n} \to \mathbb{R}^m$ zijn van boven semicontinue multifuncties.

Een rechtstreeks bewijs van deze stelling is met enige moeite wel te leveren (zie [33] blz. 12-14 waar een generalisatie van deze stelling naar halfoneindige programma's bewezen wordt). Een eenvoudig en minder technisch bewijs krijgt men door gebruik te maken van de volgende (gemakkelijk te bewijzen en) bekende stelling uit de speltheorie.

Stelling. Zij $M_{m\times n}$ de verzameling van $m\times n$-matrices (voorzien van de $||.||_\infty$-norm). Dan

$$v : M_{m\times n} \to \mathbb{R} \text{ continu}$$
$$O_I : M_{m\times n} \to S^m \text{ van boven semicontinu}$$
$$O_{II} : M_{m\times n} \to S^n \text{ van boven semicontinu.}$$

De eerste stelling volgt uit de tweede (en omgekeerd) door bij $(A,b,c) \in P_{m\times n}$ in te voeren de $m\times n$-matrix $\hat{A} := [a_{ij}/b_i c_j]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ en op te merken dat

(1) $v_d(A,b,c) = v_d(\hat{A},1_m,1_n) = v(\hat{A})^{-1}$.

(2) $O_I(\hat{A}) = \{v(\hat{A})x;\ x \in O_d(\hat{A},1_m,1_n)\}$,
$O_{II}(\hat{A}) = \{v(\hat{A})y;\ y \in O_p(\hat{A},\ 1_m,1_n)\}$.

(3) $O_p(\hat{A},1_m,1_n) = \{(c_1y_1,c_2y_2,\ldots,c_ny_n);\ (y_1,\ldots,y_n) \in O_p(A,b,c)\}$,
$O_d(\hat{A},1_m,1_n) = \{(b_1x_1,b_2x_2,\ldots,b_mx_m);\ (x_1,\ldots,x_m) \in O_d(A,b,c)\}$.

(6.7) Het verband tussen halfoneindige lineaire programmeringsproblemen en halfoneindige matrixspelen werd bestudeerd in SOYSTER [28] en TIJS [33]. Bij een $m\times\infty$-matrix A, een $b \in \mathbb{R}^m$ en een $c = (c_1,c_2,\ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kunnen we op de voor de hand liggende manier weer een duaal paar van lineaire programma's bekijken. Hierbij nemen we om convergentieproblemen te omzeilen voor P(A,b) de verzameling $\{y \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^c\ ;\ y \geq 0,\ Ay^t \leq b^t\}$, waarbij $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^c$ bestaat uit de oneindige rijtjes van reële getallen waarbij op slechts eindig veel plaatsen getallen ongelijk aan 0 staan. Dat de dualiteitsstelling voor eindige programma's niet zonder meer te generaliseren is zien we aan het volgende aan [33], blz. 4 ontleende *voorbeeld*. Zij $b := (1,0)$, $c := (1,2,2,2,\ldots)$ en

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots \end{bmatrix}$$

Dan $P(A,b) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ 0 \leq y_1 \leq 1,\ y_j = 0$ voor elke $j > 1\}$
$D(A,c) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 0\}$.
Dus is er een dualiteitskloof:

$$v_p(A,b,c) = 1 \neq 2 = v_d(A,b,c).$$

Wel kan men de volgende stelling afleiden (zie [33], p.7).
Dualiteitsstelling. Laat A,b,c zijn als boven. Veronderstel verder dat alle coördinaten van b positief zijn. Dan geldt precies één van de volgende twee uitspraken:
(1) $D(A,c) = \emptyset$ en $v_p(A,b,c) = \infty$ $(= v_d(A,b,c))$.
(2) $v_p(A,b,c) = v_d(A,b,c) \in [0,\infty)$ en $O_d(A,b,c) \neq \emptyset$.

Met behulp van deze stelling kan men bewijzen dat de c-gemengde uitbreiding van halfoneindige matrixspelen een waarde heeft ([33], p.17).

(6.8) Tot slot van deze paragraaf formuleren we één van de vele resultaten die een verband leggen tussen niet-lineaire programmeringsproblemen en de theorie van nulsomspelen en wel de
Stelling van Karlin([12], p.201).
Zij C een convexe deelverzameling van $\mathbb{R}^m$ en laat $g : C \to \mathbb{R}$, $f_j : C \to \mathbb{R}$ $(j \in \{1,\ldots,n\})$ n+1 concave functies op C zijn zo dat

$$\forall_{y\in(\mathbb{R}^n)^+-\{0\}}\ \exists_{x\in C}\ [\Sigma_{j=1}^n\ y_jf_j(x) > 0].$$

Zij $D := \{x \in C;\ f_j(x) \geq 0$ voor elke $j \in \{1,\ldots,n\}\}$.
Bekijk enerzijds het (niet-lineaire programmerings-) probleem

(*) Zoek $x^* \in D$ zo dat $g(x^*) = \sup_{x \in D} g(x)$

en anderzijds het tweepersoonsnul somspel $\langle D, (\mathbb{R}^n)^+, K\rangle$ waarbij

$$K(x,y) := g(x) = \Sigma_{j=1}^{n} y_j f_j(x).$$

Dan geldt het volgende verband:

(1) Als x^* oplossing is van het probleem (*), dan is er een $y^* \in (\mathbb{R}^n)^+$ zo dat (x^*,y^*) zadelpunt is van het spel $\langle D, (\mathbb{R}^n)^+, K\rangle$.

(2) Als (x^*,y^*) een zadelpunt is van bovengenoemd spel, dan is x^* oplossing van het probleem (*).

7. *Lineaire complementariteitsproblemen en bimatrixspelen.*

(7.1) Het is niet verwonderlijk dat de theorie van complementariteitsproblemen de laatste jaren steeds meer aandacht krijgt in Operations Research, Mathematische Economie en Speltheorie aangezien vele bekende problemen te vertalen zijn in een (lineair) complementariteitsprobleem. Wij zullen alleen het zoeken van evenwichtspunten van bimatrixspelen vertalen in een lineair complementariteitsprobleem. Voor een introductie in het gebied en voor andere toepassingen verwijzen we naar BASTIAN [1] en LÜTHI [18].

(7.2) Zij $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ gegeven. Het probleem:

"zoek $x \in \mathbb{R}^k$ zo dat $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ en $x(f(x))^t = 0$"

noemen we het met f corresponderende *complementariteitsprobleem*.
Als f een affiene functie is, dan spreken we van een *lineair complementariteitsprobleem*.

(7.3) De volgende stelling geeft een één-éénduidige correspondentie tussen de evenwichtspunten van een eindig bimatrixspel en de oplossingen van een verwant complementariteitsprobleem.

Stelling. Laat A en B m×n-matrices zijn en veronderstel dat $A > 0$ en $B < 0$. Zij $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vastgelegd door

$$(f(x,y))^t = \begin{bmatrix} 1_m^t \\ \\ -1_n^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & -A \\ -B^t & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^t \\ y^t \end{bmatrix}$$

en zij

$$\underline{O} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ f(x,y) \geq 0,\ (x,y)(f(x,y))^t = 0\}$$

Dan geldt:

(1) als $(p,q) \in E(A,B)$, dan $(-(pBq^t)^{-1}p,\ (pAq^t)^{-1}q) \in \underline{O}$.

(2) als $(x,y) \in \underline{O}$, dan $x \neq 0$, $y \neq 0$ en $((\Sigma_{i=1}^m x_i)^{-1}x, (\Sigma_{j=1}^n y_j)^{-1}y) \in E(A,B)$.

(De voorwaarden $A > 0$ en $B < 0$ zijn niet essentiëel).

(7.4) Bekend voor het oplossen van lineaire complementariteitsproblemen is het *algorithme van Lemke*, dat door een andere spreker in deze werkweek belicht zal worden. Tot slot mag niet onvermeld blijven dat juist het probleem van het zoeken van evenwichtspunten voor bimatrixspelen de start is geweest van de theorie van complementariteitsproblemen.

Literatuur.

[1] BASTIAN,M., *Lineaire Komplementärprobleme im Operations Research und in der Wirtschaftstheorie*, Verlag Anton Hain, Meisenheim (1976).

[2] BERGE,C., *Théorie générale des jeux à n personnes*, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[3] BLACKWELL,D. and M.A.GIRSHICK, *Theory of games and statistical decisions*, John Wiley and Sons, New York (1954).

[4] BOHNENBLUST,H.F., S.KARLIN and L.S.SHAPLEY, *Solutions of discrete, two-person games*, Annals of Mathematics Studies 24, 51-72 (1950).

[5] BURGER,E., *Einführung in die Theorie der Spiele*, Walter de Gruyter & Co, Berlin (2. Auflage, 1966).

[6] DANTZIG,G.B., *A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem*, in: T.C.KOOPMANS (Ed.): Activity analysis of production and allocation, John Wiley and Sons, New York (1951).

[7] DANTZIG,G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton (1963).

[8] FAN,K., *Minimax Theorems*, Proc.Acad.Sci. U.S.A. 39, 42-47 (1953).

[9] GALE,D., *The theory of linear economic models*, Mc Graw-Hill, New York (1960).

[10] GALE,D., H.W. KUHN and A.W.TUCKER, *Linear programming and the theory of games*, in: T.C.KOOPMANS (Ed.): Activity analysis of production and allocation, John Wiley and Sons, New York (1951).

[11] GALE,D. and S.SHERMAN, *Solutions of finite two-person games*, Annals of Mathematics Studies 24, 37-49 (1950).

[12] KARLIN,S., *Matrix games, programming and mathematical economics*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (1959).

[13] KARLIN,S., *The theory of infinite games*, Addison-Wesley Publ.Comp., Reading (1959).

[14] KÖNIG,H., *Über das von Neumannsche Minimax-Theorèm*, Arch.Math. (Basel) 19, 482-487 (1968).

[15] KUHN,H.W., *Extensive games and the problem of information*, Annals of Mathematics Studies 28, 193-216 (1952).

[16] LEMKE,C.E. and J.T.HOWSON, *Equilibrium points of bimatrix games*, SIAM J. Appl. Math. 12, 413-423 (1964).

[17] LUCE,R.D. and H.RAIFFA, *Games and decisions. Introduction and critical survey*, John Wiley and Sons, New York (1957).

[18] LÜTHI,H.J., *Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie,* Springer, Berlin (1976).

[19] NASH,J.F., *Non-cooperative games,* Ann. of Math. 54, 286-295 (1951).

[20] von NEUMANN,J., *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele,* Math.Ann., 100, 295-320 (1928).

[21] von NEUMANN,J. and O.MORGENSTERN, *Theory of games and economic behavior,* Princeton University Press, Princeton (1944).

[22] NIKAIDÔ,H. and K.ISODA, *Note on non-cooperative convex games,* Pacific J.Math. 5, 807-815 (1955).

[23] OWEN,G., *Game Theory,* W.B. Saunders Comp., Philadelphia (1968).

[24] PARTHASARATHY,T. and T.E.S. RAGHAVAN, *Some topics in two-person games,* American Elsevier Publ.Comp., New York (1971).

[25] RUPP,W., *ε-Gleichgewichtspunkte in n-Personenspiele,* , in: R.HENN, O.MOESCHLIN (Ed.): Mathematical Economics and Game Theory; Essays in Honor of Oskar Morgenstern. Springer, Berlin (1977).

[26] SHAPLEY,L.S. and R.N.SNOW, *Basic solutions of discrete games,* Annals of Mathematics Studies 24, 27-35 (1950).

[27] SION,M., *On general minimax theorems,* Pacific J.Math. 8, 171-176 (1958).

[28] SOYSTER,A.L., *A semi-infinite game,* Management Sc. 21, 806-812 (1975).

[29] STOER,J. and C.WITZGALL, *Convexity and optimization in finite dimensions* I, Springer, Berlin (1970).

[30] TERKELSEN,F., *Some minimax theorems,* Math. Scand. 31, 405-413 (1972).

[31] TIJS,S.H., *Semi-infinite and infinite matrix games and bimatrix games,* proefschrift K.U. Nijmegen (1975).

[32] TIJS,S.H., *ε-Equilibrium point theorems for two-person games,* Rapport 7629, Math.Inst. K.U. Nijmegen (1976).

[33] TIJS,S.H., *Semi-infinite linear programs and semi-infinite matrix games,* Rapport 7630, Math. Inst. K.U. Nijmegen (1976).

[34] VILLE,J.A., *Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habilité des joueurs,* in: Traité du calcul des probabilités et de ses applications IV, par ÉMILE BOREL, 105-113 (1938).

[35] VOROB'EV,N.N., *Finite games without coalitions,* Amer.Math.Soc. Transl., series 2, 38, 301-340 (1959).

[36] VOROB'EV,N.N., *The present state of the theory of games,* Russian Math. Surveys, 25, 77-136 (1970).

[37] WALD,A., *Generalization of a theorem by von Neumann concerning zero sum two person games,* Ann. of Math. 46, 281-286 (1945).

[38] WALD,A., *Statistical decision functions,* Wiley and Sons, New York (1950).