STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

REKENAFDELING

CURSUS WETENSCHAPPELIJK REKENAAR

Lineaire Algebra en Meetkunde

door

F.J.M. Barning

deel II
1961

Berekening van determinanten

Toepassing van de eerste zowel als van de tweede determinanten regel (blz. 113, 115) geeft in het algemeen zeer veel rekenwerk, omdat bij betrekkelijk kleine orde van de determinant het aantal termen vrij groot wordt (bij orde 4 bijv. reeds 4!=24 termen). Het werk kan echter belangrijk worden vereenvoudigd, Passen we namelijk stelling 7.19 toe, dan is de berekening van een determinant al direct terug te voeren tot die van de minoren van de elementen van zekere rij of kolom, d.z. determinanten van een orde lager. Met behulp van de stellingen 7.2 en 7.6 is de berekening verder te vereenvoudigen.
Het streven hierbij is steeds zoveel mogelijk elementen uit een bepaalde rij of kolom nul te maken ("schoonveegproces") en dan de determinant te ontwikkelen naar die rij of kolom. De zaak wordt dan teruggebracht op de berekening van determinanten van lagere orde, waarop hetzelfde beginsel is toe te passen.
Aan het volgende voorbeeld zullen we de methode verduidelijken:

Vb
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$4\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 21 & 5 & -5 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} -4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} = -4(-10+21) = -44,$$

waarbij de bewerkingen (1) t/m (5) bij elke stap resp. voorstellen:
(1): rij 1-rij 2; rij 4-2xrij 2 (stelling 7.6);
(2): ontwikkelen naar de 2^e kolom (stelling 7.19);
(3): factor 2 uit de 2^e rij (stelling 7.2);
(4): kolom 1-3 x kolom 3; kolom 2-2 x kolom 3 (stelling 7.6);
(5): ontwikkelen naar de 2^e rij (stelling 7.19).

Opgaven

1. Maak nog eens de opgaven 2,5 en 6 van blz. 125-126.

2. Bereken de waarden van de volgende determinanten:

$$1^\circ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} ;\; 2^\circ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} ;\; 3^\circ \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 3 \end{vmatrix} ;\; 4^\circ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} ;$$

$$5^\circ \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} ;\; 6^\circ \begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 & 19 \\ 0 & 1 & 28 & 31 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} .$$

3. Los x op uit: $\begin{vmatrix} x^2 & ax & x & 1 \\ b^2 & ab & b & 1 \\ c^2 & bc & x & 1 \\ d^2 & ad & d & 1 \end{vmatrix} = 0.$

4. Bewijs de volgende gelijkheid met behulp van eigenschappen van determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

5. Als $A=(a_{ij})$ een vierkante matrix is van de n^e orde en $B=(m_{ij})$ de matrix, waarvan de elementen de minoren zijn van de overeenkomstige elementen van A, bewijs dan, dat $|B|=|A|^{n-1}$ voor $n > 1$ (B is de geadjungeerde matrix van A (blz 129)).

6. In een determinant D van de graad n worden de elementen van elke rij verminderd met de som van de overeenkomstige elementen van de overige rijen. Bewijs, dat de nieuwe determinant gelijk is aan $-2^{n-1}(n-2)D$, $(n \geq 2)$.

7. Bewijs bijv. door uit te gaan van de Vandermonde-determinant (opg.5, blz 126)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix}$$

, dat van de 4^e graadsvergelijking in x:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & b & c & d \\ x^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ x^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = 0$$

een der wortels gelijk is aan $-(b+c+d)$.

Toepassing van de determinantentheorie bij de bepaling van de rang van een matrix

<u>Definitie</u>: Als r de rang van de matrix A is, dan wordt onder een <u>hoofdmatrix</u> van A verstaan, elke vierkante deelmatrix van A van de r^e orde, waarvan de determinant $\neq 0$ is (dus elke niet-singuliere deelmatrix van de r^e orde).

Opm. 1) Als deelmatrix van A kan ook A zelf optreden (dit is het geval als A niet-singulier is).

2) Een nulmatrix heeft per definitie een "deelmatrix" van de 0^e orde met determinant $\neq 0$ (niet-singulier).

Dat een matrix met rang r steeds een hoofdmatrix bezit, doch nimmer een matrix van orde $> r$, waarvan de determinant $\neq 0$ is, is de inhoud van de volgende stelling:

<u>Stelling 7.22</u> Een matrix A heeft dan en slechts dan de rang r, als A minstens één niet-singuliere deelmatrix van de orde r bezit, doch niet een niet-singuliere deelmatrix van hogere orde.

<u>Bewijs</u>: Laat B een niet-singuliere deelmatrix van A zijn, van zo groot mogelijke orde s. (Onderstel $s > 0$; als $s=0$ is $A=0$ en de stelling is triviaal i.v.m. opm.2 boven) We zullen bewijzen, dat $s=r$ (= rang van A):

De s rijen van A, die de s rijen van B bevatten, moeten lineair onafhankelijk zijn, want als ze

lineair afhankelijk zouden zijn, dan waren de rijvectoren van B dat ook, waardoor B singulier zou zijn (Stelling 7.13).
A bevat dus minstens s lineair onafhankelijke rijvectoren, zodat geldt $s \leq r$. We gaan nu aantonen, dat ieder stelsel van s+1 rijen van A lineair afhankelijk is. (Onderstel hierbij $s <$ aantal rijen van A). Laat namelijk C een deelmatrix van A zijn, gevormd uit s+1 rijen van A. De rang van C is kleiner dan s+1, want anders zou C zeker s+1 lineair onafhankelijke kolomvectoren bevatten, zodat er dan een niet-singuliere deelmatrix van A zou moeten bestaan van orde s+1 in strijd met het uitgangspunt.
s+1 rijen van A zijn dus lineair afhankelijk, zodat $r < s+1$ en dus samenvattend $s \leq r < s+1$, hetgeen geeft $s=r$.
Hiermede is stelling 7.22 bewezen.

Opm. Veelal definieert men de rang van een matrix A als de orde van de grootst mogelijke niet-singuliere deelmatrix van A. Deze definitie is dan volgens bovengenoemde stelling aequivalent met de onze. (maximale aantal rijen of kolommen, dat lin. onafhankelijk is).

Stelling 7.22 wordt toegepast bij het zoeken naar een hoofdmatrix van een gegeven matrix A. Deze hoofdmatrix moet volgens deze stelling een niet-singuliere matrix zijn van zo hoog mogelijke orde. Willen we dus onderzoeken of een niet-singuliere deelmatrix van A hoofdmatrix is, dan moet dus worden nagegaan of alle vierkante deelmatrices van A, waarvan de orde 1 hoger is, singulier zijn, of hiermede aequivalent: een determinant bezitten gelijk aan 0. Is dit het geval, dan geeft de orde van die niet-singuliere deelmatrix van A dus juist de rang van A aan. Op deze wijze kan dus ook de rang van een matrix (van niet te grote afmetingen*)) worden bepaald. De volgende stelling zal het rekenwerk belangrijk kun-

----
*) anders te bewerkelijk

nen vereenvoudigen:

Stelling 7.23 Is D een vierkante deelmatrix van A van de r^e orde, zodanig, dat det $D \neq 0$, en is verder gegeven, dat iedere $(r+1)$-matrix, die uit D ontstaat door randen met een rij en een kolom uit A, de determinant 0 heeft, dan heeft ook iedere $(r+1)$-matrix van A de determinant 0 (D is dan dus een hoofdmatrix van A).

Opm. Is A een (m,n)-matrix, dan wordt ondersteld, dat r niet gelijk is aan m of n.

Bewijs: Gemakshalve zullen we onderstellen, dat D gevormd wordt door de eerste r rijen en eerste r kolommen van A. We zullen nu aantonen, dat een willekeurige rij van A, stel de k^e, een lineaire conbinatie is van de eerste r rijen van A, voorgesteld door:

$$\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1r} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \dots a_{rn} \end{matrix} \quad .$$

Het volgende stelsel vergelijkingen in $p_1, p_2, \dots, p_r$:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + \dots + p_r a_{r1} = a_{k1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 a_{1r} + \dots + p_r a_{rr} = a_{kr} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 a_{1n} + \dots + p_r a_{rn} = a_{kn} \end{cases}$$

heeft immers volgens stelling 6.5 en 7.11 altijd een oplossing. Iedere rij van A is dus een lineaire combinatie van r rijen, zodat ieder stelsel van r+1 rijen lineair afhankelijk is (vgl opm 2^o blz. 105).
Elke onderdeterminant van A van de $(r+1)^e$ orde heeft dus

r+1 lineair afhankelijke rijen en heeft dus, op grond van stelling 7.11 de waarde 0, hetgeen te bewijzen was.
Uit stelling 7.22 en 7.23 volgt direct de volgende stelling:

<u>Stelling 7.24</u> Een matrix A heeft dan en slechts dan de rang r als A een vierkante deelmatrix D bevat van de orde r met det D≠0, zodanig dat geen der (r+1)-matrices, die uit D door randen met een rij en een kolom uit A ontstaan, een determinant ≠0 heeft.[1] D is een hoofdmatrix van A.

Stelling 7.24 houdt dus een zeer eenvoudig voorschrift in om een hoofdmatrix en de rang van een matrix te bepalen.

Vb.: Bepaal een hoofdmatrix en de rang van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 9 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 19 \\ 13 & 6 & 7 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

De onderdeterminant van de 3^e orde rechtsonder $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

is ongelijk aan 0, terwijl alle 6 determinanten, die uit randing van deze ontstaan met 1 rij en 1 kolom van A, n.l.

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 13 & 7 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 19 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 & 19 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} 12 & 9 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

gelijk zijn aan 0, zoals gemakkelijk is te verifiëren. Een hoofdmatrix van A is dus bijv. [illegible] matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. De rang van A is dus 3.

---

1) In geval er geen (r+1)-matrices zijn te vormen, dus als de orde van D gelijk is aan de rij-of kolomlengte van A, stemt de rang van A ook met deze orde overeen.

Opm. A bevat $\binom{6}{4} \times \binom{5}{4} = 75$ onderdeterminanten van de 4^e orde. Wij behoeven hier dus slechts van 6 determinanten het nul zijn na te gaan om tot het 0 zijn van de overige 69 determinanten automatisch te kunnen besluiten (stelling 7.23).

Opgave

Bepaal de rang van de volgende matrices:

$$1^o \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}; 2^o \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}; 3^o \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 11 & -4 \end{pmatrix};$$

$$4^o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 5^o \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; 6^o \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & 17 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Toepassing van de determinantentheorie bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen

Eerst geven we een opsomming van de voor ons doel belangrijke eigenschappen van deze stelsels, afgeleid in § 6.

E 1. Een homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden heeft dan en slechts dan een andere dan de nul-(of triviale) oplossing, als de kleine (of coëfficiënten-)matrix van het stelsel singulier is of (aequivalent hiermede) de determinant van deze matrix gelijk is aan nul.

E 2. De oplossingsruimte van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met n onbekenden heeft de dimensie n-r, als r de rang van de kleine matrix is.

E 3. Een niet-homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen heeft dan en slechts dan een oplossing, als de rang van de kleine matrix gelijk is aan de rang van de grote (of aangevulde) matrix.

E 4. Is $\overline{s}$ een oplossingsvector van een niet-homogeen stelsel lineaire vergelijkingen en is $\overline{t}$ een oplossingsvector van het bijbehorende homogene (of gereduceerde) stelsel, dan is $\overline{s+t}$ een oplossingsvector van het niet-homogene stelsel. Is $\overline{s}$ een oplossingsvector van het niet-homogene stelsel (een particuliere oplossing) en doorloopt $\overline{t}$ alle oplossingen van het gereduceerde stelsel, dan doorloopt $\overline{s+t}$ alle oplossingsvectoren van het niet-homogene stelsel.

E 5. Een niet-homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden heeft dan en slechts dan één oplossing als de kleine matrix niet-singulier is.

De eigenschappen E 1, E 3 en E 5 zouden existentie-theorema kunnen worden genoemd voor stelsels lineaire vergelijkingen, daar zij slechts voorwaarden aangeven voor het bestaan van oplossingen van deze stelsels, en ons verder niets vertellen over de methode om de oplossingen te bepalen.
De meeste methoden om een stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen zijn variaties van de methode van successieve eliminatie der onbekenden.
De determinanten-stellingen 7.19 en 7.20 doen ons een middel aan de hand om langs systematische weg de oplossingen van een stelsel te bepalen door middel van eliminatie der onbekenden met behulp van determinanten-theorie.

Beschouw hiertoe het volgende stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden:

$$(7.22)\qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = c_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = c_n \end{cases} .$$

Is m_{ij} weer de uitdrukking voor de coëfficiënt van het element a_{ij} in de determinant van de coëfficiëntenmatrix $A=(a_{ij})$ van het stelsel (7.22), dan vermenigvuldigen we de eerste vergelijking van (7.22) met m_{11}, de tweede vergelijking met $m_{21}, \dots,$ de n^e vergelijking met m_{n1} en tellen de verkregen vergelijkingen op. Volgens (7.19) geldt nu

$$(7.23) \qquad |A|x_1 = c_1 m_{11} + c_2 m_{21} + \dots + c_n m_{n1}.$$

Het rechterlid van (7.23) is de uitdrukking, die men verkrijgt, indien de determinant

$$A_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ontwikkeld wordt naar de 1^e kolom.
Indien we als vermenigvuldigers voor de vergelijkingen van (7.22) achtereenvolgens nemen de minoren van A behorende bij de $2^e, 3^e, \dots, n^e$ kolom, ontstaan n-1 vergelijkingen, die met (7.23) kunnen worden samengevat in:

$$(7.24) \qquad |A|x_i = |A_i| \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

waarin A_i de matrix voorstelt, die men uit A verkrijgt als daarin de i^e kolom vervangen wordt door de kolom der rechterleden $c_1, c_2, \dots, c_n$ van (7.22).
Op deze wijze worden alle onbekenden op één na (vergelijk blz. 110, 111 voor het geval n=3) tegelijk geëlimineerd.
Als nu $|A| \neq 0$, geven de vergelijkingen (7.24) indien we beide leden delen door $|A|$, de oplossing van het stelsel (7.22), omdat er in dit geval volgens eigenschap E 5 (blz. 138) er juist één oplossing is en een oplossing van (7.22) zeker een oplossing is van (7.24). Deze oplossingsmethode heet de <u>regel van Cramer</u>, $\left(x_i = \frac{|A_i|}{|A|}\right)$.

Beschouw nu het algemene geval van een stelsel met m vergelijkingen met n onbekenden:

(7.25) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = c_i \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

Als de rang van de kleine matrix A en die van de grote matrix, aangeduid met A', niet gelijk zijn, zijn er volgens E 3 geen oplossingen; het stelsel is dan strijdig.
Onderstel nu, dat A en A' dezelfde rang r hebben. Volgens stelling 7.22 heeft A een niet-singuliere deelmatrix van de orde r. Door zonodig de vergelijkingen van het stelsel anders te ordenen en de onbekenden anders te nummeren, kan worden aangenomen, dat de (r,r)-matrix in de linkerbovenhoek van A niet-singulier is. Aangezien de matrix B, gevormd door de eerste r rijen van A' ook deze niet-singuliere matrix als deelmatrix bezit, volgt uit stelling 7.22, dat B de rang r heeft. Daar ook A' de rang r heeft zijn de laatste m-r rijen van A' lineaire combinaties van de eerste r rijen, zodat dus ook de laatste m-r vergelijkingen van (7.25) lineaire combinaties zijn van de eerste r. Dus iedere oplossing van deze eerste r vergelijkingen is een oplossing van het gehele stelsel (7.25).
Als we in de eerste r vergelijkingen van (7.25) aan $x_{r+1},\ldots,x_n$ willekeurige waarden toekennen, ontstaat een stelsel van r vergelijkingen in r onbekenden $x_1,x_2,\ldots,x_r$, waarvan de coëfficiënten-matrix niet-singulier is, en dat dus volgens eigenschap E 5 één oplossing heeft, welke oplossing bepaald kan worden met behulp van de regel van Cramer, zoals boven is uiteengezet. De gevonden waarden van $x_1,x_2,\ldots,x_r$ tezamen met de toegekende waarden aan $x_{r+1},\ldots,x_n$ geven een oplossing van de eerste r vergelijkingen en dus van het stelsel (7.25).
We krijgen dan voor elke keuze van waarden voor $x_{r+1},\ldots,x_n$ één oplossing. $x_1,x_2,\ldots,x_r$ kunnen worden uitgedrukt in $x_{r+1},\ldots,x_n$ (d.m.v. lineaire (d.z. 1^e graads)functies), terwijl <u>alle</u> oplossingen van (7.25) worden verkregen door $x_{r+1},\ldots,x_n$ alle mogelijke waarden te geven (vergelijk eigenschap E 2 en E 4, n-r "vrijheidsgraden").

Opm. In de practijk zal men vaak, en in ieder geval als het aantal vergelijkingen van het stelsel, dat we willen oplossen, vrij groot is, afwijken van deze oplossingsmethode. De uitwerking der determinanten wordt dan namelijk veel te bewerkelijk; de directe oplossingsmethode door eliminatie ("schoonvegen") voert dan sneller tot het doel. Vaak ook gebruikt men geraffineerde directe methoden (bijv. de relaxatie-methode), die met minder werk de oplossing leveren. Bij de behandeling van de numerieke wiskunde wordt op deze zaken nader ingegaan.

Zoals we gezien hebben is een stelsel lineaire vergelijkingen dan en slechts dan oplosbaar, als de rang r van A gelijk is aan de rang r' van A'. Volgens stelling 7.22 bezit A een niet-singuliere deelmatrix van de r^e orde, die we H zullen noemen (hoofdmatrix). Door deze matrix te randen met een rij en een kolom van A ontstaan matrices waarvan de determinant gelijk is aan 0. Volgens stelling 7.24 heeft dus A' dan en slechts dan een rang r', die gelijk is aan r, als alle matrices, die uit H ontstaan door randing met een rij van A' en de kolomvector, gevormd door de bekende termen (rechterleden) van het stelsel, een determinant 0 hebben. We geven nu de volgende definities om ons gemakkelijker te kunnen uitdrukken:

Definitie: Onder een karakteristieke matrix van een stelsel lineaire vergelijkingen verstaan we een matrix, die uit een hoofdmatrix H van de coëfficiëntenmatrix A ontstaat, door H te randen aan de onderkant met de coëfficiënten van een der vergelijkingen, waarvan geen coëfficiënten in H staan, en aan de rechterkant met de bijbehorende bekende termen. De determinant van een karakteristieke matrix is een karakteristieke determinant.

Opm. Is de rang r van A gelijk aan het aantal vergelijkingen m van het stelsel, dan is er geen karakteristieke matrix (en dus ook geen karakteristieke

determinant).
Bij een bepaalde hoofdmatrix behoren dus bij een stelsel van m vergelijkingen m-r karakteristieke determinanten. Uit het voorgaande volgt, dat het nul zijn van alle karakteristieke determinanten een nodige en voldoende voorwaarde is voor oplosbaarheid van een stelsel lineaire vergelijkingen.

Samengevat geldt dus:

<u>Stelling 7.25</u> (Stelling van Rouché)

Is gegeven een stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden en is H een hoofdmatrix van de coëfficiëntenmatrix A van rang r, dan geldt:

a) Zijn de m-r karakteristieke determinanten niet alle nul, dan heeft het stelsel geen oplossing (de vergelijkingen zijn strijdig (vals)).
b) Zijn wel alle karakteristieke determinanten nul (of zijn er geen karakteristieke determinanten te vormen, d.i. het geval als m=r(=r'), zie opm. boven) dan is het stelsel oplosbaar, en wel kan men aan n-r onbekenden, waarvan geen coëfficiënten in H staan, willekeurige waarden toekennen; de overige r onbekenden (waarvan wel coëfficiënten in H staan) zijn lineaire functies van de eerstgenoemde n-r.

Om de oplossing(en) van het stelsel te vinden, behoeft men slechts de r vergelijkingen te beschouwen, waarvan de coëfficiënten in H staan. In deze vergelijkingen brengt men alle onbekenden waarvan geen coëfficiënten in H, naar het rechterlid en lost daarna met behulp van de regel van Cramer de overige onbekenden op.

Opm. bij stelling 7.25 b). Men bedenke, dat het geheel van de keuze van de hoofdmatrix H afhangt welke onbekenden willekeurig kunnen worden gekozen. Bij een andere keuze van H behoren in het algemeen weer andere willekeurig te kiezen onbekenden.

Het stelsel lineaire vergelijkingen (7.25): $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=c_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ kan door middel van matrices zeer eenvoudig worden weergegeven. Immers op grond van de definitie van het matrixproduct is (7.25) gelijkwaardig met de matrix-vergelijking

$$AX = C \quad , \tag{7.26}$$

waarin A weer de coëfficiënten-matrix (a_{ij}) voorstelt, X de kolommatrix is bestaande uit de op te lossen onbekenden $x_1,\ldots,x_n$ en C de kolommatrix van de rechterleden $c_1,\ldots,c_n$ van het stelsel.
Als m=n en A niet-singulier, kan (7.26) opgelost worden door beide leden ervan vóór te vermenigvuldigen met A^{-1}.
De oplossing is dan

$$X = A^{-1}\,C \quad . \tag{7.27}$$

Uit (7.20) en (7.27) volgt: $x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-1}\, c_j=\frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} m_{ji}\, c_j$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$.
$\sum_{j=1}^{n} m_{ji}c_j$ is de waarde van de determinant $|A_i|$ van de matrix A_i (blz.139), zodat $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, in overeenstemming met (7.24).

De volgende voorbeelden illustreren het gebruik van determinanten bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen:

<u>Vb 1</u>: Los het volgende stelsel vergelijkingen op met behulp van de regel van Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3 = 7 \\ 5x_2- x_3 = -9 \\ x_1+ x_2 +x_3 = 0 \end{cases} .$$

<u>Opl.</u>: Men heeft hier: $|A| =\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$;

$|A_1| =\begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -9 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30$; $|A_2| =\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & -9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =20$; $|A_3| =\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=10.$

De regel van Cramer levert dus de oplossing:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 3; \; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -2; \; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -1.$$

Vb 2: Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} .$$

Opl.: De coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de

de rang r=3, een hoofdmatrix is $H=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$|H| = 1$ (product van de diag.elementen).

x_1, x_2 en x_3 kunnen we dan met behulp van de regel van Cramer als volgt in x_4 en x_5 uitdrukken ($|H|=1$):

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -x_4 & 1 & -1 \\ 2x_4-x_5 & 0 & 1 \end{vmatrix} / |H| = -x_5; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x_4 & -1 \\ 0 & 2x_4-x_5 & 1 \end{vmatrix} / |H| = x_4 - x_5;$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -x_4 \\ 0 & 0 & 2x_4-x_5 \end{vmatrix} / |H| = 2x_4 - x_5 .$$

Dus $x_1 = -x_5$; $x_2 = x_4 - x_5$; $x_3 = 2x_4 - x_5$.

Een tweetal onbekenden kan steeds willekeurig worden gekozen, behalve echter x_1 en x_5 beide tegelijk, want aan $x_1 + x_5 = 0$ (de som van de 1^e, 2×2^e en 3^e vergel.) moet noodzakelijk worden voldaan. Dit houdt verband met het feit, dat elke (3,3)-deelmatrix van de coëff. matrix een hoofdmatrix is, behalve die gevormd uit de kolommen 2,3 en 4.

De oplossing in vectorvorm luidt:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_5, x_4 - x_5, 2x_4 - x_5, x_4, x_5) =$$

$$x_5(-1,-1,-1,0,1) + x_4(0,1,2,1,0) = \lambda(1,1,1,0,-1) + \mu(0,1,2,1,0).$$

Elke oplossing van het gegeven homogene stelsel is een lineaire combinatie van de vectoren (1,1,1,0,-1) en (0,1,2,1,0). De oplossingsruimte is 2-dimensionaal, in overeenstemming met n-r=5-3=2.

Vb.3: Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

Opl.: Zowel met de regel van Cramer (H is bijv $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$), als door gewone eliminatie vinden we $x_1 = \frac{1}{5}x_3$; $x_2 = \frac{2}{5}x_3$, zodat $x_1 : x_2 : x_3 = 1:2:5$ of $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(1,2,5)$. Een 1-dimensionale opl.ruimte (n-r=3-2=1).

Hetzelfde resultaat, namelijk een verhouding van de onbekenden treedt eveneens b.v. op bij een homogeen stelsel, waarvan de coëff.matrix vierkant is, met rang 1 lager dan de orde, zoals bijv. in

Vb.4: Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Opl.: $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Een hoofdmatrix van A is $H = \begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Volgens de regel van Cramer geldt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & -5 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3}x_3 \; ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}x_3 ,$$

zodat $x_1 : x_2 : x_3 = 2:1:3$ of $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(2,1,3)$.
De oplossingsruimte is 1 dimensionaal (n-r=3-2=1).

<u>Vb.5:</u> Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4 = 1 \\ bx_1+cx_2+dx_3+ax_4 = 1 \\ cx_1+dx_2+ax_3+bx_4 = 1 \\ dx_1+ax_2+bx_3+cx_4 = 1 \end{cases}$$

, waarin a,b,c en d reëel zijn.

<u>Opl.:</u> De coëfficiënten-matrix A heeft een determinant, die bij uitwerking gelijk blijkt te zijn aan

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left\{(a-c)^2+(b-d)^2\right\}.$$

We onderscheiden nu de volgende gevallen (i.v.m. $|A|=0$ of $|A|\neq 0$):

a) $a+b+c+d\neq 0$ en $a-b+c-d\neq 0$, terwijl niet gelijktijdig $a=c$ en $b=d$. Dit geeft $|A|\neq 0$. Er is dan één oplossing ($n=r=4$), en daar de vergelijkingen bij cyclische verwisseling der onbekenden invariant blijven, is deze oplossing dus $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{1}{a+b+c+d}$.

b) $a+b+c+d=0$. Het stelsel is dan strijdig, zoals direct blijkt bij optelling der 4 vergelijkingen ($0=4$).

c) $a+c=b+d\neq 0$, dus $d=a-b+c$, dan is $|A|=0$. $H=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & a \end{pmatrix}$ is een hoofdmatrix, want $|H|=-(a+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2\right\}$, tenzij $a=b=c$ (en dus $=d$). Zijn dus a,b,c en d niet aan elkaar gelijk, dan kan men x_4 willekeurig kiezen (het stelsel is oplosbaar, want de 4^e vergelijking is de som van de eerste en de derde verminderd met de tweede vergelijking, karakteristieke determinant is dus 0). Men vindt dan $x_1=x_3=\dfrac{1}{a+c}-x_4$; $x_2=x_4$. Evenzo had men x_1,x_2 of x_3 willekeurig kunnen kiezen. ($n-r=4-3=1$).

d) $a=c$, $b=d$, terwijl $a^2\neq b^2$. Alle karakteristieke determinanten zijn dan 0 en $x_1+x_3=x_2+x_4=\dfrac{1}{a+b}$, waarin x_1 of x_3 willekeurig kunnen worden gekozen en evenzo x_2 of x_4. ($n-r=4-2=2$).

e) $a=b=c=d\neq 0$. Dan heeft men $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{a}$. Drie der onbekenden kunnen willekeurig worden gekozen $(n-r=4-1=3)$.

Vb.6: Onderzoek voor alle reële waarden van a en b de oplosbaarheid van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4x + y - az = 1 \\ x - 3y + 7z = b \end{cases}$$

en geef de eventueel aanwezige oplossing(en) aan.
(examen 1961)

Opl.: Beschouw de coëfficiëntenmatrix $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -a \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$;

$|A| = 2(7-3a)+(28+a)-(-12-1)=55-5a$. $|A|=0$ voor $a=11$.

1) $a\neq 11$:

1^e en 2^e vergel.: $\rightarrow 6x-(a+1)z=1$
1^e en 3^e vergel.: $\rightarrow 5x-10z=-b$
$\longrightarrow$ $x=\dfrac{10+b+ab}{55-5a}$; $z=\dfrac{5+6b}{55-5a}$; $y=\dfrac{15-4b+2ab}{55-5a}$.

2) $a=11$: hoofdmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; karakteristieke matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & b \end{pmatrix}$;

hiervan is de determinant gelijk aan $6b+5$; voor $6b+5\neq 0$ of $b\neq -\frac{5}{6}$: geen oplossing (stelsel strijdig); voor $b=-\frac{5}{6}$: stelsel ∞^1 oplossingen: 1^e en 2^e vergel. $\longrightarrow$

$$x=\tfrac{1}{6}+2z;\quad y=\tfrac{1}{3}+3z \longrightarrow (x,y,z)=\underbrace{(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},0)}_{\text{part.opl.}}+\underbrace{\lambda(2,3,1)}_{\text{opl.hom.stelsel}}.$$

Samenvattend: $a\neq 11 \longrightarrow (x,y,z)=\left(\dfrac{10+b+ab}{55-5a}, \dfrac{15-4b+2ab}{55-5a}, \dfrac{5+6b}{55-5a}\right)$;

$a=11$ en $b\neq -\frac{5}{6}$: stelsel strijdig;

$a=11$ en $b=-\frac{5}{6} \longrightarrow (x,y,z)=(\frac{1}{6},\frac{1}{3},0)+\lambda(2,3,1)$.

Opgaven

1. Maak met behulp van de voorgaande theorie nog eens de opgaven van blz. 106 e.v. nrs.: 4,5,6,7,8,9,10,11.

Geef van elk der volgende 4 stelsels de oplossingen in vectorvorm:

2. $$\begin{cases} 7x_1 + 13x_2 + x_3 = 20 \\ \quad\;\; - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 16x_2 + 25x_3 + 41x_4 = -9 \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}.$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 26 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 21 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = -12 \end{cases}.$$

Onderzoek voor welke waarden van a de volgende 6 stelsels vergelijkingen geen oplossing, resp. één oplossing, resp. meer dan één oplossing hebben. In de beide laatste gevallen worden de oplossingen gevraagd:

4. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 4x_3 = 2 \\ x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (2-a)x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3ax_3 = 0 \\ ax_1 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

5. $$\begin{cases} 2ax + y = 3 \\ (3a-5)x + (a-4)y = -a-10 \\ x + y = 2a+2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + (12-3a)x_3 = 2 \\ 2x_1 + (a-1)x_2 + (a+4)x_3 = a+2 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \end{cases}.$$

6. $$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (3-a)x_1 + ax_2 + (6-a)x_3 = 15-5a \\ 4x_1 + (a+4)x_2 + (8-a)x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + (2-a)x_3 = 5 \end{cases}.$$

7. Bepaal a en b zó, dat het stelsel

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 - 9x_3 + ax_4 = b-5 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + (2a-9)x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

tenminste twee oplossingen heeft. Bereken vervolgens de oplossingen.

8. $\begin{cases} x \quad\quad +(1-3b)z - w = 0 \\ \quad y + \quad bz + w = 0 \\ x+2y - \quad z + w = 1 \\ 4x+10y \quad\quad + aw = 3-b \end{cases}$ Dit stelsel heeft tenminste twee oplossingen. Bepaal a en b en de oplossingen.

9. Los op met determinanten:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 0 \\ x - y - 2z + 4t = 0 \\ 3x + y + 3z + 2t = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 5x + y - 2z + t = 0 \\ 9x - 3y + 3z - t = 0 \\ 2x - 2y - 11z - 10t = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x-y = 0 \\ x-y-t = 0 \\ y+t = 0 \end{cases} .$$

10. Maak de examenopgaven Lineaire Algebra : 1959.1
1960.2
1962(1).1 .

De regel van Cramer kan ook toegepast worden bij het oplossen van een lineair stelsel vectorvergelijkingen. Het is duidelijk, dat indien gevraagd wordt om het stelsel vectorvergelijkingen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \overline{x}_j = \overline{c}_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

op te lossen naar de vectoren $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ bij gegeven vectoren $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_m$ en coëfficiënten a_{ij}, dat de vectoren $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ met behulp van de regel van Cramer op analoge wijze berekend kunnen worden als de $x_1, \ldots, x_n$ uit het stelsel (7.25), blz.140. Verkeren we bijv. in het geval, dat de matrix (a_{ij}) niet-singulier is, dan is het resultaat, dat de vectoren $\overline{x}_j$ homogeen lineair kunnen worden uitgedrukt in de vectoren $\overline{c}_i$. We lichten dit toe aan een voorbeeld:

Vb.: Laat $\overline{e}_1=(1,0,0)$, $\overline{e}_2=(0,1,0)$ en $\overline{e}_3=(0,0,1)$ basisvectoren zijn van een R_3. Als gegeven is het stelsel vectorvergelijkingen:

$$\begin{cases} 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3 = \bar{f}_1 \\ \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 = \bar{f}_2 \\ 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{f}_3 \end{cases},$$

dan kunnen we met behulp van de regel van Cramer de basisvectoren uitdrukken in $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ en $\bar{f}_3$ en wel als volgt:

$$\bar{e}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{f}_1 & 5 & -3 \\ \bar{f}_2 & -1 & 2 \\ \bar{f}_3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \; ; \; \bar{e}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \bar{f}_1 & -3 \\ 1 & \bar{f}_2 & 2 \\ 3 & \bar{f}_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \; ; \; \bar{e}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & \bar{f}_1 \\ 1 & -1 & \bar{f}_2 \\ 3 & -2 & \bar{f}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} .$$

De betekenis van de determinanten in de tellers van bovenstaande determinantenquotiënten, die elk een kolom vectoren bevatten, is duidelijk. Berekening geschiedt overeenkomstig de berekening van gewone getallendeterminanten. We vinden als resultaat:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{28}(3\bar{f}_1+\bar{f}_2+7\bar{f}_3) ; \; \bar{e}_2 = \frac{1}{28}(5\bar{f}_1+11\bar{f}_2-7\bar{f}_3) ; \; \bar{e}_3 = \frac{1}{28}(\bar{f}_1+19\bar{f}_2-7\bar{f}_3) .$$

De vectoren $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ en $\bar{f}_3$ zijn volgens het gegeven stelsel resp. gelijk aan (2,5-3), (1,-1,2) en (3,-2,1). Substitutie in de rechterleden van het gevonden resultaat levert inderdaad de drie gegeven basisvectoren van R_3 op, Het is eenvoudig in te zien, dat de coëfficiëntenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ van het gegeven stelsel en de coëfficiëntenmatrix $$\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 11 & -7 \\ 1 & 19 & -7 \end{pmatrix}$$ van het gevonden resultaat elkaars inverse moeten zijn.

Opgaven

1. Schrijf de vectoren $\bar{e}_1=(1,0,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0)$ en $\bar{e}_3=(0,0,1)$ als lineaire combinaties van de vectoren $\bar{f}_1=(1,2,4)$, $\bar{f}_2=(-2,1,5)$ en $\bar{f}_3=(-1,-1,2)$.
2. Schrijf de vectoren $\bar{x}_1=(2,1,0)$, $\bar{x}_2=(3,1,1)$ en $\bar{x}_3=(2,-1,7)$ als lineaire combinaties van de vectoren $\bar{y}_1=(0,2,1)$, $\bar{y}_2=(-1,6,2)$ en $\bar{y}_3=(1,3,4)$.

Ook omgekeerd gevraagd $\overline{y}_1,\overline{y}_2$ en $\overline{y}_3$ uit te drukken in $\overline{x}_1,\overline{x}_2$ en $\overline{x}_3$.
Controleer Uw antwoorden.

3. Maak nog eens opgave 2, blz. 76.

Meetkundige toepassingen

1. Gevraagd in R_2 de oppervlakte van het parallelogram, opgespannen door de vectoren $\overline{a}=(a_1,a_2)$ en $\overline{b}=(b_1,b_2)$ uit te drukken in de kentallen dezer vectoren. $\overline{e}_1$ en $\overline{e}_2$ zijn de basisvectoren in R_2.
Voer hiertoe de functie in:

$$D(\overline{a},\overline{b})=\begin{cases} + \text{ oppervlakte parall. als draaiingsrichting van } \overline{a} \text{ naar } \overline{b} \text{ is in de richting van } \overline{e}_1 \text{ naar } \overline{e}_2. \\ - \text{ oppervlakte parall. als draaiingsrichting van } \overline{a} \text{ naar } \overline{b} \text{ is in de richting van } \overline{e}_2 \text{ naar } \overline{e}_1 \end{cases}$$ [1)]

Deze functie heeft dan de volgende eigenschappen:

1) $D(\lambda\overline{a},\overline{b})=\lambda D(\overline{a},\overline{b})$

2) $D(\overline{a},\overline{b}) = -D(\overline{b},\overline{a})$

3) $D(\overline{a},\overline{b}+\overline{c})= D(\overline{a},\overline{b})+D(\overline{a},\overline{c})$

4) $D(\overline{a},\overline{b}) \neq 0$ als $\overline{a}$ en $\overline{b}$ lineair onafhankelijk.

Uit eigenschap 2) volgt $D(\overline{a},\overline{a})=-D(\overline{a},\overline{a})$, dus $D(\overline{a},\overline{a})=0$.
Verder i.v.m. 1) als $\overline{a}$ en $\overline{b}$ lineair afhankelijk, stel $\overline{a}=\lambda\overline{b}$: $D(\overline{a},\overline{b})=D(\lambda\overline{b},\overline{b})=\lambda D(\overline{b},\overline{b})=0$.
Dus i.v.m. 4): $D(\overline{a},\overline{b})$ is dan en slechts dan 0 als $\overline{a}$ en $\overline{b}$ lineair afhankelijk.
Als $\overline{e}_1$ en $\overline{e}_2$ de basisvectoren voorstellen in R_2, geldt: $\overline{a}=a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2$ en $\overline{b}=b_1\overline{e}_1+b_2\overline{e}_2$, zodat:

$$D(\overline{a},\overline{b})=D(a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2,b_1\overline{e}_1+b_2\overline{e}_2) \overset{\text{i.v.m. } 3)}{=} a_1b_2D(\overline{e}_1,\overline{e}_2)+a_2b_1D(\overline{e}_2,\overline{e}_1)=$$
$$(a_1b_2-a_2b_1)D(\overline{e}_1,\overline{e}_2)= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} D(\overline{e}_1,\overline{e}_2) .$$

Indien we de oppervlaktegrondmaat $D(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ gelijkstellen aan 1, is de gevraagde parallelogramoppervlakte t.o.v. de basis $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ dus gelijk aan de absolute waarde van de deter-

----

1) De hoek waarover gedraaid moet worden dient $\leq 180^\circ$ te zijn.

minant $D(\overline{a},\overline{b})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Bij een andere basis, die ook grondmaat 1 heeft, krijgen we dezelfde waarde.

Analoog kunnen we bewijzen, dat in R_3 de inhoud van het parallelopipedum, opgespannen door de drie vectoren $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ en $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$ t.o.v. de basis $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3$ gelijk is aan $\pm$ de determinantwaarde:

$$D(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

, als de grondmaat $D(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)=1$, en wel met het + teken als de orientatie van $\overline{a},\overline{b}$ en $\overline{c}$ overeenstemt met die van $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ en $\overline{e}_3$, anders met het - teken.
Ook hier geldt, dat de determinant bij een andere basis dezelfde waarde houdt, als de grondmaat maar weer 1 is.
In verband met het voorgaande zou het begrip determinant ook kunnen worden gedefinieerd als een oppervlakte (2x2-determinant) of inhoud (3x3-determinant, etc.). Algemeen zoeken we dan in een R_n naar een functie $D(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)$, die aan analoge axioma's voldoet als boven de eigenschappen 1) t/m 4). Indien zulk een functie bestaat en eenduidig is, noemen we deze een nxn-determinant en interpreteren wij hem als een georienteerd volume. Men kan bewijzen, dat als $\overline{a}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ voor $i=1,\ldots,n$, en $D(\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n)=1$, de gezochte functie $D(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)$ gedefinieerd is en noodzakelijk gelijk is aan:

$$D(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

, met het rechterlid de betekenis van formule (7.8).
We kunnen ook zeggen, dat de gestelde axioma's en $D(\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n)=1$ het begrip determinant volledig karakteriseren. De determinant heeft op alle bases dezelfde waarde,

als de oppervlaktegrondmaat der bases maar 1 is.

Opgaven:

1. Gegeven zijn in R_2 de 3 punten $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ en $C=(c_1,c_2)$.
I stelt de oppervlakte voor van driehoek OAB; J stelt de oppervlakte voor van driehoek ABC. Bewijs, dat I en J resp. gelijk zijn aan de determinanten:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ in absolute waarde.}$$

2. Gegeven zijn in R_3 de 4 punten $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$ en $D=(d_1,d_2,d_3)$. I en J stellen de inhoud voor van de viervlakken OABC resp. ABCD. Bewijs, dat I en J resp. gelijk zijn aan de determinanten:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ in absolute waarde.}$$

3. Bepaal de inhoud van het viervlak, opgespannen door de vectoren:

1^o. $\bar{a}=(1,4,5)$, $\bar{b}=(-1,-1,1)$, $\bar{c}=(3,1,5)$.

2^o. $\bar{a}=(2,3,-1)$, $\bar{b}=(1,-1,2)$, $\bar{c}=(-2,10-11)$.

4. Bepaal de inhoud van het viervlak, gevormd door de punten:

1^o. $A=(1,1,0)$, $B=(0,0,2)$, $C=(2,0,2)$, $D=(-2,-1,1)$.

2^o. $A=(4,15,2)$, $B=(-4,34,-4)$, $C=(2,15,4)$, $D=(-2,17,-2)$.

3^o. $A=(1,-3,2)$, $B=(-12,2,3)$, $C=(2,-2,1)$, $D=(4,6,-5)$.

5. Bereken de volgende determinant en geef een meetkundige interpretatie van het antwoord:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ \frac{1}{2}(b_1+c_1) & \frac{1}{2}(b_2+c_2) & 1 \\ \frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1) & \frac{1}{3}(a_2+b_2+c_2) & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Bewijs de gelijkheid, gegeven in opgave 4 blz.132 door de determinanten te interpreteren als inhouden.

--.--

2. a) Gevraagd in R_2 de vergelijking van de rechte lijn l door $P(p_1,p_2)$ en $Q(q_1,q_2)$. $(P \neq Q)$.

Dan moet voor een punt $X=(x_1,x_2)$ op l gelden:

$$0=\begin{vmatrix} q_1-p_1 & x_1-p_1 \\ q_2-p_2 & x_2-p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & q_1-p_1 & x_1-p_1 \\ p_2 & q_2-p_2 & x_2-p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{vmatrix} .$$

De vergelijking

(7.28) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \end{vmatrix} =0$ is de vergelijking van de gevraagde lijn door P en Q.

Het is immers de vergelijking van een rechte (lineaire vergelijking!), waaraan $(x_1,x_2)=(p_1,p_2)$ en $(x_1,x_2)=(q_1,q_2)$ voldoet (det. heeft bij substitutie 2 gelijke kolommen).

b) Uit het bovenstaande volgt ook direct de voorwaarde, opdat drie punten $P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$, $R(r_1,r_2)$ op één rechte liggen. Deze luidt:

(7.29) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} =0.$

We kunnen dit ook als volgt afleiden. Stel $a_1x_1+a_2x_2+a_o=0$ is de vergelijking van een rechte. Aan deze vergelijking moet worden voldaan bij substitutie van: $(x_1,x_2)=(p_1,p_2)$, $(x_1,x_2)=(q_1,q_2)$ en $(x_1,x_2)=(r_1,r_2)$. De vergelijking is naar a_1,a_2,a_o oplosbaar[1)] als de gevormde coëfficiëntenmatrix een determinant heeft gelijk aan 0, en dit geeft juist de vergelijking (7.29). We kunnen ook zgn. homogene coördinaten invoeren: $X=(x_o,x_1,x_2)$, dwz. vervang x_1 door $\frac{x_1}{x_o}$ en x_2 door $\frac{x_2}{x_o}$.

De vergelijking van een rechte wordt dan homogeen in

1) niet alle a's gelijk aan 0

$x_o, x_1, x_2 : a_o x_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$. Aan deze vergelijking moet worden voldoen door $(x_o, x_1, x_2) = (p_o, p_1, p_2)$ en $(x_o, x_1, x_2) = (q_o, q_1, q_2)$. Er ontstaat een homogeen stelsel, dat voor (a_o, a_1, a_2) een andere dan de nuloplossing toelaat als de coëfficiëntendeterminant gelijk aan nul:

$$\begin{vmatrix} p_o & q_o & r_o \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.30)$$

Door hierin $p_o = q_o = r_o = 1$ te stellen ontstaat (7.29).

c) Volkomen duaal hier tegenover staat de voorwaarde voor drie lijnen (l_1): $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_o = 0$; (l_2): $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_o = 0$; (l_3): $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_o = 0$ door één (eigenlijk) punt. Volgens (7.30) luidt deze:

$$\begin{vmatrix} a_o & b_o & c_o \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.31)$$

Dit betekent ook, als we uitgaan van 2 snijdende lijnen l_1 en l_2: $l_3 = \lambda l_1 + \mu l_2$, (de vergelijking van de lijnenwaaier bepaald door l_1 en l_2, vergelijk § 1, (1.24)).

d) Uit (7.30) volgt, dat de vergelijking van de rechte lijn l, bepaald door een punt $P(p_1, p_2)$ en richting $\bar{a} = (a_1, a_2)$ (d.w.z. door het oneigenlijke punt met homogene coördinaten $(0, a_1, a_2)$) gegeven wordt door de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a_1 & p_1 & x_1 \\ a_2 & p_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.32)$$

e) Uit (7.29) volgt nog, dat P en Q met de oorsprong O(0,0) op één rechte liggen als $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & 0 \\ p_2 & q_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ of

$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0$, hetgeen, zoals ook het geval moet zijn, niets anders betekent, dan dat de vectoren $\bar{p} = (p_1, p_2)$ en $\bar{q} = (q_1, q_2)$

dezelfde drager hebben. (Twee vectoren $\overline{a}=(a_1,a_2)$ en $\overline{b}=(b_1,b_2)$ hebben dezelfde drager als

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0).$$

3. Analoge resultaten in R_3:

a) Vergelijking van het pl. vlak door drie vrijgelegen punten $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$ en $R=(r_1,r_2,r_3)$:

$$(7.33)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(zie (7.28))}$$

b) Vier punten $P(p_1,p_2,p_3)$, $Q(q_1,q_2,q_3)$, $R(r_1,r_2,r_3)$ en $S(s_1,s_2,s_3)$ liggen in één plat vlak als

$$(7.34)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} =0 \;. \qquad \text{(zie (7.29))}$$

c) Vier vlakken

$$(\alpha_1):\; a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_o= 0$$
$$(\alpha_2):\; b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_o= 0$$
$$(\alpha_3):\; c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_o= 0$$
$$(\alpha_4):\; d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_o= 0$$

gaan door 1 punt als (zie (7.31):

$$(7.35)\qquad \begin{vmatrix} a_o & b_o & c_o & d_o \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} =0.$$

($\longrightarrow$ vlakkenschoof, bepaald door drie vrijgelegen vlakken α_1,α_2 en α_3: $\alpha_4=\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2+\nu\alpha_3$).

d) De vergelijking van het vlak bepaald door $P(p_1,p_2,p_3)$ en de twee richtingen $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ en $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ luidt:

$$(7.36)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & p_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(zie (7.32))}$$

e) Uit (7.34) volgt, dat P,Q en R met O in één plat vlak liggen als

$$(7.37)\quad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen, zoals ook het geval moet zijn, niets anders betekent, dat $\overline{r}=(r_1,r_2,r_3)$ een lineaire combinatie is van de twee vectoren $\overline{p}=(p_1,p_2,p_3)$ en $\overline{q}=(q_1,q_2,q_3)$, als we deze verschillend van drager onderstellen.
(Drie richtingen $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$ (door O) in één plat vlak als:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.).$$

Opgaven

1. Bewijs, met behulp van determinanten, dat de punten $A=(3,-4)$, $B=(2,-2)$ en $C=(-4,10)$ op een rechte lijn liggen.

2. Bewijs, met behulp van determinanten, dat de volgende 4 vlakken door één punt gaan:
$x_1+x_2-x_3=0$, $2x_1+3x_2-x_3=1$, $3x_1-4x_2-2x_3=1$ en $x_1-x_3=0$.

3. Bewijs, met behulp van determinanten, dat de volgende 4 punten in één plat vlak liggen:
$A=(0,0,1)$, $B=(5,-2,0)$, $C=(4,0,-1)$, $D=(1,-2,2)$.

----

4. Vectorproduct in R_3

Zij $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ en $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ twee lineair onafhankelijke vectoren in R_3. De vergelijking van het vlak door 0 en deze vectoren , het door $\bar{a}$ en $\bar{b}$ opgespannen vlak, wordt i.v.m. (7.37) voorgesteld door de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} =0 \text{ of } (a_2b_3-a_3b_2)x_1+(a_3b_1-a_1b_3)x_2+(a_1b_2-a_2b_1)x_3=0.$$

(ontwikkeling naar de 1^e kolom)

Volgens stelling 2.2 staat de vector

$$(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

loodrecht op dit vlak. We noemen deze vector het <u>vectorproduct</u> $\bar{a}\times\bar{b}$.

Wat is de lengte van deze vector? We merken op, dat de determinant

$$D(\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b})= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2b_3-a_3b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3b_1-a_1b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{vmatrix} = (a_2\ b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+ +(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

(ontwikkeling naar de laatste kolom)

positief is, en in waarde gelijk aan het kwadraat van de lengte van $\bar{a}\times\bar{b}$. Uit het positief zijn blijkt, dat de orientatie van $\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b}$, die van $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ is. Verder heeft het parallelopipedum, dat wordt opgespannen door $\bar{a},\bar{b}$ en de daarop loodrechte $\bar{a}\times\bar{b}$ de inhoud $|\bar{a}\times\bar{b}|^2$, dus

$|\bar{a}\times\bar{b}|^2=|\bar{a}\times\bar{b}|$. oppervlakte (parall.) opgespannen door $\bar{a}$ en $\bar{b}$, zodat:

$|\bar{a}\times\bar{b}|=$ oppervlakte parallelogram $= |\bar{a}|.|\bar{b}|.\ \sin\varphi(\bar{a},\bar{b})$, waarin $\varphi(0<\varphi<180^0)$ de hoek tussen de vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ is.

Hiermee is bewezen:

<u>Stelling 7.26</u> Het vectorproduct van $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ en $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ in R_3, dat gedefinieerd is door

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

is een <u>vector</u>,[1] die

[1] Als $\bar{a}$ en $\bar{b}$ lineair afhankelijk, dan $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$. (Bewijs dit)

1^o. loodrecht staat op $\bar{a}$ en $\bar{b}$;

2^o. met $\bar{a}$ en $\bar{b}$ is georienteerd als $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;

3^o. in lengte gelijk is aan de oppervlakte van het door $\bar{a}$ en $\bar{b}$ opgespannen parallelogram .

<u>Vb</u>.1. $(1,0,0)\times(0,1,0)=(0,0,1)$
$(1,0,0)\times(0,0,1)=-(0,1,0)$
$(1,0,0)\times(1,0,0)=(0,0,0)$.

2. De momentvector $\bar{m}$ t.o.v. de oorsprong van een kracht $\bar{k}$, die werkt in een punt $A=\bar{a}$ wordt gedefinieerd door $\bar{m}=\bar{a}\times\bar{k}$. Deze momentvector heeft lengte $|\bar{a}|.|\bar{k}|.\sin\varphi$ en dit is juist het product van de lengte van $\bar{k}$ en de afstand van 0 tot de werklijn van $\bar{k}$.

Opm. Het vectorproduct $\bar{a}\times\bar{b}$ van $\bar{a}$ en $\bar{b}$ (ook wel het <u>uitwendig product</u> van $\bar{a}$ en $\bar{b}$ genoemd) is een <u>vector</u>. Het inwendig product $(\bar{a},\bar{b})$ (of scalair product) is een getal! (zie blz. 70).

<u>Opgaven</u>

1. Bewijs de volgende eigenschappen van het vectorproduct:

a) $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$.

b) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$.

c) $(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})=D(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

d) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a},\bar{c}).\bar{b}-(\bar{a},\bar{b}).\bar{c}$.

2. Bewijs, dat uit 1. c) volgt:

$(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{b},\bar{c}\times\bar{a})=(\bar{c},\bar{a}\times\bar{b})= -(\bar{a},\bar{c}\times\bar{b})=-(\bar{b},\bar{a}\times\bar{c})= -(\bar{c},\bar{b}\times\bar{a})$.

3. Bewijs, dat uit 1 a) en 1 d) volgt:

$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})= -\bar{a}\times(\bar{c}\times\bar{b})= -(\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{a}$.

4. Bewijs, dat:

$(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}\times\bar{d})=(\bar{c},\bar{d}\times(\bar{a}\times\bar{b}))=$

$=(\bar{c},(\bar{d},\bar{b})\bar{a}-(\bar{d},\bar{a})\bar{b})=(\bar{a},\bar{c})(\bar{b},\bar{d})-(\bar{b},\bar{c})(\bar{a},\bar{d})$.

Elementaire matrixtransformaties

We definieren 6 typen van operaties op een matrix A, die we zullen noemen <u>elementaire transformaties</u>. Hieronder verstaan we de volgende transformaties:

1. Verwisseling van twee rijen (kolommen) van A.
2. Optelling van een (met een factor vermenigvuldigde) rij (kolom)vector van A bij een andere rij (kolom)vector.
3. Vermenigvuldiging van een rij (kolom)vector van A met een factor $\neq 0$.

Zoals we gezien hebben in § 6 laten deze elementaire transformaties de rang van een matrix invariant.

<u>Def</u>. Een matrix A heet <u>gelijkwaardig</u> (of <u>equivalent</u>) met een matrix B als A in B getransformeerd kan worden door een eindig aantal achter elkaar uitgevoerde elementaire transformaties. Notatie: $A \sim B$.

<u>Stelling 7.27</u>

a) Voor elke matrix A geldt $A \sim A$.

b) Als $A \sim B \rightarrow B \sim A$.

c) Als $A \sim B$ en $B \sim C \rightarrow A \sim C$.

<u>Bewijs</u>: a) en c) zijn direct duidelijk. Om b) te bewijzen hebben we slechts aan te tonen, dat elke elementaire transformatie T te niet gedaan kan worden door toepassing van een elementaire transformatie T^{-1}, de inverse van T. Bijv. is de inverse van de transformatie, die twee rijen verwisselt, de transformatie, die dezelfde verwisselingen uitvoert. Als T de transformatie is, die k maal de j^e rijvector optelt bij de i^e, dan bestaat de inverse transformatie T^{-1} uit de optelling van -k maal de j^e rijvector bij de i^e. Als T de transformatie is die een rijvector vermenigvuldigt met een factor $k \neq 0$, dan is T^{-1} de transformatie, die dezelfde rijvector met k^{-1} vermenigvuldigt.

Als A nu wordt getransformeerd in B door achtereenvolgens de transformaties T_1, T_2..., T_m uit te voeren, dan voeren de elementaire transformaties T_m^{-1}, T_{m-1}^{-1},..., T_1^{-1} in deze volgorde uitgevoerd, blijkbaar B in A over, zodat dus b) geldt.

De drie eigenschappen a), b) en c) van stelling 7.27 heten resp. de reflexieve, de symmetrische en de transitieve wet. Iedere betrekking, gedefinieerd voor een stelsel getallen of voor andere mathematische grootheden, die zowel reflexief, symmetrisch als transitief is, heet een equivalentie-relatie. De eenvoudigste equivalentie-relatie is de gelijkheidsrelatie, doch er zijn vele andere. Gelijkwaardigheid van matrices is volgens de voorgaande stelling een equivalentie-relatie. Er zijn ook tal van voorbeelden van relaties, die geen equivalentie-relaties zijn, o.a. $\geqslant$, $\leqslant$, ondeelbaarheid van getallen, etc.

Vb. Een matrix A heet congruent met een matrix B, als er een niet-singuliere matrix P bestaat, zodanig dat $PAP^T=B$. Te bewijzen, dat dit congruentie-begrip voor matrices een equivalentie-relatie is.

Bewijs: a) $IAI^T=A$ (I= eenheidsmatrix).

b) Uit $PAP^T=B$ volgt, daar P niet-singulier is en dus een inverse P^{-1} bezit : $A=P^{-1}B(P^T)^{-1} = P^{-1}B(P^{-1})^T$ (zie opg. 3, blz. 77).

c) Uit $PAP^T=B$ en $QBQ^T=C$ volgt: $QPAP^TQ^T=C$ of $(QP)A(QP)^T=C$ (i.v.m. stelling 5.1, blz. 71). Als P en Q beide niet-singulier zijn, is QP dat ook (stelling 7.16, blz. 121).

In § 6 is de rang van een matrix systematisch bepaald door schoonvegen van rijen en/of kolommen. Het principe hierbij was de matrix door toepassing van de elementaire transformaties en schrapping van nulrijen en nulkolommen, te transformeren in een matrix van eenvoudige gedaante. Indien we de nulrijen en nulkolommen, die tijdens de bewerkingen ontstaan, niet schrappen, is volgens § 5 iedere (m,n)-matrix van de rang r door toepassing van de elementaire transformaties over te voeren in een matrix B van de volgende gedaante:

$$(7.38)\qquad B=\begin{array}{l}\;\;\overbrace{}^{r}\\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}r\\ \\ \\ \\ \end{array},$$

eveneens bestaande uit m rijen en n kolommen met de eerste r elementen in de "hoofddiagonaal" (gevormd door de elementen b_{11}, b_{22},....) gelijk aan 1; alle andere elementen van B zijn gelijk aan 0. Deze matrix B heet de <u>canonische vorm</u> van A, welke dus eenduidig bepaald is. Kennen we van een matrix de canonische vorm, dan geeft het aantal enen in de "hoofddiagonaal" juist de rang van de matrix aan.

<u>Vb</u>.1. De canonische vorm van de matrix op blz. 95 onderaan, die de rang 3 heeft, is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. De canonische vorm van een niet-singuliere matrix van orde n is I_n (blz. 71).

Uit het voorgaande volgt direct de volgende stelling:

<u>Stelling 7.28</u> Twee matrices zijn dan en slechts dan gelijkwaardig, als ze dezelfde canonische vorm hebben (d.w.z. als ze van hetzelfde type zijn en dezelfde rang hebben).

Voor de elementaire transformaties van een matrix A geldt de volgende belangrijke stelling:

<u>Stelling 7.29</u> Iedere elementaire transformatie van een matrix A kan verkregen worden door A te vermenigvuldigen met een niet-singuliere matrix.

<u>Bewijs</u>: Onderstel de matrix A van het type (m,n).

a) Laat E_r een vierkante matrix van de orde r voorstellen, die uit I_r ontstaat door verwisseling van de i^e en de j^e rij.

De matrix E_m A is dan de matrix, die uit A ontstaat door verwisseling van de i^e en de j^e rij; AE_n is de matrix, die uit A ontstaat bij verwisseling van de i^e en de j^e kolom. De matrices E_m en E_n zijn niet-singulier. Verwisseling van 2 rijen (kolommen) van A komt dus tot stand door links (rechts) vermenigvuldiging van A met $E_m(E_n)$. (transformatie type 1, blz.160)

b) Laat F_r een vierkante matrix van de orde r voorstellen met alle elementen van de hoofddiagonaal gelijk aan 1, het element in de i^e en de j^e kolom ($i \neq j$) gelijk aan k en alle andere elementen gelijk aan 0.

De matrix F_mA is dan de matrix, die uit A ontstaat door optelling van k maal de j^e rij van A bij de i^e; AF_n is de matrix, die uit A ontstaat door optelling van k maal de i^e kolom van A bij de j^e. De matrices F_m en F_n zijn niet-singulier. Iedere elementaire transformatie van het type 2 (blz. 160) kan dus worden verkregen door links (rechts) vermenigvuldiging van de matrix met een niet-singuliere matrix.

c) Laat G_r een vierkante matrix van de orde r voorstellen met alle elementen van de hoofddiagonaal gelijk aan 1, uitgezonderd het element in de i^e rij en de i^e kolom, dat gelijk is aan k; de elementen buiten de hoofddiagonaal van G_r zijn alle 0.

De matrix G_mA is dan de matrix, die uit A ontstaat door vermenigvuldiging van de i^e rij met k, AG_n is de matrix, die uit A ontstaat door vermenigvuldiging van de i^e kolom met k. Als $k \neq 0$ zijn G_m en G_n niet-singulier. Iedere elementaire transformatie van het type 3 kan dus worden verkregen door links (rechts) vermenigvuldiging van de matrix met een niet-singuliere matrix.

Hiermede is het bewijs geleverd.

Opg. Bewijs, dat een elementaire transformatie van het type 1 (blz. 160) door herhaald toepassen van elementaire transformaties van het type 2 en 3 kan worden verkregen.

Aangezien het product van twee niet-singuliere matrices weer niet-singulier is, volgt uit stelling 7.29:

<u>Stelling 7.30</u> Is A een willekeurige matrix, dan bestaan er niet-singuliere matrices P en Q, zodat PAQ=A', waarin A' de canonische vorm van A is.

We merken op, dat de matrices P en Q in voorgaande stelling niet eenduidig bepaald zijn. Is bijv. R een niet-singuliere matrix, waarbij geldt $A'R=RA'$, dan geldt: $(R^{-1}P)A(QR)= R^{-1}A'R=R^{-1}RA'=A'$. Als A niet-singulier is, is $A'=I$ (Vb. 2, blz. 162), zodat dan $(R^{-1}P)A(QR)=A'$ voor iedere niet-singuliere matrix R.

<u>Opg</u>. 1. Als $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, bepaal dan 2 niet-singuliere matrices P en Q zodanig, dat PAQ de canonische vorm van A is. Wat is de rang van A?

2. Als A een symmetrische matrix is van de orde n, te bewijzen, dat er een niet-singuliere matrix P moet bestaan met PAP^T de canonische vorm van A.

<u>Definitie</u> Onder een <u>elementaire matrix</u> verstaan we iedere matrix van het type E, F of G (bij G is $k \neq 0$), omschreven in het bewijs van stelling 7.29.

<u>Opm</u>. De elementaire matrices zijn dus niet-singulier.

<u>Stelling 7.31</u> Een matrix A is dan en slechts dan niet-singulier als A geschreven kan worden als het product van elementaire matrices.

<u>Bewijs</u>: Als A niet-singulier is, is zijn canonische vorm een eenheidsmatrix I. Volgens stelling 7.27 b) kan I in A getransformeerd worden door elementaire transformaties, en dus geldt A=PIQ=PQ, waarin P en Q elk producten voorstellen van elementaire matrices. Omdat het product van niet-singuliere matrices (zoals de elementaire matrices) weer niet-singulier geldt ook het omgekeerde.

Uit stelling 7.31 volgt direct:

Stelling 7.32 Een matrix A is dan en slechts dan gelijkwaardig met een matrix B, als er niet-singuliere matrices M en N bestaan, zódat MAN=B.

Toepassing bij de bepaling van de inverse A^{-1} van een niet-singuliere matrix A:

Zoals bekend kan door toepassing van elementaire operaties op de rijen van een niet-singuliere matrix A deze omgezet worden in een eenheidsmatrix I. Stellen we de bijbehorende elementaire matrices in volgorde van toepassing voor door $P_1, P_2, \ldots, P_s$, dan geldt $(P_s \ldots P_2\, P_1\, I)\, A = I$ of $P_s \ldots P_2\, P_1\, I = A^{-1}$ m.a.w. A^{-1} wordt verkregen door dezelfde bewerkingen, die op de rijen van A worden uitgevoerd om tot I te komen, in dezelfde volgorde toe te passen op de rijen van I (van overeenkomstige orde).
Uiteraard geldt hetzelfde (maar dan met rechts vermenigvuldiging van A met elementaire matrices) als de bewerkingen alleen op de kolommen van A worden toegepast.
Het is om uit I tot A^{-1} te komen in het algemeen niet toegestaan de bewerkingen dan eens op de rijen en dan weer eens op de kolommen toe te passen!

Vb. Bepaal de inverse A^{-1} van $A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 1 \\ 9 & -26 & 2 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$.

Opl.

$$\begin{array}{ccc}
A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 1 \\ 9 & -26 & 2 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix} & & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\downarrow & \begin{array}{l} 1^e \text{ rij} - 3^e \text{ rij} \\ 2^e \text{ rij} - 2 \times 3^e \text{ rij} \end{array} & \downarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\downarrow & \begin{array}{l} 2^e \text{ rij} - 1^e \text{rij} \\ 3^e \text{ rij} - 4 \times 1^e \text{rij} \end{array} & \downarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
\downarrow & 1^e \text{ rij} + 3 \times 2^e \text{ rij} & \downarrow \\
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Inderdaad geldt $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. (controleer dit)

Opg.

1. Bepaal in bovenstaand voorbeeld A^{-1} ook door toepassing van de elementaire transformaties op de kolommen.
2. Bepaal volgens de bovengeschetste methode de inverse van de volgende matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Controleer Uw antwoorden.

-.-

Productstelling voor determinanten

Eerst behandelen we een speciaal geval:

Stelling 7.33 Als B een elementaire matrix is, en A een willekeurige vierkante matrix, beide van orde n, dan geldt:

$$|AB| = |BA| = |A|\,|B|.$$

Bewijs: a) Is B van het type E (blz.162), dan is $|B| = -1$ en $|AB| = |BA| = -|A| = |A|\,|F|$, daar vermenigvuldiging van A met B verwisseling geeft van twee rijen of kolommen van A, tengevolge waarvan de determinant in z'n tegengestelde overgaat (stelling 7.4). De stelling geldt dus in dit geval.

b) Als B van het type F is, geldt $|B| = 1$ en vermenigvuldiging van A met B heeft tot gevolg, dat bij een rij of kolom van A een met een getal vermenigvuldigde rij of kolom wordt opgeteld, hetgeen de waarde van de determinant invariant laat (stelling 7.6), dus: $|AB| = |BA| = |A| = |A|\,|B|$. Ook hier geldt dus de stelling.

c) Is B van het type G, dan is $|B| = k$ en vermenigvuldiging van A met B heeft tot gevolg, dat een rij of kolom van A met k wordt vermenigvuldigd. In verband met stelling 7.2 geldt dus: $|AB| = |BA| = k|A| = |B|\,|A|$, en dus ook de stelling.

Opm. Uit stelling 7.27 b) volgt, dat elke matrix A te schrijven is in de vorm:

$$A = C_s \ldots C_1 A' D_1 \ldots D_t,$$

waarin de C's en D's elementaire matrices zijn en A' de canonische vorm van A. Is A een vierkante n-matrix, dan geeft herhaalde toepassing van stelling 7.33:

$$|A|=|C_s|\dots|C_1||A'||D_1|\dots|D_t|.$$

Daar elke C en elke D een determinant heeft $\neq 0$, geldt $|A|\neq 0$ dan en slechts dan als $|A'|\neq 0$. Nu geldt ook $|A'|\neq 0$ dan en slechts dan als de rang r van A gelijk is aan n (orde van A) dus dan en slechts dan als A niet-singulier is, zodat bewezen is, dat een matrix dan en slechts dan niet-singulier is, als $|A|\neq 0$, zoals ook reeds eerder is aangetoond (stelling 7.12).

Nu de algemene <u>productstelling voor determinanten</u>:

<u>Stelling 7.34</u> Als A en B vierkante matrices zijn van de n^e orde, dan geldt $|AB|=|A||B|$.

<u>Bewijs</u>: a) Als A en B beide singulier zijn, is AB dat eveneens (stelling 7.16). Dan geldt: $|A|=0$, $|B|=0$ en $|AB|=0$, dus $|AB|=|A|\,|B|$.

b) Zijn A en B niet beide singulier, bijv. A niet-singulier, dan geldt volgens stelling 7.31: $A=C_1\,C_2\dots C_r$, waarin $C_1, C_2\dots, C_r$ elementaire matrices zijn.

Herhaale toepassing van stelling 7.33 geeft dan

$$|AB|=|C_1\,C_2\dots C_rB|=|C_1|\,|C_2|\dots|C_r|\;|B|=|C_1\,C_2\dots C_r|B=|A|\;|B|.$$

De productstelling bevestigt het feit, dat het product van twee vierkante n-matrices dan en slechts dan niet-singulier is, als beide factoren niet-singulier zijn (stelling 7.16). We zien ook, dat als A niet-singulier is, wegens $A\,A^{-1}=I$: $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.
Heeft een matrix dus een inverse, dan is de determinant van de inverse matrix gelijk aan het omgekeerde van de determinant van de matrix.

Ter illustratie geven we nog een geheel ander bewijs voor de productstelling: Beschouw de determinant D van de orde 2n, die gevormd is uit de volgende vier vakken: in het vak links boven staat de matrix A, rechts onder de matrix B, voor welke matrices we de productstelling willen aantonen; verder staat in D rechts boven een vierkante nulmatrix van de n^e orde en links onder de tegengestelde van de eenheidsmatrix van de n^e orde, dus :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & O & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \\ O & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Iedere term uit D is (ook wat betreft het teken, waarmee hij voorkomt in D) gelijk aan het product van een term uit $|A|$ en een term uit $|B|$, beide van het juiste teken voorzien; omgekeerd komt elk dezer producten in D voor. Hieruit volgt $D = |A||B|$.
Vermenigvuldig nu de $(n+1)^e$ rij van D met a_{11}, de $(n+2)^e$ met a_{12}, enz. en tel ze daarna bij de eerste rij op. Vermenigvuldig vervolgens de $(n+1)^e$ rij met a_{21}, de $(n+2)^e$ met a_{22} enz. en tel ze daarna bij de 2^e rij op, enz. Zo doorgaande bereiken we, dat links boven een vierkante nulmatrix komt te staan, terwijl rechts boven de matrix C = AB verschijnt. Nu geldt dus:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & & O & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \\ O & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Breng de eerste n kolommen in bovenstaande rangschikking geheel naar rechts. Dit heeft tot gevolg $n \times n = n^2$ verwisselingen, zodat

$D=(-1)^n|C|\,(-1)^{n^2} = (-1)^{n(n+1)}|C| = |C|$, daar $n(n+1)$ even is.
Dus $D = |A||B| = |C| = |AB|$ q.e.d.

Toepassing:

Vb. 1. Bewijs, dat
$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & (a_1+b_2)^2 & (a_1+b_3)^2 & (a_1+b_4)^2 \\ (a_2+b_1)^2 & (a_2+b_2)^2 & (a_2+b_3)^2 & (a_2+b_4)^2 \\ (a_3+b_1)^2 & (a_3+b_2)^2 & (a_3+b_3)^2 & (a_3+b_4)^2 \\ (a_4+b_1)^2 & (a_4+b_2)^2 & (a_4+b_3)^2 & (a_4+b_4)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bewijs:
$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 & 0 \\ a_3^2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_4^2 & a_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & 2b_4 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Uitwerking van het linkerlid geeft juist de determinant, waarvan we het nulzijn wilden aantonen.

Vb. 2. Bewijs, dat
$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha+\alpha') & \sin(\alpha+\beta') & \sin(\alpha+\gamma') \\ \sin(\beta+\alpha') & \sin(\beta+\beta') & \sin(\beta+\gamma') \\ \sin(\gamma+\alpha') & \sin(\gamma+\beta') & \sin(\gamma+\gamma') \end{vmatrix} = 0.$$

Bewijs:
$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \sin\alpha' & \sin\beta' & \sin\gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Uitwerking van het linkerlid geeft juist de determinant, waarvan we het nulzijn wilden aantonen.

Opg. 1. Bewijs, dat
$$\begin{vmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2.$$

(Pas een dergelijke methode als boven bij de voorbeelden en maak gebruik van opg. 5, blz. 126).

2. Maak nog eens opgave 5, blz. 132.

De productstelling voor determinanten kan worden uitgebreid tot rechthoekige matrices. Is A een (m,n)-matrix en B een (n,m)-matrix, dan is AB een (m,m)-matrix. Het heeft dan zin te vragen naar $|AB|$. We onderscheiden de gevallen $m > n$ en $m < n$:

1. Is $m > n$, dan verandert AB niet, wanneer wij A aan de rechterkant met $(m-n)$ nulkolommen, en B aan de onderkant met $(m-n)$ nulrijen tot (m,m)-matrices aanvullen. De determinanten van de zo gevormde (m,m)-matrices zijn nul, en dus geldt volgens de productstelling: $|AB| = 0$ (vergelijk beide bovenstaande voorbeelden). Dus:

<u>Stelling 7.35</u> Is A een (m,n)-matrix en B een (n,m)-matrix en is $m > n$, dan is $|AB| = 0$.

Opm. De juistheid van deze stelling kan ook direct worden ingezien door op te merken, dat de rijen van de productmatrix AB lineaire combinaties zijn van de rijen van B. AB bevat dus hoogstens n lineair onafhankelijke vectoren (zie opm. 2°, blz. 105). Daar $n < m$ is volgens stelling 7.14 dus $|AB| = 0$.

2. Voor het geval $m < n$ kunnen we de volgende stelling uitspreken:

<u>Stelling 7.36</u> Is A een (m,n)-matrix en B een (n,m)-matrix en is $m < n$, dan is $|AB|$ gelijk aan de som van de producten van de overeenkomstige onderdeterminanten uit A en B (d.i. een som van $\binom{n}{m}$ producten).

Hierbij spreken wij af, dat onderdeterminanten van de m^e orde van de (m,n)-matrix A en de (n,m)-matrix B <u>overeenkomstig</u> zullen worden genoemd, de kolommen van A, waaruit de eerste onderdeterminant is gevormd, dezelfde nummers dragen als de rijen van B, waaruit de tweede onderdeterminant is gevormd.

Het bewijs van deze stelling zullen we niet geven. We lichten de zaak alleen toe aan een voorbeeld.

Vb. Bewijs de identiteit van Lagrange:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) \equiv (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2+$$

$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2+\dots+(a_1b_n-a_nb_1)^2+\dots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2.$$

$$\text{of: } \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

Bewijs: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ b_1 & b_2 \dots b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \end{pmatrix}$.

Toepassing van stelling 7.36 geeft, dat de determinant van het linkerlid gelijk is aan $\sum\limits_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_k - a_k b_i)^2$, zodat

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_k - a_k b_i)^2 .$$

Het rechterlid is de som van $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)$ termen.

Opg. Bewijs de identiteit van Lagrange ook zonder gebruikmaking van determinanten.

Uit de identiteit van Lagrange volgt voor reële getallen a_i, b_i direct de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (zie opg. 18 Analyse en verder ook blz. 23):

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) .$$

Het gelijkteken geldt dan en slechts dan als de vectoren $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ en $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ dezelfde dragers hebben.

- . -

Nog enkele beschouwingen over het oplossen van lineaire stelsels van n vergelijkingen met n onbekenden voor grote n; bepaling van de inverse en de determinant van grote orde-matrices.

Beschouw het lineaire stelsel:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \quad (i=1,\dots,n) \quad ; \; A = (a_{ij}) .$$

De exacte oplossing van (1) is als $|A| \neq 0$ volgens Cramer direct neer te schrijven : $x = A^{-1} b$ of:

$$(2)\quad x_j = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{matrix} \right| \Bigg/ \left| \begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{matrix} \right| .$$

(2) is echter, zoals vroeger reeds opgemerkt voor grote stelsels, onbruikbaar voor practische berekening. De reden hiervan ligt in het feit, dat de berekening van een determinant van de n^e orde uit zijn algebraïsche definitie, $n!\,(n-1)$ vermenigvuldigingen vergt, en de berekening van alle x_j uit (2) dus $(n+1)\,n!\,(n-1)$ vermenigvuldigingen en n delingen, voor grote n dus totaal een zeer groot aantal bewerkingen. Er zijn weliswaar andere methoden voor determinant-berekening, die minder vermenigvuldigingen vereisen, doch dit aantal is dan toch nog van de orde $\sum n^2 \cong \frac{1}{3} n^3$, zodat de gehele oplossing $\sim \frac{1}{3} n^4$ vermenigvuldigingen vereist (ondersteld is, ook in hetgeen onder volgt, dat het rekenwerk voor een vermenigvuldiging en een deling ongeveer gelijk is, en dat $n \gg 1$).
Zuiniger is de volgende methode:
Beschouw in (1) de 1^e en de j^e vergelijking. Vermenigvuldig de eerste vergelijking met a_{j1}, de laatste met a_{11} en trek de verkregen vergelijkingen dan van elkaar af. Resultaat:

$$(a_{11}a_{j2}-a_{j1}a_{12})x_2+(a_{11}a_{j3}-a_{j1}a_{13})x_3+\ldots+(a_{11}a_{jn}-a_{j1}a_{1n})x_n=$$

$$=a_{11}b_j-a_{j1}b_1 \quad \text{of}$$

$$l_{j2}^{(1)}x_2 + l_{j3}^{(1)}x_3 + \ldots + l_{jn}^{(1)}x_n = b_j^{(1)} .$$

Herhaal dit proces voor alle j met $1 < j \leq n$. Er ontstaan $(n-1)$ vergelijkingen in $(n-1)$ onbekenden $x_2,\ldots,x_n$, waarvoor nodig zijn geweest $2n(n-1)$ vermenigvuldigingen. Het proces zetten we op $x_2,\ldots x_n$ voort totdat ook $x_2,\ldots, x_{n-1}$ zijn geelimineerd.
Resultaat van dit zgn. eliminatie-proces van Gauss is het volgende stelsel vergelijkingen:

$$(3)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad l_{22}^{(1)}x_2+l_{23}^{(1)}x_3+\ldots+l_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad l_{33}^{(2)}x_3+\ldots+l_{3n}^{(2)}x_n=b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\quad l_{nn}^{(n-1)}x_n=b_n^{(n-1)} \end{array}\right. .$$

Het totale aantal vermenigvuldigingen bedraagt:

$$2\left[n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+2.1\right] = \frac{2}{3}\,n(n^2-1) \quad \text{(Bewijs dit laatste).}$$

Voor de bepaling van de oplossing van (1) gaan we terugsubstitueren en lossen eerst x_n op uit de laatste vergelijking van (3). Substitutie van de gevonden waarde voor x_n in de $(n-1)^e$ vergelijking van (3) geeft x_{n-1}; x_n en x_{n-1} gesubstitueerd in de $(n-2)^e$ vergelijking van (3) geven x_{n-2}, enz. Dit proces vereist $\frac{1}{2}\,n(n-1)$ vermenigvuldigingen en n delingen, zodat het totale aantal van deze bewerkingen bedraagt $\frac{2}{3}\,n(n^2-1) + \frac{1}{2}n(n-1)+n$, dus van de orde $\frac{2}{3}\,n^3$ voor grote n. Zijn de coëfficiënten a_{ij} van A bijv. niet al te grote gehele getallen, dan zou het gehele eliminatie-proces zonder afronding kunnen geschieden. Bestaat ook de oplossing uit gehele getallen, dan worden deze op deze wijze exact verkregen. In andere gevallen, gaat i.h.a. de afronding een rol spelen; het proces dient dan verfijnd te worden. We zouden dan bijv. als volgt te werk kunnen gaan:

1. Bepaal in absolute waarde het grootste element a_{IJ} van de matrix A.
2. Vermenigvuldig de I^e vergelijking achtereenvolgens met alle quotiënten a_{iJ}/a_{IJ} $(i=1,\ldots,n, \neq I)$ en trek de andere vergelijkingen er telkens vanaf.

Het resultaat van deze operaties is een stelsel van (n-1) vergelijkingen, waarin x_J niet meer voorkomt. Ditzelfde "discriminatie-eliminatie"-proces wordt op het nieuwe stelsel van (n-1) vergelijkingen toegepast enz., totdat weer een "driehoekig" stelsel ontstaat van het type (3). Terugsubstitutie geeft dan de oplossing. Als delers van de quotiënten, waarmee we vermenigvuldigen zijn de grootste a_{ij} gekozen van de coëfficiënten-matrices. Dit is gedaan om te bereiken, dat bij elke eliminatiestap de eventueel optredende afrondings-fouten zo klein mogelijk worden gehouden. De overheersende elementen a_{IJ} noemt men de <u>pivots</u>, het proces: <u>elimineren met pivots-zoeken</u>.

Het aantal vermenigvuldigingen wordt ongeveer met de helft gereduceerd, zodat voor grote n het proces van de orde $\frac{1}{3}\,n^3$ is.

Speciaal ook voor handberekening is de laatste methode bijzonder geschikt, omdat dan vlug kan worden overzien, waar de pivot zich bevindt. We kunnen ook zodanig elimineren, dat ook in de bovendriehoek van A allemaal nullen worden gevormd (<u>Gauss-Jordan proces</u>).

Op de plaats van het rechterlid ontstaat dan juist de oplossing. Dit is dezelfde methode, die in § 6 uitvoerig is beschreven (schoonveeg-procedé). Het aantal vermenigvuldigingen is hier van de orde $\sum_{k=1}^{n} nk$ d.i voor grote n van de orde $\frac{1}{2}n^3$ (bewijs dit).

Een derde methode staat bekend als het zgn. Choleski-proces (of LU (of LDU)-decompositie).
Het is gebaseerd op reductie van A tot een product van een onderdriehoeksmatrix L (lower) en een bovendriehoeksmatrix U (upper).[1]
Dus A = LU en Ax = LUx = b. We lossen dan eerst op Ly = b en daarna Ux = y door terugsubstitutie twee maal uit te voeren. De coëfficiënten l_{ij} en u_{ij} van L en U worden verkregen door vorming van het product LU en gelijkstelling van de elementen hiervan aan die van A in de volgorde $a_{11}\ldots a_{1n}\ a_{21}\ldots a_{2n}\ldots\ldots a_{n1}\ldots a_{nn}$.

Het voorgaande kan ook dienen voor de bepaling van de inverse A^{-1} van een niet-singuliere matrix A. De inverse matrix A^{-1} kan bijv. van belang zijn als we het stelsel (1) voor diverse rechterleden b willen oplossen. De oplossing kan wegens $x = A^{-1}b$ lineair in b worden uitgedrukt en gemakkelijker worden berekend als A^{-1} bekend is.

Lossen we (1) op met als rechterlid achtereenvolgens de n eenheidsvectoren $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, dan vormen de oplossingen van de n stelsels juist de n kolommen van A^{-1}. We lossen dan immers op de matrixvergelijking AX=I. De determinanten-methode voor het bepalen van A^{-1} (blz. 130) geeft

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11}/|A| & \ldots & m_{n1}/|A| \\ \vdots & & \\ m_{1n}/|A| & \ldots & m_{nn}/|A| \end{pmatrix}$$

, met m_{ij} de minor van A bij het element a_{ij} (vergel. (7.21) .

Deze methode is voor grote n in de practijk weer onbruikbaar.
Ook hier kunnen we Gauss-eliminatie toepassen, op dezelfde wijze zoals boven is geschetst. Als we dan bij het eliminatie-proces niet één rechterlid meetransformeren, doch alle n rechterleden $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, m.a.w. als we naast A rechts de eenheidsmatrix I plaatsen en het

---

1) De diagonaalelementen van L worden veelal gelijk aan 1 gekozen.

eliminatieproces dus toepassen op de matrix (A,I), en als de eliminatie zich ook uitstrekt over de bovendriehoek van A (Gauss-Jordan proces) met reductie van A dus tot de eenheidsmatrix, dan ontstaat op de plaats van de oorspronkelijke I rechts van de oorspronkelijke A juist A^{-1}, geheel overeenkomstig de methode geschetst op blz.165 . Dit proces is danweer van de orde $\frac{1}{2}n^3$ voor grote n.
De Choleski-methode, toegepast voor matrix-inversie, reduceert zoals boven eerst A tot het product LU. Dan geldt wegens $AA^{-1}=I$ dus $LUA^{-1}=I$, zodat $A^{-1}=U^{-1}L^{-1}$. Uit L (bijv. met elementen 1 op de hoofddiagonaal) berekenen we eerst L^{-1} uit $LL^{-1}= I$ door gelijkstelling van coëfficiënten van linker-en rechterlid. Op analoge wijze berekenen we U^{-1}. Vermenigvuldiging van L^{-1} en U^{-1} geeft dan de gevraagde A^{-1}.

Zijn we geïnteresseerd in de determinant van een matrix van grote orde, dan merken we op, dat we deze met behulp van het op de matrix toe te passen eliminatie-proces van Gauss kunnen berekenen door het product te nemen van de pivots, evt.met verwisseling van teken. Bij de Choleski-methode is de determinant gelijk aan het product van de diagonaal-elementen van L en U. Heeft L allemaal enen op de hoofddiagonaal, dan is de determinant dus gelijk aan het product van de diagonaal-elementen van U.

Gemengde Opgaven

1) U is de deelruimte van een R_3, die wordt opgespannen door de vectoren $\vec{a}=(1,-3,2)$ en $\vec{b}=(-1,2,1)$.
Aan welke relatie voldoen de kentallen van een vector $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, die in U ligt.

2) Bepaal de matrix van de homogene lineaire transformatie, waarbij de volgende correspondentie geldt:
$(1,0,1)\longrightarrow(5,-1,2)$, $(1,1,0)\longrightarrow(5,3,4)$, $(1,2,3)\longrightarrow(1,-5,-2)$.
Heeft deze transformatie een inverse?

3) Bepaal een lineair onafhankelijke basis voor de deelruimte van R_4, die bestaat uit alle vectoren $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, waarvan de kentallen voldoen aan de homogeen lineaire vergelijking: $x_1-2x_2+3x_3=0$.

4) Een deelruimte U van R_3 wordt bepaald door de vectoren $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, waarvoor geldt $x_1+x_2+x_3=0$.
a) Als de vector $\vec{v}=(2,-2,t)$ tot U behoort, bepaal dan t.
b) Een deelruimte V van R_3 wordt opgespannen door de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}=(2,2,5)$.
Bepaal de doorsnede $U\cap V$.

5) In R_3 zijn de deelruimten U en V gegeven door:
U: $x+2y-z=0$, V: $3x-y+2z=0$. Bepaal een lineair onafhankelijke basis voor de doorsnede $U\cap V$.

6) Gegeven de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$ met de eigenschappen:
1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vormen een lineair onafhankelijk stelsel.
2. $\vec{d}$ is lineair afhankelijk van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, zowel als van $\vec{a}$ en $\vec{c}$.
Bewijs, dat $\vec{d}$ lineair afhankelijk is van $\vec{a}$. Kan $\vec{a}$ gelijk zijn aan de nulvector, als $\vec{d}$ dat niet is?

7) Gegeven de lineair onafhankelijke vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. U is de vectorruimte, opgespannen door de basis $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$.
1. Bepaal de dimensie van U.
2. Ga na of de volgende vectoren tot U behoren: $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

3. De vectoren (p,q,r) met de eigenschap, dat $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ tot U behoort, bepalen een vectorruimte V. Geef een (lineair onafh.) basis voor V.

8) Gegeven zijn de vier vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$ met de volgende eigenschappen:
1. $\vec{a}$ is lineair afhankelijk van $\vec{b}$ en $\vec{c}$, evenals van $\vec{c}$ en $\vec{d}$.
2. $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$ vormen een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs, dat $\vec{a}$ lineair afhankelijk is van $\vec{c}$.

9) Gevraagd wordt in R_3 de vergelijking van het vlak, waarvan de parameter-voorstelling luidt:

$$\vec{x}=(0,1,2)+\lambda(1,-1,0)+\mu(0,1,1).$$

Geef omgekeerd in R_3 een parametervoorstelling van het vlak $x-2y+3z=4$.

10) Gegeven is:
1. $\vec{a}$ is lineair afhankelijk van $\vec{b}$ en $\vec{c}$.
2. $\vec{b}$ is lineair onafhankelijk van $\vec{a}$ en $\vec{c}$.
3. $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Bewijs, dat $\vec{c}$ lineair afhankelijk is van $\vec{a}$.

11) Beschouw in R_3 de rechte lijn l, gegeven door de vergelijking

$$\vec{x}=(1,2,3)+\lambda(0,1,1).$$

Gevraagd:
1. De snijpunten van l met de drie coördinaatvlakken.
2. De parametervoorstelling van het vlak V door l evenwijdig aan de lijn met richtingsvector (1,0,-2).
3. De coördinatenvergelijking van V.

12) Gegeven zijn in R_4 met rechthoekig Cartesisch coördinatenstelsel de vectoren: $\vec{a}=(10,5,15,0)$ en $\vec{b}=(1,2,2,4)$.
1. Bepaal de vector $\vec{v}$ van de gedaante $\vec{v}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$, die de kleinste lengte heeft (λ =parameter).
2. Hoe groot is de hoek tussen $\vec{b}$ en $\vec{v}$?

13) Gegeven zijn in R_3 met rechthoekig Cartesisch coördinaten-stelsel OXYZ de rechte l:
$\vec{x}=(-1,14,-3)+\lambda(-1,2,-2)$ en het punt $P=(-1,2,3)$.
1. Bepaal op l het punt Q zó, dat $PQ \perp l$.
2. Bepaal de afstand van P tot l en een parametervoorstelling van de loodlijn PQ op l.

14) Bepaal in R_3 met rechthoekig Cartesisch coördinatenstelsel OXYZ de hoek tussen de vlakken U en V met U: $2x+2y-z=5$ en V: vlak door $(1,3,-3)$ en $(4,0,0)$, evenwijdig aan de z-as.

15) Bepaal in R_3 met rechthoekig Cartesisch coördinatenstelsel OXYZ de hoek tussen de lijn l en het vlak V:
l: $\vec{x}=(2,2,10)+\lambda(1,0,7)$.
V: $x+y+2z-5=0$.
Geef ook V in parametervorm. Bepaal het snijpunt van l en V.

16) Gegeven is in R_3 het vlak $U: 2x+3y-4z=1$ en het punt $P(2,1,1)$.
Onderzoek of
1. $Q(1,3,2)$ aan dezelfde kant van U ligt als P.
2. Evenzo voor $R(1,-1,1)$ i.p.v. Q.

17) Gegeven zijn de vier rechten in een R_3:
$\vec{x}=\lambda(0,1,0)$; $\vec{x}=(1,0,0)+\lambda(0,0,1)$; $\vec{x}=(0,1,1)+\lambda(1,0,0)$;
$\vec{x}=(2,2,0)+\lambda(-1,0,1)$.
Bepaal de rechte, die deze vier rechten alle snijdt.
Bepaal ook de coördinaten van de 4 snijpunten.

18) d_n is een determinant van de n^e orde met algemeen element a_{ik}, zodanig, dat $a_{ii}=1$ $(i=1,\dots,n)$; $a_{i,i+1}=i^2$, $a_{i+1,i}=-1$ $(i=1,\dots,n-1)$; alle andere elementen zijn nul.
Bewijs, dat voor $n>2$ de volgende recursieformule geldt:

$$d_n=d_{n-1}+(n-1)^2 d_{n-2}.$$

Welke functie is d_n van n?

19) d_n is een determinant van de n^e orde met algemeen element

a_{ik}, zodanig, dat $a_{11}=\cos\varphi$; $a_{ii}=2\cos\varphi$ $(i=2,\dots,n)$; $a_{i,i+1}=1$, $a_{i+1,i}=1$ $(i=1,\dots,n-1)$; alle andere elementen zijn nul.
Bewijs, dat voor $n>2$ de volgende recursieformule geldt:

$$d_n=2\cos\varphi\ d_{n-1}-d_{n-2}.$$

Welke functie is d_n van n en φ?

20) Bereken de determinant van de n^e orde, met algemeen element a_{ik}, waarvoor geldt:
$a_{ii}=1+x^2$ $(i=1,\dots,n)$; $a_{ij}=x$ voor $|i-j|=1$ voor $i=1,\dots,n$, $(1\leqslant j\leqslant n)$; alle elementen buiten de hoofddiagonaal en de twee nevendiagonalen zijn nul.

21) Druk in een R_3 de vectoren $\vec{x}_1=(2,1,0)$, $\vec{x}_2=(3,1,1)$ en $\vec{x}_3=(2,-1,7)$ uit als lineaire continaties van $\vec{y}_1=(0,2,1)$, $\vec{y}_2=(-1,6,2)$ en $\vec{y}_3=(1,3,4)$. Evenzo omgekeerd: de vectoren $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{y}_3$ in $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ en $\vec{x}_3$.

22) Gegeven is dat de ruimte, opgespannen door de oplossingsvectoren van het stelsel:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + bx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

de dimensie 2 heeft. Bepaal a en b.
Geef een (lineaire onafh.) basis voor de oplossingsruimte van het stelsel.

23) Geef in determinantvorm de voorwaarde, die nodig en voldoende is, opdat de volgende drie rechten in het platte vlak door één punt gaan:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

24) Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}.$$

Is voor iedere waarde van m het stelsel oplosbaar?

25) Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + dx_3 = 1 \\ x_1 + cx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

en beschouw alle gevallen, die zich kunnen voldoen.

26) Gegeven is, dat het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + 2y + az + 2 = 0 \\ 5x + by - 3z + c = 0 \\ x + 3y + 2z + d = 0 \end{cases}$$

tenminste twee oplossingen bezit, die lineair onafhankelijk zijn.
Bereken a,b,c en d en geef alle oplossingen van het stelsel voor de gevonden waarden van deze grootheden. (examen sept.'62)

27) Bepaal voor alle reële waarden a en b de oplossing(en) van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 2 = 0 \\ 2x + ay + 8z - a = 0 \\ bx + y + 2z - 2b = 0 \end{cases}.$$

28) Bepaal voor alle reële waarden van a de oplossing(en) van de stelsels:

$$\begin{cases} x + y - 2a - 2 = 0 \\ 2ax + y - 3 = 0 \\ (3a-1)x + ay - 7a + 2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} ax + y + z - 1 = 0 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az - a^2 = 0 \end{cases}.$$

Evenzo voor reële a,b en c de oplossing(en) van het stelsel:

$$\begin{cases} ax + by + cz = b+c \\ bx + cy + az = c+a \\ cx + ay + bz = a+b \end{cases} .$$

29) In de drie dimensionale ruimte met rechthoekig Cartesisch coördinatenstelsel OXYZ zijn de volgende twee rechten gegeven:

l: $3x + y - 1 = 0, \quad 2x - y + z = 1$;

m: $15z = -p \quad , \quad 4x - 12y + 5z = p$.

1. Onderzoek voor welke waarde(n) van p de rechten l en m elkaar snijden.
2. Bepaal voor de onder 1. bedoelde waarde(n) van p één der hoeken, die door l en m worden ingesloten.

30) Onderzoek voor alle reële waarden van a en b de oplossingen van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y - 8z - b = 0 \\ x - 3y + 7z + b = 0 \\ 4x + y - az - 1 = 0 \end{cases} ,$$

en geef de eventueel aanwezige oplossing(en) aan.

31) Toon aan, dat het stelsel:

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3t = -4z \\ -x - 2y + 2t = z \\ x - y + t = z \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$$

een oplossing bezit, die niet de nul-oplossing is.

Bepaal verder de waarde(n) van p, waarvoor het stelsel:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 3 \\ -x - 2y - z = -2 \\ x - y - z = -1 \\ 6p^3x + 6p^2y - 10pz = 9 \end{cases}$$

een oplossing bezit.

32) Gegeven is, dat het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + ax_3 = 4 \end{cases}$$

tenminste twee oplossingen heeft. Bepaal a en de oplossingen.

33) Elimineer x, y en z uit de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \\ x + dy + d^2z = d^4 \end{cases}.$$

34) Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + (3a+1)y + az - 2 = 0 \\ (a+2)x + (a+1)y - z - 5 = 0 \\ x + (a+2)y - (a+1)z - a - 1 = 0 \\ (a+1)x + (3-a)y - a = 0 \end{cases}.$$

Gevraagd a zo te bepalen, dat het stelsel oplossingen heeft. Bepaal alle oplossingen voor die waarde(n) van a.

35) Bepaal de waarde(n) van a, waarvoor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x + 2ay - 3z = 6 \\ 2ax + 3z - 7a = 0 \\ 2x + y + 3az + 1 = 17a \end{cases}$$

meer dan één oplossing heeft. Geef bij de gevonden a de oplossing (bijv. in vectorvorm).
Idem voor het stelsel:

$$\begin{cases} ax + 2y - z - 1 = 0 \\ x + (a+1)y + z - 2 = 0 \\ x - y + (a+2)z + 1 - a = 0 \end{cases}.$$

36) Gegeven is, dat het stelsel:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = -1 \\ x - 3y - 4z + 7 = 0 \\ (a+1)x - 5y - 3z - 4 = 0 \\ 6x + by - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

oplosbaar is. Bepaal a, b en de oplossingen.

37) a) Bepaal in de vergelijking $y=mx$ m zo, dat in R_2 (met rechth. Cartesisch coördinatenstelsel) de door $y=mx$ voorgestelde rechte twee samenvallende punten met de cirkel $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ gemeen heeft. Wat is de meetkundige betekenis? Behandel dit vraagstuk bij voorbeeld (ook) op de volgende wijze: de cirkel zal van de lijn een koorde afsnijden, wier lengte een functie van m is. Bepaal die functie en vindt met behulp daarvan de raaklijn uit O aan de cirkel.

b) Bewijs, dat de raakkoorden van een cirkel, behorende bij de punten van een rechte geheel buiten deze cirkel, in een R_2 een lijnenwaaier vormen.

38) Bewijs, dat in R_2 (met rechth. Cartesisch coördinatenstelsel) de ellips $x^2+2y^2=a^2$ en de parabool $x^2=2py$ elkaar loodrecht snijden.

39) Herleid tot z'n eenvoudigste vorm de volgende determinant:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} .$$

40) Gegeven is de matrix:

$$M=\begin{pmatrix} a-b & b-c & c-b & b-a \\ b-c & c-b & b-a & a-b \\ c-b & b-a & a-b & b-c \\ b-a & a-b & b-c & c-b \end{pmatrix} .$$

Gevraagd te bewijzen:

1. det M = 0.

2. De minoren van alle elementen van M zijn gelijk.

Aan welke voorwaarden moeten de elementen van een vierkante matrix voldoen, opdat de minoren van alle elementen gelijk zijn?

§ 8. Beknopte theorie der eigenwaarden en eigenvectoren van matrices

1. Inleiding

In de lineaire algebra en de numerieke analyse speelt het probleem van de bepaling van eigenwaarden en eigenvectoren van matrices een zeer belangrijke rol. Het kan als volgt worden gedefinieerd. Zij gegeven een vierkante matrix A; gevraagd die waarden van λ, waarvoor het stelsel vergelijkingen:

$$A\,x = \lambda x \tag{8.1}$$

een niet triviale oplossing x bezit (dwz x $\neq$ nuloplossing).
De waarden van λ heten de eigenwaarden (eigenvalues, characteristic values (roots), latent roots) van A; de corresponderende vectoren x heten de eigenvectoren van A. Uit (8.1) volgt, dat iedere vector x bepaald is op willekeurige multiplicatieve constante na.
Dikwijls worden de eigenvectoren genormeerd op bijv. "lengte" 1 (dwz de som van de kwadraten van de kentallen van x is gelijk aan 1) of zó, dat het grootste element van de vector gelijk is aan 1.
Een vector x, die aan (8.1) voldoet, heet ook wel een eigenkolom van A.
We kunnen het probleem ook zo interpreteren, dat als A reëel van de n^e orde is, de reële eigenvectoren die vectoren $\neq$ nulvector in een R_n zijn, die door de bijbehorende lineaire transformatie A overgevoerd worden in een vector, die op een scalaire factor na gelijk is aan de oorspronkelijke vector. Deze factor heet de bij de eigenvector behorende eigenwaarde.

Opm. Het eigenwaardeprobleem komt ook wel voor in de vorm:

$$C\,x = \lambda B\,x \tag{8.2}$$

bij gegeven vierkante matrices C en B. Is B niet-singulier, dan is (8.2) aequivalent met $B^{-1}C\,x = \lambda x$ van de vorm (8.1).

Bij het bepalen van de oplossing van een stelsel simultane lineaire differentiaal vergelijkingen met constante coëfficiënten, heeft men met een eigenwaardeprobleem te maken. Is het stelsel b.v. van de 2^e orde, en bestaat het uit n vergelijkingen, dan kan het stelsel geschreven worden in de vorm

(8.3) $$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0,$$

waarin A,B en C ($n \times n$)-matrices en de punten differentiaties naar de onafhankelijke veranderlijke, zij t, voorstellen.
Het stelsel (8.3) is te herleiden tot 2n vergelijkingen, bij introductie van de nieuwe variabelen $\dot{x}=p$; (8.3) gaat dan over in de 2n vergelijkingen:

(8.4) $$\begin{cases} \dot{x}=p \\ A\dot{p}+Bp+Cx=0. \end{cases}$$

Volgens de theorie van de lineaire differentiaalvergelijkingen (Meulenbeld en Baart, deel II, § 102) is de oplossing van (8.4) een lineaire combinatie van oplossingen van het type:
$x=ae^{\lambda t}$, $p=be^{\lambda t}$, met $\lambda a=b$. Uit (8.4) en deze oplossingen volgt de relatie

(8.5) $$A\lambda b + Bb+Ca = 0 .$$

Gecombineerd met $\lambda a=b$ voert dit tot de matrixvergelijking:

(8.6) $$\lambda\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Stellen we de 2n-vector $\binom{a}{b}$ gelijk aan z, dan is (8.6) van de vorm $\lambda Pz=Qz$, aequivalent met (8.2).

Opg. Bewijs, dat de algemene oplossing van het stelsel de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_1 + x_2 = 0 \\ 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

voorgesteld kan worden door $\begin{cases} x_1 = a\,e^{3t} + 5\,b\,e^{-t} \\ x_2 = -a\,e^{3t} - b\,e^{-t} \end{cases}$.

Een ander probleem, dat aanleiding geeft tot een eigenwaardebepaling, is dat van de bepaling van de perioden van de vrije trillingen van een dynamisch systeem om een evenwichtstoestand.
De differentiaalvergelijking is van de vorm:

$$(8.7) \qquad A\ddot{x} = -Bx \qquad \text{(harmonische trilling).}$$

Zijn A en B positief definiete matrices (d.z. symmetrische matrices met uitsluitend reële positieve eigenwaarden), dan kan worden aangetoond, dat de oplossingen van (8.7) lineaire combinaties zijn van de oplossingen van de vorm $x=ye^{i\lambda t}$, met reële λ, die gesubstitueerd in (8.7), voldoen aan de vergelijking $A\lambda^2 y=By$ van het type (8.2).

2. Enkele eigenschappen en definities

Uit (8.1) volgt, dat de eigenwaarden λ van A de wortels zijn van de vergelijking

$$(8.8) \qquad |A-\lambda I| = 0,$$

want dan en slechts dan heeft (8.1) andere oplossingen dan de nuloplossing, als de determinant van de coëfficiëntenmatrix van (8.1), d.i. het linkerlid van (8.8), gelijk is aan nul.
Deze determinantenvergelijking heet de <u>karakteristieke vergelijking</u> van A (ook wel genaamd eigenwaardenvergelijking, seculaire vergelijking of S-vergelijking). Uitgeschreven, als $A=(a_{ij})$ een vierkante n-matrix:

$$(8.8)\text{ a)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Deze determinant heet de <u>karakteristieke determinant</u> *) van A. Het is de determinant van de coëfficiëntenmatrix van de op rechterlid 0 herleide eigenwaardevergelijking (8.1). De ontwikkeling van deze determinant is een veelterm van de n^e graad in λ, de <u>karakteristieke veelterm</u> van A:

$$(8.9) \qquad a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\dots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+(-)^n\lambda^n = 0.$$

----

*) Verwar dit begrip vooral niet met het onder dezelfde naam voorkomende begrip bij de theorie der lineaire vergelijkingen (blz. 141).

(8.9) heeft volgens de hoofdstelling van de algebra n wortels, de n eigenwaarden, die reëel of complex kunnen zijn, enkelvoudig of meervoudig. Het is eenvoudig in te zien, dat alleen de reële oplossingen voor λ bij een reële matrix A kunnen leiden tot reële eigenvectoren van (8.1).

Zoals reeds opgemerkt is een eigenvector op een factor na bepaald, indien ongenormeerd. Dit betekent, dat iedere eigenvector een deelruimte opspant van dimensie 1 in een n-dimensionale vectorruimte C_n (d.i. de verzameling van alle n-vectoren met complexe kentallen), invariant bij transformatie met matrix A.

Vb. Zij $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. De karakteristieke vergelijking, die bij A behoort, luidt: $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ of $(1-\lambda)^2+1=0$. Dit geeft de eigenwaarden $\lambda=1\pm i$.

Bij $\lambda=1+i$ vinden we de eigenvectoren uit $\begin{cases}-ix_1+x_2=0\\ -x_1-ix_2=0\end{cases}$.

De algemene oplossing hiervan is $x_1=t$, $x_2=it$. De invariante ééndimensionale deelruimte, die bij $\lambda=1+i$ behoort, wordt dus in een C_2 opgespannen door de eigenvector $(1,i)$. Evenzo behoort bij de eigenwaarde $\lambda=1-i$ in de C_2 een invariante één-dimensionale deelruimte, opgespannen door de eigenvector $(1,-i)$.

Zoals op blz.62 gedefinieerd, wordt de kern van een transformatie A gevormd uit alle vectoren van een R_n (of C_n), die door A overgevoerd worden in de nulvector. Als nu A een lineaire transformatie is met matrix A singulier, dan heeft A zeker een eigenwaarde, die gelijk is aan 0.

Iedere met deze eigenwaarde corresponderende eigenvector spant een invariante deelruimte op, die door A overgevoerd wordt in de nulvector. Dus als A singulier, spannen de lineair onafhankelijke eigenvectoren van A, die corresponderen met $\lambda=0$, tezamen met de nulvector, juist de kern van A op. Het is verder duidelijk, dat een lineaire transformatie dan en slechts dan een vector $\neq$ nulvector, invariant laat, als deze transformatie bij een matrix behoort, die een eigenwaarde bezit, die gelijk is aan 1.

Stelling 8.1. Bij verschillende eigenwaarden behoren lineair onafhankelijke eigenvectoren.

<u>Bewijs</u>: Laten we aannemen, dat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ twee aan twee verschillende eigenwaarden zijn van een vierkante matrix A van de n^e orde, dat x_1 een eigenvector is bij λ_1, x_2 een bij $\lambda_2, \ldots, x_m$ een bij λ_m behorend. Bewijs uit het ongerijmde: Stel, dat $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lineair afhankelijke vectoren zijn. Er is dan altijd een getal r te vinden $(1 \leqslant r < m)$, zó, dat $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ lineair afhankelijk, terwijl $x_1, x_2, \ldots, x_r$ lineair onafhankelijk. Laat nu de volgende relatie bestaan tussen $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$.

I: $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_{r+1}x_{r+1}=0$, met $(c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}) \neq$ nulvector.

Links vermenigvuldigen van I met A geeft volgens (8.1):

II: $c_1\lambda_1x_1+c_2\lambda_2x_2+\ldots+c_{r+1}\lambda_{r+1}x_{r+1}=0$.

Vermenigvuldig verder I met λ_{r+1} en trek het resultaat van II af. Er ontstaat:

III: $c_1(\lambda_1-\lambda_{r+1})x_1+c_2(\lambda_2-\lambda_{r+1})x_2+\ldots+c_r(\lambda_r-\lambda_{r+1})x_r=0$.

Daar $x_1, x_2, \ldots, x_r$ lineair onafhankelijk zijn en $\lambda_i \neq \lambda_{r+1}$ voor $i=1,2,\ldots r$, volgt uit III: $c_1=c_2=\ldots=c_r=0$. Doch dan is $c_{r+1} \neq 0$, hetgeen volgens I impliceert x_{r+1}=nulvector, hetgeen is buiten gesloten.

<u>Opgaven</u>

1) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Gegeven is de lineaire vectortransformatie $\vec{x}\,'=A\,\vec{x}$ met A de symmetrische matrix $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Bepaal de eigenvectoren.

   b) Toon aan, dat de twee stelsels eigenvectoren loodrecht op elkaar staan.

3) Bewijs, dat als A een niet-singuliere matrix is, de eigenwaarden van A^{-1} de inversen zijn van die van A.

4) Wat is de som en wat het product van de eigenwaarden van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wat is bij een vierkante matrix de relatie van de som en het product der eigenwaarden tot het spoor en de determinant van de matrix?

5) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$\begin{pmatrix} 50 & -252 & 240 \\ 29 & -154 & 150 \\ 21 & -114 & 112 \end{pmatrix}.$$

(Hint: de eigenwaarden van de matrix zijn geheel!)

6) Geef de karakteristieke vergelijking van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

aan, en bepaal met behulp hiervan een eigenwaarde van de matrix (examen 1961).

7) Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 4 & c \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Leid een voorwaarde voor de elementen a, b en c af, die nodig en voldoende is, opdat de matrix M een eigenwaarde 2 bezit.

b) Laat M een eigenwaarde 2 bezitten. Bewijs, dat dan de vector (2,-1,0) een eigenvector van M behorende bij de eigenwaarde 2 is, indien geldt: $2a-b-4=0$.

c) Bereken a,b en c als M een eigenwaarde 2 bezit en bovendien gegeven is, dat de vector (1,0,-1) een eigenvector van M is behorende bij een eigenwaarde $\neq 2$. (examen maart 1962).

3. Equivalentie

Volgens stelling 7.32 blz. 165 is een matrix A dan en slechts dan equivalent met een matrix B, als er niet-singuliere matrices M en N bestaan, zodanig, dat $B=MAN$. Een equivalentie in engere zin treedt op, als de matrices M en N zodanig gekozen kunnen worden, dat ze elkaars inverse zijn, dwz. als er niet-singuliere matrix P bestaat, zodat

$$B=P^{-1}\,A\,P \tag{8.10}$$

(en dus ook $A=Q^{-1}\,B\,Q$, als $P^{-1}=Q$).

In de eigenwaardetheorie speelt deze "speciale" equivalentie van matrices een zeer belangrijke rol. Spreken we in het vervolg over equivalentie, dan zullen we, tenzij anders vermeld, onderstellen deze speciale equivalentie te bedoelen. Ius:

Definitie: Een matrix B is equivalent met een matrix A, als er niet-singuliere matrix P bestaat, zó dat $B=P^{-1}A\,P$. De transformatie van A in $P^{-1}A\,P$ heet een equivalentie-transformatie (similarity transformation); $P^{-1}A\,P$ wordt wel de getransformeerde van A genoemd met betrekking tot de matrix P.

Opm. Op grond van deze definitie moeten A en B ingeval er van equivalentie sprake is vierkante matrices zijn van dezelfde orde (waarom?).

Stelling 8.2. Equivalentie van matrices is een "equivalentie-relatie" in de zin van § 7, blz. 161 (reflexief, symmetrisch en transitief) .

Bewijs: Neem $P=I$, dan is A equivalent met zich zelf, dus equivalentie reflexief. Voorts als $B=P^{-1}A\,P$, dan is $A=P\,BP^{-1}=Q^{-1}B\,Q$ als $Q=P^{-1}$, dus symmetrisch. Tenslotte geldt, als $B=P^{-1}A\,P$ en $C=R^{-1}B\,R$, dat

$C=R^{-1}(P^{-1}A\ P)R=(R^{-1}P^{-1})A(PR)=(PR)^{-1}A(PR)\ =S^{-1}A\ S$, als $S=PR$, waarmede de transitiviteit is aangetoond.

Opm. Op grond van de symmetrie in het equivalentie-begrip kunnen we zonder dubbelzinnigheid spreken van "equivalente matrices A en B".

Stelling 8.3. Equivalente matrices hebben gelijke determinant, dezelfde karakteristieke vergelijking (veelterm) en dezelfde eigenwaarden.

Bewijs: a) Als $B=P^{-1}AP$, dan geldt volgens de productstelling voor determinanten (blz. 167):

$$|B|=|P^{-1}|\,|A|\,|P|=|P^{-1}|\,|P|\,|A|=|P^{-1}P|\,|A|=|I|\,|A|=|A|.$$

b) $|A-\lambda I|=|P^{-1}(A-\lambda I)P|=|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}IP|=|P^{-1}AP-\lambda I|$.

A en $P^{-1}AP$ hebben dus dezelfde karakteristieke veelterm, dus dezelfde karakteristieke vergelijking, en dus ook

c) dezelfde eigenwaarden.

Opm. A en B behoeven niet noodzakelijk (en in het algemeen zelfs zeker niet) dezelfde eigenvectoren te bezitten, want als x een eigenvector is van een matrix A, behorende bij een eigenwaarde λ en P een willekeurige niet-singuliere matrix, dan is volgens (8.1): $Ax=\lambda x$, dus $(P^{-1}AP)P^{-1}x=P^{-1}A\ Ix=P^{-1}Ax=\lambda P^{-1}x$, zodat $P^{-1}x$ een eigenvector van $P^{-1}AP$ is behorende bij dezelfde eigenwaarde λ, als waartoe x behoort met betrekking tot de matrix A. Daar P een willekeurige niet-singuliere matrix is, treedt $P^{-1}x$ in het algemeen niet als eigenvector van A op.

Vb. Laat A de matrix zijn $\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, en P de matrix $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, dan is

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$$

Nu geldt inderdaad:

a) $|A|=|B|=-5$.

b) $\begin{vmatrix}-3-\lambda & 4\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)(-1-\lambda)-8=\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda+5)(\lambda-1)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -5-\lambda\end{vmatrix}$.

c) A en B hebben dezelfde eigenwaarden 1 en -5.

d) Een bij $\lambda=1$ behorende eigenvector van A is (1,1), idem bij $P^{-1}AP$: (1,0);

$$P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Een bij $\lambda=-5$ behorende eigenvector van A is (2,-1), idem bij $P^{-1}AP$: (0,1);

$$P^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Opg. Bewijs dat iedere matrix, die equivalent is met een diagonaalmatrix ook equivalent is met z'n getransponeerde (dezelfde eigenschap geldt zelfs voor iedere matrix, dus ook die, die niet equivalent zijn met een diagonaalmatrix (zgn defecte matrices, zie blz.200)).

4. Over eigenwaarden en eigenvectoren van matrices in samenhang met de equivalentie-transformatie; transformatie van matrices tot de diagonaalvorm en driehoeksvorm.

Het probleem, dat we zullen behandelen, betreft de transformatie (reductie) van een gegeven (vierkante) matrix A tot bijzondere matrices door middel van een equivalentie-transformatie. Is bijv. reductie van A tot een diagonaalmatrix (zoals in het voorbeeld boven) altijd mogelijk? Het zal blijken, dat dit niet bij elke matrix mogelijk is.

Onderstel eerst eens, dat A equivalent is met een diagonaalmatrix Λ, dus dat er niet-singuliere matrix S bestaat met $S^{-1}AS=\Lambda$. Volgens stelling 8.3 hebben A en Λ dan dezelfde eigenwaarden. De eigenwaarden van een diagonaalmatrix zijn juist de elementen van de hoofddiagonaal. Deze diagonaalelementen zijn dus juist de eigenwaarden van A. Dus:

<u>Stelling 8.4</u> Als een matrix A van de n^e orde equivalent is met een diagonaalmatrix Λ, dan is

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n\end{pmatrix},$$

waarin de diagonaalelementen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van A.

Uit $S^{-1}AS = \Lambda$ volgt $AS = S\Lambda$.
Laat $A=(a_{ij})$, $S=(s_{ij})$ zijn en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A, dus de diagonaalelementen van Λ. Dan geldt dus:

$$(8.11)\quad AS=S\Lambda = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 s_{11} & \lambda_2 s_{12} & \cdots & \lambda_n s_{1n} \\ \lambda_1 s_{21} & \lambda_2 s_{22} & \cdots & \lambda_n s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 s_{n1} & \lambda_2 s_{n2} & \cdots & \lambda_n s_{nn} \end{pmatrix} .$$

Als nu $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de n kolomvectoren van S zijn, zijn die van $S\Lambda$ volgens (8.11): $\lambda_1 S_1, \lambda_2 S_2, \ldots, \lambda_n S_n$; die van AS zijn $AS_1, AS_2, \ldots, AS_n$. Gelijkstelling geeft

$$(8.12)\qquad AS_i = \lambda_i S_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) .$$

Volgens (8.1) drukt (8.12) uit, dat de i^e kolom van S een eigenvector van A is, die correspondeert met de eigenwaarde λ_i.
Omgekeerd geldt, dat iedere matrix S, waarvan de i^e kolom een eigenvector van A is, die correspondeert met de eigenwaarde λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ voldoet aan de matrixvergelijking $AS=S\Lambda$ met Λ de diagonaalmatrix met diagonaalelementen gelijk aan de eigenwaarden λ_i. Is S niet-singulier, dus bestaat S uit n lineair onafhankelijke kolomvectoren, eigenvectoren van A, dan geldt dus $S^{-1}AS = \Lambda$, zodat A equivalent is met een diagonaalmatrix, m.a.w.

<u>Stelling 8.5</u> Een nodige en voldoende voorwaarde voor het equivalent zijn van een matrix A van de n^e orde met een diagonaalmatrix Λ, is dat A n lineair onafhankelijke eigenvectoren bezit. $S^{-1}AS$ is dan en slechts dan een diagonaalmatrix Λ als de kolomvectoren van S lineair onafhankelijke eigenvectoren van A zijn.

De diagonaalelementen van Λ zijn de eigenwaarden van A. Het i^e diagonaalelement van Λ is gelijk aan de eigenwaarde van A, die correspondeert met een eigenvector van A gelijk aan de i^e kolom van S.

Vb. 1) In vb. blz. 191 is $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix Λ als $S=P=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ en $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, en wel de diagonaalmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$. De eigenwaarden van A zijn 1 en -5, de diagonaalelementen van Λ . Volgens stelling 8.5 moeten de kolomvectoren van S: (-1,-1) en (-2,1) eigenvectoren van A zijn, resp. behorende bij $\lambda=1$ en $\lambda=-5$, zoals inderdaad ook het geval is.

Vb. 2) Reduceer de matrix $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ tot een diagonaalmatrix door middel van een equivalentie-transformatie.

Opl.: De eigenwaarden van A vinden we uit de karakteristieke vergelijking: $\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & -2\\ -5 & 3-\lambda & 2\\ -2 & 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ of

$\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-10=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$. De eigenwaarden van A zijn dus: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$.

Zoals direct is te verifiëren zijn de vectoren (2,1,4), (1,1,2) en (0,1,1) eigenvectoren van A resp. corresponderende met de eigenwaarden 1,2 en 5. Volgens stelling 8.5 zal de transformatie $S^{-1}AS$ met

$S=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, A reduceren tot de diagonaalmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

Controleer dit.

Uit de stellingen 8.1 en 8.5 volgt direct:

<u>Stelling 8.6</u> Als de eigenwaarden van een matrix A alle verschillend zijn (karakteristieke veelterm dus het product van ver-

schillende lineaire factoren, karakteristieke vergelijking dus enkelvoudige wortels), dan is A equivalent met een diagonaalmatrix.

Opm. Als de eigenwaarden van een matrix niet twee aan twee verschillend zijn, behoeft de matrix niet equivalent te zijn met een diagonaalmatrix.

De matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ bijv. heeft de tweevoudige eigenwaarde 0. De eigenvectoren zijn van de vorm $(t,-t)$. A bezit dus niet 2 lineaire onafhankelijke eigenvectoren, en kan dus volgens stelling 8.5 niet equivalent zijn met een diagonaalmatrix.

Heeft een matrix wel meervoudige eigenwaarden, en is hij zgn niet-defect (zie blz.200), dan is hij wel te diagonaliseren. Dit houdt verband met het feit, dat voor diagonalisering noodzakelijk en voldoende is dat het aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren, dat bij elke eigenwaarde behoort, gelijk is aan de multipliciteit van de betreffende eigenwaarde, (zie blz.200).

Beschouwen we i.p.v. A z'n getransponeerde A^T, dan zijn de eigenwaarden van A^T die waarden van λ, die voldoen aan $|A^T - \lambda I| = 0$. Daar $(A-\lambda I)^T = A^T - \lambda I$ en de determinant van een matrix gelijk is aan de determinant van z'n getransponeerde, hebben A en A^T dezelfde eigenwaarden. De eigenvectoren van A zijn echter in het algemeen verschillend van die van A^T.

Stel nu eens, dat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n onderling verschillende eigenwaarden zijn van A (en dus ook van A^T), dus $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$. Zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resp. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n eigenvectoren van A resp. A^T corresponderende met $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dan geldt voor $i=1,2,\ldots,n$ dus:

(8.13) $$A\, x_i = \lambda_i\, x_i$$ en

(8.14) $$A^T y_i = \lambda_i\, y_i \quad .$$

De getransponeerde vgl. van (8.13) luidt:

(8.15) $$x_i^T A^T = \lambda_i x_i^T \quad .$$

Men noemt y_i^T $(i=1,2,\ldots,n)$ veelal de <u>eigenrijen</u> van A die corresponderen met λ_i (resp. voor $i=1,2,\ldots,n$). Eigenkolommen (-rijen) van A^T zijn dus eigenrijen (-kolommen) van A.
Uit (8.14) volgt bij voorvermenigvuldiging met x_j^T:

(8.16) $$x_j^T A^T y_i = \lambda_i x_j^T y_i \quad .$$

Rechtsvermenigvuldiging van (8.15) met y_j geeft bij verwisseling van i en j:

(8.17) $$x_j^T A^T y_i = \lambda_j x_j^T y_i \quad .$$

Uit (8.16) en (8.17) volgt:

(8.18) $0=(\lambda_i - \lambda_j)x_j^T y_i$, zodat als $i \neq j$ de onderstelling $\lambda_i \neq \lambda_j$ leidt tot

(8.19) $$x_j^T y_i = 0 \qquad (i \neq j).$$

(8.19) drukt uit, dat de 2 stellen vectoren x_i $(i=1,\ldots,n)$ en y_j $(j=1,\ldots,n)$ zgn. <u>biorthogonaal</u> zijn. Als A bovendien <u>reëel-symmetrisch</u> is en dus geldt $A=A^T$, dan volgt uit (8.13) en (8.14), dat x_i en y_i langs dezelfde drager vallen, want zoals we straks zullen zien is bij een enkelvoudige eigenwaarde de bijbehorende eigenvector (op een factor na) bepaald.
Bij een reële symmetrische matrix geldt dus, dat eigenrijen tevens eigenkolommen zijn (en omgekeerd), terwijl

(8.20) $$x_i^T x_j = 0 \qquad (i \neq j). \quad \text{(dus } x_i \text{ en } x_j \text{ orthogonaal).}$$

Bovendien geldt, dat bij een <u>reële</u> symmetrische matrix de eigenwaarden ook <u>reëel</u> zijn, want als λ een niet-reële eigenwaarde is, is ook de toegevoegd complexe waarde $\bar{\lambda}$ een eigenwaarde, die dus verschilt van λ. Uit (8.20) volgt dan dat het scalaire product van de corresponderende eigenvectoren x_i, en $\bar{x}_i$ ($\bar{x}_i$ is toegev. complex van x_i) gelijk is aan 0. Doch dan moet 0 gelijk zijn aan de som van de kwadraten van de reële en de imaginaire gedeelten van de kentallen van x_i. x_i is dan noodzakelijk een nulvector, in strijd met de definitie van eigenvector.

Zij nu $Y=\begin{pmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \cdots \\ y_n^T \end{pmatrix}$ de (n,n)-matrix met rijen gelijk aan de n eigenrijen y_i^T van A (wel of niet-symmetrisch) met verschillende eigenwaarden, en $X=(x_1\ x_2\ \ldots x_n)$ de (n,n)-matrix met kolommen gelijk aan de n eigenkolommen x_i van A, dan geldt volgens (8.14) getransponeerd,

$$(8.21) \qquad Y\,A = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^T \\ \lambda_2 y_2^T \\ \cdots \\ \lambda_n y_n^T \end{pmatrix} .$$

Stel nu, dat voor zekere i zou gelden $x_i^T y_i=0$, dan is van deze aanname, in verband met (8.19) het gevolg, dat de vergelijking $X^T u=0$ een oplossing $u=y_i$ ongelijk de nulvector moet bezitten, dus dat X singulier is. Volgens stelling 8.1 evenwel zijn wegens $\lambda_i \neq \lambda_j$ voor $i \neq j$, de n eigenvectoren x_i lineair onafhankelijk, zodat (volgens stelling 7.13) X niet-singulier is. Uit deze tegenspraak volgt dus $x_i^T\ y_i \neq 0$. Normeer nu x_i en y_i zo, dat

$$(8.22) \qquad x_i^T y_i = 1 \quad , \text{ voor } i=1,2,\ldots,n,$$

dan geldt dus volgens (8.19), (8.21) en (8.22):

$$(8.23) \qquad Y\,A\,X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda \ . \ \text{(diagonaalmatrix)}.$$

Dit resultaat is in overeenstemming met stelling 8.5, omdat volgens (8.19) en (8.22) Y en X na normering, elkaars inverse zijn.
We hebben dus de volgende stelling afgeleid:

<u>Stelling 8.7</u> Zij A een vierkante matrix met verschillende eigenwaarden. De vierkante matrix X met kolommen gelijk aan eigenkolommen van A, heeft een inverse Y, waarvan de rijen eigenrijen zijn van A.
De i^e kolom x_i van X is gelijk aan een eigenkolom van

A, die correspondeert met een eigenwaarde λ_i van A, waarbij een eigenrij behoort die gelijk is aan de i^e rijvector y_i^T van Y.

Opm. Heeft A de eigenschap, dat bij elke eigenvector het bijbehorende aantal lineair onafh. eigenvectoren gelijk is aan de multipliciteit van de eigenwaarde, dan geldt de stelling eveneens (zie vb. 3, blz.202).

Als A reëel en symmetrisch is, en dus, zoals op blz.196 reeds opgemerkt, eigenkolommen tevens eigenrijen zijn, geldt na geschikte normering: $Y=X^{-1}=X^T$. X is dan dus een orthogonale matrix (zie blz.73, 75). Er bestaat dus bij een reëel symmetrische matrix A (zoals we later zullen zien, ook indien A meervoudige eigenwaarden heeft) altijd een orthogonale matrix P, die A transformeert in een diagonaalmatrix, dus wegens (8.23) $P^{-1}AP=\Lambda$ (vergelijk syll. Num.Wiskunde II, blz.CR 39, formule 7.8.10),of $P^TAP=\Lambda$, P orthogonaal.

Zoals bij stelling 8.6 werd opgemerkt is niet elke matrix equivalent met een diagonaalmatrix. Wel echter geldt, dat er steeds equivalentie is met een driehoeksmatrix (blz.71):

<u>Stelling 8.8</u> Zij A een vierkante matrix van de n^e orde met eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Er bestaat een niet-singuliere matrix P met de eigenschap

(8.24) $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 0\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ (=driehoeksmatrix met eigenwaarden van A op de hoofddiagonaal).

<u>Bewijs</u>: Laat x_1 een eigenvector van A zijn, die correspondeert met de eigenwaarde λ_1 van A, en X een niet-singuliere matrix, waarvan x_1 de eerste kolomvector is. De eerste kolomvector van AX is dus $Ax_1=\lambda_1 x_1$; die van $X^{-1}AX$ is derhalve gelijk aan $X^{-1}\lambda_1 x_1$, welke ook de eerste kolomvector is van $X^{-1}\lambda_1 X$, dus: $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Nu geldt dus $X^{-1}AX=\begin{pmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$.

In deze laatste matrix is λ_1 een element, B_1 een (1,n-1)-matrix, 0 een (n-1,1)-nulmatrix en A_1 een (n-1,n-1)-matrix. Daar volgens stelling 8.3 $X^{-1}AX$ en A dezelfde eigenwaarden hebben en $|X^{-1}AX-\lambda I|=(\lambda_1-\lambda)|A_1-\lambda I|$, geldt, dat $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A_1 zijn. De stelling is dus bewezen voor n=2. Het algemene bewijs voor n > 2 zullen we nu leveren volgens het principe van volledige inductie, waarbij we dus aannemen, dat de stelling bewezen is voor een vierkante matrix A van de $(n-1)^e$ orde. Voor de matrix A_1, die juist van dit type is, kunnen we nu aannemen, dat er een niet-singuliere matrix Q bestaat met de eigenschap, dat $Q^{-1}A_1Q$ de driehoeksvorm heeft met $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ als diagonaalelementen, dus:

$$Q^{-1}A_1Q=\begin{pmatrix} \lambda_2 & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Als nu } R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

(R^{-1} is dan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$), waarin 0 nulmatrices voorstellen, dan geldt:

$$(XR)^{-1}A(XR)=R^{-1}(X^{-1}AX)R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & B_1Q \\ 0 & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hiermede is de stelling bewezen, want indien we stellen P=XR, geeft vergelijking van het eerste lid en het laatste lid juist de te bewijzen vergelijking (8.24).

Opm. Omdat kan worden aangetoond, dat iedere vierkante matrix equivalent is met zijn getransponeerde (zie opgave blz. 192), geldt eveneens, dat elke vierkante matrix equivalent is met een matrix, die de driehoeksvorm heeft met nullen boven in plaats van onder de hoofddiagonaal, zoals in het rechterlid van (8.24) het geval was.

Uit vergelijking (8.24) volgt:

$$(8.25)\quad P^{-1}AP-\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & \lambda_n-\lambda \end{pmatrix}.$$

Daar $P^{-1}(A-\lambda I)P=P^{-1}AP-\lambda I$, heeft de matrix in het rechterlid van (8.25) volgens stelling 7.15 dezelfde rang als $A-\lambda I$ en wel voor iedere waarde van λ. Is nu λ_1 een s-voudige eigenwaarde van A, of zoals men wel zegt een eigenwaarde met multipliciteit s (d.w.z. dat λ_1 een s-voudige wortel is van de karakteristieke vergelijking $|A-\lambda I|=0$, of ook, $(\lambda-\lambda_1)$ een juist s maal optredende lineaire factor in de factorontbinding van de karakteristieke veelterm $|A-\lambda I|$; als s=1, dan is λ_1 enkelvoudig, anders meervoudig (2,3,...,n-voudig)), dan komen in de diagonaal van de matrix in het rechterlid van (8.25) juist s elementen $\lambda_1-\lambda$ voor, omdat volgens stelling 8.3 de determinant $(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda)$ van de matrix in het rechterlid van (8.25) overeenkomt met de karakteristieke veelterm van A. Onder $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ zijn dus juist s-1 elementen, die gelijk zijn aan λ_1. Substitutie van $\lambda=\lambda_1$ in het rechterlid van (8.25) geeft dus een matrix van rang $\geqslant$ n-s. De rang van $A-\lambda_1 I$ is dus ook $\geqslant$ n-s. Dit betekent, dat alle eigenvectoren, die corresponderen met de eigenwaarde λ_1, tezamen met de nulvector, een vectorruimte vormen van dimensie p met $1 \leqslant p \leqslant s$. Dit is de zgn <u>eigenruimte</u> (eigenkolomruimte), behorende bij de eigenwaarde λ_1; bij elke eigenwaarde λ_i behoort zo een eigenruimte. Hieruit volgt in het bijzonder, dat bij een <u>enkelvoudige</u> eigenwaarde van een matrix juist een 1-dimensionale eigenruimte behoort. (vgl. blz. 196)

Het kan inderdaad voorkomen, dat bij een s-voudige eigenwaarde van een matrix A een eigenruimte behoort met een dimensie $<s (s>1)$. Men noemt dan de matrix <u>defect</u>. Dit wil dus zeggen, dat niet bij alle eigenwaarden van de matrix eigenruimten behoren van een dimensie, die gelijk is aan de multipliciteit der betreffende eigenwaarde. (de dimensie is altijd <u>hoogstens</u> gelijk aan de multipliciteit volgens het voorgaande) In verband met stelling 8.1 geldt, dat een n-matrix dan en slechts dan defect is, als het maximale aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren kleiner dan n is, of op grond van stelling 8.5 als er geen equivalentie bestaat met een diagonaalmatrix.[1] Zoals we op blz.198 hebben gezien, zijn reële symmetrische matrices altijd door een orthogonale matrix in een diagonaalmatrix te transformeren, zodat deze matrices dus nooit defect zijn. Bij een s-voudige eigenwaarde van een reële symmetrische matrix behoort dus juist altijd een s-dimensionale eigenruimte .

Vb. 1) De matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ heeft de karakteristieke vergelijking $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$. Hieruit volgt $\lambda_1=\lambda_2=1$. Bij deze 2-voudige eigenwaarde 1 behoren slechts de eigenvectoren $(0,t)$, dus een 1-dimensionale eigenruimte. De matrix A is dus defect en daarom niet equivalent met een diagonaalmatrix.

Opgave: Bewijs, dat van de matrix

$$A=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & \ddots & & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & & 1 & 0\end{pmatrix},\quad a_{ij}=0 \text{ voor } j\geq i,\quad a_{i,i-1}=1\,,$$

alle eigenwaarden gelijk zijn aan 0, doch de hierbij behorende eigenruimte slechts 1-dimensionaal is.

Vb. 2) De matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}$ heeft de karakteristieke vergelijking $\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & 6\\ 1 & 1-\lambda & -3\\ -1 & 2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$.

Hieruit volgt $(\lambda-3)^2(\lambda-2)=0$, dus $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=2$.

Bij de 2-voudige eigenwaarde 3 vinden we de eigenvectoren uit de vergelijking $-2x_1+4x_2+6x_3=0$. Bij deze 2-voudige eigenwaarde behoort dus wel een 2-dimensionale eigenruimte (opgespannen door bijv. de eigenvectoren $(2,1,0)$ en $(3,0,1)$). A is dus niet defect en daarom wel equivalent met een diagonaalmatrix.

---

1) Zo definieert men ook wel een defecte matrix.

Vb. 3) Bepaal een matrix S, die A uit vb.2) overvoert in een diagonaalmatrix.

Volgens stelling 8.5 voldoet voor S de matrix met kolommen gelijk aan eigenvectoren van A. Volgens vb.2) behoren bij $\lambda=3$ eigenvectoren $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. Bij $\lambda=2$ behoort, zoals eenvoudig is na te gaan, een eigenvector $\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Dus $S=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Hieruit volgt

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Nu moet gelden $S^{-1}AS=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Opgave: Controleer dit.

Vb. 4) Onderzoek of de matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$ wel of niet defect is.

Volgens stelling 8.5 is A dan en slechts dan equivalent met een diagonaalmatrix (dus niet-defect) als A 3 lineaire onafhankelijke eigenvectoren bezit. De eigenwaarden van A volgen uit de karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 0 & -1-\lambda & 6\\ 0 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ of } (\lambda-1)^2(\lambda-2)=0;\quad \lambda_1=\lambda_2=1;\quad \lambda_3=2.$$

De eigenvectoren, die bij de eigenwaarde 1 behoren zijn alle van het type $(t,0,0)$ en vormen dus een 1-dimensionale eigenruimte. A is dus niet equivalent met een diagonaalmatrix en dus defect.

Vb. 5) Volgens stelling 8.8 bestaat er een matrix P, zódat $P^{-1}AP$ de driehoeksvorm heeft. Bepaal een matrix P, die A uit vb. 4) transformeert in een driehoeksmatrix.

Indien we voor P nemen een matrix, waarvan de eerste kolom de eigenvector $(1,0,0)$ van A is:

$P=\begin{pmatrix}1 & b_{12} & b_{13}\\ 0 & b_{22} & b_{23}\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ en wel zó, dat (b_{22},b_{32}) een eigenvector is van de deelmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ van A, dan is $P^{-1}AP$ een driehoeksmatrix (zie bewijs van stelling 8.8).

$(b_{22}, b_{32}) = (2,1)$ is een eigenvector van $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Voor P kunnen we dus bijv. nemen:

$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 2 & b_{23} \\ 0 & 1 & b_{33} \end{pmatrix}$, b's willekeurig, doch zó, dat P niet-singulier is.

Als we bijv. nemen $b_{12}=b_{13}=b_{23}=0$, $b_{33}=1$, dan geldt inderdaad dat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ de driehoeksvorm heeft.

Vb. 6) Van een symmetrische matrix A met drie rijen is het volgende gegeven:

a) 0,1 en -1 zijn eigenwaarden van A;

b) de vectoren (2,0,-1) en (0,1,0) zijn eigenvectoren van A, behorende bij respectievelijk de eigenwaarden 1 en -1.

Bepaal A. (examen lineaire algebra, september 1962).

Volgens blz. 198 bestaat er een orthogonale matrix P met $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dus $A = P\Lambda P^{-1}$. De kolommen van P zijn drie op lengte 1 genormeerde eigenkolommen van A, resp. behorende bij de eigenwaarden 0,1 en -1. $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$ behoort bij $\lambda=1$, (0,1,0) bij $\lambda=-1$.

Bij $\lambda=0$ behoort een eigenvector, die orthogonaal is met de bij 1 en -1 behorende eigenvectoren; deze vector is dus van de gedaante $\lambda(1,0,2)$, genormeerd $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$.

Aangezien $P^{-1}=P^T$, want P orthogonaal, geldt dus:

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Opgaven

1) Bepaal alle eigenvectoren van de matrix $A=\begin{pmatrix} -\frac{23}{7} & \frac{12}{7} \\ -\frac{40}{7} & \frac{23}{7} \end{pmatrix}$,

alsmede een matrix S, die A door middel van de equivalentie-transformatie $S^{-1}AS$ overvoert in een diagonaalmatrix. Wat zijn van deze laatste matrix de diagonaalelementen?

2) Een matrix ($\neq$ nulmatrix) heet nilpotent, als er een zeker natuurlijk getal m bestaat, waarvoor $A^m=0$.

a) Toon aan, dat een driehoeksmatrix ($\neq$ nulmatrix), waarvan alle diagonaalelementen 0 zijn, nilpotent is.

b) Toon aan, dat een matrix ($\neq$ nulmatrix) dan en slechts dan nilpotent is, als al zijn eigenwaarden gelijk zijn aan 0 (door bijv. gebruik te maken van stelling 8.8).

c) Bewijs, dat een nilpotente matrix niet equivalent kan zijn met een diagonaalmatrix.

3) Reduceer de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tot de diagonaalvorm.

4) Bewijs dat met de orthogonale symmetrische matrix

$$P=\begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \text{ de symmetrische matrix } A=\begin{pmatrix} 129 & 60 & 24 \\ 60 & 210 & -24 \\ 24 & -24 & 147 \end{pmatrix}$$

te reduceren is tot de diagonaalvorm. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van A? Toon aan, dat A 3 onderling orthogonale eigenvectoren bezit.

5) Bewijs, dat van de niet-defecte matrices alleen de nulmatrix de matrix is met alle eigenwaarden gelijk aan 0.
(Als de matrix defect is, dan kunnen alle eigenwaarden 0 zijn, zonder dat de matrix een nulmatrix is, bijv. bij $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ blz.201).

6) Bewijs dat een n-matrix volledig bepaald is door zijn eigenwaarden en n lineair onafhankelijke eigenvectoren.[1)]
Bepaal voor de volgende 5 gevallen a)- e) de matrix, waarvan de vectoren (6.3,2), (6,4,3), (20,15,12) eigenvectoren zijn behorende bij de eigenwaarden:
a) resp. 1,2 en 3;
b) resp. 2,1 en 3;
c) resp. -1,0 en 1;
d) 1 (drievoudig);
e) resp. 1 (tweevoudig) en 2.

7) Bewijs, dat als A een matrix is van de n^e orde en I de eenheidsmatrix van de n^e orde, de karakteristieke wortels van de 2n-matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

gelijk zijn aan $\pm\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}$, als $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de karakteristieke wortels zijn van A.

8) Bewijs dat een symmetrische matrix A dan en slechts dan een symmetrische "vierkantswortel" W bezit (d.w.z. dat $W \times W=A$), als A positieve eigenwaarden heeft (zgn. positief definiet is).
Bepaal van de symmetrische matrix

---

1) Waarom behoefde in vb.6) blz.203 slechts 2 lin.onafh.vectoren te worden gegeven?

$$A = \begin{pmatrix} 641 & -16 & 172 \\ -16 & 137 & -116 \\ 172 & -116 & 356 \end{pmatrix}$$

4 essentieel verschillende symmetrische vierkantswortels W (dwz. wortels waarvan er niet een tegengesteld is aan een andere).

Vb: 2, essentieel verschillende, symmetrische wortels van $\begin{pmatrix} 772 & 504 \\ 504 & 2353 \end{pmatrix}$ zijn $\begin{pmatrix} \frac{674}{25} & \frac{168}{25} \\ \frac{168}{25} & \frac{1201}{25} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -\frac{478}{25} & \frac{504}{25} \\ \frac{504}{25} & \frac{1103}{25} \end{pmatrix}$;

controleer dit.

Bij defecte matrices is, zoals we gezien hebben, volledige diagonalisatie onmogelijk. Wel echter kan, volgens stelling 8.8 iedere vierkante matrix in de driehoeksvorm worden getransformeerd. Eveneens kan worden aangetoond, (het bewijs zullen we niet geven), dat iedere vierkante matrix A door middel van een equivalentie-transformatie getransformeerd kan worden in een zgn. "canonische" matrix, d.i. een matrix met de volgende eigenschappen:

1. alle elementen onder de hoofddiagonaal zijn 0;
2. de diagonaalelementen zijn de eigenwaarden van A;
3. alle elementen buiten de hoofddiagonaal zijn 0, uitgezonderd eventueel die elementen, die direct grenzen aan twee gelijke diagonaalelementen;
4. deze laatste elementen (die dus direct grenzen aan twee gelijke diagonaalelementen) zijn 0 of 1.

Een matrix, die deze vier eigenschappen heeft, heet een <u>Jordan-canonische</u> matrix, behorende bij A. Iedere matrix A is dus equivalent met een matrix J van de driehoeksvorm:

$$J = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & F_r \end{pmatrix},$$

de zgn. Jordan-canonische (of klassieke) vorm van A (0 in J zijn nulmatrices).

Elk "kastje" F_i in J is een vierkante matrix met diagonaalelementen liggende op de hoofddiagonaal van J; het heeft de vorm:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \text{ zijn de eigenwaarden van A.}$$

In rij $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ komen alle eigenwaarden een of meer malen voor. Gelijke eigenwaarden kunnen in de rij minder vaak voorkomen dan de bijbehorende multipliciteit bedraagt. Een F_i van de 1^e orde bestaat alleen uit het element λ_i. De Jordan-canonische vorm heeft slechts dan de diagonaalvorm als alle optredende matrices F_i van de 1^e orde zijn. We illustreren het bovenstaande aan een matrix van de 5^e orde, waarvoor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ en $\lambda_4 = \lambda_5$, doch $\lambda_1 \neq \lambda_4$. De Jordan-canonische vorm is van het type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Er doen zich de volgende 5 gevallen voor:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$: bij λ_1 behoort een 3-dimensionale eigenruimte;
2. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ of $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$: bij λ_1 behoort een 2-dimensionale eigenruimte;
3. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$: bij λ_1 behoort een 1-dimensionale eigenruimte;
4. $\alpha_3 = 0$: bij λ_4 behoort een 2-dimensionale eigenruimte;
5. $\alpha_3 = 1$: bij λ_4 behoort een 1-dimensionale eigenruimte.

Voor bijv. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ is

$$J=\begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & \boxed{\lambda_1} & \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}\lambda_4 & 1 \\ 0 & \lambda_4\end{matrix}} \end{pmatrix} .$$

De drie kastjes F_1, F_2 en F_3 zijn dan resp.: $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, (\lambda_1), \begin{pmatrix}\lambda_4 & 1 \\ 0 & \lambda_4\end{pmatrix}$.

De bij een matrix behorende Jordan-canonische vorm J is bepaald op de volgorde der kastjes $F_1, F_2, \ldots, F_r$ door de hoofddiagonaal van J na.
Ook geldt, dat twee matrices dan en slechts dan equivalent zijn als ze dezelfde canonische vorm hebben (afgezien van de volgorde der matrices F_i; de canonische vorm van een matrix A die te diagonaliseren is, is dus van de diagonaalvorm met diagonaalelementen de eigenwaarden van A in willekeurige volgorde).
Het bewijs van al deze eigenschappen laten we achterwege.
Ook op de reductie van matrices tot andere standaardvormen zal hier niet nader worden ingegaan.

5. De stelling van Cayley-Hamilton met enkele toepassingen

Als $f(x)=a_o x^m+a_1 x^{m-1}+\ldots+a_m$ een veelterm is in x en A een vierkante matrix, definiëren we f(A) als

$$f(A)=a_o A^m+a_1 A^{m-1}+\ldots+a_m I.$$

(Toelichting: Als n een positief geheel getal is en A een vierkante matrix, dan wordt het symbool A^n, evenals in het geval, dat we met getallen te maken hebben, gebruikt om het product AA...A van n factoren A uit te drukken. Als A niet-singulier is, geldt $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$. Aan de hand hiervan kunnen we negatieve en nulmachten van een niet-singuliere matrix A definiëren en wel door $A^{-n}=(A^{-1})^n$ en $A^o=I$.
Voor iedere niet-singuliere matrix A en gehele getallen m en n geldt dus $A^m.A^n=A^{m+n}$ en $(A^m)^n=A^{mn}$).

Nu gelden de volgende stellingen:

Stelling 8.9. Als $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van een n-matrix A en f(x) een veelterm, dan zijn de eigenwaarden van f(A) juist $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.

Bewijs: Laat de n-matrices B en C de driehoeksvorm hebben met de nulelementen onder de hoofddiagonaal. Laat verder de diagonaalelementen resp. zijn: $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Dan geldt, dat BC en B+C eveneens de driehoeksvorm hebben, ook met nulelementen onder de hoofddiagonaal, en wel met resp. de diagonaalelementen $b_1c_1, b_2c_2, \ldots, b_nc_n$, en $b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_n+c_n$ (hetzelfde geldt als we "onder" door "boven" vervangen).
Als nu P een niet-singuliere matrix is met $P^{-1}AP$ de driehoeksvorm (steeds mogelijk om zo'n P te vinden volgens stelling 8.8), dan heeft $f(P^{-1}AP)$ eveneens de driehoeksvorm, en wel, daar $P^{-1}AP$ de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ van A in de hoofddiagonaal heeft, met diagonaalelementen $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$. Daar $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$ voor ieder getal $m \geqslant 0$, geldt $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$. Door de matrix P wordt dus f(A) door middel van een equivalentie-transformatie getransformeerd in een matrix, die de driehoeksvorm heeft met diagonaalelementen $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$. Deze diagonaalelementen moeten dan volgens stelling 8.4 de eigenwaarden van f(A) zijn, zoals te bewijzen was.

Stelling 8.10. Als A een n-matrix is, die equivalent is met een diagonaalmatrix en f(x) de karakteristieke veelterm van A, dan geldt dat f(A)=0 (nulmatrix).

Bewijs: Laat $\Lambda = P^{-1}AP$ een diagonaalvorm van A zijn. De elementen in de hoofddiagonaal van Λ zijn de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ van A. Nu geldt, evenals in het bewijs van de vorige stelling, dat $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = f(\Lambda)$.
$f(\Lambda)$ is een diagonaalmatrix met als diagonaalelementen de eigenwaarden van f(A), dus volgens stelling 8.9: $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$. Doch daar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn geldt: $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \ldots = f(\lambda_n) = 0$ en dus $f(\Lambda) = 0$. Daar $f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1}$ is $f(A) = 0$, zoals te bewijzen was.

We illustreren deze stelling aan het volgende voorbeeld:

Voorbeeld: Neem voor A de matrix $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. Zoals reeds opgemerkt, is elke reële symmetrische matrix door een equivalentie-transformatie in de diagonaalvorm te brengen ($P^{-1}AP$ met $P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ heeft de diagonaalvorm $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$).

$f(x)=\begin{vmatrix}2-x&1\\1&2-x\end{vmatrix}=x^2-4x+3$. Nu geldt inderdaad $A^2-4A+3I=0$, want
$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^2-4\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&4\\4&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Stelling 8.10 is een bijzonder geval van de stelling van Cayley-Hamilton, welke zegt, dat als A een willekeurige vierkante matrix is met karakteristieke veelterm f(x), geldt f(A)=0 of: iedere vierkante matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking.
Het bewijs van deze algemene stelling zullen we achterwege laten. De stelling van Cayley-Hamilton geldt dus ook voor matrices die niet equivalent zijn met een diagonaalmatrix (defecte matrices).

Dit toetsen we aan de defecte matrix $\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-1&6\\0&-1&4\end{pmatrix}$ van voorbeeld 4) blz. 202. De karakteristieke veelterm is $(x-1)^2(x-2)=0$. Inderdaad geldt, dat

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-1&6\\0&-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}^2\left\{\begin{pmatrix}1&2&-4\\0&-1&6\\0&-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0&2&-4\\0&-2&6\\0&-1&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}-1&2&-4\\0&-3&6\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&6\\0&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-4\\0&-3&6\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Opmerking. De stelling van Cayley-Hamilton stelt ons in staat elke gehele macht van een n-matrix A, en dus ook elke veelterm van A, lineair uit te drukken in $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$. In het gegeven voorbeeld bovenaan geldt bijv. voor de tweede en derde macht van A:

$$A^2 = 4A - 3I, \text{ en dus}$$
$$A^3 = 4A^2 - 3A = 4(4A-3I)-3A=13A-12I, \text{ enz.}$$

Uit $A^2=4A-3I$ volgt tevens $A-4I+3A^{-1}=0$ (A heeft een inverse), hetgeen ons in staat stelt ook de negatieve gehele machten van A te schrijven als een lineaire combinatie van A en I.

Voorbeeld: Bereken langs deze weg de inverse van

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oplossing: De karakteristieke veelterm van A is $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 4 & 1-x & 5 \\ 6 & 2 & 3-x \end{vmatrix} =$
$= -x^3+5x^2+29x+35$, zodat volgens de stelling van Cayley-Hamilton geldt: $-A^3+5A^2+29A+35I=0$ en dus als A^{-1} bestaat:

$$A^{-1} = \frac{1}{35}(A^2-5A-29I) = \frac{1}{35}\left\{\begin{pmatrix} 27 & 10 & 22 \\ 38 & 19 & 32 \\ 32 & 20 & 37 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -20 & -5 & -25 \\ -30 & -10 & -15 \end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} -29 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 18 & -15 & 7 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & 1/5 \\ 18/35 & -3/7 & 1/5 \\ 2/35 & 2/7 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Controleer de juistheid van het resultaat.

Opmerking. Is A een niet-singuliere n-matrix, die door een equivalentie-transformatie in de diagonaalvorm te brengen is, dan kunnen we A^{-1} bijv. ook berekenen uit $P^{-1}AP=\Lambda$ (diagonaalmatrix). Hieruit volgt namelijk $A^{-1}=P\Lambda^{-1}P^{-1}$. P is volgens stelling 8.5 een matrix met als kolomvectoren lineair onafhankelijke eigenvectoren van A. (P^{-1} bestaat uit n lineair onafhankelijke eigenrijen van A, zie bijv. stelling 8.7). Λ^{-1} is een diagonaalmatrix met diagonaalelementen $\frac{1}{\lambda_i}$. In het algemeen zal het bepalen van de matrices P en P^{-1} minstens zoveel werk geven als het bepalen van A^{-1} langs directe weg. Dit laatste geldt in het algemeen ook voor de bepaling van A^{-1} uit positieve gehele machten van A, zoals boven uiteengezet. Met name in het voorbeeld bovenaan bracht de berekening van de karakteristieke veelterm en A^2 relatief vrij veel rekenwerk met zich mee. Opmerking bij de berekening van de inverse van een matrix A met behulp van de stelling van Caley-Hamilton:

Noodzakelijk hiervoor is het kennen van de coëfficiënten van de karakteristieke veelterm van A.

Stel de karakteristieke vergelijking van de n-matrix A voor door: $|A-\lambda I|=0$ of $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$. Dan is volgens de stelling van Cayley-Hamilton: $A^n+a_1A^{n-1}+\dots+a_{n-1}A+a_nI=0$.

Daar van A ondersteld wordt, dat A^{-1} bestaat, geldt $a_n\neq 0$, en omdat $|A|=(-1)^na_n$:

$$I=-\frac{1}{a_n}\left[A^n+a_1A^{n-1}+\dots+a_{n-2}A^2+a_{n-1}A\right],\text{ zodat}$$

(1) $A^{-1}=\frac{-1}{a_n}\left[A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\dots+a_{n-2}A+a_{n-1}I\right]$, waaruit A^{-1} berekend kan worden.

Definieer nu als het spoor van A de som van de elementen in de hoofddiagonaal van A: $Sp(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ (zie opgave 21, blz.80).
Definieer verder de getallen $s_1,s_2,\dots,s_n$ als volgt:

(2) $s_1=Sp(A), s_2=Sp(A^2),\dots,s_r=Sp(A^r),\dots,s_n=Sp(A^n)$.

s_r is dus het spoor van de r^e macht van A.
Aangetoond kan worden dat de volgende recursieformules gelden:

$$(3)\begin{cases} a_1=-s_1\\ a_2=-\frac{1}{2}(a_1s_1+s_2)\\ a_3=-\frac{1}{3}(a_2s_1+a_1s_2+s_3)\\ \vdots\\ a_n=-\frac{1}{n}(a_{n-1}s_1+a_{n-2}s_2+\dots+a_1s_{n-1}+s_n). \end{cases}$$

De berekening van A^{-1} verloopt dan als volgt:

a) Bereken de n-1 machten $A,A^2,\dots,A^{n-1}$ van A;
b) Bereken alleen de diagonaalelementen van A^n;
c) Bereken de n getallen $s_1,s_2,\dots,s_n$ gedefinieerd in (2);
d) Substitueer deze waarden van s_i in (3) en bereken achtereenvolgens de coëfficiënten $a_1,a_2,\dots,a_n$;
e) Bereken A^{-1} met behulp van (1).

Voorbeeld. Bereken A^{-1} met behulp van bovengenoemde regel, als

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 11 & 6 & -9 & -15\\ 1 & 3 & 9 & -3 & -8\\ 7 & 6 & 6 & -3 & -11\\ 7 & 7 & 5 & -3 & -11\\ 17 & 12 & 5 & -10 & -16 \end{pmatrix}.$$

Oplossing: Uit A,A^2,A^3,A^4 en de diagonaalelementen van A^5 volgt met behulp van (2):

met behulp van (2):

$s_1=5$, $s_2=-41$, $s_3=-217$, $s_4=-17$, $s_5=3185$.

Substitutie in (3) geeft:

$a_1=-5$, $a_2=33$, $a_3=-51$, $a_4=135$, $a_5=225$.

Voor de karakteristieke vergelijking van A vinden we dan:

$$f(\lambda)=\lambda^5-5\lambda^4+33\lambda^3-51\lambda^2+135\lambda+225=0.$$

Uit (1) volgt dan tenslotte voor A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{225}\begin{pmatrix} -207 & 64 & -124 & 111 & 171 \\ -315 & 30 & 195 & -180 & 270 \\ -315 & 30 & -30 & 45 & 270 \\ -225 & 75 & -75 & 0 & 225 \\ -414 & 53 & 52 & -3 & 342 \end{pmatrix}.$$

Opmerking. Het linkerlid van de karakteristieke vergelijking van A is te ontbinden in $(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda+15)^2$, zodat de eigenwaarden van A zijn $\lambda_1=-1$; $\lambda_{2,3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{51}$ (tweevoudig) en $\lambda_{4,5}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{51}$ (tweevoudig).

Naast de in deze en vorige paragrafen geschetste methoden voor het bepalen van de inverse van een matrix, zij hier nog een methode genoemd, waarbij de inverse van een matrix iteratief wordt bepaald, (zie blz.130 onderaan).

Deze methode is bijv. gebaseerd zijn op het iteratieproces:

$$x_{n+1}=x_n(2-ax_n),\text{ met (onder zekere voorwaarden) }\lim_{n\to\infty}x_n=a^{-1}$$

(vgl. syllabus N.W., I, p.54).

Als aan zekere voorwaarden is voldaan, kan worden aangetoond, dat een analoge iteratie:

$$X_{n+1}=X_n(2I-A\,X_n),$$

waarin X_n,X_{n+1} en A vierkante matrices zijn en I een eenheidsmatrix, alle van dezelfde orde, zal leiden tot A^{-1} ($\lim_{n\to\infty}X_n=A^{-1}$), als A niet-singulier is ondersteld.

De convergentie-snelheid hangt van de beginbenadering X_0 af en van de preciese vorm van A. Veelal start men met $X_0=I$.

Opgave: Gegeven is de matrix $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Gevraagd de eigenwaarden en corresponderende eigenvectoren van de matrix $B=A^5-3A^4+2A-I$.
Bepaal ook A^{100}.

6. Reële symmetrische matrices

In de eigenwaardetheorie van matrices spelen, zoals we reeds gezien hebben, de reële symmetrische matrices een bijzondere rol. Voor deze klasse van matrices gelden enkele belangrijke eigenschappen, die niet algemeen voor asymmetrische matrices geldig zijn, bijv. de mogelijkheid tot volledige diagonalisatie, het reëel zijn van de eigenwaarden, enz.
Alvorens de belangrijkste stellingen over de reële symmetrische matrices weer te geven, geven we eerst een overzicht van enkele fundamentele eigenschappen en begrippen. De matrices waarover we spreken, zullen we in dit gedeelte steeds reëel veronderstellen, evenals de getallen (scalairen), tenzij expliciet anders wordt vermeld.

a) Een matrix is symmetrisch als geldt $A^T=A$.

b) Als A symmetrisch is, is A^{-1}, zo deze bestaat, eveneens symmetrisch, $(A^{-1}=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T)$.

c) Het product AB van twee symmetrische matrices A en B is dan en slechts dan symmetrisch als $AB=BA$, $(AB=A^TB^T=(BA)^T=(AB)^T)$.

d) Iedere positieve (en in het niet-singuliere geval, ook iedere negatieve) gehele macht van een symmetrische matrix, is eveneens symmetrisch, (gevolg van b) en c)).

e) De eigenwaarden zijn reëel, (zie blz. 196, $Ax=\lambda x \longrightarrow \bar{x}^T Ax=\lambda\bar{x}^T x$ ($\bar{x}$ en x zijn toegevoegd complex); ook geldt $A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$, dus $\bar{x}^T A=\bar{\lambda}\bar{x}^T \longrightarrow \bar{x}^T Ax=\bar{\lambda}\bar{x}^T x$, zodat $(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}^T x=0$. Daar $x\neq\vec{0}$ en dus $\bar{x}^T x\neq 0$, geldt dus $\lambda-\bar{\lambda}=0 \longrightarrow \lambda=\bar{\lambda}$, dus λ =reëel).

"Metrische" eigenschappen en begrippen van vectoren (kentallen t.o.v. Cartesisch coördinatenstelsel):

f) inwendig product (x,y) van twee vectoren $x=(x_1,\ldots,x_n)$ en $y=(y_1,\ldots,y_n)$: $(x,y)=x^Ty=y^Tx=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$.

g) lengte $\|x\|$ van de vector $x=(x_1,\ldots,x_n)$:
$\|x\| =(x^T x)^{\frac{1}{2}}=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

h) hoek φ tussen twee vectoren x en y: $\varphi = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|.\|y\|} =$

$$= \arccos \frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}\ (y_1^2+\ldots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}} .$$

i) orthogonaliteit: twee vectoren x en y onderling orthogonaal (loodrecht) als $(x,y)=x^Ty=x_1y_1+\ldots+x_ny_n=0$, ($\varphi=90^\circ$ in h).)

j) Onderling orthogonale vectoren ($\neq\vec{0}$) zijn lineair onafhankelijk, (Bewijs dit!).

k) Iedere vectorruimte V van dimensie $r > 0$ bezit r, doch niet meer dan r onderling orthogonale vectoren $\neq\vec{0}$; in iedere vectorruimte R_n is dus een (lin.onafh.) stelsel van n vectoren te kiezen (een lin.onafh.basis), bestaande uit n onderling orthogonale vectoren. We kunnen zelfs vormen een

l) Genormeerd orthogonaal stelsel in R_n, dat is een stelsel van n vectoren in R_n, bestaande uit n onderling orthogonale eenheidsvectoren (lengte 1). (de constructie hiervan uit een willekeurige basis kan bijv. geschieden door middel van het Gram-Schmidt orthogonalisatieproces (zie blz.216.)

m) Als $e_1,e_2,\ldots,e_s$ $s(1 \leq s < r)$ onderling orthogonale eenheidsvectoren zijn in een vectorruimte V van dimensie r, dan bestaan er r-s eenheidsvectoren $e_{s+1},e_{s+2},\ldots,e_r$ in V zó, dat de r vectoren $e_1,\ldots,e_r$ een genormeerde orthogonaalbasis (of een zgn. Cartesisch coördinatenstelsel) bepalen voor V, (af te leiden uit de uitwisselingsstelling van Steinitz, blz.47).

n) Als de n rijen een vierkante matrix P van de orde n een genormeerd orthogonaal stelsel vormen in een R_n, dan geldt volgens g), i) en l): $PP^T=P^TP=I$ (eenheidsmatrix).
De n kolomvectoren van P vormen dan eveneens een genormeerd orthogonaalstelsel in R_n (vgl.opgave 9, blz.78). Een matrix P met $PP^T=I$ heet een orthogonale matrix, ($P^T=P^{-1}$).

o) De inverse (= de getransponeerde volgens n)) van een orthogonale matrix, is wederom orthogonaal. Het product van twee (of meer) orthogonale matrices is orthogonaal. De determinant van een orthogonale matrix is in volstrekte waarde gelijk aan 1. Bewijs deze eigenschappen (vgl. opg.31, blz.82).

<u>Gram-Schmidt-orthogonalisatieproces</u> voor de vorming van een genormeerd orthogonaal stelsel van vectoren in een R_n:

Ga uit van een lineair onafhankelijke basis in R_n, bestaande uit de vectoren $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vorm daarmee achtereenvolgens de vectoren $y_1, y_2, \dots, y_n$ op de volgende wijze:

$$y_1 = x_1 ,$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, x_1)}{(x_1, x_1)} y_1 ,$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 ,$$

....

$$y_n = x_n - \frac{(x_n, y_{n-1})}{(y_{n-1}, y_{n-1})} y_{n-1} - \dots\dots - \frac{(x_n, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 .$$

Hieruit leiden we af (ga dit na!)

$(y_2, y_1) = 0$, $(y_3, y_1) = 0$, $(y_3, y_2) = 0, \dots$ algemeen:

$$(y_i, y_{i-1}) = (y_i, y_{i-2}) = \dots = (y_i, y_1) = 0 \quad \text{voor } 1 < i \leq n .$$

De vectoren y_i zijn dus onderling orthogonaal. Iedere vector y_i is van de vorm x_i -(lin.combinatie van $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1$). De vectoren y_i zijn alle ongelijk de nulvector, daar de vectoren x_i lineair onafhankelijk zijn. De vectoren $y_1, y_2, \dots, y_n$ vormen dus een lineair onafhankelijke basis voor R_n (zie punt k) blz.215). Indien we de vectoren y_i normeren door ze te vervangen door $e_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$ ontstaat een genormeerd orthogonaalstelsel (zie punt l), blz.215). De onderling orthogonale eenheidsvectoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ van dit stelsel vormen een genormeerde orthogonale basis voor R_n.

<u>Stelling 8.11</u> Indien A een reële symmetrische matrix is, bestaat er een orthogonale matrix P, zó dat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is, (A is dus door middel van een orthogonale matrix te diagonaliseren, vgl.blz.198).

Bewijs: Laat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van A. Daar λ_1 volgens eigenschap e) blz.214 reëel is, is er een reële eenheids-eigenvector S_1, die correspondeert met λ_1, waarbij dus $AS_1 = \lambda_1 S_1$. Volgens de punten m) en n) bestaat er dan een orthogonale matrix S, waarvan S_1 de eerste kolomvector is. De eerste kolomvector van AS is $AS_1 = \lambda_1 S_1$, zodat $\lambda_1 S^{-1} S_1$ de eerste kolomvector van $S^{-1}AS$ is. Doch $\lambda_1\ S^{-1}S_1$ is de eerste kolomvector van $\lambda_1\ S^{-1}S = \lambda_1 I$, of $(\lambda_1\ 0\ \ldots\ 0)^T$ (vgl. bewijs van stelling 8.8 blz.198).
Bovendien is wegens $(S^{-1}AS)^T = (S^TAS)^T = S^TAS = S^{-1}AS$, de matrix $S^{-1}AS$ symmetrisch, zodat

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

waarbij in het rechterlid de matrix A_1 symmetrisch is van de orde n-1 met eigenwaarden $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.
Stelling 8.11 wordt nu bewezen met volledige inductie: Als Q een orthogonale matrix is van de orde n-1, die A_1 diagonaliseert, zodat dus $Q^{-1}A_1\ Q = D =$ diagonaalmatrix, dan is SR met $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ eveneens orthogonaal, terwijl

$$(SR)^{-1}A\ SR = R^{-1}S^{-1}A\ SR = R^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

. Deze laatste matrix is een diagonaalmatrix, daar D een diagonaalmatrix is. De orthogonale matrix P=SR diagonaliseert dus A, waarmede het bewijs geleverd is.

Opm. Dat stelling 8.11 in het algemeen niet juist is voor niet-symmetrische reële en voor niet-reële symmetrische matrices zien wij resp. aan de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, waarbij $i^2 = -1$. Beide matrices bezitten niet twee lineair onafhankelijke eigenvectoren, en zijn derhalve volgens stelling 8.5 niet equivalent met een diagonaalmatrix. (ga dit na)

Volgens stelling 8.5 zijn de kolomvectoren van P n eigenvectoren van A. Deze kolomvectoren zijn onderling orthogonaal, daar P een orthogonale matrix, zodat (vergelijk syll. N.W. II, blz.CR 38):

Stelling 8.12 Een reële symmetrische matrix van de orde n heeft n onderling orthogonale eigenvectoren.

Omgekeerd is het duidelijk, dat als we n onderling orthogonale eenheidseigenvectoren van A kunnen vinden, de matrix P, die samengesteld is uit deze kolomvectoren en dus orthogonaal is, A transformeert in de diagonaalvorm.
Het probleem van de diagonalisering van een reële symmetrische matrix is hiermede teruggebracht tot dat van het vinden van n onderling orthogonale eigenvectoren van A. De volgende twee stellingen geven hiervoor het middel:

Stelling 8.13 Als twee eigenvectoren S_1 en S_2 van een reële symmetrische matrix A corresponderen met twee verschillende eigenwaarden van A, dan zijn S_1 en S_2 orthogonaal.

Bewijs: Hoewel deze stelling reeds volgt uit vgl.(8.19), blz.196, geven we hier nog even het bewijs: Zij λ_1 en λ_2 twee verschillende eigenwaarden van A met resp. S_1 en S_2 als corresponderende reële eigenvectoren. Daar $AS_1 = \lambda_1 S_1$ geldt $S_2^T AS_1 = \lambda_1 S_2^T S_1$. Ook geldt, daar $AS_2 = \lambda_2 S_2$: $S_2^T A = \lambda_2 S_2^T$, en dus $S_2^T AS_1 = \lambda_2 S_2^T S_1$. Hieruit volgt: $\lambda_1 S_2^T S_1 = \lambda_2 S_2^T S_1$, en dus als $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $S_2^T S_1 = 0$, d.w.z. de eigenvectoren S_1 en S_2 onderling orthogonaal, (zie pt i) blz.215).

Stelling 8.14 Als λ een p-voudige eigenwaarde is van een reële symmetrische matrix A, dan heeft A p en niet meer dan p onderling orthogonale eigenvectoren, die corresponderen met λ, (stelling van Weierstrasz, vgl. blz.201).

Bewijs: Volgens stelling 8.11 is er een matrix P, zó dat $P^{-1}AP$ (met dezelfde eigenwaarden als P) een diagonaalmatrix is, waarin λ juist p maal in de hoofddiagonaal voorkomt.
$P^{-1}AP - \lambda I$ heeft dus de rang n-p. Daar $P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$ heeft, volgens stelling 7.15, ook $A - \lambda I$ de rang n-p. De oplossingsruimte van het stelsel: $(A - \lambda I)x = 0$ is derhalve van de dimensie $n-(n-p)=p$, zodat er volgens punt k) blz.215 in deze ruimte p (en niet meer dan p) onderling orthogonale eenheidsvectoren bestaan. Dit zijn dan p (uiteraard niet éénduidig bepaalde) onderling orthogonale eigenvectoren van A, die een orthogonale basis vormen voor de p-dimensionale eigenruimte behorende bij de p-voudige eigenwaarde λ.
Uit stelling 8.14 volgt, dat met elke enkelvoudige wortel van de karakteristieke vergelijking van A een (op een factor $\pm$ 1 na bepaalde) eenheidseigenvector van A correspondeert en met een p-voudige wortel juist p onderling orthogonale eenheidsvectoren.
Daar volgens stelling 8.13 eigenvectoren, die corresponderen met verschillende eigenwaarden van A, onderling orthogonaal zijn, bestaan er n onderling orthogonale eenheidsvectoren van A, die tezamen een orthogonale matrix P vormen, welke A transformeert in een diagonaalmatrix volgens de transformatie $P^{-1}AP$.

Opgaven

1. Als λ_1 en λ_2 verschillende eigenwaarden van de matrix A zijn, bewijs dan dat iedere eigenvector van A, die correspondeert met λ_1 orthogonaal is met iedere eigenvector van A^T, die correspondeert met λ_2. Leid hieruit een bewijs af van stelling 8.13.
   Opm. Aangezien een eigenvector (eigenkolom) van A^T een eigenrij is van A, zijn een eigenrij en een eigenkolom, resp. behorende bij verschillende eigenwaarden van A, onderling orthogonaal (zie blz.196).

2. Bepaal de eigenwaarden en (onderling orthogonale) eigenvectoren van de matrices:

$$\begin{pmatrix} 9 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

3. Evenzo van: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Bewijs, dat van een diagonaalmatrix van de orde n met verschillende diagonaalelementen de dragers van de eigenvectoren (in een R_n) samenvallen met die van de n grondvectoren (van R_n).

5. Twee deelruimten U en V van R_n heten "orthogonaal" als elke vector van U en elke vector van V onderling orthogonaal zijn (generalisatie van het orthogonaalbegrip voor twee vectoren (2 R_1' s). De deelruimte van de hoogste dimensie, die nog orthogonaal is met U, heet de "complementaire deelruimte" van U.
Bewijs:
   a) de rechte $\vec{x} = \vec{\lambda}(1,2,3)$ en het vlak $x+2y+3z=0$ zijn complementaire deelruimten van R_3;
   b) twee loodrechte vlakken in R_3 zijn niet orthogonaal;
   c) de rechte $\vec{x} = \lambda(1,2,3,4)$ en het hypervlak $x+2y+3z+4t=0$ zijn complementaire deelruimten van R_4;
   d) de beide vlakken in R_4:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1 + x_3-3x_4=0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} 2x_1+5x_2-4x_3 =0 \\ -13x_2+6x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

   zijn complementair.

6. Maak nog eens van § 5, blz.76 e.v. de opgaven:

10, 16, 22, 25, 27, 30 en 31.

7. Methoden voor het bepalen van eigenwaarden en eigenvectoren

In het voorgaande hebben we gezien, dat de eigenwaarden van een vierkante matrix A de wortels zijn van de karakteristieke vergelijking $\det(A-\lambda I)=0$. Indien A van de n^e orde is, is deze vergelijking van de n^e graad in λ. De coëfficiënten van het karakteristieke polynoom zijn sommen van onderdeterminanten van A en zouden kunnen worden berekend volgens een directe (niet-iteratieve) methode. Zijn deze coëfficiënten eenmaal berekend, dan kan men overgaan tot de bepaling van de wortels λ_i (bijv. iteratief, zie N.W., II, § 7.9 - 7.12). De eigenkolommen x_i kan men vervolgens vinden door het oplossen van de homogeen lineaire stelsels $(A-\lambda_i I)x_i=0$. Deze voor de hand liggende methode is numeriek gezien zeer inefficient. Het is immers zeer goed mogelijk, dat de wortels van een algebraïsche vergelijking zeer gevoelig zijn voor kleine afwijkingen in de coëfficiënten.
We streven dus naar andere methoden.
Zoals bekend heeft een niet-defecte matrix A van de n^e orde n lineair onafhankelijke eigenkolommen. Deze vormen een niet-singuliere vierkante matrix $X=(x_{ij})$, waarbij x_{ij} het j-de element van de i-de eigenkolom voorstelt. Deze matrix X transformeert A in de diagonaalvorm Λ, d.w.z. $X^{-1}AX=\Lambda$, waarbij de diagonaalelementen van Λ overeenstemmen met de eigenwaarden λ_i van A.
Als A een reële symmetrische matrix is, heeft A altijd n lineair onafhankelijke eigenvectoren en kan dus steeds gediagonaliseerd worden. Na geschikte normering is X orthogonaal, d.w.z. $X^{-1}=X^T$.

Er zijn diverse numerieke methoden ter bepaling van eigenwaarden en eigenvectoren, die gebaseerd zijn op transformatie van een matrix in een diagonaalmatrix Λ (b.v. methode van Jacobi voor symmetrische matrices door transformatie ("rotatie") met orthogonale matrices) of door transformatie in een tripel-diagonale matrix S(d.w.z. $s_{ij}=0$ als $|i-j|>1$) m.b.v. een direct rekenproces, gevolgd door een iteratieve bepaling van de eigenwaarden (methoden van Givens, Lanczos, e.a.). Householder en Wilkinson hebben een zeer practische methode aangegeven om een symmetrische matrix in een tripeldiagonaalvorm te transformeren. Daarvoor gebruiken zij orthogonale symmetrische matrices van de vorm

$$P_r=I-2v_rv_r^T,$$

waarbij v_r een genormeerde kolomvector is (vgl.opg. 22 blz. 80), waarvan de eerste (r-1) elementen 0 zijn, dus $v_r^T=(0,\ldots,0, v_{rr},\ldots,v_{rn})$. Uitgaande van de reële symmetrische matrix $A^{(1)}=A$ worden achtereenvolgens geconstrueerd matrices $A^{(r)}=P_rA^{(r-1)}P_r$ (r= 2,..., n-1), zodanig, dat in de (r-1)-ste rij en kolom van A de gewenste nullen ontstaan. Voert men de transformatie van $A^{(1)}$ t/m $A^{(n-1)}$ achtereenvolgens uit met resp. $P_2,\ldots, P_{n-1}$, dan ontstaat een tripel-diagonale matrix $S=A^{(n-1)}$:

$$S=A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & O \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ O & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

De vorming van de vectoren v_r geschiedt volgens een bepaald rekenschema, waarop wij niet nader zullen ingaan.

De volgende stap is het bepalen van de eigenwaarden van S, welke theoretisch gelijk zijn aan die van A(S wordt immers uit A verkregen door herhaalde toepassing van equivalentie-transformaties), en practisch daarmee ook redelijk overeenstemmen.

Zij $S^{(i)}$ de deelmatrix, bestaande uit de eerste i rijen en kolommen van S en

$$f_i(\lambda)= \det(\lambda I-S^{(i)}) \quad (i=1,\ldots,n),$$

dan is $f_n(\lambda)= \det(\lambda I-S)$ de karakteristieke veelterm van S.[1] De $f_i(\lambda)$ kunnen worden berekend met de recursie-formule:

$$f_i(\lambda)=(\lambda-a_i)\; f_{i-1}(\lambda)-b_{i-1}^2\; f_{i-2}(\lambda) \qquad (i>1)$$

met de beginwaarden $f_0=1$ en $f_1(\lambda)= \lambda-a_1$ (ga dit na).

De methode van Givens berust op de volgende eigenschappen:

Als de nevendiagonaal van de symmetrische tripel-diagonale matrix S geen nullen bevat (m.a.w. $b_i\neq 0, i=1,\ldots,n-1$), dan vormt de rij functies $f_i (i=0,\ldots,n)$ een Sturm-rij (zie Wijdenes, Middel-Algebra); het aantal eigenwaarden van S groter dan a is gelijk aan het aantal tekenwisselingen in de rij 1, $f_1(a),\ldots,f_n(a)$, mits $f_n(a)\neq 0$; de nulpunten van elke veelterm $f_i(\lambda)$ zijn verschillend en worden gescheiden door de nulpunten van $f_{i-1}(\lambda)$.

----

1) op de factor $(-1)^n$ na.

Het bovenstaande stelt ons in staat de eigenwaarden van S (en dus ook die van A) op eenvoudige wijze zeer nauwkeurig te bepalen.

De bij een eigenwaarde λ_i behorende eigenvector v_i van S wordt bepaald door oplossing van het homogeen lineaire stelsel $(S-\lambda_i I)v_i=0$. De bijbehorende eigenvector x_i van A is dan te verkrijgen door terugtransformatie:

$$x_i=P_2\ldots P_{n-1}v_i \quad . \quad \text{(vgl. opm. onder stelling 8.3, blz.191)}$$

Komen er in de nevendiagonaal van S nullen voor, dan kan men de matrix S verdelen in deelmatrices, die apart behandeld kunnen worden. Afgeleid kan worden dat dit optreedt als S meervoudige eigenwaarden heeft. Zo'n meervoudige eigenwaarde is dan enkelvoudige eigenwaarde van verschillende deelmatrices en de daarbij gevonden eigenvectoren staan loodrecht op elkaar.

De transformatie van Householder en Wilkinson, toegepast op asymmetrische matrices, leidt tot de zgn. Hessenberg-vorm of bijna-driehoeksvorm H d.w.z. $h_{ij}=0$ voor $j>i+1$. De vectoren v_r en P_r worden gekozen als boven om nullen in de $(r-1)$-ste rij te verkrijgen, maar wegens de asymmetrie, ontstaan er dan in het algemeen geen nullen in de overeenkomstige kolommen. De bepaling van de eigenwaarden wordt in dit geval gecompliceerder, ook al omdat ook niet-reële eigenwaarden kunnen optreden. Wegens de instabiliteit van het asymmetrische probleem is de te kiezen arithmetiek van het hoogste belang, wil de methode effectief zijn. Op deze zaken zullen we niet nader ingaan (zie N.W.,II §7.12).

"Afschatting" van de eigenwaarden van een matrix

Vaak wensen wij bij de bepaling van de eigenwaarden van een matrix te beschikken over grenzen, waarbinnen de eigenwaarden zich bevinden. Vele formules staan hiervoor ter beschikking. Zonder bewijs geven we hier een tweetal eigenschappen:

Zij $\lambda_i(A)$ de eigenwaarden van een matrix $A=(a_{ij})$ van de n^e orde, dan geldt:

1) $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(A)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

2) De modulus van elke eigenwaarde is hoogstens gelijk aan het maximum van de n getallen, ieder voorstellende de som van de absolute waarden van de elementen van elk der n rijen (kolommen).

§ 9. Lineaire transformaties (zie ook § 4)

1. Een homogene lineaire transformatie in R_n met als transformatiematrix een niet-singuliere matrix A:

$$\vec{y} = A\vec{x} \tag{9.1}$$

heeft de eigenschap, dat er een eeneenduidige correspondentie bestaat tussen punten X (plaatsvectoren $\vec{x}$) en punten Y (plaatsvectoren $\vec{y}$) in R_n. De transformatie voert lineaire ruimten in lineaire ruimten over (rechte lijnen in rechte lijnen, platte vlakken in platte vlakken, enz.). (9.1) is een bijzonder geval van de transformaties van de vorm

$$\vec{y} = A\vec{x} + \vec{v}. \tag{9.2}$$

Deze transformaties (9.2) met A niet-singulier bezitten bijv. ook de eigenschap, dat ze rechte lijnen in rechte lijnen overvoeren, etc. Men noemt ze <u>affiene transformaties</u>.

Opg. Bewijs, dat de affiene transformaties een groep vormen met de homogene lineaire transformaties als ondergroep.

Voorbeelden van affiene transformaties zijn:

1. De translatie $\vec{y} = \vec{x} + \vec{v}$ ($\vec{v}$ is een constante verplaatsingsvector).
2. De vermenigvuldigingstransformatie $\vec{y} = c\vec{x}$ (c = constante scalar).
3. De uitrekking (als de matrix A bijv. een diagonaalmatrix is).

Opm. Affiene transformaties zijn zelfs volledig gekarakteriseerd door de eigenschap, dat ze rechte lijnen in rechte lijnen overvoeren, want ook omgekeerd kan men bewijzen, dat iedere eeneenduidige transformatie van de ruimte R_n in zichzelf, die elke rechte lijn in R_n weer in een rechte lijn overvoert, noodzakelijk een affiene transformatie moet zijn.

Men onderscheidt verschillende soorten meetkunden, afhankelijk van de begrippen, die invariant blijven bij uitvoering van bepaalde transformaties.
Zo noemt men dat deel van de meetkunde, dat zich bezighoudt met begrippen invariant tegenover affiene transformaties, de <u>affiene meetkunde</u> en de invariante begrippen: affiene begrippen.

Opg. Bewijs, dat het begrip rechte lijn, plat vlak, evenwijdigheid, verhouding van evenwijdige vectoren affiene begrippen zijn.

Een begrip als "loodrecht" is geen affien begrip en behoort zoals we in § 5 reeds gezien hebben thuis in een gemetriseerde meetkunde (metrische meetkunde), waarbij als transformatiegroep, die transformaties optreden, die lengten en hoeken invariant laten (verplaatsingen), de zgn. groep van de algemene orthogonale transformaties, waarop straks nader zal worden ingegaan.

2. Coördinatentransformaties

We voeren in R_n naast de lineair onafhankelijke basis gevormd door de vectoren $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ een nieuwe basis in (of zoals men zegt een ander coördinatenstelsel), gevormd door de vectoren $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$. We zullen hier afspreken, dat van een vector $\vec{x}$ in R_n de kentallen t.o.v. de basis $\vec{e}_i$ zullen worden aangegeven met $x_1,x_2,\ldots,x_n$; die t.o.v. de nieuwe basis $\vec{f}_i$ met accenten: $x_1',x_2',\ldots,x_n'$. T.o.v. de basis $\vec{e}_i$ schrijven we voor de vector $\vec{x}$: $\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$; t.o.v. de basis $\vec{f}_i$ voor dezelfde vector $\vec{x}$: $\vec{x}' = (x_1',x_2',\ldots,x_n')$, d.i. de kentallenvector van $\vec{x}$ t.o.v. de basis $\vec{f}_i$.

Nu geldt dus: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i'\vec{f}_i$.

Zij nu (vgl. opgave 2, blz.76):

$$\vec{f}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\vec{e}_k, \tag{9.3}$$

dan geldt dus $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i'\vec{f}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\vec{e}_k =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki}x_k' \right) \vec{e}_i, \text{ zodat}$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}x_k'. \tag{9.4}$$

Is P de n-matrix, waarvan de kolommen worden gevormd door de kentallen van de basisvectoren $\vec{f}_i$ t.o.v. de oude (P dus niet-singulier), dan geldt dus volgens (9.4):

$$\vec{x} = P\vec{x}'. \tag{9.4)'}$$

(9.4) of (9.4)' stelt een homogene coördinatentransformatie met matrix P voor, d.w.z. een transformatie van de kentallen van een vector in R_n t.o.v. het ene coördinatenstelsel in die t.o.v. het andere stelsel. Ze vormen een deelverzameling van de algemene coördinatentransformaties:

(9.5) $\vec{x} = P\vec{x}' + \vec{u}$.

Hierin is $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$ de verplaatsingsvector van de oude oorsprong O in de nieuwe O' (met kentallen t.o.v. het oude stelsel).

Een affiene transformatie in R_n zal van een andere vorm worden bij invoering van een ander coördinatenstelsel.
Zij voor het gemak eerst ondersteld, dat de affiene transformatie A de oorsprong O invariant laat, terwijl dat ook het geval is met de coördinatentransformatie ($O = O'$). Dan geldt volgens (9.1) en (9.4)':
$\vec{y} = A\vec{x}$ en $\vec{x} = P\vec{x}'$, zodat, daar P niet-singulier:
$\vec{y}' = P^{-1}\vec{y} = P^{-1}A\vec{x} = P^{-1}AP\vec{x}'$.

Op de nieuwe basisvectoren wordt dus de nieuwe transformatiematrix A' uit A gevormd door de equivalentie-transformatie (zie § 8):

(9.6) $A' = P^{-1}AP$.

We hebben zodoende de volgende belangrijke stelling:

Stelling 9.1. Als A in R_n de matrix voorstelt van een homogene lineaire transformatie t.o.v. de basis $\vec{e}_i$ en A' die t.o.v. de basis $\vec{f}_i$, dan geldt $A' = P^{-1}AP$, waarin P de n-matrix is, waarvan de kolommen gevormd worden door de kentallen van de basisvectoren $\vec{f}_i$ t.o.v. de basis $\vec{e}_i$.

Opg. 1. Bewijs, dat de algemene affiene transformatie $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{v}$ bij overgang op een nieuw coördinatenstelsel d.m.v. de transformatie (9.5), op dit stelsel de vorm heeft $\vec{y}' = A'\vec{x}' + \vec{v}'$, waarin $A' = P^{-1}AP$ en $\vec{v}' = P^{-1}(A\vec{u} - \vec{u} + \vec{v})$.

Opg. 2. Indien in stelling 9.1 $\vec{f}_i$ n lineair onafhankelijke eigenvectoren voorstellen van de matrix A, dan heeft A' de diagonaalvorm. Bewijs dit.

Uit (9.6) en de stellingen 8.3 resp. 8.6 en 8.11 volgen de volgende stellingen:

Stelling 9.2. De eigenwaarden van een homogene lineaire transformatie (matrix) zijn invariant tegenover de invoering van nieuwe basisvectoren.

<u>Stelling 9.3</u>. Zijn de eigenwaarden van een homogene lineaire transformatie (matrix) alle verschillend of, zo dit niet het geval is, is de matrix niet defect (bijv. elke reële symmetrische matrix), dan kan deze door geschikte keuze van nieuwe basisvectoren op de diagonaalvorm worden gebracht.

Opm.1. In verband met de identificatie van de begrippen "homogene lineaire transformatie" en "matrix", spreken we ook van de eigenwaarden (en eigenvectoren) van een homogene lineaire transformatie (zie § 4, blz.59).

Opm.2. Een niet-homogeen stelsel niet-strijdige vergelijkingen is door een coördinaten-transformatie altijd over te voeren in een homogeen stelsel. Immers: zij bijv. $\vec{c} = A\vec{x}$ het stelsel en $\vec{x} = \vec{x}_0$ een particuliere oplossing, dan voert de coördinaten-transformatie $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}_0$ het stelsel over in $\vec{c} = A(\vec{x}'+\vec{x}_0) = A\vec{x}' + A\vec{x}_0 = A\vec{x}' + \vec{c}$, zodat $\vec{0} = A\vec{x}'$, een homogeen stelsel. De oplossingsruimte van het nieuwe stelsel is nu een lineaire vectorruimte geworden. Met evenveel recht zouden we dus ook bijv. kunnen spreken van de dimensie van de oplossingsruimte van een niet-homogeen stelsel. Het enige verschil tussen homogene stelsels en inhomogene stelsels, is dat bij oplosbaarheid van het inhomogene stelsel diens oplossingsruimte een particuliere oplossingsvector verschoven is t.o.v. de oplossingsruimte van het homogene stelsel (vgl. stelling 6.3).

3. <u>De "uitrekking" als homogene lineaire transformatie</u>

Als de transformatiematrix A van een homogene lineaire transformatie $\vec{y} = A\vec{x}$ in R_n t.o.v. een zekere basis in R_n een diagonaalmatrix is met alle diagonaalelementen a_{ii} positief, dan stelt de transformatie een <u>uitrekking</u> voor. Vectoren in de richting der basisvectoren worden door de transformatie met resp. a_{ii} vermenigvuldigd. Eventueel worden deze vectoren "samengedrukt" of blijven invariant ($0 < a_{ii} \leq 1$), doch ook dan spreekt men van een uitrekking.
Als men nu onder een <u>positief definiete</u> (symmetrische) matrix een reële symmetrische matrix verstaat, die slechts positieve eigenwaarden bezit (vgl. opg.8, blz.205), dan geldt de volgende stelling:

Stelling 9.4. Als de matrix A van een homogene lineaire transformatie $\vec{y} = A\vec{x}$ in R_n positief definiet symmetrisch is, dan stelt A een uitrekking voor.

Bewijs: Gesteld, dat de orthogonale matrix Q de matrix A diagonaliseert, dus $Q^{-1}AQ = D$ (volgens stelling 8.11 altijd mogelijk). Pas nu in R_n een homogene coördinatentransformatie toe met matrix Q (oude basisvectoren $\vec{e}_i$, nieuwe $\vec{f}_i$), dan geldt volgens (9.4)' : $\vec{x} = Q\vec{x}\,'$ of i.v.m. $Q^{-1} = Q^T$:

$$\vec{x}\,' = Q^{-1}\vec{x} = Q^T\vec{x}\text{ , zodat} \tag{9.7}$$

$$\vec{y}\,' = Q^T\vec{y} = Q^TA\vec{x} = Q^TAQ\vec{x}\,' = (Q^{-1}AQ)\vec{x}\,' = D\vec{x}\,'.$$

Ten opzichte van de nieuwe basis $\vec{f}_i$ heeft de met A equivalente matrix $Q^{-1}AQ$ dus de diagonaalvorm. Daar volgens stelling 8.3 deze diagonaalmatrix als diagonaalelementen de eigenwaarden van A heeft, zijn deze elementen positief, zodat de transformatie dus een uitrekking voorstelt.

Opm.1. Als A de transformatie is t.o.v. een orthonormaal stelsel (blz.215), is de nieuwe basis volgens (9.7) eveneens orthonormaal, daar Q orthogonaal is. De uitrekking vindt dan plaats in onderling orthogonale richtingen.

Opg. Bewijs dat deze richtingen overeenstemmen met de richtingen van de eigenvectoren van A, en de "uitrekkingsfactoren" met diens eigenwaarden.

Opm.2. Met betrekking tot de positief definiete symmetrische n-matrices $A = (a_{ij})$ geven we hier nog (zonder bewijs) de volgende stellingen:

Stelling 9.5. Een reële symmetrische matrix A is dan en slechts dan positief definiet als de n "diagonaal"-determinanten

$$d\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{positief zijn, } (k=1,\ldots,n).$$

Stelling 9.6. Een reële symmetrische matrix A is dan en slechts dan positief definiet, als er een niet-singuliere matrix Q bestaat, zodanig, dat $A = Q^TQ$.

Stelling 9.7. Iedere reële niet-singuliere matrix A kan geschreven worden als een product $A = PS$, waarin P orthogonaal en S positief definiet symmetrisch is (P en S worden bovendien eenduidig door A bepaald; een bewijs van deze stelling is vervat in het te geven voorbeeld op blz.232).

Opg. Bewijs, dat uit stelling 9.7 volgt, dat iedere reële niet-singuliere matrix A ook geschreven kan worden als $A=S_1P_1$, waarin S_1 = positief definiet symmetrisch en P_1 = orthogonaal.

4. Orthogonale transformaties

Hieronder verstaan we een homogene lineaire transformatie $\vec{y} = A\vec{x}$ in een reële vectorruimte R_n met de eigenschap, dat het origineel $\vec{x}$ en de beeldvector $\vec{y}$ dezelfde lengten hebben voor alle vectoren $\vec{x}$ in R_n, dus $|\vec{y}| = |A\vec{x}| = |\vec{x}|$.

Stelling 9.8. Nodig en voldoende voor het behoud van lengte in R_n bij uitvoering van de transformatie $\vec{y} = A\vec{x}$ is, dat het inwendig product$(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$invariant blijft voor ieder tweetal vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ in R_n.

Bewijs: "voldoende" direct duidelijk, want $|\vec{x}| = (\vec{x},\vec{x})^{\frac{1}{2}} = (\vec{y},\vec{y})^{\frac{1}{2}} = |\vec{y}|$.

"noodzakelijk": we maken gebruik van de volgende identiteit tussen lengten en inwendig product:

$$(9.8) \quad (\vec{x},\vec{y}) \equiv \tfrac{1}{2}\left\{ |\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2 \right\},$$

waaruit direct volgt, dat behoud van lengten, behoud van inwendig product impliceert.

Gevolg: Behoud van lengten impliceert ook behoud van hoeken tussen vectoren, d.w.z. de hoek θ tussen $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ is gelijk aan de hoek θ' tussen de vectoren $\vec{w}_1 = A\vec{v}_1$ en $\vec{w}_2 = A\vec{v}_2$. In het bijzonder blijft dus orthogonaliteit tussen vectoren invariant.

Opgave: Bewijs genoemde eigenschappen.

Stelling 9.9. Nodig en voldoende voor het behoud van lengte is, dat de matrix A t.o.v. de orthonormale basis $\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,\vec{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ orthogonaal is.

Bewijs: Als A orthogonaal is, geldt $AA^T = A^TA = I$ en dus

$(\vec{w}_1,\vec{w}_2) = \vec{w}_1{}^T\vec{w}_2 = (\vec{v}_1{}^T A^T)(A\vec{v}_2) = \vec{v}_1{}^T(A^TA)\vec{v}_2 = \vec{v}_1{}^T\vec{v}_2 = (\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, d.w.z. bij de gegeven orthonormale basis behoud van lengte.

Omgekeerd: Als $(\vec{w}_1,\vec{w}_2) = (\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ voor alle vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$, geldt $(\vec{w}_1,\vec{w}_2) = \vec{w}_1{}^T\vec{w}_2 = \vec{v}_1{}^T(A^TA)\vec{v}_2 = \vec{v}_1{}^T\vec{v}_2$. Zoals eenvoudig kan worden bewezen is de laatste gelijkheid voor alle vectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ slechts dan mogelijk als de matrix A^TA de eenheidsmatrix is, $A^TA = I$, dus A = orthogonaal.

Opgave. Bewijs, dat deze stelling ook geldt als i.p.v. de gegeven orthonormale basis een willekeurige andere orthonormale basis beschouwd wordt, ten opzichte waarvan de matrix A orthogonaal is.

In plaats van de invariantie van lengte tussen beeld en origineel, kan men een orthogonale transformatie dus ook definieren als een homogene lineaire transformatie in R_n, waarvan de transformatiematrix ten opzichte van een (en dus t.o.v. iedere) orthonormale basis orthogonaal is.

Opg. Bewijs dat de orthogonale transformaties in n veranderlijken een groep vormen (de orthogonale groep, een ondergroep van de affiene groep, zie blz. 224).

Als A een orthogonale matrix is geldt $A^TA = I$, dus $\det(A) = \pm 1$. Een orthogonale transformatie in R_n met matrix A t.o.v. een orthonormale basis heet eigenlijk (of direct) resp. oneigenlijk (of gespiegeld) al naar gelang $\det(A) = +1$ resp. $=-1$ is. Deze eigenschappen zijn invariant bij transformatie van de coördinaten indien wordt overgegaan op een andere orthonormale basis (bewijs dit). Een eigenlijke orthogonale transformatie van R_n noemt men een <u>draaiing</u> of <u>rotatie</u>. Deze definitie komt overeen met de definitie, dat in R_n een rotatie een homogene lineaire transformatie is, waarbij lengten (en dus ook hoeken) alsmede orientaties (i.v.m. het positief zijn van det(A)) invariant blijven.

Opg. Bewijs dat de directe orthogonale transformaties een ondergroep vormen van de orthogonale groep; de gespiegelde orthogonale transformaties vormen echter geen groep (waarom niet?).

Vb. Gevraagd alle orthogonale transformaties in R_2.
Opl.: Laat A een orthogonale transformatie zijn met matrix

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. De kolommen van A zijn de beeldvectoren $\vec{f}_1$ en $\vec{f}_2$ van de basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ (orthonormaal stelsel) van R_2. Lengte blijft invariant, zodat

$$1 = |\vec{e}_1|^2 = |\vec{f}_1|^2 = a_{11}^2 + a_{21}^2 \text{ en } 1 = |\vec{e}_2|^2 = |\vec{f}_2|^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2.$$

Stel $a_{11} = \cos\varphi$ en $a_{21} = \sin\varphi$, $a_{12} = \sin\psi$ en $a_{22} = \cos\psi$, dan is $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\psi \end{pmatrix}$.

Aangezien ook $\vec{f}_1$ en $\vec{f}_2$ orthogonaal zijn geldt:

$0 = \cos\varphi\ \sin\psi + \sin\varphi\ \cos\psi = \sin(\varphi+\psi) = 0$, dus $\psi = -\varphi$ of $\psi = \pi - \varphi$ (als we onderstellen $0 \leq \varphi, \psi \leq 180^0$). De matrix A wordt dus

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

In het eerste geval is $|A| = 1$, dus de transformatie eigenlijk orthogonaal; in het tweede geval is $|A| = -1$, en de transformatie dus gespiegeld orthogonaal. In het eerste geval is de transformatie een draaiing om O over een hoek φ : $\vec{y} = A\vec{x}$ uitgeschreven: $y_1 = x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi$, $y_2 = x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi$; in het tweede geval is eerst $\vec{e}_2$ t.o.v. de $\vec{e}_1$-as gespiegeld en daarna de transformatie over een hoek φ uitgevoerd. (Mag de volgorde van spiegeling en draaiing worden omgewisseld?)Ook in R_n komt $\det(A) = -1$ en A orthogonaal overeen met de uitvoering van een spiegeling en een draaiing.

Met behulp van stelling 9.7 kunnen we de meetkundige betekenis van een willekeurige niet-singuliere homogene lineaire transformatie (d.i. een hom.lin.transformatie met een niet-singuliere matrix als transformatiematrix) in R_n nader analyseren:
Stel eens dat T zo'n transformatie is en dat A t.o.v. een orthonormale basis de bijbehorende reële matrix is. Stel $A = PS$ (stelling 9.7), waarin P orthogonaal en S positief definiet symmetrisch. Laat verder Q een orthogonale matrix zijn, die S diagonaliseert (stelling 8.11) in D. Dan geldt
$Q^{-1}AQ = Q^{-1}PSQ = Q^{-1}PQQ^{-1}SQ = Q^{-1}PQD = UD$, waarin U de orthogonale matrix $Q^{-1}PQ$ is en D een diagonaalmatrix met diagonaalele-

menten positief (waarom dit laatste?).
Passen we nu in R_n een coördinatentransformatie toe met matrix Q, dan krijgen we een nieuw orthonormaal basisstelsel, ten opzichte waarvan de homogene lineaire transformatie T, die een vector $\vec{x}$ in een vector $\vec{y}$ overvoert, volgens (9.6) voorgesteld kan worden door $\vec{y} = Q^{-1}AQ\vec{x} = UI\vec{x}$. Dientengevolge is T equivalent met een uitrekking met matrix I (t.o.v. de nieuwe basis) gevolgd door een orthogonale transformatie met matrix U (eveneens t.o.v. de nieuwe basis). Daar iedere orthogonale transformatie in R_n een rotatie voorstelt of een rotatie gevolgd door een spiegeling (of omgekeerd) hebben we de volgende stelling:

<u>Stelling 9.10.</u> Iedere niet-singuliere homogene lineaire transformatie in R_n is óf equivalent met een rotatie gevolgd door een uitrekking óf met een rotatie gevolgd door een spiegeling en daarna door een uitrekking.

Opm. In verband met de opgave op blz.229 mag men de volgorde van rotatie (incl. evt. spiegeling) en uitrekking verwisselen.

Vb. Gegeven is in R_3 de matrix A: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Gevraagd wordt:

1°. A te schrijven als het product van een orthogonale matrix P en een positief definiete symmetrische matrix S (stelling 9.7).

2°. De meetkundige betekenis van de met A^T corresponderende homogene lineaire transformatie (stelling 9.10).

Opl. 1°. Volgens stelling 9.6 is $B = A^TA =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

positief definiet symmetrisch. Onderling orthogonale eenheidsvectoren in R_3 zijn $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0), (-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6})$, $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$, zijnde eigenvectoren van B zijn resp. behorende bij de eigenwaarden 4(2-voudig) en 1. Volgens blz.218 e.v. transformeert de orthogonale matrix Q met als kolommen bovenstaande eenheidsvectoren:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

B d.m.v. de transformatie $Q^{-1}BQ = Q^TBQ$ in de diagonaalmatrix $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Laat D_1 de diagonaalmatrix zijn met positieve diagonaalelementen, zodat $D_1{}^2 = D$, dus $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Stel $S = QD_1Q^T$, dan is S symmetrisch en positief definiet (waarom?). Dan geldt $S^2 = QD_1Q^TQD_1Q^T = QD_1D_1Q^T = QDQ^T = B = A^TA$. Als nu $P = AS^{-1}$ geldt dus:

$$P^TP = (AS^{-1})^TAS^{-1} = (S^{-1})^TA^TAS^{-1} = (S^{-1})^TS^2S^{-1} = (S^{-1})^TS = S^{-1}S = I.$$

P is dus orthogonaal, zodat A=PS met P orthogonaal en S positief definiet symmetrisch (stelling 9.7 is hiermede tevens bewezen). De gevraagde positief definiete symmetrische matrix S is dus

$$S = QD_1Q^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$ en de eigenlijke orthogonale matrix P:

$$P = AS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Opg. Controleer dat inderdaad geldt A=PS en in dit bijzondere geval zelfs ook A=SP.

2°. Stel T de homogene lineaire transformatie met matrix A^T t.o.v. de basis $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Een vector $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ wordt overgevoerd in een vector $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3)$ d.m.v. de transformatie

$$(9.9) \qquad \vec{y} = A^T\vec{x} \quad \text{of} \quad \begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = -x_1+x_2+x_3 \\ y_3 = -x_1-x_2+x_3 \end{cases}.$$

De eigenlijke orthogonale transformatie met matrix P^T (t.o.v. de basis $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$) stelt in R_3 een rotatie voor, welke alle vectoren in een zekere richting $\vec{r}$ (de richting der rotatie-as) invariant laat. Dat er in het algemeen zo'n richting $\vec{r}$ bestaat volgt uit:

$$|P^T-I| = |P^T-I|\,|P| = |P^TP-P| = |I-P| = (-1)^3|P-I| = -|P^T-I| ,$$

dus $|P^T-I| = 0$, P^T-I dus singulier, zodat er een vector $\vec{r}$ $(\neq \vec{0})$ is met $(P^T-I)\vec{r} = \vec{0}$ of $P^T\vec{r} = \vec{r}$.

De orthogonale matrix P^T heeft een eigenwaarde 1 met eigenvector (1,-1,1). In deze richting valt dus de rotatie-as, die bij de rotatie behoort. Het vlak $x_1-x_2+x_3=0$ door O, orthogonaal met de rotatie-as (waarom?), blijft bij de rotatie invariant. Om de draaiingshoek θ te vinden, waarover bij de rotatie gedraaid wordt, beschouwen we de vector (1,1,0) in dit invariante vlak. Deze vector gaat bij de rotatie over in de vector (1,0,-1). De cosinus van de hoek θ tussen de vectoren (1,1,0) en (1,0,-1) is dus gelijk aan $\frac{1.1+1.0+0.-1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ (zie o.a. pt h)blz.215). θ is wegens $0 \leq \theta < 180$ dus gelijk aan 60°.
Om de asrichting (1,-1,1) wordt dus over een hoek van 60° gedraaid in de richting van $(1,1,0) \rightarrow (1,0,-1)$. De pos.def. symm. matrix S heeft de eigenwaarden van D_1, dus 1 en 2 (tweevoudig). Hierbij behoort een "uitrekking" (vgl. stelling 9.4) met factor 1 in de richting (1,-1,1) van de rotatie-as (immers (1,-1,1) is een eigenvector van S behorende bij de eigenwaarde 1 en volgens de opgave blz.228 vindt in deze richting dus een uitrekking plaats met factor 1 (d.w.z. invariantie)), alsmede een uitrekking met factor 2 in alle richtingen gelegen in het vlak $x_1-x_2+x_3=0$, dat orthogonaal is met de rotatie-as (en de 2-dimensionale eigenruimte voorstelt van S bij de tweevoudige eigenwaarde 2).
De transformatie (9.9) is het (commutatieve) product van de rotatie

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ y_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \quad \text{en de uitrekking} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{5}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ y_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 \end{cases} .$$

(transformatie-matrix P^T) (transformatie-matrix S)

Dus damengevat: De homogene lineaire transformatie, die correspondeert met A^T stelt t.o.v. de basis $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ een rotatie voor met rotatie-as $(1,-1,1)$ over een draaiingshoek van 60° (in de richting $(1,1,0) \to (1,0,-1)$, gevolgd door een uitrekking met factor 2 in alle richtingen orthogonaal op deze rotatie-as, dus in alle richtingen gelegen in het vlak $x_1-x_2+x_3 = 0$. Men mag in dit geval ook de uitrekking vooraf laten gaan aan de rotatie, zoals meetkundig direct duidelijk is (algebraïsch correspondeert het met de commutativiteit van het product der matrices P en S of van P^T en S).

Opg. Bewijs, dat met de matrix A de homogene lineaire transformatie correspondeert, die het resultaat is van een draaiing om bovenstaande rotatie-as over een hoek van 60° in tegengestelde richting als in het gegeven voorbeeld, gevolgd door dezelfde uitrekking als boven (of in omgekeerde volgorde uitgevoerd).
Bewijs verder, dat met de matrix $B = A^TA$ de uitrekking correspondeert met een factor 4 in alle richtingen van het orthogonaal op de draaiingsas staand vlak $x_1-x_2+x_3 = 0$.

De orthogonale transformaties zijn homogeen lineair. Combineren we ze met de translaties, dus: $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{v}$, dan krijgen we de verzameling van de zgn. <u>verplaatsingen</u>. Hierin is A een orthogonale matrix en $\vec{v}$ een translatie vector. Dat deel der meetkunde waarin begrippen optreden die tegenover verplaatsingen invariant zijn (zoals lengten, hoeken, loodrechte stand), noemt men <u>metrische meetkunde</u> (te vergelijken met de gewone elementaire "schoolmeetkunde"). Een verplaatsing is meetkundig gezien een affiene transformatie in R_n, waarbij origineel en beeld congruente vormen hebben.

Opg.1. Bewijs dat de verzameling der verplaatsingen een groep vormen.
2. Bewijs, dat een n-matrix P dan en slechts dan orthogonaal is, als P behoort bij een homogene lineaire transformatie in R_n, waarbij een orthonormaal stelsel van n vectoren wordt overgevoerd wederom in een orthonormaal stelsel van n vectoren.

Is de matrix P, die bij een coördinatentransformatie (9.4) behoort eigenlijk orthogonaal (dus $|P| = +1$), dan spreekt men - naar analogie met overeenkomstige begrippen bij vectortransformaties (of punttransformaties) - van een <u>draaiing</u> of <u>rotatie</u> van het assenstelsel

of van de coördinaatassen (zie blz.230). Men kan ook zeggen, dat iedere draaiing van het assenstelsel wordt bewerkt door toepassing van een homogene lineaire transformatie, waarbij een orthonormale basis getransformeerd wordt wederom in een orthonormale basis, die op dezelfde wijze zijn georiënteerd, terwijl ook omgekeerd (zie opg.2 boven) iedere eigenlijke orthogonale coördinatentransformatie met corresponderende orthonormale bases, die op dezelfde wijze zijn georiënteerd, een draaiing voorstelt. [1]
Twee orthonormale bases hebben volgens afspraak dezelfde oriëntatie als ze in elkaar kunnen worden overgevoerd door een eigenlijke orthogonale transformatie (d.w.z. een draaiing). In een driedimensionale metrische ruimte gaat bij een draaiing een rechts (resp. links)-draaiend orthonormaal stelsel weer in een rechts (resp. links)-draaiend orthonormaal stelsel over.
Onder een <u>rechtsdraaiend assenstelsel</u> verstaat men hier in R_3 een stelsel lineair onafhankelijke basisvectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, zó gelegen, dat als men een kurketrekker over de kleinste hoek in de richting van $\vec{e}_1$ naar $\vec{e}_2$ draait, deze kurketrekker zich in de lengterichting ($\perp$ draaiingsrichting) beweegt in de richting van $\vec{e}_3$. Is dit laatste niet het geval, dan is het stelsel linksdraaiend.
In het algemeen spreekt men in een R_n van <u>positieve</u> en <u>negatieve oriëntatie</u> van n lineair onafhankelijke vectoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ in R_n, al naar het positief of negatief zijn van de determinant, waarvan de eerste t/m de n^e kolom-(of rijvector) <u>resp.</u> bestaan uit de vectoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.

<u>Opgaven</u>

1. Geef de matrix en de vergelijkingen van de volgende coördinatentransformaties:
   a) in R_2 basis $(1,-2), (2,2) \rightarrow (1,-5), (1,2)$.
   b) in R_3 basis $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rightarrow (4,3,2), (-1,0,1), (2,0,-1)$.
   c) in R_3 basis $(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) \rightarrow (3,-1,4), (2,1,2), (1,1,2)$.

----

1) Zoals vroeger reeds meermalen vermeld (zie bijv. blz.215), noemt men een coördinatenstelsel met een orthonormaal stelsel basisvectoren, veelal een Cartesisch coördinatenstelsel (rechthoekig stelsel met basisvectoren lengte 1).

2. Bepaal een orthonormale basis in R_3, waarvan de eenheidsvector $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ een der basisvectoren is. Hoe luidt de coördinatentransformatie van de basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ in deze nieuwe?

3. Bewijs, dat in R_3 de coördinatentransformaties van de E-basis: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ in elk van de volgende bases orthogonaal is. Onderzoek welke van deze transformaties een draaiing voorstelt.

   a) $\vec{f}_1 = (0,1,0)$, $\vec{f}_2 = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$, $\vec{f}_3 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$.

   b) $\vec{f}_1 = (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7})$, $\vec{f}_2 = (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$, $\vec{f}_3 = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$.

   c) $\vec{f}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\vec{f}_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{f}_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

4. Bepaal bij opgave 3 de transformatiematrices behorend bij de transformatie van

   a) de E-basis in de basis genoemd onder c) van opgave 3.

   b) de basis genoemd onder b) van opgave 3 in de E-basis.

   c) de basis genoemd onder c) van opgave 3 in die genoemd onder a) van opgave 3.

   Bewijs, dat al deze transformaties orthogonaal zijn. Welke ervan zijn rotaties?

5. Bewijs, dat in een R_n twee bases dezelfde oriëntatie hebben als de determinant, die de ene basis in de andere basis overvoert, positief is. Maak aanschouwelijk, dat het door een continue deformatie onmogelijk is een positief georiënteerd stelsel vectoren over te voeren in een negatief georiënteerd stelsel (en omgekeerd) zonder een van de vectoren bij de deformatie te laten vallen in de ruimte opgespannen door de andere vectoren.

5. Kwadratische vormen

Definities. Een kwadratische vorm f in $x_1, \ldots, x_n$ is een homogene kwadratische veelterm in n variabelen $x_1, \ldots, x_n$.

De matrix van een kwadratische vorm in $x_1, \ldots, x_n$ is de vierkante n-matrix $A = (a_{ij})$, waarin

a_{ii} = coëfficiënt van x_i^2

$2a_{ij}$ = coëfficiënt van $x_i x_j$ voor $i \neq j$.

Deze matrix is dus een symmetrische matrix.

Vb. De kwadratische vorm $x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2-2x_3^2$ heeft de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Zoals eenvoudig kan worden bevestigd geldt de volgende stelling:

Stelling 9.11. Is $A = (a_{ij})$ de matrix van een kwadratische vorm f, dan is f te schrijven als het matrixproduct

(9.10) $$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX,$$

waarin $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = de kolomvector gevormd door $x_1,\dots,x_n$.

Wensen we f te zien als functie van de vector X, dan schrijven we veelal f(X).

Onder de rang van f verstaan we de rang van de bijbehorende matrix A. f heet singulier resp. niet-singulier als A is singulier resp. niet-singulier. f heet reëel als alle coëfficiënten a_{ij} reëel zijn, waarbij we dan meestal zullen aannemen, dat tevens $x_1,\dots,x_n$ reëel zijn.

Transformatie van kwadratische vormen

We beschouwen een homogene coördinatentransformatie met matrix P, waarbij de oude veranderlijken zijn $x_1,\dots,x_n$ en de nieuwe $x'_1,\dots,x'_n$. Volgens (9.4) geldt $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) = P(x'_1,\dots,x'_n) = P\vec{x}'$ (det $P \neq 0$).

Zij nu weer $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, dan geldt dus

(9.11) $$X = PX',$$

zodat volgens (9.10) geldt:

(9.12) $$f = X^TAX = X'^TP^TAPX' = X'^TA'X',$$

indien $A' = P^TAP$.

Gevolg: f is uitgedrukt in de nieuwe coördinaten $x'_1,\dots,x'_n$ weer een kwadratische vorm. De bijbehorende matrix $A' = P^TAP$ is weer symmetrisch (waarom?).

Dus:

Stelling 9.13. Toepassing van coördinatentransformatie (9.11) op de kwadratische vorm f in $x_1,\dots,x_n$ met matrix A heeft tot gevolg dat f weer een kwadratische vorm wordt in $x'_1,\dots,x'_n$ met matrix $A' = P^TAP$.

Het stellen van $X' = Y$ en $A' = B$ geeft aanleiding tot de volgende definities:

Definities. Twee reële kwadratische vormen X^TAX en Y^TBY heten equivalent als de ene in de andere kan worden overgevoerd door middel van een reële homogene coördinatentransformatie. Zij heten orthogonaal equivalent als de ene in de andere kan worden overgevoerd door middel van een orthogonale coördinatentransformatie.

Opg. Bewijs, dat gewone equivalentie, zowel als orthogonale equivalentie van kwadratische vormen een reflexieve, symmetrische en transitieve relatie is (zie blz.161).

Men zegt nu ook, dat twee reële kwadratische vormen X^TAX en X^TBX equivalent zijn, als $B = Q^TAQ$, waarin ~~Q de~~ matrix is, die X^TAX in Y^TBY overvoert d.m.v. $X = QY$ (vgl. (9.11)).
Bestaat er een orthogonale matrix Q met deze eigenschap, dus $B = Q^TAQ = Q^{-1}AQ$, dan spreekt men van orthogonale equivalentie (vgl. blz.190). Ten aanzien van deze orthogonale equivalentie geldt de volgende stelling:

Stelling 9.14. Twee reële kwadratische vormen X^TAX en X^TBX zijn dan en slechts dan orthogonaal equivalent als hun matrices dezelfde eigenwaarden hebben met dezelfde multipliciteit.

Bewijs: Volgens stelling 8.11 zijn de symmetrische matrices A en B beide te diagonaliseren d.m.v. orthogonale matrices. in een diagonaalmatrix met als diagonaalelementen de eigenwaarden van A en B. Aangezien deze in waarde en multipliciteit overeenstemmen bestaan er dus orthogonale matrices P en Q, zodanig, dat

$$I = P^TAP = Q^TBQ \text{ en dus } B = (Q^T)^{-1}P^TAPQ^{-1} =$$

$$QP^TAPQ^T = (PQ^T)^TA(PQ^T) = R^TAR \text{ als } R = PQ^T.$$

Nu is $R^{-1} = (Q^T)^{-1}P^{-1} = (Q^{-1})^TP^{-1} = (Q^T)^TP^T = QP^T = R^T$, zodat ook R orthogonaal is. Daar $B = R^TAR$ zijn A en B dus orthogonaal equivalent.
Omgekeerd volgt uit stelling 8.3 en $B = R^TAR = R^{-1}AR$, dat A en B dezelfde eigenwaarden hebben met dezelfde multipliciteit.

Gevolg:

Stelling 9.15. Iedere reële kwadratische vorm X^TAX is orthogonaal equivalent met de vorm $\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\ldots+\lambda_n x_n^2$, waarin $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ de eigenwaarden zijn van A.

Bewijs: Volgens stelling 8.11 is er een orthogonale matrix P, die A diagonaliseert: $D = P^{-1}AP = P^TAP = P^TAP$. De vorm X^TAX is dan orthogonaal equivalent met de vorm $X^TDX = \lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\ldots+\lambda_n x_n^2$, q.e.d.

Heeft de kwadratische vorm X^TAX nu de rang r en is s het aantal positieve eigenwaarden van A, dan kan men de volgende stelling bewijzen over de splitsing van een reële kwadratische vorm in reële kwadraten (als gevolg van stelling 9.15):

Stelling 9.16. Iedere reële kwadratische vorm X^TAX is equivalent met de vorm $x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2$.

Ook geldt

Stelling 9.17. (Sylvester) Twee reële kwadratische vormen

$$f = x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2$$

$$\text{en } g = y_1^2+\ldots+y_{s'}^2-y_{s'+1}^2-\ldots-y_{r'}^2$$

zijn dan en slechts dan equivalent als s=s' en r=r'.

We noemen de vorm $x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2$ in st.9.16 de reële canonische vorm van iedere equivalente vorm X^TAX. Volgens stelling 9.16 en 9.17 geldt dus ook (vgl. blz.207):

Stelling 9.18. Twee reële kwadratische vormen zijn dan en slechts dan equivalent als ze dezelfde reële canonische vorm hebben.

Een ander gevolg is, dat de rang r zowel als het aantal s der positieve eigenwaarden van A invariant is bij coördinatentransformatie. Dit betekent, dat dus ook r-s invariant is en tevens s-(r-s) = 2s-r. Dit getal 2s-r, aangevende het verschil tussen het aantal positieve en negatieve eigenwaarden van A heet de signatuur van de kwadratische vorm X^TAX. Gevolg:

Stelling 9.19. Twee reële kwadratische vormen zijn dan en slechts dan equivalent als ze dezelfde rang en dezelfde signatuur hebben.

Een reële kwadratische vorm f(X) heet niet-negatief definiet als $f(X) \geq 0$ voor alle reële X; positief definiet als $f(X) > 0$ voor alle reële $X \neq 0$ (niet-positief definiet als $f(X) \leq 0$ en negatief-definiet als $f(X) < 0$ voor alle reële $X \neq 0$).

We geven nog de volgende stellingen:

Stelling 9.20. De kwadratische vorm f in n variabelen is dan en slechts dan positief definiet als de signatuur van de kwadratische vorm n is.

Stelling 9.21. f is dan en slechts dan niet-negatief definiet als de signatuur gelijk is aan de rang.

Volgens stelling 9.20 heeft een positief definiete kwadratische vorm signatuur n. Dus $n = 2s-r$, zodat $2r \leq n+r = 2s \leq 2r$ en dus $r=s=n$. Het aantal positieve eigenwaarden van A is dus n, zodat alle eigenwaarden van A dus positief zijn. Op blz.227 hadden we een positief definiete matrix dan ook als zodanig gedefinieerd.

Opm. Een ander criterium voor het positief definiet zijn van een symmetrische matrix of van een kwadratische vorm is neergelegd in stelling 9.5.

Bovenstaande theorie kan worden toegepast om kwadratische vormen door een coördinatentransformatie te transformeren in een vorm van eenvoudiger gedaante (canonische vorm). Beschouwen we een algebraïsche vgl. van de tweede graad in 3 veranderlijken, dan betekent dit transformatie van de vergelijkingen van kwadratische oppervlakken in R_3 (kwadrieken) in vergelijkingen waarin de gemengde termen tussen de veranderlijken ontbreken. Men kan dan zo komen tot een classificatie van de kwadrieken (reële en imaginaire ellipsoïden, hyperboloïden, paraboloïden (niet-singuliere kwadrieken); elliptische, hyperbolische en parabolische cylinders, kegels (singuliere kwadrieken); twee vlakken evt. samenvallend (ontaarde kwadrieken)), door beschouwing van signatuur en rang.

Deze analyse van de kwadrieken zal ons te ver voeren; we zullen de theorie hier slechts toepassen voor de classificatie van de algebraïsche vglen van de tweede graad in twee veranderlijken, voorstellende de zgn. kegelsneden in R_2.

Reductie van kwadratische vormen in 2 variabelen; classificatie van kegelsneden

Volgens stelling 9.15 kan iedere kwadratische vorm $f(X)$ in $X = (x_1, x_2)$, dus $f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ door een orthogonale coördinatentransformatie getransformeerd worden in de eenduidig bepaalde canonische vorm $\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2$, met λ_1 en λ_2 de (reële!) eigenwaarden van de symmetrische matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Er bestaat dus een orthogonale matrix P, en zoals eenvoudig kan worden aangetoond, zelfs een eigenlijke orthogonale matrix P met $P^TAP = P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. De transformatie is dus door een draaiing van het assenstelsel te bewerken.

Volgens stelling 8.5 (zie ook 8.12) bestaat P uit onderling orthogonale eigenvectoren van A. Volgens blz.225 zijn de <u>kolommen van P</u> juist de <u>kentallen van de nieuwe basisvectoren $\vec{f}_i$ t.o.v. de oude basis $\vec{e}_i$</u>. De nieuwe coördinaatassen lopen dus in de richting van de eigenvectoren van A. Volgens stelling 8.12 zijn er altijd 2 onderling orthogonale eigenvectoren, hetgeen bevestigt dat door een draaiing van het Cartesisch coördinatenstelsel in R_2 de kwadratische vorm f te transformeren is in de gegeven eenvoudige gedaante $\lambda_1 x_1'^2+\lambda_2 x_2'^2$, waarin dus de gemengde term ontbreekt.

Stellen we de kwadratische vorm f(X) gelijk aan een constante ($=-a_{33}$), dan stelt de vergelijking

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2^2 + a_{33} = 0 \tag{9.13}$$

een (nog niet algemene) kwadratische kromme voor in R_2 (een kegelsnede, evt. ontaard in rechte lijnen).

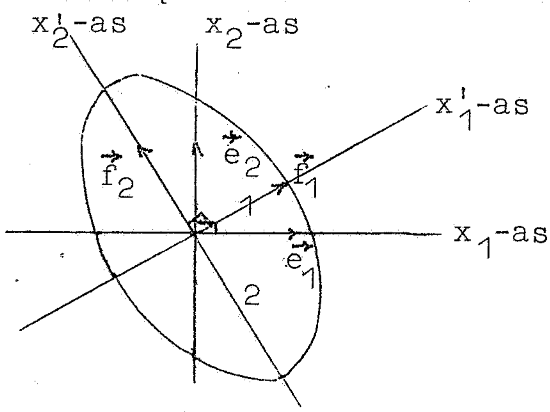
Hoe we deze vgl. (9.13) kunnen reduceren tot een van eenvoudiger gedaante, lichten we toe aan het volgende voorbeeld:

Vb. Een kromme in R_2 heeft (op een Cartesisch coördinatenstelsel) tot vergelijking $40x_1^2+36x_1x_2+25x_2^2-52 = 0$. Gevraagd de vergelijking van deze kegelsnede te transformeren in z'n eenvoudigste gedaante en te onderzoeken met wat voor soort kegelsnede we hier te maken hebben.

Opl.: We bepalen eerst de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix $A = \begin{pmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 25 \end{pmatrix}$, die bij de homogene kwadratische veelterm behoort van het linkerlid van de gegeven vergelijking. De eigenwaarden van A zijn de wortels van diens karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 40-\lambda & 18 \\ 18 & 25-\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda^2-65\lambda + 676 = (\lambda-52)(\lambda-13) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 52,\ \lambda_2 = 13.$$

Bijbehorende eigenvectoren zijn resp. (3,2) en (-2,3). Brengt men in deze richtingen de nieuwe coördinaatassen aan (voer dus een draaiing uit), dan is op deze nieuwe assen de vergelijking van de kegelsnede: $52x_1'^2 + 13x_2'^2 - 52 = 0$ of $x_1'^2 + \frac{x_2'^2}{4} = 1$, voorstellende een ellips met 0 als middelpunt en halve assen van lengte 1, resp. 2 (zie figuur).



Beschouwen we de zaak weer wat algemener, dan zullen we de vgl. (9.13) altijd kunnen overvoeren in een van het type

(9.14) $$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + a_{33} = 0,$$

waarin λ_1 en λ_2 de (reële!) eigenwaarden zijn van $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, en wel door draaiing van het (cartesische) coördinatenstelsel (zie stelling 9.15). De soort kegelsnede, die bij (9.14) behoort hangt af van het positief, negatief of nul zijn van λ_1, λ_2 en a_{33}. We onderscheiden daarom de volgende gevallen (+ = positief, - = negatief):

λ_1	λ_2	a_{33}		
+	+	-	reële ellips	niet-ontaarde kegelsneden
+	-	-	hyperbool	
-	-	-	imaginaire ellips	
+	+	0	lijnenparen (evt. samenvallend): ontaarde kegelsneden	
+	-	0		
+	0	-		
-	0	-		
+	0	0		

Opgave: Verifieer in deze tabel bij de gegeven tekencombinaties het er achter vermelde type kegelsnede. Geef van de 5 onderste gevallen aan met wat voor soort lijnenparen de tekencombinaties corresponderen.

Aangezien bij transformatie van de matrix van een kwadratische vorm (zie blz. 238 e.v.) de eigenwaarden van de matrix invariant blijven, kunnen we wat de tekens van λ_1 en λ_2 betreft uitgaan van de vorm (9.13). De eigenwaarden worden bepaald uit de karakteristieke vergelijking $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ of

$$(9.15) \qquad \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{12}) + a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = 0.$$

De discriminant van deze vierkantsvergelijking (9.15) in λ is gelijk aan $D = -4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) + (a_{11}+a_{12})^2 = 4a_{12}^2+(a_{11}-a_{22})^2$. Deze discriminant is dus $\geqslant 0$, hetgeen uiteraard ook het geval moet zijn, omdat een reële symmetrische matrix ook reële eigenwaarden moet hebben. Uit (9.15) volgt dat het product der eigenwaarden gelijk is aan $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Is dit positief, dan λ_1 en λ_2 hetzelfde teken (dus ellips en imaginair snijdend lijnenpaar); is het negatief dan λ_1 en λ_2 verschillend teken (hyperbool, reëel snijdend lijnenpaar); is het gelijk aan 0 dan een der eigenwaarden 0 (waarom niet beide?) (evenwijdig lijnenpaar, evt. samenvallend). We komen dan zo tot de indeling gegeven in de syllabus CR - Am blz.10,11 (uitgezonderd de parabool). De vermelde kegelsneden zijn alle zgn. <u>middelpuntskegelsneden</u>. Ze hebben namelijk alle een middelpunt en assen van symmetrie door het middelpunt. De parabool heeft geen middelpunt en ontbreekt dus in de gegeven tabel. Deze zal echter wel logisch te voorschijn komen als we de algemene vergelijking van de tweede graad waarvan (9.13) slechts een bijzonder geval is, nader analyseren (zie ook Cr-Am blz.10, 11).

Opm. Vindt men bij de analyse van de vgl. (9.13) als kegelsnede een hyperbool, dan is deze steeds reëel. De asymptoten-richtingen vinden we door het 0 stellen van het kwadratische gedeelte van (9.13): $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ (zie Analyse II, Meulenbeld en Baart, blz.168). Deze richtingen zijn orthogonaal als $a_{11} + a_{22} = 0$ (zie (9.15)); we hebben dan te maken met een <u>orthogonale hyperbool</u> (kenmerk $a_{11} = -a_{22}$, $a_{33} \neq 0$).
Geldt $a_{11} = a_{22}$ en is $a_{12} = 0$, $a_{33} \neq 0$, dan hebben we een kromme van de elliptische soort. (9.15) gaat dan over in $\lambda^2-2a_{11}\lambda + a_{11}^2 = (\lambda-a_{11})^2 = 0$. De eigenwaarden zijn dan dus gelijk hetgeen betekent, dat er een waaier van asrichtingen is in R_2. We hebben dan te maken met een <u>cirkel</u>. In een cirkelvergelijking ontbreekt de gemengde kwadratische term, terwijl de coëfficiënten van x_1^2 en x_2^2 gelijk zijn. In een voorbeeld zullen we hierop nog terugkomen.

Zij gegeven de algemene vergelijking van de tweede graad in x_1 en x_2 met reële coëfficiënten:

$$(9.16)\quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0.$$

Gevraagd door middel van een coördinaten-transformatie de vergelijking (9.16) te transformeren in z'n "eenvoudigste gedaante" en de bijbehorende krommen (kegelsneden) in R_2 te classificeren. Onderstel hier steeds, het gegeven (x_1,x_2)-stelsel Cartesisch.

Eerst gaan we in R_2 het coördinatenstelsel evenwijdig verschuiven, met het doel te proberen de termen van de eerste graad weg te werken. Zij de nieuwe oorsprong $O'(a_1,a_2)$, dan is de bijbehorende coördinatentransformatie voor deze translatie:

$$(9.17)\begin{cases} x_1 = x_1' + a_1 \\ x_2 = x_2' + a_2. \end{cases}$$

Op het nieuwe coördinatenstelsel wordt de vergelijking van de kromme (subst.(9.17) in (9.16):

$$a_{11}(x_1'+a_1)^2+2a_{12}(x_1'+a_1)(x_2'+a_2)+a_{22}(x_2'+a_2)^2+2a_{13}(x_1'+a_1)+2a_{23}(x_2'+a_2)+a_{33}= 0$$

of

$$(9.18)\begin{cases} a_{11}x_1'^2+2a_{12}x_1'x_2'+a_{22}x_2'^2+(2a_{11}a_1+2a_{12}a_2+2a_{13})x_1'+(2a_{12}a_1+ \\ 2a_{22}a_2+2a_{23})x_2'+(a_{11}a_1^2+2a_{12}a_1a_2+a_{22}a_2^2+2a_{13}a_1+2a_{23}a_2+a_{33})= 0. \end{cases}$$

Stellen we de coëfficiënten van de x_1' en x_2' in (9.18) gelijk aan 0, dan geeft dit de volgende lineaire vergelijkingen in a_1 en a_2:

$$(9.19)\begin{cases} a_{11}a_1+a_{12}a_2+a_{13} = 0 \\ a_{12}a_1+a_{22}a_2+a_{23} = 0. \end{cases}$$

Het stelsel (9.19) bestaat uit de zgn middelpuntsvergelijkingen voor de bepaling van a_1 en a_2. Immers, indien het gelukt a_1 en a_2

op te lossen uit (9.19), dan is de nieuwe oorsprong $O'(a_1,a_2)$ middelpunt van de kegelsnede (9.16). Op deze manier kunnen we dus bij een middelpuntskegelsnede (zie blz. 244) het middelpunt bepalen.

Opg. Bewijs dat als $f(x_1,x_2)$ gelijk is aan het linkerlid van (9.16) de twee vergelijkingen van (9.19) overeenstemmen met de vergelijkingen:

$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2)= 0$ en $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,x_2)= 0$ voor $x_1=a_1$ en $x_2= a_2$. (zie CR - Am blz. 10).

Heeft een kegelsnede een middelpunt, dan is dat middelpunt op te vatten als de pool van de oneigenlijke rechte t.o.v. de kegelsnede . Een lijn door het middelpunt heet een middellijn. Twee middellijnen heten toegevoegd als de een poollijn is van het oneigenlijke punt van de andere t.o.v. de kegelsnede.

(9.19) is dan en slechts dan oplosbaar naar a_1 en a_2 als de matrices

$A=\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$ en $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ dezelfde rang hebben (stelling 6.5, blz. 90). Dit is dan bijv. zeker het geval als A niet-singulier is: $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, want dan hebben A en B beide rang 2.

We onderscheiden nu 2 gevallen:

a) (9.19) oplosbaar: stellen we de constante term in (9.18) gelijk aan a'_{33} en is voldaan aan (9.19), dan wordt (9.18):

$$(9.20) \quad a_{11}x_1'^2+2a_{12}x_1'x_2'+a_{22}x_2'^2+a_{33}' = 0.$$

Op deze vergelijking is de reeds behandelde theorie van blz. 242-244 onveranderd toe te passen, want (9.13) is equivalent met (9.20). Een draaiing van het assenstelsel bewerkt dat (9.20) verder kan worden gereduceerd tot het type (9.14).

Opg. Bewijs, dat de draaiingshoek φ, waarover het coördinatenstelsel dient te worden gedraaid gelijk is aan $\frac{1}{2}$ arctg $\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$

(zie Cr - Am blz. 11).
Hoe kunnen we bijv. de vergelijking van de orthogonale hyperbool $x_1x_2 = 1$ (zie blz. 244) transformeren in de vergelijking $x_1'^2 - x_2'^2 = 2$?
(zie Cr - Am blz. 9).

De bijbehorende kromme behoort tot de op blz. 243 gegeven tabel .
Het middelpunt is $x_1' = 0, x_2' = 0$, corresponderende met (zie 9.17): $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$. De nieuwe coördinaatassen zijn volgens (9.20) <u>assen van symmetrie</u> (spiegelbeeldsymmetrie, een as van symmetrie is een middellijn, die loodrecht staat op z'n toegevoegde, zie (9.16)).
Opgave 1. Bewijs dat bij een cirkel toegevoegde middellijnen onderling orthogonaal zijn. Elke middellijn van een cirkel is dus symmetrie-as.

Opgave 2. Bewijs, dat als $H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ en $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ niet-singulier geldt : $a_{33}' = \frac{|H|}{|A|}$.

Is $|H| = 0$, dus H wel singulier, en $|A| \neq 0$, A niet-singulier, dan is de kegelsnede ontaard (in rechte lijnen) en omgekeerd. Bewijs dit.
We hebben dan te maken met een imaginair- of reëel-snijdend lijnen paar.

b) (9.19) niet oplosbaar: (9.16) is dan niet in de vorm (9.20) te transformeren. We hebben dan te maken met een kegelsnede zonder middelpunt.
(9.19) is dan en slechts dan onoplosbaar als de rang van A gelijk is aan 1 en die van B gelijk is aan 2(A is niet een nulmatrix, want we onderstellen (9.16) echt kwadratisch).
Teneinde (9.16) toch in een eenvoudige gedaante te transformeren, voeren we een zodanige draaiing van het coördinatenstelsel uit, dat de gemengde kwadratische term in de nieuwe vergelijking wegvalt m.a.w. we transformeren A eerst in de diagonaalvorm.
Hiertoe bepalen we de eigenwaarden van A uit diens karakteristieke vergelijking $|A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0 \rightarrow$

$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0$ (zie blz. 244). Daar $|A|=0$, geldt dus $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda=0 \rightarrow \lambda_1=a_{11}+a_{22}, \lambda_2=0$.

(Van een singuliere matrix is zeker een eigenwaarde gelijk aan nul, waarom?)

Deze waarden van λ worden de coëfficiënten van $x_1'^2$ en $x_2'^2$.
A transformeert zich dan (met behulp van een orthogonale matrix P met als kolommen onderling orthogonale eigenvectoren van A, zie blz. 242) in de matrix $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ en de vergelijking (9.16) wordt dus van het type

(9.21) $\lambda_1 x_1'^2+2a_{13}'x_1'+2a_{23}'x_2'+a_{33}=0$.

Opg. Bewijs dat $\lambda_1 \neq 0$ en $a_{23}' \neq 0$.

Door het nieuwe coördinatenstelsel evenwijdig te verplaatsen naar het punt $O'\left(-\frac{a_{13}'}{\lambda_1}, \frac{a_{13}'^2}{2\lambda_1 a_{23}'}-\frac{a_{33}}{2a_{23}'}\right)$, vinden we als vergelijking op het thans verkregen stelsel (ga dit na):

(9.22) $\lambda_1 x_1''^2+2a_{23}'x_2''=0$,

d.i. dus een <u>parabool</u> met de nieuwe oorsprong als top, de x_2''-as ($\parallel x_2'$-as) als as, en de x_1''- as ($\parallel x_1'$- as) als topraaklijn.

Zijn in dit geval b) a_{12} en a_{22} in (9.16) beide 0, dan heeft B slechts dan de rang 2, als $a_{11}\neq 0$ en $a_{23}\neq 0$.
Zijn a_{12} en a_{22} niet beide 0, dan heeft B, wegens $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=0$, alleen de rang 2 als $C=\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$ niet-singulier is; men kan bewijzen, dat in (9.21) a_{23}' gelijk is aan $a_{23}'=\frac{|C|}{\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}}$, dus $\neq 0$, als $|C|\neq 0$ (zie ook opg. boven). Indien a_{12} en a_{22} in (9.16) niet beide 0 zijn, is A singulier tezamen met C niet-singulier, dus de nodige en voldoende voorwaarde, opdat de kegelsnede voorgesteld door (9.16) een parabool is. Zijn a_{12} en a_{22} wel beide 0, dan is de kromme alleen dan een parabool als $a_{11}\neq 0$ en $a_{23}\neq 0$.
Hoe we van een parabool de asrichting en de as kunnen bepalen lichten we toe aan het volgende voorbeeld:

<u>Vb. 1</u> Vgl: $9x_1^2-24x_1x_2+16x_2^2-6x_1-17x_2+16 = 0.$

$|A|=\begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16\end{vmatrix} = 0$, $|C| = \begin{vmatrix} -12 & -3 \\ 16 & -8\frac{1}{2}\end{vmatrix} = 150 \neq 0$, dus kromme een parabool.

A heeft als eigenwaarden $\lambda_1=a_{11}+a_{22}= 25, \lambda_2= 0.$

De asrichting van de parabool wordt bepaald door de bij $\lambda_2= 0$ behorende eigenvector (4,3). $(x_1,x_2)=(4,3)$ is immers een oplossing van het aan 0 gelijkgestelde kwadratische gedeelte van de vgl: $9x_1{}^2-24x_1x_2+16x_2{}^2=0$. (Meetkundig betekent dit dat de parabool raakt aan de oneigenlijke rechte van het platte vlak,zie verderop). Een normaal-vector op de asrichting heeft dan de richting (3,-4), d.i. de richting van een eigenvector behorende bij $\lambda_1=25$.

We kunnen volgens de voorgaande theorie de top van de parabool vinden door bepaling van de oorsprong van het coördinatenstelsel, waarop de paraboolvergelijking de gedaante krijgt van (9.22). We doen het hier eens anders, namelijk door de parabool te snijden met een lijn in de richting (3,-4) zodanig, dat er twee samenvallende snijpunten zijn (samenvallend in de top).
Snijd dus de parabool met de lijn $4x_1+3x_2+q= 0$ en bepaal q zodanig, dat de gevormde vierkantsvergelijking ter bepaling van de snijpunten samenvallende wortels heeft. Enig rekenwerk geeft dan q=-5. De top heeft dan de coördinaten $(\frac{17}{25}, \frac{19}{25})$. en de parabool-as de parametervoorstelling: $\vec{x} = (\frac{17}{25}, \frac{19}{25})+ \lambda(4,3)$. Kiezen we O' in de top van de parabool, de x_1'-as langs de topraaklijn en de x_2'-as in de asrichting van de parabool ($\vec{e}_2{}'$ gericht naar het "parabool inwendige"), dan is de vergelijking van de parabool op het zo verkregen stelsel van het type (9.22):

$25x_1'^2-15x_2' = 0$ of $5x_1'^2-3x_2' = 0$ (ga dit na).

Thans geven we nog een aantal voorbeelden van niet-ontaarde middelpuntskegelsneden (hyperbool, ellips (cirkel)):

Vb. 2. Vgl: $2x_1^2+8x_1x_2+2x_2^2-4x_1-4x_2-1 = 0$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, $H = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$. Volgens opgave 2 blz 247 is de kegelsnede dus een niet-ontaarde middelpuntskegelsnede, dus een ellips of een hyperbool. De eigenwaarden van A zijn de wortels van $(2-\lambda)^2-16=0 \rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2=-2$. Volgens genoemde opgave is $a'_{33}=\frac{|H|}{|A|} = -\frac{28}{12} = -\frac{7}{3}$.

De vergelijking op nieuwe coördinaten wordt dus volgens (9.14): $6x_1'^2-2x_2'^2-\frac{7}{3}= 0$.

Volgens de tabel op blz 243 is de kegelsnede dus een hyperbool.

Uit de middelpuntsvergelijkingen (9.19): $\begin{cases} 2x_1+4x_2-2=0 \\ 4x_1+2x_2-2=0 \end{cases}$ met

als oplossing $(x_1,x_2)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

volgt het middelpunt $M= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ van de hyperbool. De asrichtingen liggen in de richting van de eigenvectoren (1,1) en (1,-1) van A. De asymptoten zijn de lijnen door M in de richtingen $(-2+\sqrt{3},1)$ en $(-2-\sqrt{3},1)$, d.z. de asymptotische richtingen bepaald uit de homogene kwadratische vergelijking $2x_1^2+8x_1x_2+2x_2^2= 0$. (zie blz. 244). De coördinatentransformatie van (x_1,x_2)- coördinaten in (x_1',x_2') - coördinaten luidt $\begin{cases} x_1\sqrt{2} = x_1' - x_2'+\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ x_2\sqrt{2} = x_1' + x_2'+\frac{1}{3}\sqrt{2} \end{cases}$.

Opm. De voorwaarde voor een orthogonale hyperbool is volgens blz. 244 : $a_{11}= - a_{22}, a_{33}\neq 0$, dus bijv. $x_1x_2- 1 = 0$ (zie opg. blz. 247..) stelt een orthogonale hyperbool voor.

Vb. 3 Vgl: $7x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-6x_1-12x_2-9 = 0$.

$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, $|H| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = -576$.

De kegelsnede is dus weer een ellips of een hyperbool.

De eigenwaarden van A bepalen we uit $(7-\lambda)(4-\lambda)-4=0 \rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=8$.
$a'_{33}=\frac{|H|}{|A|} = -\frac{576}{24} = -24$.

De nieuwe vergelijking wordt dus volgens (9.14) : $3x_1'^2+8x_2'^2-24 = 0$.
Volgens de tabel op blz. 243 is de kromme dus een ellips. Het middelpunt M volgt uit (9.10): $\begin{cases} 7x_1-2x_2-3 = 0 \\ -2x_1+4x_2-6 = 0 \end{cases} \rightarrow M\ (1,2)$.

De as-richtingen van de ellips vinden we uit de richtingen der eigenvectoren van A, dus (1,2) resp. (2,-1).

De coördinaten-transformatie luidt $\begin{cases} x_1\sqrt{5} = x_1'-2x_2'+\sqrt{5} \\ x_2\sqrt{5} = 2x_1'+x_2'+2\sqrt{5} \end{cases}$.

Op de nieuwe coördinaten is dus de vgl. van de ellips $3x_1'^2+8x_2'^2-24= 0$ of $\frac{x_1'^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{x_2'^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$. Dus lengte halve grote as: $2\sqrt{2}$, lengte halve kleine as: $\sqrt{3}$.

Vb.4. Vgl. $x_1^2+x_2^2-2x_1-4x_2-11 = 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,\quad |H| =\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{vmatrix} = -16.$$

De eigenwaarden van A vallen samen, zijn gelijk aan 1. Dit betekent, dat bij alle richtingen in het platte vlak symmetrieassen behoren. Blijkbaar is de kegelsnede dan dus een cirkel (in overeenstemming met blz. 244, want $a_{11}=a_{22}=1$ en $a_{12}=0$ zie ook opg. 1, blz 247)). Het middelpunt M volgt uit de middelpuntsvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1-1 = 0 \\ x_2-2 = 0 \end{cases} \rightarrow M(1,2).$$

De coördinaten-transformatie (translatie) luidt $\begin{cases} x_1=x_1'+1 \\ x_2=x_2'+2 \end{cases}$.

$a'_{33}=\frac{|H|}{|A|} = -16$. De nieuwe vergelijking luidt $x_1'^2+x_2'^2-16 = 0$.

Deze vergelijking volgt eigenlijk direct uit de gegeven vgl. want $x_1^2+x_2^2-2x_1-4x_2-11= (x_1-1)^2+(x_2-2)^2-16=0$. De straal R van de cirkel is $R = 4$.

Opg. Bewijs, dat $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$ bij een niet ontaarde kegelsnede juist de voorwaarde is voor een cirkel.

Opm. 1 Zoals uit het voorgaande volgt is bij samenvallende eigenwaarden van A elke richting een richting van een symmetrie-as van de betreffende kegelsnede (een cirkel). Is de kegelsnede nu een ellips, die "bijna" een cirkel is, dan zijn de eigenwaarden van A "bijna" aan elkaar gelijk. Het is begrijpelijk, dat in dit geval de as-richtingen van de ellips nummeriek moeilijk zijn te bepalen. Deze asrichtingen zijn ook juist de richtingen van de eigenvectoren van A. Het is inderdaad een bekend feit, dat bij bijna samenvallende eigenwaarden van een matrix, de precisie waarin de eigenvectoren kunnen worden bepaald, zeer sterk afhankelijk is van het relatieve verschil der eigenwaarden (zie syll. N.W. II, hfdst.7).

2. Hebben we te maken met een niet-ontaarde kegelsnede, dus een hyperbool, ellips of parabool, dan geldt voor de

hyperbool : $|A| < 0$
ellips : $|A| > 0$
parabool : $|A| = 0$ (zie Cr-Am, blz. 10,11).

Immers : $|A|$ is het product van de eigenwaarden λ_1 en λ_2 van A (zie opg. 4 blz. 189). Volgens de tabel op blz. 243 geeft $|A| < 0$ (>0) een hyperbool (ellips). Volgens blz.248 is $|A| = 0$ bij een niet-ontaarde kegelsnede juist de voorwaarde voor een parabool.

We kunnen deze onderscheiding ook nog langs andere weg vinden. Wij schrijven hiertoe de algemene vergelijking (9.16) in homogene coördinaten (zie bijv.blz. 154) door te stellen

$x_1=\frac{X_1}{X_0}$, $x_2=\frac{X_2}{X_0}$, (dus $x_1=X_1$ en $x_2=X_2$ als $X_0= 1$).

(9.16) gaat dan over in de homogene vergelijking:

(9.23) $a_{11}X_1^2+2a_{12}X_1X_2+a_{22}X_2^2+2a_{13}X_1X_0+2a_{23}X_2X_0+a_{33}X_0^2=0.$

De oneigenlijke punten (de "punten in het oneindige") van de kromme zijn haar snijpunten met de oneigenlijke rechte (de "rechte in het oneindige") die de vergelijking heeft $X_0=0$. De homogene coördinaten van deze snijpunten vinden we dus uit de vergelijkingen $X_0=0$ en $a_{11}X_1^2+2a_{12}X_1X_2+a_{22}X_2^2=0$. Deze laatste vergelijking luidt in niet-homogene coördinaten:

(9.24) $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0.$

Deze vergelijking ontstaat door het tweede graadsgedeelte van (9.16) gelijk aan 0 te stellen. De discriminant van dit tweede graadsgedeelte is $D = a_{12}^2-a_{11}a_{22}= -|A|$.

a) Is $D>0$, dus $|A|<0$, dan heeft de kromme 2 oneigenlijke punten. Ze is dan van de hyperbolische soort (hyperbool of twee reëel snijdende lijnen).
b) Is $D<0$, dus $|A|>0$, dan heeft de kromme geen oneigenlijk punt. De kromme is van de elliptische soort (ellips(als bijzonder geval bijv. een cirkel) of twee imaginaire lijnen die elkaar reëel snijden). We onderscheiden reële en imaginaire ellipsen. De laatste hebben geen enkel reëel punt, bijv. de imaginaire cirkel $x_1^2+x_2^2+1=0$.

De richtingen (1,i) en (1,-i) (waarbij $i^2=-1$) zijn de zgn. isotrope richtingen ; in deze richtingen liggen de oneigenlijke verre punten van een willekeurige cirkel.
Het imaginaire lijnenpaar heeft 1 reëel punt(het gemeenschappelijke snijpunt) bijv. $x_1^2+x_2^2=0$, enige reële punt $(x_1,x_2)=(0,0)$.
c) $D=0$, dus $|A|=0$. Het linkerlid van (9.24) is dan een volkomen kwadraat. De kromme heeft één oneigenlijk punt (twee samengevallen oneigenlijke punten). De kromme is van de parabolische soort ; ze is een parabool of bestaat uit twee evenwijdige (of samenvallende) rechten (indien niet samenvallend dan reëel of imaginair evenwijdig lijnenpaar).

Een kromme van de hyperbolische soort snijdt dus de oneigenlijke rechte in twee oneigenlijke reële punten((9.24) heeft een positieve discriminant). Een kromme van de elliptische soort snijdt de oneigenlijke rechte niet reëel((9.24) heeft een negatieve discriminant). Een kromme van de parabolische soort raakt aan de oneigenlijke rechte ((9.24) heeft een discriminant, die gelijk is aan 0).

Bij een kromme van de hyperbolische soort bepaalt (9.24) juist de beide <u>asymptotische richtingen</u> (vergelijk Meulenbeld en Baart, II, blz. 163, zie ook blz. 244). De <u>asymptoten</u> zijn de lijnen in deze richtingen gaande door het middelpunt M. Bij een reeël lijnenpaar vallen de "asymptoten" met deze lijn samen; het middelpunt van de "kegelsnede" is het snijpunt van deze lijnen.

<u>Ontaarde kegelsneden.</u>

a) Uit vgl. (9.20) volgt, dat bij $|A| \neq 0$, dus bij een kromme van de hyperbolische of elliptische soort, ontaarding optreedt (d.w.z. dat de kromme bestaat uit rechte lijnen), als $a'_{33} = \frac{|H|}{|A|} = 0$ (zie opgave blz.247), dus $|H| = 0$ en omgekeerd.
Ontaarding in een snijdend lijnen-paar treedt dus bij $|A| \neq 0$ dan en slechts dan op als $|H| = 0$. Bij $|A| < 0$: twee reële snijdende lijnen, bij $|A| > 0$: twee imaginaire lijnen met reeël snijpunt.

<u>Vb.5.</u> Vgl. $x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 11x_2 - 15 = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = -1^3/_4 \quad , \quad |H| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 5\frac{1}{2} \\ 1 & 5\frac{1}{2} & -15 \end{vmatrix} = 0.$$

De kegelsnede is dus ontaard in twee reële elkaar snijdende rechten. Het snijpunt, d.i. het middelpunt van de "kegelsnede", bepalen we weer uit de middelpuntsvergelijkingen (9.19):

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 5\frac{1}{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}\right) .$$

De richtingen van de snijdende lijnen worden bepaald uit $x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$.
$\longrightarrow (2,1)$ en $(1,-1)$. De lijnen zijn $x_1 - 2x_2 + 5 = 0$ en $x_1 + x_2 - 3 = 0$.
De gegeven vgl. is juist het product van deze twee vergelijkingen.

Vb. 6. Vgl. $x_1^2+x_2^2-6x_1+9 = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad , \quad |H| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dus twee imaginaire lijnen met reëel snijpunt.

Het snijpunt bepalen we uit $\left.\begin{aligned} x_1 - 3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow (\ 3,0\ )$.

De lijnen hebben de isotrope richtingen $(1,i)$ en $(1,-i)$. De lijnen hebben de vergelijkingen $x_1+ix_2-3 = 0$ en $x_1-ix_2-3 = 0$. Deze lijnen hebben inderdaad als reëel snijpunt $(3,0)$. De gegeven vgl. is weer het product van deze twee vergelijkingen.

b) Is $|A| = 0$, dan treedt in dit parabolische geval ontaarding (twee // (evt. samenv.) lijnen) op als de "kegelsnede" wel over minstens één middelpunt beschikt, m.a.w. als (9.19) oplosbaar is, d.w.z. A en B beide de rang 1.[1] Er is dan een lijn van middelpunten. Deze lijn ligt "midden tussen" de twee evenwijdige lijnen en zal er alleen mee samenvallen als de beide lijnen samenvallen. Van beide gevallen geven we nog een voorbeeld.

Vb. 7. Vgl. $4x_1^2+12x_1x_2+9x_2^2+4x_1+6x_2-3 = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ heeft de rang } 1.$$

Middelpuntsvergelijking (9.19): $4x_1+6x_2+2 = 0 \rightarrow 2x_1+3x_2+1 = 0$.

Aangezien deze lijn midden tussen de twee evenwijdige lijnen ligt is $(2x_1+3x_2+1+c)\times(2x_1+3x_2+1-c)$ identiek gelijk aan het linkerlid van de gegeven vergelijking, zodat $(1+c)(1-c) = -3$ en dus $c = \pm 3$.

De kegelsnede is dus ontaard is de twee reële evenwijdige lijnen $2x_1+3x_2+4 = 0$ en $2x_1+3x_2-2 = 0$.

Was de constante in de gegeven vergelijking i.p.v. -3 gelijk aan $+2$ geweest, dan wordt $c = \pm i$ en de vergelijkingen der twee evenwijdige imaginaire

---

1) In dit geval is dus ook $|H| = 0$ (zie blz. 246,247).

lijnen: $2x_1+3x_2+1+i = 0$ en $2x_1+3x_2+1-i = 0$.

Vb. 8. Vgl. $9x_1^2+16x_2^2-24x_1x_2-30x_1+40x_2+25 = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -12 & -15 \\ -12 & 16 & 20 \end{pmatrix} \text{ heeft de rang 1.}$$

Middelpuntsvergelijking (9.19): $9x_1-12x_2-15 = 0$ $3x_1-4x_2-5 = 0$.
Aangezien $(-5)^2 = 25$ is de kegelsnede ontaard in de twee samenvallende lijnen $3x_1-4x_2-5 = 0$.
Inderdaad is het linkerlid van de gegeven vergelijking gelijk aan $(3x_1-4x_2-5)^2$.

Opgaven

1. Gegeven is de functie $f(x_1,x_2) = 7x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ met bijbehorende symmetrische matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Geef de eigenwaarden van de bij A behorende homogeen lineaire vectortransformatie.
   b) Eveneens de eigenvectoren.
   c) Staan deze vectoren loodrecht op elkaar?
   d) Draai het assenstelsel zo, dat de nieuwe basisvectoren in de richting dezer eigenvectoren vallen. Druk de oude coördinaten (x_1,x_2) in de nieuwe (x_1',x_2') uit.
   e) Ook omgekeerd (x_1',x_2') in (x_1,x_2).
   f) Hoe transformeert zich $f(x_1,x_2)$?
   g) En hoe als we aan f nog toevoegen de termen $4x_1+3x_2-13$?

2. Bepaal voor verschillende waarden van a aard en ligging van de kegelsneden gegeven door de vergelijking: $x_1^2+4x_2^2-4x_1+3x_2+4a = 0$.

3. Dezelfde vraag voor de vgl. $4x_1^2-x_2^2-2x_2-a = 0$.

4. Dezelfde vraag voor de vgl. $x_1^2+4ax_2-4x_1 = 0$.

5. Bepaal aard en ligging van de kegelsneden met vergelijking:

   a) $5x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2+2x_1+2x_2+5 = 0$.

b) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-2x_1+4x_2+1 = 0.$

c) $52x_1^2-72x_1x_2+73x_2^2+40x_1-220x_2+100 = 0$.

d) $2x_1^2+6x_1x_2+9x_2^2-2x_1-6x_2+1 = 0.$

e) $11x_1^2-24x_1x_2+4x_2^2-22x_1+24x_2+6 = 0.$

f) $9x_1^2-6x_1x_2+x_2^2+42x_1-14x_2+40 = 0.$

g) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1-2x_2+2 = 0.$

h) $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+12x_1+6x_2+9 = 0.$

i) $16x_1^2+9x_2^2-24x_1x_2-17x_1+6x_2+16 = 0.$

j) $x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2+6x_1-4x_2+3 = 0.$

k) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-1 = 0.$

l) $x_1^2+x_2^2-14x_1+2x_2+41 = 0.$

m) $x_1^2+x_2^2 = 0.$

n) $x_1^2+x_2^2+4 = 0.$

6. Onderzoek de kegelsnede, voorgesteld door de matrixvergelijking:

$$(x_1 x_2 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Schrijf de algemene vergelijking (9.16) in deze vorm.

7. Bepaal van de hyperbolen uit opgave 3 de asymptoten.

8. Toe hetzelfde voor de hyperbool: $x_1^2+x_1x_2-6x_2^2+10x_1+5x_2= 0.$

9. Bepaal a zo, dat de vergelijking

$x_1^2+ax_1x_2+4x_2^2+10x_1-20x_2-a = 0$

een parabool voorstelt. Bepaal vervolgens van deze parabool de as, de top en de parameter (p).

10. Gemengde herhalingsvraagstukken

1) Stel S is de deelruimte van R_3, opgespannen door de vectoren (1,2,-1) en (2,1,0), en T de deelruimte opgespannen door (1,-1,0) en (0,1,1).
Bepaal een vector $\neq$ nulvector behorende tot $S \cap T$ (doorsnede).
Uit welke vectoren bestaat $S \cup T$ (vereniging, ook wel aangegeven door S+T)?

2) Bewijs, dat als twee deelruimten S en T van R_n onderling orthogonaal zijn (zie opg. 5, blz.220) de doorsnede $S \cap T$ slechts bestaat uit de nulvector.

3) Geef een meetkundige interpretatie van het Gram-Schmidt orthogonalisatieproces in R_2 en R_3 (blz.216).
Construeer met behulp van dit proces een orthonormale basis uitgaande van de basis (2,4,3), (0,4,2), (3,3,7).
Bepaal in R_4 twee onderling orthogonale vectoren, die orthogonaal zijn met de ruimte opgespannen door de vectoren (1,0,1,0) en (2,4,3,1).

4) Als in een gemetriseerde ruimte de lengte van de vector $\vec{x}$ wordt voorgesteld door $|\vec{x}|$, te bewijzen dat $|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ dan en slechts dan geldt, als de vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ lineair afhankelijk zijn.

5) Gegeven zijn in R_3 de vlakken:

U: $2x + y + 2z - 1 = 0$, V: $6x - 4y - z - 5 = 0$,
W: $x + 3y + z + 2 = 0$.

Gevraagd:

1) De vergelijking van het vlak door de oorsprong O, gaande door de snijlijn s van U en V.
2) De vergelijking van het vlak door s loodrecht op W.
3) De coördinaten van het snijpunt S van s en W.
4) De vergelijking van het vlak door S loodrecht op de vector (1,2,-3).

5) De vergelijkingen van de projecterende vlakken van s.
6) De hoeken te bepalen, die s maakt met de coördinaatassen en de coördinaatvlakken.
7) Te bewijzen, dat S ligt in het vlak $x + y + z = 0$.
8) Te onderzoeken of dit laatste vlak tot de vlakkenschoof behoort, bepaald door U,V en W.
9) Te onderzoeken welke vlakken van deze vlakkenschoof door de oorsprong gaan. Wat vormen deze vlakken?
10) De afstand van de oorsprong tot de vlakken U, V en W.
11) De snijpunten te bepalen van de lijn $\vec{x} = (0,1,0) + \lambda(0,0,1)$ met U, V en W.

Evenzo van de lijn gegeven door $\begin{cases} 7x + 21y = -19 \\ 7z = 5. \end{cases}$

6) Zij in R_3 OX,OY en OZ de drie coordinaatassen van een Cartesisch coördinatenstelsel.
We draaien eerst dit stelsel (in positieve richting) over een hoek ϑ om de as OZ, zodat het stelsel ontstaat met coördinaatassen OX',OY',OZ' =(OZ).
Daarna wordt dit stelsel gedraaid over een hoek φ om OX' in de positie OX"(=OX'),OY",OZ".
Bewijs dat tussen de coördinaten (x,y,z) en (x'',y'',z'') van een punt in R_3 het verband bestaat

$$\begin{cases} x = x'' \cos\vartheta - y'' \sin\vartheta\cos\varphi + z'' \sin\vartheta\sin\varphi \\ y = x'' \sin\vartheta + y'' \cos\vartheta\cos\varphi - z'' \cos\vartheta\sin\varphi \\ z = \qquad\qquad y'' \sin\varphi \quad + z'' \cos\varphi . \end{cases}$$

Bewijs, dat de matrix, die bij deze coördinatentransformatie behoort, eigenlijk orthogonaal is.

7) Bewijs, dat in R_3 de lijnen $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ en $\vec{x} = \vec{c} + \mu\vec{d}$ dan en slechts dan elkander kruisen als de drie vectoren $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ lineair onafhankelijk zijn.

8) Gegeven zijn in R_4 met Cartesisch coördinatenstelsel de vectoren $\vec{v} = (2,1,3,0)$ en $\vec{w} = (1,2,2,4)$.
Bereken de kleinste vector $\vec{r}$ van de vorm $\vec{r} = \vec{p} + m\vec{q}$ als m een parameter is.
Hoe groot is de hoek tussen $\vec{q}$ en $\vec{r}$?

9) a) Bepaal de matrix van de hom..lin.transformatie, die in R_3 (1,0,1) overvoert in (5,-1,2) , (1,1,0) in (5,3,4) en (1,2,3) in (1,-5,-2).

b) Heeft deze matrix een inverse?

c) Van welke vectoren verandert de richting niet door de transformatie met matrix $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$?

10) Bewijs in R_3:

a) $(\vec{x} \times \vec{y}).\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

b) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x}.\vec{z})\,\vec{y} - (\vec{y}.\vec{z})\vec{x}$.

c) $(\vec{x} \times \vec{y}).\,(\vec{z} \times \vec{u}) = (\vec{x}.\vec{z})\,(\vec{y}.\vec{u}) - (\vec{x}.\vec{u})\,(\vec{y}.\vec{z})$.

d) De parametervoorstelling van de loodlijn door $\vec{p}$[1] op het vlak door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is;

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

e) De vergelijking van het vlak door $\vec{p}$ met $\vec{a}$ en $\vec{b}$ als richtingsvectoren is:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \,.\, (\vec{x} - \vec{p}) = 0 .$$

f) De vergelijking van het vlak door $\vec{a}, \vec{b}$, en $\vec{c}$ is:

$$\{(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})\}.\,(\vec{x} - \vec{c}) = 0.$$

g) De projectie van $\vec{x}$ op de lijn $\vec{p} + \lambda\vec{a}$ is in lengte gelijk aan $\frac{1}{|\vec{a}|}(\vec{x}\,.\,\vec{a})$.

h) De afstand d tussen de kruisende lijnen l en m,

l: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$ en m: $\vec{x} = \vec{q} + \mu\vec{b}$

is gelijk aan

$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}).(\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

11) a) Bewijs, dat de getransponeerde zowel als de inverse (zo deze bestaat) van een symmetrische, antisymmetrische (alternerende), orthogonale matrix, weer resp. symmetrisch, antisymmetrisch, orthogonaal is.

b) Bewijs, dat een orthogonale matrix altijd niet-singulier is en een antisymmetrische (alternerende) van oneven orde altijd singulier.

c) Geef een voorbeeld van een symmetrische orthogonale matrix ($\neq$ eenheidsmatrix).

1) $\vec{p}$ is plaatsvector van een punt P

12) a) Bewijs dat het product van de eigenwaarden van een matrix gelijk is aan de determinant van de matrix, terwijl de som gelijk is aan de spoor.

b) Bewijs, dat een vierkante matrix dan en slechts dan singulier is als 0 een eigenwaarde is.

c) Bewijs, dat als A niet-singulier, de eigenwaarden van A^{-1} de inversen zijn van die van A. Wat is het verband tussen de eigenvectoren van A^{-1} en die van A?

d) Bewijs dat elke eigenruimte van een matrix een lineaire vectorruimte is (blz. 200).

e) Bewijs, dat elke eigenvector van een matrix A ook een eigenvector is van f(A), als f een veelterm is in A (blz. 208 e.v.)

f) Wat voor effect heeft het vermenigvuldigen van een matrix met een zekere factor op de eigenwaarden en eigenvectoren van die matrix?

g) Hoe veranderen de eigenwaarden van een matrix als men bij de diagonaal-elementen een constante optelt?

13) a) Bewijs, dat als A een alternerende n-matrix is en $I = I_n$ de matrix I-A niet-singulier is.

b) Bewijs, dat de matrix $B = (I+A)\ (I-A)^{-1}$ dan en slechts dan orthogonaal is, als A alternerend (zie opg.27, blz.81).

c) Bewijs, dat elke nilpotente matrix defect is en singulier (blz.204).

14) Gegeven is een reële (m,n)-matrix A en een reële m-vector b met bijbehorend stelsel vergelijkingen Ax=b.

Bewijs, dat

a) de matrix A^TA een symmetrische matrix is en positief semidefiniet (d.w.z. alle eigenwaarden ≥ 0);

b) A^TA dan en slechts dan positief definiet is (d.w.z. alle eigenwaarden > 0) als A^TA niet-singulier is d.w.z. r=rang van A=n $\leq$ m;

c) van het stelsel vergelijkingen de beste oplossingsvector x in de zin van de "kleinste kwadraten" (dus lengte afwijkingsvector $|Ax-b|$ minimaal) gegeven wordt door $x= C^{-1}d$, als $d = A^Tb$ en $C = A^TA$ positief definiet;

d) elke reële positief semidefiniete symmetrische matrix te schrijven is als een product A^TA met A vierkant, (zie stelling 9.6).

15) Bewijs, dat de determinant

$$\begin{vmatrix} a^2+d^2 & ab+de & ac+df \\ ab+de & b^2+e^2 & bc+ef \\ ac+df & bc+ef & c^2+f^2 \end{vmatrix} = 0$$

is, door aan te tonen, dat hij gelijk is aan het product van twee determinanten, waarvan er een nul is.

16) Bewijs:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

(Als a,b,c, of d gelijk aan 0, interpretere men het rechterlid als abcd+bcd + acd + abd + abc.)

17) Los de volgende stelsels vergelijkingen op en beschouw de verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen

a) $\begin{cases} ax+by+cz=b+c \\ bx+cy+az=c+a \\ cx+ay+bz=a+b \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+ay+a^2z=1+a+a^2 \\ x+by+b^2z=1+b+b^2 \\ x+cy+c^2z=1+c+c^2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$.

18) a) Geef aan voor welke waarde(n) van a het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3=2 \\ x_1+3x_2+8x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+(a+8)x_3=1 \\ 11x_1+ax_2+2(a+2)x_3=2a \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} 2x_1+9ax_2+x_3=100 \\ ax_1+2x_3=12a \\ 2x_1+3x_2+3ax_3=1-3a \end{cases}$$

geen, precies één, resp. meer dan één oplossing bezit. Geef in geval van oplosbaarheid ook de oplossingen.

b) Het stelsel

$$\begin{cases} x+(3b-1)y-w=0 \\ -by-z+w=0 \\ x+y-2z+w=1 \\ 4x-10z+aw=3-b \end{cases}$$

heeft tenminste twee oplossingen. Bepaal bij dit gegeven a en b en de oplossingen.

19) Geef aan voor welke waarden van a de volgende stelsels strijdig zijn en voor welke oplosbaar (geef ook de oplossingen)

a) $\begin{cases} ax + y = 3 \\ (3a-10)x + (a-8)y = -a - 20 \\ x + y = a + 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + (2-a)y - z + 2 = 0 \\ 3x + 2y + 3az = 0 \\ ay + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

20) Gegeven de Hilbert-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal A^{-1}. Is A^{-1} ook symmetrisch?

b) Bewijs, dat A positief definiet is.

c) Is A^{-1} ook positief definiet?

21) Beschouw de determinant $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$, als functie van de 9 variabelen a,b,...,k. Zij D_a, D_b, ..., D_k de partiële afgeleiden van D resp. naar a,b,...,k. Bewijs:

a) $aD_a + bD_b + cD_c = D$.

b) $\begin{vmatrix} D_a & D_b & D_c \\ D_d & D_e & D_f \\ D_g & D_h & D_k \end{vmatrix} = D^2$.

Opm. Dit is een bijzonder geval van de eigenschap dat als A een vierkante matrix is van de n^e orde en B diens geadjungeerde (zie opg.5 blz. 132) $|B| = |A|^{n-1}$ voor $n > 1$.

22) Onderzoek voor welke waarden van λ de matrix

a) $\lambda . \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 14 & -5 & 2 \\ 2 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ orthogonaal is.

b) Voor welke direct orthogonaal en voor welke gespiegeld orthogonaal? (blz.230).

23) Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Bepaal de matrix $B = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ zó, dat $B = B^T A$ en $|B| = 4$.

24) Bepaal in de vergelijking
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
de coëfficiënten A, B, ..., F zodanig, dat aan deze vergelijking voldaan wordt door $x = x_1$, $y = y_1$, door $x = x_2$, $y = y_2$, door $x = x_3$, $y = y_3$, door $x = x_4$, $y = y_4$ en door $x = x_5$, $y = y_5$ te nemen.

25) Bepaal a zo, dat het volgende stelsel vergelijkingen een oplossing toelaat en los daarna het stelsel voor deze a op.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x(x-1)+y(y-1)+z(z-1) = 20 \\ x^2(x-1)+y^2(y-1)+z^2(z-1) = a \\ xy = 6 \end{cases}$$

26) Bepaal de coëfficiënten d en e in de vergelijking

$4x^2 + 6xy + y^2 + 2dx + 2ey + 9 = 0$

zó, dat de door deze vergelijking voorgestelde kromme in R_2 de x-as en de y-as raakt. Wat is de kromme voor een kegelsnede?

27) De vergelijking in R_2 te bepalen van de cirkel, die door de snijpunten van de cirkels : $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ en $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0$ gaat en waarvan het middelpunt op de lijn $8x - 3y = 2$ ligt.
Welk punt der x-as heeft gelijke machten ten opzichte van de beide cirkels?

28) Toon aan, dat de orthogonale hyperbolen

$x^2 - y^2 = a^2$ en $xy = c$

elkaar loodrecht snijden.

29) Beschrijf zo uitvoerig mogelijk de kegelsneden met vergelijking:
a) $7x^2 - 12xy - 2y^2 + 38x - 4y + 27 = 0$;
b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 7x + 4y + 9 = 0$.

30) Gegeven het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2y + 4z - 2u = 0 \\ x - y - 2z + 4u + 2v = 0 \\ 2x + 6u + 4v = 0 \\ 3x + 2y + 4z + 7u + 6v = 0 \\ 4x - 3y - 6z + 15u + 8v = 0 \end{cases}$$

a) Hoe groot is de rang van de coëfficiënten-matrix?
b) Hoe groot is de dimensie van de oplossingsruimte?
c) Geef de algemene oplossing van het stelsel.
d) Geef een basis aan van de oplossingsruimte.
e) Beschouw het inhomogene stelsel met dezelfde coëfficiënten-matrix en rechterlidvector $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ t^2 \\ 2t \\ 4t+3 \end{pmatrix}$.

Voor welke waarde(n) van t is dat stelsel oplosbaar?

31) Bepaal de inverse van $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ uit diens karakteristieke vergelijking (Cayley-Hamilton).

32) Van een symmetrische matrix A van de 3^e orde is gegeven:
a) 0 en 1 zijn de eigenwaarden, waarvan 1 tweevoudig.
b) de vector (1,0,0) is eigenvector van A, behorende bij de eigenwaarde 0.

Bepaal A.

33) Geef de karakteristieke vergelijking van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 44 & -252 & 240 \\ 29 & -160 & 150 \\ 21 & -114 & 106 \end{pmatrix}$$

en bepaal met behulp hiervan de eigenwaarden.
Bepaal tevens de eigenrijen en de eigenkolommen. Is A defect?

34) a) Bewijs, dat elke orthogonale matrix A van oneven orde met $|A| = 1$ een eigenwaarde heeft, die gelijk is aan 1.
b) Bewijs, dat iedere eigenlijke orthogonale matrix in een ruimte van oneven orde een vector $\neq$ nulvector invariant laat. Wat betekent dit meetkundig in R_3 ?

35) Bepaal a,b en c zó, dat van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -18 & b & -12 \\ 14 & -b & c \end{pmatrix}$$

de som van de eigenwaarden gelijk is aan 6 en (1,6,-5) een eigenvector is.
Bepaal ook de andere eigenvectoren.

Einde van de Syllabus Lineaire Algebra en Meetkunde
van de
Cursus Wetenschappelijk Rekenaar A, 1961-'63