9284

D

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - 0 .

Rapport Z.W. - 1950-006.
MR5

Voordracht door W.L. Scheen in de serie
Actualiteiten op 25 Maart 1950.

FACULTEITREEKSEN.

1. Gegeneraliseerde Bêta-integralen. Algemene ontwikkelingsstelling.

I. Zij $\psi(t)$ een in het interval $0<t<1$ reguliere functie, die in dit interval voldoet aan de relatie:

$$|\psi(t)| < c_1 t^{-q_0}(1-t)^{-q_1}$$

waarin $c_1>0$, q_0 en q_1 van t onafhankelijke geschikt gekozen reële getallen voorstellen.

We definiëren dan voor $\mathrm{Re}\,\alpha > q_0; \mathrm{Re}\,\beta > q_1$ de gegeneraliseerde Bêta-integraal $B(\alpha,\beta;\psi)$ als

(1) $$B(\alpha,\beta;\psi(t)) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\psi(t)\,dt \quad .$$

II. Zij $\psi(t)$ een functie, die na het aanbrengen van een snede langs de reële as van 1 naar $-\infty$ analytisch en eenwaardig is in de cirkel C_1 gedefinieerd door $|1-t| = \delta_1 < 1$. Stel verder dat beide analytische voortzettingen op het segment $0<t<1$ bestaan, ondubbelzinnig bepaald zijn en dat voor beiden in die omgeving van $t = 0$ geldt

$$|\psi(t)| < c_2 t^{-q_0}$$

We definieren dan voor $\mathrm{Re}\,\alpha > q_0$

(2) $$B_1(\alpha,\beta;\psi(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{\alpha-1}(t-1)^{\beta-1}\psi(t)\,dt$$

De integratieweg W_1 wordt hierin genomen langs de reële as van 0 tot $1-\delta_1$, in positieve richting langs de omtrek van C_1, en weer terug langs de reële as van $1-\delta_1$, naar 0. Langs het eerste stuk van de reële as kiest men voor de waarde van $\psi(t)$ een van de bovengenoemde voortzettingen, zodat na het doorlopen van de omtrek van C_1 (in positieve richting) en andersom de andere voortzetting van $\psi(t)$ wordt aangenomen. Arg $(t-1)$ wordt gelijk aan nul gesteld in $t = 1+\delta_1$.

Opmerking:

Is $\psi(t)$ regulier in $t = 1$, dan is als $\mathrm{Re}\,\beta > 0$

(3) $$B_1(\alpha,\beta;\psi(t)) = \frac{\sin\pi\beta}{\pi} B(\alpha,\beta;\psi(t))$$

Is bovendien β geheel, dan is

(4) $$B_1(\alpha,\beta\,;\psi(t)\log(t-1)) = B(\alpha,\beta\,;\psi(t))$$

III. Zij $\psi(t)$ een functie, die, na het aanbrengen van een snede langs de reële as van 0 naar ∞, analytisch en eenwaardig is in de cirkel C_0 gedefinieerd door $|t| = \delta_0 < 1$. Stel verder, dat de beide analytische voortzettingen langs het segment $0 < t < 1$ bestaan en dat voor beide in de omgeving van t = 1 geldt

$$|\psi(t)| < c_3\,(1-t)^{-q_1}$$

We definiëren dan voor $Re\,\beta > q_1$

(5) $$B_0(\alpha,\beta\,;\psi(t)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{W_0} (-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\psi(t)\,dt$$

De integratieweg W_0 wordt hierin genomen langs de reële as van 1 naar δ_0, in positieve richting langs de omtrek van C_0 en weer terug langs de reële as van δ_0 naar 1. Langs het eerste stuk van de reële as kiest men voor de waarde van $\psi(t)$ één van bovengenoemde analytische voortzettingen, zodat, na het doorlopen van C_0 in positieve richting, de andere voortzetting van $\psi(t)$ wordt aangenomen. Arg $(-t)$ wordt gelijk aan nul gesteld in $t = -\delta_0$.

Opmerkingen:

Algemeen geldt:

(6) $$B_0(\alpha,\beta\,;\psi(t)) = B_1(\beta,\alpha\,;\psi(1-t))$$

Verder geldt als $\psi(t)$ regulier is in $t = 0$ en als $Re\,\alpha > 0$:

(7) $$B_0(\alpha,\beta\,;\psi(t)) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,B(\alpha,\beta\,;\psi(t))$$

Is bovendien α geheel, dan:

(8) $$B(\alpha,\beta\,;\psi(t)\log(-t)) = B(\alpha,\beta\,;\psi(t))$$

IV. We bewijzen nu voor integralen van het type (2) een algemene ontwikkelingsstelling. Wegens de betrekking (6) kan men deze direct omzetten in een ontwikkelingsstelling voor integralen van het type (5). Een analoog bewijs levert een later te noemen algemene ontwikkelingsstelling voor integralen van het type (1).

Beschouw dus een integraal van het type (2). Neem aan, dat $\psi(t)$ te schrijven is als $\psi(t) = g(t)\,\varphi(t)$

waarin $\varphi(t)$ een functie is, die in de cirkel $|1-t| = 1$ analytisch en eenwaardig is en daar voldoet aan

(9) $$|\varphi(t)| < c_4 |t|^{-Re\, q} (1-|1-t|)^{-p}$$

waarin $c_4, p > 0$ en q geschikt gekozen, van t onafhankelijke getallen voorstellen. De voor $\psi(t)$ ingevoerde veronderstellingen impliceren, dat $g(t)$ na het aanbrengen van een snede langs de reële as van 1 naar $-\infty$ in de cirkel C_1 analytisch en eenwaardig is, dat de beide analytische voortzettingen op het segment $0 < t < 1$ bestaan en ondubbelzinnig bepaald zijn. We nemen bovendien aan, dat de genoemde voortzettingen op dat deel van het segment, hetwelk in de omgeving van $t = 0$ ligt, voldoen aan

(10) $$|g(t)| < c_5\, t^{-q'}$$

waarin $c_5 > 0$ en q' geschikt gekozen van t onafhankelijke reële getallen voorstellen.

Nu geldt de volgende

<u>Stelling</u>: $B_1(\alpha, \beta; \psi(t))$ kan voor $Re\,\alpha > p + q' + Re\, q$ ontwikkeld worden in de reeks:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_0^\infty {}_k (-1)^k a_k \int_{W_1} t^{\alpha-q-1} (t-1)^{\beta-1+k} g(t)\, dt$$

waarin de a_k de ontwikkelingscoefficienten zijn van

$$t^q \varphi(t) = \sum_0^\infty {}_k\, a_k (1-t)^k$$

<u>Bewijs</u>: We schrijven

$$t^q \varphi(t) = \sum_0^{\ell-1} {}_k (-1)^k a_k (t-1)^k + (t-1)^\ell S_\ell(t)$$

zodat

$$S_\ell(t) = \sum_0^\infty {}_k (-1)^{k+\ell} a_{k+\ell} (t-1)^k$$

Is nu $0 < r < 1$ en K_r de omtrek van de cirkel $|1-t| = r$, dan geldt

$$(-1)^k a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} w^q \varphi(w) (w-1)^{-k-1} dw$$

en dus voor iedere t binnen K_r gelegen

$$S_\ell(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{w^q \varphi(w)}{(w-1)^{\ell+1}} \sum_0^\infty {}_k \frac{(t-1)^k}{(w-1)^k} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{w^q \varphi(w)}{(w-1)^\ell (w-t)} dw$$

Gebruik makend van de ongelijkheid (9) vinden we

(11) $$\left|S_\ell(t)\right| < c_6\,(1-r)^{-p}\, r^{-\ell} \int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|}$$

waarin c_6 een van r onafhankelijke constante voorstelt.

Passen we nu toe de transformatie

$$1-w = (1-t)\,\frac{r}{\rho}\,e^{i\varphi}$$

waarin $\rho = |1-t|$, dus $0 \leqq \rho < r$, dan vinden we voor de integraal in het rechterlid van bovenstaande ongelijkheid

$$\int_{K_r} \frac{dw}{|w-t|} = 2r \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}}$$

Hierin is $r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2 = (r-\rho)^2 + 4r\rho\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \geqq (r-\rho)^2$

en ook $\geqq 4r\rho\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \geqq \frac{4}{\pi^2}\, r\rho\varphi^2$

Is $\rho \leqq (2-\sqrt{3})$, dan is

$$r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2 \geqq (r-\rho)^2 \geqq r^2(\sqrt{3}-1)^2$$

zodat dan

$$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{3}-1}$$

Is daarentegen $\rho > (2-\sqrt{3})$, dan is er in het eerste kwadrant een hoek $\tfrac{1}{2}\gamma$ te vinden zodanig dat $\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{r-\rho}{\sqrt{2r\rho}}$ en

$$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} \leqq 2r\int_0^\gamma \frac{d\varphi}{r-\rho} + 2r\int_\gamma^\pi \frac{\pi}{2\sqrt{r\rho}} = \frac{2r\gamma}{r-\rho} + \pi\sqrt{\frac{r}{\rho}}\log\pi + \pi\sqrt{\frac{r}{\rho}}\log\frac{1}{\gamma}$$

In de laatste uitdrukking zijn de eerste en tweede term begrensd terwijl de laatste term van de orde $\log\frac{2}{r-\rho}$ is. Onder alle omstandigheden geldt dus

$$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} < c_7 \log\frac{2}{r-\rho}$$

Volgens (11) vinden we:

(12) $$\left|S_\ell(t)\right| < c_8\, r^{-\ell}(1-r)^{-p}\log\frac{2}{r-\rho}$$ (c_7 en c_8 zijn constant)

We kunnen nu schrijven:

$$B(\alpha,\beta;\psi(t)) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\ell-1}(-1)^k a_k \int_{W_1} t^{\alpha-q-1}(t-1)^{\beta+k-1} g(t)\,dt + R_\ell$$

met $R_\ell = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{\alpha-q-1}(t-1)^{\beta+\ell-1} g(t)\, S_\ell(t)\,dt$

De integralen bestaan, want $g(t)$ voldoet aan (10) en er is verondersteld $\mathrm{Re}\,(\alpha - q - q')>p$ met $p \geqq 0$.

Wegens het feit, dat $g(t)$ regulier is op W_1 (behalve in de omgeving van $t = 0$ in welk geval echter (10) geldt) is $|t^{q'} g(t)|$ beperkt op W_1, en geldt:

$$(13)\quad |R_\ell| < c_9 \int_{W_1} |t|^{\mathrm{Re}(\alpha-q-q'-1)} |t-1|^{\mathrm{Re}(\beta+\ell-1)} |S_\ell(t)| |dt|$$

$$= 2c_9 \int_0^{1-\delta_1} |t|^{\mathrm{Re}(\alpha-q-q'-1)} |t-1|^{\mathrm{Re}(\beta+\ell-1)} |S_\ell(t)| |dt| + c_{10}\, \delta_1^\ell \int_{C_1} |S_\ell(t)| |dt|$$

Voor de laatste integraal vinden we met behulp van (12)

$$\int_{C_1} |S_\ell(t)| |dt| < c_8\, r^{-\ell} (1-r)^{-p} \log \frac{2}{r-\delta_1}$$

waarin $r > \delta_1$ (maar $r < 1$).

We zien dus dat $\delta_1^\ell \int_{C_1} |S_\ell(t)| |dt|$ tot nul nadert als ℓ onbeperkt aangroeit. Wat betreft de eerste integraal in het rechterlid van (13) nemen we aan, dat ℓ zo groot is, dat $\mathrm{Re}\,(\beta + \ell - 1) > 0$. Dan wordt ze gemajoreerd door

$$\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(\alpha-q-q'-1)} (1-t)^{\mathrm{Re}(\beta+\ell-1)} |S_\ell(t)|\, dt$$

Voor $t \geqq \frac{1}{\ell}$ kiezen we in (12) $r = 1 - \frac{1}{2\ell}$, dus $r - \rho \geqq \frac{1}{2\ell}$ en omdat $r^{-\ell}$ begrensd is, als ℓ onbegrensd toeneemt, vinden we voor $t \geqq \frac{1}{\ell}$

$$|S_\ell(t)| < c_{12}\, \ell^p \log 4\ell .$$

Is daarentegen $t < \frac{1}{\ell}$ dan nemen we in (12) $r = \frac{1}{2}(1+\rho)$, dus $1 - r = r - \rho = \frac{1}{2}(1-\rho)$. Omdat dan $r^{-\ell} \leqq r^{-\frac{2}{1-\rho}} = (1 - \frac{1-\rho}{2})^{-\frac{2}{1-\rho}}$ begrensd is vinden we voor $t < \frac{1}{\ell}$:

$$|S_\ell(t)| < c_{13} (1-\rho)^{-p} \log \frac{4}{1-\rho} = c_{13}\, t^{-p} \log \frac{4}{t}$$

De eerste integraal in het rechterlid van (13) wordt dus gemajoreerd door:

$$c_{12}\, \ell^p \log 4\ell \int_{\ell^{-1}}^1 t^{\mathrm{Re}(\alpha-q-q'-1)} (1-t)^{\mathrm{Re}(\beta+\ell-1)}\, dt \; +$$

$$c_{13} \int_0^{\ell^{-1}} t^{\mathrm{Re}(\alpha-q-q'-p-1)} (1-t)^{\mathrm{Re}(\beta+\ell-1)} \log \frac{4}{t}\, dt$$

Wegens $\mathrm{Re}\,(\alpha - q - q' - p) > 0$ bestaat de laatste integraal en nadert tot nul als ℓ tot oneindig nadert.

We bewijzen nu eerst voor vaste μ : $\int_{\ell^{-1}}^1 t^k (1-t)^{\ell+\mu}\, dt = O(\ell^{-k-1})$

Immers als $k < 0$ geldt

$$\left|\int_{l^{-1}}^{1} t^{k}(1-t)^{l+\mu}\,dt\right| < l^{-k}\int_{l^{-1}}^{1}(1-t)^{l+\mu}\,dt < l^{-k}\int_{0}^{1}(1-t)^{l+\mu}\,dt = \frac{l^{-k}}{l+\mu+1}$$

Neemt men verder aan, dat deze laatste stelling voor zekere k geldt, dan geldt zo ook voor $k+1$, immers

$$\int_{l^{-1}}^{1} t^{k+1}(1-t)^{l+\mu}\,dt = \frac{(1-l^{-1})^{l+\mu+1}}{l+\mu+1}\,l^{-k-1} + \frac{k+1}{l+\mu+1}\int_{l^{-1}}^{1} t^{k}(1-t)^{l+\mu+1}\,dt = O(l^{-k-1})$$

volgens de inductieonderstelling.

We vinden dus

$$l^{p}\log_4 l\int_{l^{-1}}^{1} t^{Re(\alpha-q-q'-1)}(1-t)^{Re(\beta+l-1)}\,dt$$
$$= l^{p}\log_4 l\; O\left(l^{Re(-\alpha+q+q')}\right)$$
$$= O\left(l^{Re(-\alpha+q+q'+p)}\log_4 l\right)$$

hetgeen tot nul nadert wegens $Re\,(\alpha-q-q'-p)>0$.

Hiermede is de algemene ontwikkelingsstelling voor B_1-integralen bewezen, aangezien blijkt, dat R_l tot nul nadert als l tot ∞ nadert.

V. Stelt men de zelfde eisen aan $\psi(t)=g(t)\varphi(t)$ en bovendien de eis, dat in de omgeving van $t=1$ op het segment $0<t<1$ geldt $|g(t)|<c_{14}\,(1-t)^{-q''}$ dan vindt men voor $Re\,\alpha>p+q'+Re\,q$, $Re\,\beta>q''$

$$B(\alpha,\beta;\psi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\int_{0}^{1} t^{\alpha-q-1}(1-t)^{\beta-1+k}\,g(t)\,dt$$

Opm. I. Men gaat tenslotte gemakkelijk na, dat alle in bovenstaande bewijs ingevoerde constanten c_1 t/m c_{14} onafhankelijk van α en β gekozen kunnen worden, indien deze grootheden in een beperkt gebied variëren. Dit betekent dat de gevonden reeksontwikkeling in zo'n gebied gelijkmatig convergeert.

Opm. II. Hangt bovendien $g(t)$ behalve van t nog van een parameter x af, en weet men, dat binnen zeker gebied van x de relatie

$$|g(t)| < c_5\,t^{-q'}$$

geldt voor een zekere, van x onafhankelijke omgeving van $t=0$, terwijl op het overige deel van de contour W_1 $g(t)$ een van x onafhankelijke bovengrens heeft, dan zal de convergentie ook in dat gebied van x gelijkmatig zijn.

2. Gegeneraliseerde Faculteitreeksen. Het convergentie halfvlak.

I. Als faculteitreeks (van de tweede soort) wordt in het algemeen gedefinieerd een reeks van het type

$$\sum_0^\infty{}_k \frac{a_k\, k!}{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+k)} = \sum_0^\infty{}_k\, a_k \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

$$= \sum_0^\infty{}_k\, a_k\, B(\alpha, k+1) .$$

We voeren nu een grotere klasse van reeksen als gegeneraliseerde faculteitreeksen in, n.l. die van de beide typen:

$$\sum_0^\infty{}_k\, a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q,\beta+k)$$

$$\text{en}\quad \sum_0^\infty{}_k\, (-1)^k a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q,\beta+k)$$

(m geheel $\geq$ 0)

waarin $B_1(\alpha-q,\beta+k) = B_1(\alpha-q,\beta+k;\psi(t))$ voor $\psi(t) \equiv 1$.

Hierin is dus $B(\alpha-q,\beta+k) = \int_0^1 t^{\alpha-q-1}(1-t)^{\beta+k-1}\,dt =$

$$= \frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(\alpha+\beta+k-q)} .$$

$$B_1(\alpha-q,\beta+k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{\alpha-q-1}(t-1)^{\beta+k-1}\,dt =$$

$$= \frac{\sin\pi(\beta+k)}{\pi}\,\frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(\alpha+\beta+k-q)} = \frac{\Gamma(\alpha-q)}{\Gamma(-\beta-k-1)\Gamma(\alpha+\beta+k-q)} = \binom{\alpha-q-1}{-\beta-k} .$$

waarin de integraalvoorstellingen alleen betekenis hebben als $\mathrm{Re}\,(\alpha-q\ ) > 0$, terwijl de voorstelling mb.v. Gamma-functies algemeen geldig is en

$$\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q,\beta+k) = \int_0^1 t^{\alpha-q-1}(1-t)^{\beta+k-1}\log^m(1-t)\,dt \quad \text{als } \mathrm{Re}(\alpha-q)+m>0$$

$$\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q,\beta+k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{\alpha-q-1}(t-1)^{\beta+k-1}\log^m(t-1)\,dt \quad \text{als } \mathrm{Re}(\alpha-q)>0$$

(met arg $(t-1) = 0$ en het punt $t = 1+\delta_1$ van W_1).

We passen nu de ontwikkelingsstellingen van de vorige paragraaf toe met $g(t) = \log^m(1-t)$, resp. $g(t) = \log^m(t-1)$ en vinden, mits $\varphi(t)$ aan de eisen voldoet, die we in de vorige paragraaf stelden

$$(1)\quad \begin{cases} B(\alpha,\beta;\varphi(t)\log^m(1-t)) = \sum_0^\infty{}_k\, a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q,\beta+k) \\ \qquad \text{voor } \mathrm{Re}\,\alpha > p-m+\mathrm{Re}\,q\ ;\ \mathrm{Re}\,\beta>0 \\ B_1(\alpha,\beta;\varphi(t)\log^m(t-1)) = \sum_0^\infty{}_k\, (-1)^k a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q,\beta+k) \ \text{voor } \mathrm{Re}\,\alpha > p+\mathrm{Re}\,q \end{cases}$$

We zien dus, dat gegeneraliseerde Bêta-integralen waarvan $\psi(t)$ te schrijven is als $\varphi(t)\log^m(1-t)$ resp. $\varphi(t)\log^m(t-1)$ te ontwikkelen zijn in gegeneraliseerde faculteitreeksen, mits $\varphi(t)$ een functie is, die in de cirkel $|1-t|<1$ analytisch en eenwaardig is en voldoet aan de ongelijkheid

$$|\varphi(t)| < c_1 |t|^{-\mathrm{Re}\,q}\left(1-|1-t|\right)^{-p} \tag{2}$$

II. De gebieden, waarin de faculteitreeksen zeker convergeren, zijn zoals onder (1) aangegeven halfvlakken, de mogelijkheid, dat de convergentie ook nog optreedt in een groter gebied is niet uitgesloten. Om dit te onderzoeken maken we gebruik van stellingen voor de gewone faculteitreeksen $\sum_0^\infty a_k B(\alpha, k+1)$ zoals deze door Landau en Nörlund zijn bewezen (vgl. Milne-Thomson: The Calculus of Finite Differences, Ch. X, pag. 271-287).

Stelling I. De reeks $\sum_0^\infty a_k B(\alpha, k+1)$ is convergent in het halfvlak $\mathrm{Re}\,\alpha > \lambda$, waarin

$$\text{(3a)}\quad \begin{aligned} \lambda &= \limsup \log\left|\sum_0^n a_k\right| \Big/ \log n, \quad \text{als } \sum_0^\infty a_k \text{ divergeert} \\ \lambda &= \limsup \log\left|\sum_n^\infty a_k\right| \Big/ \log n, \quad \text{als } \sum_0^\infty a_k \text{ convergeert} \end{aligned}$$

Voor $\mathrm{Re}\,\alpha < \lambda$ divergeert de reeks, in geval $\mathrm{Re}\,\alpha = \lambda$ is geen algemene regel bekend.

Stelling II. De reeks $\sum_0^\infty a_k B(\alpha, k+1)$ is absoluut convergent in een halfvlak $\mathrm{Re}\,\alpha > \mu$, voor $\mathrm{Re}\,\alpha < \mu$ is ze niet ansoluut convergent. Hierin voldoet μ aan $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$.

Stelling III. Als de reeks $\sum_0^\infty a_k B(\alpha, k+1)$ convergeert voor $\alpha = \alpha_0$, is ze gelijkmatig convergent:

1e in het halfvlak $\mathrm{Re}\,\alpha \geq \mathrm{Re}\,\alpha_0 + \varepsilon$ bij willekeurige $\varepsilon > 0$

2e in het gebied $|\arg(\alpha - \alpha_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ bij willekeurige $\eta > 0$.

Als gevolg hiervan stelt de reeks in het gehele convergentiegebied een analytische functie voor.

Bij al deze stellingen zijn eventueel punten $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ die in het convergentiegebied liggen met een willekeurig kleine omgeving uitgesloten. (Hier heeft de reeks geen betekenis daar $B(\alpha, k+1)$ er oneindig is).

III. Voor onze gegeneraliseerde faculteitreeksen zijn nu soortgelijke resultaten af te leiden. Hiertoe bewijzen we allereerst de

<u>Hulpstelling</u>. Is voor een gegeven functie $F(\alpha, \beta, k)$ en bij gehele $M, N > 0$ een rij getallen $b_0, \dots, b_N$ te vinden ($b_0 \neq 0$), die nog van β mogen afhangen, maar beperkt zijn in elke beperkt gebied van β,

alsmede positieve gehele getallen K en L, ($K \geq L$) zodat voor alle waarden van α en β met $\operatorname{Re}\alpha > -N$, $\operatorname{Re}\beta > -M$ geldt

$$(3)\quad \left|F(\alpha,\beta,k) - b_0 B(\alpha,k+1) - b_1 B(\alpha+1,k+1) - b_2 B(\alpha+2,k+1) - \dots - b_{N-1} B(\alpha+N-1,k+1)\right| < b_N B(\operatorname{Re}\alpha+N, k-L+1)$$

voor alle $k > K$, dan is de reeks $\sum_0^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ (absoluut, gelijkmatig) convergent voor die waarden van α, waarvoor $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha,k+1)$ (absoluut, gelijkmatig) convergeert en de reeks $\sum_0^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ divergeert (convergeert niet absoluut), waar $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha,k+1)$ divergeert (niet absoluut convergent). Bovendien is de convergentie van $\sum_0^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ in elk beperkt gebied van β gelijkmatig naar β. (We sluiten punten, waar $F(\alpha,\beta,k)$ singulier is, uit).

Bewijs: Als $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha,k+1)$ (absoluut) convergeert, convergeren ook $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha+1,k+1), \dots, \sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha+N-2,k+1)$ en $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha+N-1,k-L+1)$ (absoluut), waaruit de (absolute) convergentie van $\sum_0^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ volgt. Waar bovendien de $b_0, \dots, b_N$ onafhankelijk van α zijn en uit de stelling III voor de gewone faculteitreeksen volgt, dat als $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha,k+1)$ in een gebied van α gelijkmatig convergeert, de reeksen $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha+1,k+1), \dots, \sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha+N-2,k+1)$ en $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha+N-1,k-L+1)$ dat ook doen, is $\sum_0^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ ook in dat gebied gelijkmatig convergent.

Is λ weer de convergentieabscis van $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha,k+1)$ en $\lambda - 1 < \operatorname{Re}\alpha < \lambda$, of $\operatorname{Re}\alpha = \lambda$ maar α geen punt waar $\sum_0^\infty{}^k a_k B(\alpha,k+1)$ convergeert, dan heeft men

$$\sum_K^P{}^k a_k F(\alpha,\beta,k) = b_0 \sum_K^P{}^k a_k B(\alpha,k+1) + b_1 \sum_K^P{}^k a_k B(\alpha+1,k+1) + \dots + b_{N-1}\sum_K^P{}^k a_k B(\alpha+N-1,k+1) + b_N \sum_K^P{}^k a_k R_k$$

$$\text{met } |R_k| < B(\operatorname{Re}\alpha+N, k-L+1)$$

De eerste reeks rechts divergeert als $P \to \infty$, de overige naderen tot een eindige waarde, dus divergeert ook $\sum_K^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$.

Als we nu nog bewijzen, dat, indien $\sum_K^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ convergeert voor zekere waarde α_0 van α, ze ook convergeert voor alle α met $\operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Re}\alpha_0$ is aangetoond dat $\sum_K^\infty{}^k a_k F(\alpha,\beta,k)$ divergeert voor alle α met $\operatorname{Re}\alpha < \lambda$.

Uit de ongelijkheid (3) volgt $F(\alpha,\beta,k) = b_0 k^{-\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$, dus als $d_k = \frac{F(\alpha,\beta,k)}{F(\alpha_0,\beta,k)}$, dan geldt

$$d_k = k^{-(\alpha-\alpha_0)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{k}\right)\right)$$

en $$d_k - d_{k-1} = O\left(k^{-Re(\alpha-\alpha_0)-1}\right)$$

Maar $Re(\alpha-\alpha_0)>0$, dus $\sum_{k=K}^{\infty}\left(d_k - d_{k-1}\right)$ convergeert absoluut

en $\sum_{k=K}^{\infty} a_k F(\alpha_0,\beta,k)$ is convergent ondersteld,

ergo $\sum_{k=K}^{\infty} a_k F(\alpha_0,\beta,k).d_k = \sum_{k=K}^{\infty} a_k F(\alpha,\beta,k)$ convergeert.

Zo vinden we dus dat ook $\sum_{k=0}^{\infty} a_k F(\alpha,\beta,k)$ de convergentieabscis λ heeft. Op analoge wijze gaat men na dat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k F(\alpha,\beta,k)$ en $\sum_{k=0}^{\infty} a_k B(\alpha,k+1)$ dezelfde abscis van absolute convergentie bezitten.

We bewijzen nu:

<u>Stelling IV</u>: De reeks $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q,\beta+k)$ convergeert in het halfvlak $Re(\alpha-q)>\lambda-m$, waarbij λ gedefinieerd is als in (3^a).

Het halfvlak van absolute convergentie vindt men, wanneer men λ door μ vervangt, terwijl μ voldoet aan $\lambda \leq \mu \leq \lambda+1$. Als de bovenstaande reeks convergeert voor $\alpha=\alpha_0$ is ze gelijkmatig convergent naar α :

1e in het halfvlak $Re\,\alpha \geq Re\,\alpha_0+\varepsilon$ bij willekeurige $\varepsilon>0$,

2e in het gebied $|\arg(\alpha-\alpha_0)|<\frac{\pi}{2}-\eta$ bij willekeurige $\eta>0$.

Bovendien is de convergentie in elk beperkt gebied van β gelijkmatig naar β . In het gehele convergentie gebied stelt dus de reeks een analytische functie van α in β voor (uitgesloten die punten waar $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B(\alpha-q,\beta+k)$ singulier is).

Volgens de voorafgaande hulpstelling is het voldoende te bewijzen, dat we voor $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B(\alpha-q,\beta+k)$ een ongelijkheid van de vorm (3) kunnen vinden waarin α vervangen is door $\alpha-q+m$.

Voor $Re(\alpha-q+m)>0$ hebben we

$$\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B(\alpha-q,\beta+k)=\int_0^1 t^{\alpha-q-1}(1-t)^{\beta+k-1}\log^m(1-t)\,dt$$

zodat in het algemeen, mits $\alpha-q$ geen geheel getal is

$$\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B(\alpha-q,\beta+k)=-\frac{1}{2i\sin\pi(\alpha-q)}\int_{W_0}(-t)^{\alpha-q-1}(1-t)^{\beta+k-1}\log^m(1-t)\,dt$$

Verder veronderstellen we dus $Re(\alpha-q+m)>-N$, $Re\,\beta>-M$.

We gaan nu $(1-t)^{\beta-1} \log^m (1-t)$ om $t=0$ ontwikkelen. De $(N+m)_{\beta-1-N-m}$-de afgeleide van deze functie is een polynoom in $\log (1-t).(1-t)$ hetgeen gemajoreerd kan worden door $(1-t)^{-M-N-m-2}$ als t tussen 0 en 1 ligt. Op deze wijze vinden we

$$(1-t)^{\beta-1}\log^m(1-t) = t^m + A_1 t^{m+1} + \dots\dots + A_{N-1} t^{m+N-1} + R(t)$$

waarin de $A_1, \dots, A_{N-1}$ nog van β afhangen, maar beperkt zijn in ieder beperkt gebied van β. Verder voldoet $R(t)$ aan

$$(4) \qquad |R(t)| < A_N \frac{t^{m+N}}{(1-t)^{M+N+m+2}}$$

als $0 \leq t < 1$.

Aldus blijkt:

$$(5) \quad \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q,\beta+k) = (-1)^m B(\alpha-q+m,k+1) + b_1 B(\alpha-q+m+1,k+1) + \dots\dots\dots + b_{N-1} B(\alpha-q+m+N-1,k+1) + R^*$$

waarin

$$R^* = -\frac{1}{2i\sin\pi(\alpha-q)}\int_{W_0} (-t)^{\alpha-q-1}(1-t)^k R(t)\,dt = (-1)^m \int_0^1 t^{\alpha-q-1}(1-t)^k R(t)\,dt$$

dus als $k > M+N+m+1$ m.b.v. ongelijkheid (4)

$$|R^*| < b_N B(\alpha-q+m+N, k-M-N-m-1)$$

Hiermede is de vereiste ongelijkheid voor $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q,\beta+k)$ gevonden.

IV. Voor $R_e(\alpha-q) > 0$ en $R_e\beta + k > 0$ kunnen we $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q,\beta+k)$ schrijven als

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{\alpha-q-1}(t-1)^{\beta+k-1} \log^m (t-1)\,dt$$

waarin de contour tot de reële as samengetrokken kan worden. Dit levert

$$\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q,\beta+k) = (-1)^k \sum_0^m D_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial\beta^\ell} B(\alpha-q,\beta+k).$$

De D_ℓ zijn hier onafhankelijk van α en k en beperkt als β in een beperkt gebied varieert.

Verder is $D_0 = (\pi i)^{m-1}\, i \sin\pi\beta$ als m even
$\qquad = (\pi i)^{m-1} \cos\pi\beta$ als m oneven.

Is nu m even en β niet geheel, of m oneven en β niet gelijk aan een geheel getal $+\frac{1}{2}$, dan is $D_0 \neq 0$. We vinden door voor de $\frac{\partial^\ell}{\partial\beta^\ell} B(\alpha-q,\beta+k)$ de ongelijkheden van de vorm (3) in te vullen voor $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q, \beta+k)$ een ongelijkheid van het type (3) met α door $\alpha-q$ vervangen. Het convergentie gebied is dus het halfvlak $Re\,\alpha > \lambda + Re\,q$.

In de twee gevallen, dat $D_0 = 0$ is, is $D_1 \neq 0$, immers

$$D_1 = (\pi i)^{m-2} \cos \pi\beta \quad \text{als } m \text{ even}$$
$$= (\pi i)^{m-1} \sin \pi\beta \quad \text{als } m \text{ oneven.}$$

We vinden nu voor $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B_1(\alpha-q, \beta+k)$ een ongelijkheid van het type (3) met α door $\alpha-q+1$ vervangen. Het convergentiegebied is nu het halfvlak $Re\,\alpha > \lambda + Re\,q - 1$

Volgens (1) hebben we gegeneraliseerde Bêta-integralen met $\psi(t) = \varphi(t) \log^m(1-t)$ resp. $\psi(t) = \varphi(t) \log^m(t-1)$ ontwikkeld in convergente gegeneraliseerde faculteitreeksen, mits $\varphi(t)$ aan een ongelijkheid van de vorm (2) voldoet binnen de cirkel met middelpunt 1 en straal 1 en aldaar analytisch en eenwaardig is.

Zij nu omgekeerd van de faculteitreeks $\sum_0^\infty{}_k\, a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\alpha-q, \beta+k)$ waarin $Re\,\beta > 0$ is, gegeven dat zij convergeert voor $Re(\alpha-q) > \lambda - m$. Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dan dus, mits men ε niet zo kiest dat $\lambda+\varepsilon$ geheel is

$$\lim_{k\to\infty} a_k \frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\lambda-m+\varepsilon, \beta+k) = 0$$

of daar uit (5) volgt
$$\frac{\partial^m}{\partial\beta^m} B(\lambda-m+\varepsilon, \beta+k) \sim (-1)^m B(\lambda+\varepsilon, k+1)$$
$$\sim (-1)^m \Gamma(\lambda+\varepsilon)\, k^{-\lambda-\varepsilon}$$
$$\sim \frac{(-1)^{m+k}}{\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}} \times C$$

of
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}} = 0$$
$$|a_k| < A \left|\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}\right|$$

Is $\lambda+\varepsilon < -1$ dan convergeert de reeks $\sum_0^\infty{}_k\, a_k (1-t)^k$ in het gebied begrensd door de cirkel $|1-t| = 1$, omdat de reeks $\sum_0^\infty{}_k \binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}(1-t)^k$ daar absoluut convergeert. De functie

$$\varphi(t) = t^{-q} \sum_0^\infty{}_k\, a_k (1-t)^k$$

voldoet nu aan de ongelijkheid (2) met $p = c$ en dus is $B(\alpha, \beta; \varphi(t) \log^m(1-t))$ in een gegeneraliseerde faculteitreeks te ontwikkelen, welke juist de reeks is waarvan we uitgingen.

Is $-N-1 < \lambda+\varepsilon < -N$ (N geheel ≥ 0) en dus $N-1 < (-1-\lambda-\varepsilon) < N$ dan is vanaf $k = N$ de binomiaalcoefficient $\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}$ alternerend. Is dan weer $\varphi(t) = t^{-q} \sum_0^\infty{}_k\, a_k (1-t)^k$, dan geldt dus binnen de cirkel

$|1-t|<1$ weer

$$|\varphi(t)| < |t|^{-Re\,q}\left\{\left|\sum_0^{N-1}{}_k\, a_k(1-t)^k\right| + A\left|\sum_N^{\infty}{}_k (-1)^k\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}|1-t|^k\right|\right\}$$

$$< |t|^{-Re\,q}\left\{A' + A\left|\sum_0^{\infty}{}_k(-1)^k\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}|1-t|^k\right| + \left|\sum_0^{N-1}{}_k(-1)^k\binom{-1-\lambda-\varepsilon}{k}|1-t|^k\right|\right\}$$

$$< |t|^{-Re\,q}\left\{A'' + A(1-|1-t|)^{-\lambda-\varepsilon-1}\right\}$$

$$< A'''|t|^{-Re\,q}\left\{1-|1-t|\right\}^{-\lambda-\varepsilon-1}$$

d.w.z. $\varphi(t)$ voldoet aan een ongelijkheid van het type (2), en $B(\alpha,\beta\,;\varphi(t)\log^m(1-t)$ is in een faculteitreeks ontwikkelbaar, welke weer de oorspronkelijke reeks is.

We vinden dus niet alleen, dat een gegeneraliseerde Bêta-integraal $B(\alpha,\beta\,;\varphi(t)\log^m(1-t))$, waarin $\varphi(t)$ aan de reeds meer genoemde eisen voldoet, in een gegeneraliseerde faculteitreeks $\sum_0^{\infty}{}_k\, a_k\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B(\alpha-q,\beta+k)$ is te ontwikkelen, maar ook dat iedere convergente faculteitreeks $\sum_0^{\infty}{}_k\, a_k\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B(\alpha-q,\beta+k)$ waarin $Re\,\beta>0$, voor te stellen is door een gegeneraliseerde Bêta-integraal $B(\alpha,\beta\,;\varphi(t)\log^m(1-t))$, waarin $\varphi(t)$ aan de reeds meer genoemde eisen voldoet.

Hetzelfde geldt voor de B_1-integralen en $\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}B_1$ -reeksen waarbij dan de eis $Re\,\beta>0$ komt te vervallen. $\varphi(t)$ heet de genererende functie van de faculteitreeks.

3. Orde van machtreeksen.

I. Voor een machtreeks $\sum_0^{\infty}{}_k\, a_k x^k$ met convergentiestraal 1 wordt

$$h = 1 + \limsup \frac{\log|a_k|}{\log k}$$

gedefinieerd als de orde van de reeks.

Men gaat gemakkelijk na, dat de constante λ uit stelling IV, welke de convergentieabscis van een gegeneraliseerde faculteitreeks bepaalt, gelijk is aan de orde van de machtreeks naar $1-t$ voor $t^{-q-1}\varphi(t)$ verminderd met 1, als $\lim_{t\to+0} t^{-q}\varphi(t)$ niet bestaat, en gelijk aan de van de machtreeks naar $1-t$ van $\{t^{-q}\varphi(t) - \lim_{t\to+0} t^{-q}\varphi(t)\}/t$

verminderd met 1 als lim $t^{-q}\varphi(t)$ wel bestaat.[1]

De orde van een machtreeks is in vele gevallen lastig te bepalen. Hadamard e.a. is bijv. op dit terrein werkzaam geweest.

II. We formuleren eerst de volgende stellingen:

Stelling I. Zij $r = |z|$. Heeft de machtreeks $f(z)=\sum_0^\infty{}_k a_k z^k$ met convergentiestraal 1 de orde $h \geq 0$, dan is bij iedere $\varepsilon > 0$ een van t onafhankelijk getal c te vinden, zodanig dat voor $|z| < 1$ geldt

(1) $$|f(z)| < c(1-r)^{-h-\varepsilon}$$

Immers voor bijna alle k geldt

(2) $$\frac{\log |a_k|}{\log k} < h+\varepsilon-1 , \qquad \text{dat is} \qquad |a_k| < k^{h+\varepsilon-1}$$

We schrijven weer, mits ε niet zo gekozen wordt, dat $h+\varepsilon$ een geheel getal is

$$k^{-h-\varepsilon+1} \sim C\,(-1)^k \binom{-h-\varepsilon}{k}$$

waarin voor voldoende grote k de uitdrukking $(-1)^k \binom{-h-\varepsilon}{k}$ constant van teken is. Geldt dit, evenals de ongelijkheid (2) met $k \geq N$, dan is

$$\left|\sum_N^\infty{}_k\, a_k z^k\right| < C\left|\sum_N^\infty{}_k (-1)^k \binom{-h-\varepsilon}{k} r^k\right|$$

waaruit weer volgt
$$|f(z)| < C(1-r)^{-h-\varepsilon} + C'$$
$$< c(1-r)^{-h-\varepsilon}$$

bij geschikt gekozen c .

Stelling II. Stel men kan bij een gegeven machtreeks $f(z)=\sum_0^\infty{}_k a_k z^k$ met convergentiestraal 1 op de eenheidscirkel een eindig aantal punten $s_1, \ldots, s_j$ vinden, alsmede een getal $\omega > 1$, zodat binnen de eenheidscirkel $|z| < 1$ geldt

(3) $$|f(z)| < \sum_1^j{}_n \frac{c_n}{|s_n - z|^\omega} + C(1-r)^{-\omega+1} ,$$

waarin $c_1, \ldots, c_j$ en C van z onafhankelijke positieve getallen voorstellen en $r = |z|$ is. Dan is de orde van de reeks zeker niet groter dan ω .

We hebben n.l.:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz$$

---

[1]) Als $t^{-q}\varphi(t)$ op en binnen $|1-t| \leq 1$ regulier is, stelt men de orde $-\infty$.

waarin de integratiecontour K_r een cirkel met middelpunt 0 en straal r zij. Uit (3) volgt

$$(4) \qquad |a_k| < \frac{1}{2\pi}\sum_1^{\delta} \frac{c_n}{r^{k+1}} \int_{K_r} \frac{|dz|}{|s_n - z|^{\omega}} + C(1-r)^{-\omega+1} r^{-k}$$

We passen nu toe de transformatie $z = r e^{i(\varphi+\varphi_n)}$, waarin $\varphi_n = \arg s_n$

$$|s_n - z| = |1 - r e^{i(\varphi+\varphi_n)}| = (1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{\frac{1}{2}}$$

We vinden zo

$$\frac{1}{r}\int_{K_r} \frac{|dz|}{|s_n - z|^{\omega}} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{\omega/2}}$$

Voor $r > 3-\sqrt{2}$, is er een γ te vinden zodanig, dat $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ en dat $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{1-r}{\sqrt{2r}}$. Voor $\varphi < \gamma$ maken we gebruik van

$$1 - 2r\cos\varphi + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi > (1-r)^2 .$$

en voor $\pi > \varphi > \gamma$ maken we gebruik van

$$1 - 2r\cos\varphi + r^2 > 4r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi > \frac{4}{\pi^2} r\varphi^2 .$$

We vinden dan

$$\frac{1}{r}\int_{K_r}\frac{|dz|}{|s_n - z|^{\omega}} < 2\int_0^{\gamma}\frac{d\varphi}{(1-r)^{\omega}} + 2\int_{\gamma}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\omega} r^{\omega/2}\frac{d\varphi}{\varphi^{\omega}}$$

$$= 2\gamma(1-r)^{-\omega} - \frac{2r^{\omega/2}(\pi/2)^{\omega}}{\omega-1}\left[\pi^{-\omega+1} - \gamma^{-\omega+1}\right]$$

$$< A(1-r)^{-\omega+1} \quad \text{als } r \to 1, \text{ want}$$

$\omega > 1$ is ondersteld en $\gamma = O(1-r)$.

We nemen $r = 1 - \frac{1}{k}$ en vinden dan

$$\frac{1}{r}\int_{K_r}\frac{|dz|}{|s_n - z|^{\omega}} < A\, k^{\omega-1}$$

Daar verder $(1 - \frac{1}{k})^{-k}$ beperkt is, als $k \to \infty$, volgt tenslotte uit (4)

$$|a_k| < A'\, k^{\omega-1}$$

dus $$\frac{\log|a_k|}{\log k} < \omega - 1 + \frac{\log A'}{\log k}$$

of $$h = 1 + \limsup \frac{\log|a_k|}{\log k} \leqq \omega \qquad (q.e.d)$$

N.B. In geval we $\omega = 1$ genomen hadden, hadden we gevonden

$$|a_k| < A \log k$$

en dus $$h = 1 + \limsup \frac{\log|a_k|}{\log k} \leqq 1 = \omega$$

Ook dan geldt de stelling dus nog.

Stelling III. Zij van de machtreeks $f(z)=\sum_0^\infty{}_k\, a_k z^k$ met convergentiestraal 1 gegeven, dat zij op de eenheidscirkel een eindig aantal singulariteiten $s_1,\dots,s_j$ bezit. Geldt in dat deel van de omgeving van s_n, hetwelk binnen de eenheidscirkel ligt

$$f(z)\sim c_n(s_n-z)^{-\omega_n}\, g_n(s_n,z)$$

waarin ω_n reëel, terwijl $g_n(s_n,z)$ voldoet aan

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{z\to 0} z^{\varepsilon}\, g_n(s_n,z)=0\\ \lim\limits_{z\to 0}\left|z^{-\varepsilon}\, g_n(s_n,z)\right|=\infty\end{array}\right\}\ \text{als } \varepsilon>0 \text{ en } |\arg z|\leq\frac{\pi}{2}$$

dan is h de orde van de machtreeks, als $h=\max\omega_n\geqq 1$.

Allereerst is het duidelijk, dat $f(z)$ aan een ongelijkheid van het type (3) voldoet met $\omega=h+\varepsilon$ waarin ε een willekeurig positief getal is. Dus is de orde $\leqq h+\varepsilon$. Laat men ε tot nul naderen, dan blijkt dus dat de orde $\leq h$ is.

Was de orde $<h$, dan zou volgens (1) binnen de eenheidscirkel moeten gelden:

$$f(z)=C\,(1-z)^{-h'}$$

voor zekere $h'<h$.

Dit is zeker niet waar in de omgeving van het punt s_m waarvoor $\omega_n=h$ is. De orde is dus precies h.

Stelling IV. Heeft $f(z)=\sum_0^\infty{}_k\, a_k z^k$ de orde h, dan heeft $f'(z)=\sum_0^\infty{}_k\, a_{k+1}(k+1)z^k$ de orde $h+1$.

Immers $\limsup\dfrac{\log|a_{k+1}|(k+1)}{\log k}=\limsup\dfrac{\log|a_k|}{\log k}+1$

Stelling V. Heeft $f_1(z)=\sum_0^\infty{}_k\, a_{1k}z^k$ de orde h_1 en $f_2(z)=\sum_0^\infty{}_k\, a_{2k}z^k$ de orde h_2, dan is de orde van $f_1(z)+f_2(z)=\sum_0^\infty{}_k\,(a_{1k}+a_{2k})z^k$ gelijk aan het max (h_1,h_2), als $h_1\neq h_2$, en de orde van $f_1(z)+f_2(z)$ is zeker niet groter dan h_1, als $h_1=h_2$.

Het bewijs hiervan is duidelijk.

Stelling VI. Zij

$$f(z)=\sum_1^n{}_j\, c_j(a_1-z)^{-\omega_{1j}}(a_2-z)^{-\omega_{2j}}\cdots\cdots(a_l-z)^{-\omega_{lj}}\times$$
$$\times\log^{\nu_{1j}}(a_1-z)\log^{\nu_{2j}}(a_2-z)\cdots\cdots\log^{\nu_{lj}}(a_l-z)+g(z),$$

waarin $|a_j|=1$, $c_j\neq 0$, $g(z)$ regulier voor $|z|\leq 1$ terwijl voor elke j niet voldaan is aan de volgende voorwaarde:

Alle $\omega_{1j},\dots,\omega_{lj}$ zijn niet-positief geheel en alle $\nu_{1j},\dots,\nu_{lj}$ zijn tegelijkertijd nul.

Dan kan $f(z)$ ontwikkeld worden in een machtreeks van de orde $h = \max(\operatorname{Re} \omega_{ij})$.

Door te differentieren vinden we, dat $f'(z)$ in een dergelijke vorm te schrijven is als hierboven voor $f(z)$ werd gedaan, alleen is $\max(\operatorname{Re} \omega_{ij})$ voor de vorm met 1 vermeerderd. We differentieren net zo lang tot $\max(\operatorname{Re} \omega_{ij}) \geq 1$ is, dan kunnen we stelling III toepassen, en m.b.v. stelling V in de omgekeerde richting toegepast komen we op het gewenste resultaat.

4. Het verband met asymptotische ontwikkelingen.

I. Beschouw

$$G(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t)\, dt$$

Door de transformatie $t_1 = t^{1/\alpha}$ met $\alpha > 0$ toe te passen, vinden we

$$G(z) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 t_1^{\frac{z}{\alpha}-1} \varphi(\alpha, t_1)\, dt_1$$

waarin $\varphi(\alpha, t_1) = \varphi(t_1^{\alpha})$.

Het is mogelijk, dat bij een bepaalde α $G(z)$ in een faculteitreeks $\frac{1}{\alpha} \sum_0^\infty{}_k\, a_k B(\frac{z}{\alpha}, k+1)$ is te ontwikkelen. Dan moet echter $\varphi(\alpha, t_1)$ analytisch en eenwaardig zijn in het gebied $|1 - t_1| < 1$, terwijl voor dezelfde waarden van t geldt

$$|\varphi(\alpha, t_1)| < c\,(1 - |1 - t_1|)^{-p}$$

Dit laatste betekent, $\varphi(\alpha, t_1)$ heeft een machtreeks-ontwikkeling van eindige orde.

Aan deze eisen voor $\varphi(\alpha, t_1)$ blijft voldaan, als men α groter laat worden. Verkleinen van α kan echter òf een singulariteit introduceren binnen de cirkel $|1 - t| = 1$ òf de $\varphi(\alpha, t_1)$ van de orde ∞ doen worden.

Zij nu $\varphi(\alpha, t_1)$ naar machten van $(1 - t_1)$ ontwikkeld: $\varphi(\alpha, t_1) = \sum_0^\infty{}_k\, a_k(\alpha)(1 - t_1)^k$, dan geldt bij voldoend grote α

$$G(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_0^\infty{}_k \frac{a_k(\alpha)\; k!}{\frac{z}{\alpha}\left(\frac{z}{\alpha}+1\right)\cdots\cdots\left(\frac{z}{\alpha}+k\right)}$$

$$= \sum_0^\infty{}_k \frac{\alpha^k\, a_k(\alpha)\; k!}{z\,(z+\alpha)\cdots\cdots(z+k\alpha)}.$$

De reeks in het rechterlid convergeert voor kleine α niet meer. Als $\alpha \to 0$ gaat de faculteitreeks over in een asymptotische ontwikkeling naar z^{-k}.

Dit verklaart, waarom faculteitreeksen convergeren, terwijl asymptotische reeksen met ontwikkelingen naar z^{-k}, die dus met $\alpha = 0$ corresponderen, divergeren.

II. Een eenvoudig voorbeeld van een faculteitreeks is

$$\frac{(z+\rho)!}{(z-1)!\, z^{\rho+1}} = \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(-1)^k \binom{\rho+k-1}{k} B_k^{(\rho+k)}}{(z+\rho+1)\cdots\cdots(z+\rho+k)}$$

waarin $B_k^{(\rho+k)}$ de getallen van Bernoulli van de orde $(\rho+k)$ zijn. Deze reeksvoorstelling volgt uit

$$\frac{\rho!}{z^{\rho+1}} = \int_0^1 t^{z-1}\{-\log t\}^{\rho}\, dt$$

$$(-\log t)^{\rho} = \rho(1-t)^{\rho} \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(-1)^k B_k^{(\rho+k)}}{k!\,(\rho+k)} (1-t)^k$$

Een andere is

$$\frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} = \sum_{n}^{\infty}{}_k \binom{k}{n} \frac{B_{k-n}^{(k+1)}\,(\alpha+k)}{z(z+1)\cdots\cdots(z+k)}$$

Voor deze laatste reeks convergeert ook de ontwikkeling naar z^{-k}.

Nog een voorbeeld van een functie, waarvoor ook de ontwikkeling naar z^{-k} convergeert is $e^{-1/z}$.

Men heeft $\quad e^{-1/z} = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(-1)^n}{n!\,z^n} = 1 - \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,z^n}$

Voor $n > 1$ is

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{z-1}(-\log t)^{n-1}\, dt \qquad \text{(vgl. boven), dus}$$

$$e^{-1/z} = 1 - \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\int_0^1 t^{z-1}(-\log t)^n\, dt$$

$$= 1 + \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{-\log t}}\, J_1\!\left(2\sqrt{-\log t}\right) dt\,,$$

$\frac{J_1(2\sqrt{-\log t})}{\sqrt{-\log t}}$ is een analytische functie voor $|1-t| < 1$, de orde van $\frac{J_1(2\sqrt{-\log t})}{t\sqrt{-\log t}}$ is 1, zoals men met stelling III van de vorige paragraaf vindt.

Dus geldt voor $\operatorname{Re} z > 0$:

$$e^{-1/z} = 1 + \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{a_k\, k!}{z(z+1)\cdots\cdots(z+k)}\,.$$

waarin de a_k de ontwikkelingscoefficienten zijn van $\frac{J_1(2\sqrt{-\log t})}{\sqrt{-\log t}}$ naar $(1-t)$:

$$\frac{J_1(2\sqrt{-\log t})}{\sqrt{-\log t}} = \sum_{0}^{\infty}{}_k a_k (1-t)^k\,.$$

We beschouwen nu

$$-Ei(-z) = \int_z^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi$$

$$= e^{-z} \int_0^\infty \frac{e^{-zx}}{1+x}\, dx$$

We stellen $t = e^{-\alpha x}$ en krijgen

$$-Ei(-z) = \frac{e^{-z}}{\alpha} \int_0^1 t^{z/\alpha - 1} \left\{ 1 - \frac{\log t}{\alpha} \right\}^{-1} dt \qquad ")$$

We zullen nu $\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1}$ naar $\tau = 1 - t$ ontwikkelen.

Stelt men $1 - \frac{\log t}{\alpha} = \sum_k b_k \tau^k$

en $\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1} = \sum_k a_k \tau^k$

dan geldt $b_0 = 1$, $b_k = \frac{1}{k\alpha}$ $(k \geq 1)$

en
$$\left.\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_k b_0 &= -\sum_{l=0}^{k-1} a_l b_{k-l} \end{aligned}\right\}$$

Op deze wijze vindt men achtereenvolgens

$$a_0 = 1$$

$$\alpha a_1 = -1$$

$$\alpha a_2 = \frac{2-\alpha}{2!}$$

$$\alpha a_3 = -\frac{6-6\alpha+2\alpha^2}{3!}$$

$$\alpha a_4 = \frac{24-36\alpha+22\alpha^2-6\alpha^3}{4!}$$

$$\alpha a_5 = -\frac{120-240\alpha+210\alpha^2-100\alpha^3+24\alpha^4}{5!}$$

$$\alpha a_6 = \frac{720-1800\alpha+2040\alpha^2-1350\alpha^3+548\alpha^4-120\alpha^5}{6!}$$

$$\alpha a_7 = -\frac{5040-15120\alpha+21000\alpha^2-17640\alpha^3+9744\alpha^4-3528\alpha^5+720\alpha^6}{7!}$$

$$\alpha a_8 = \frac{40320-141120\alpha+231840\alpha^2-235200\alpha^3+162456\alpha^4-78792\alpha^5+26136\alpha^6-5040\alpha^7}{8!}$$

en dus voor $-Ei(-z)$ de ontwikkeling

") We mogen de ontwikkelingsstelling toepassen indien $\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1}$ geen singulariteiten binnen $|1-t| < 1$ heeft. D.i. $\alpha > \log 2$. Bij $\alpha = \log 2$ is de orde van $\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1} . t^{-1}$ gelijk 1, evenals bij $\alpha > \log 2$ (St. III van paragraaf 3 toepassen).

$$-\mathrm{Ei}(-z) = e^{-z}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+\alpha)} + \frac{2-\alpha}{z(z+\alpha)(z+2\alpha)} - \frac{6-6\alpha+2\alpha^2}{z(z+\alpha)(z+2\alpha)(z+3\alpha)}\right.$$

$$+ \frac{24-36\alpha+22\alpha^2-6\alpha^3}{z(z+\alpha)\ldots(z+4\alpha)} - \frac{120-240\alpha+210\alpha^2-100\alpha^3+24\alpha^4}{z(z+\alpha)\ldots\ldots(z+5\alpha)}$$

$$+ \frac{720-1800\alpha+2040\alpha^2-1350\alpha^3+548\alpha^4-120\alpha^5}{z(z+\alpha)\ldots(z+6\alpha)}$$

$$- \frac{5040-15120\alpha+21000\alpha^2-17640\alpha^3+9744\alpha^4-3528\alpha^5+720\alpha^6}{z(z+\alpha)\ldots\ldots(z+7\alpha)}$$

$$+ \frac{40320-141120\alpha+231840\alpha^2-235200\alpha^3+162456\alpha^4-78792\alpha^5+26136\alpha^6-5040\alpha^7}{z(z+\alpha)\ldots(z+8\alpha)}$$

$$\left. - \ldots\ldots\right].$$

Voor $\alpha = 0$ krijgen we inderdaad de gewone asymptotische ontwikkeling.

De ontwikkelingscoefficienten werden berekend voor $\alpha = 1$ en $\alpha = 2$, wat convergente ontwikkelingen levert, verder voor $\alpha = \log 2$, welke net op de grens van convergentie ligt, en voor $\alpha = 0{,}5$, waarvoor we divergente ontwikkelingen krijgen.

Hieronder is een tabel van de gevonden waarden van de tellers, met als de vergelijking die voor de asymptotische reeks (= 0)

n	0	0,5	log 2	1	2
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	1,5	1,30685	1	0
3	6	3,5	2,80202	2	2
4	24	10,75	7,61852	4	- 8
5	120	41,5	26,7774	14	64
6	720	191,75	110,173	38	- 592
7	5040	1035	539,193	216	6768
8	40320	6380,25	2968,92	600	- 90624

Bovendien bepaalden we uit de eerste 9 termen van de reeks, zonder de factor e^{-z}, de som voor $z = 1,2,3$. Voor $\alpha = \log 2$ en $\alpha = 0{,}5$ werd hierbij na een geschikte term het Euler-proces toegepast, voor $\alpha = 0$ (asymptotische reeks naar z^{-k}) pasten we het Euler-proces na de term met kleinste absolute waarde toe, hierdoor ontstaat een nieuwe alternerende reeks, waarop op dezelfde wijze het Euler-proces werd toegepast, enz., tot men tenslotte niet meer verder komt. Voor $\alpha = 1$ en 2 pasten we het Euler-proces niet toe, omdat het hier geen voordelen opleverde.

De begin convergentie was voor $\alpha = 1$ het beste, bij $\alpha = 2$ was zij zeer slecht . Het Euler-proces zorgt bij de lage α-waarden er voor, dat met de eerste 9 termen toch nog een behoorlijk resultaat behaald kan worden.

Het heeft dus zin de reeks te beschouwen voor $\alpha = \log 2$. Voor $\alpha = 0{,}5$ krijgen we divergentie. Oneindig veel termen van de reeks gedragen zich ongeveer als $(e^{1/2} - 1)^{-n}\, n^{2\,\mathrm{Re}\,z}$, waarin $e^{1/2} - 1 < 1$. Of het toepassen van de sommatiemethode van Euler zin heeft, is nog een open vraag. Hierbij dient echter reeds opgemerkt te worden, dat de methode van Euler de machtreeks voor $\{1 - 2 \log t\}^{-1}$ overvoert in een reeks, die nog tot $t = 0$ convergeert.

Het onderstaande tabelletje geeft de resultaten met de exacte waarden van $-e^{z}\,\mathrm{Ei}(-z)$. Hieruit blijkt, dat $\alpha = 0{,}5$ verreweg de beste resultaten oplevert.

$z \backslash \alpha$	0	0,5	log 2	1	2	exact
1	0,6019	0,5969	0,5983	0,6011	0,6216	0,5963
2	0,36111	0,36135	0,36143	0,36162	0,36421	0,36133
3	0,262088	0,262081	0,262095	0,262124	0,262675	0,262084

IV. Als laatste voorbeelden mogen de logarithme van de faculteit en haar afgeleide, de ψ-functie, dienen.

Hier kan men de integraalvoorstelling van Gausz voor de ψ-functie gebruiken

$$\psi(z+1) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x(z+1)}}{1-e^{-x}} \right\} dx = -\int_0^1 \left\{ \frac{1}{\log t} + \frac{t^z}{1-t} \right\} dt .$$

Nörlund geeft al aan, hoe men met behulp hiervan een faculteitreeks voor $\psi(z+\mu+1) - \psi(z+1)$ kan vinden. Immers men heeft

$$\psi(z+\mu+1) - \psi(z+1) = \int_0^\infty e^{-(z+1)x}\, \frac{1-e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\, dx$$

$$= \int_0^1 t^z\, \frac{1-t^\mu}{1-t}\, dt$$

Dit levert, zoals men gemakkelijk ziet, de faculteitreeks

$$\psi(z+\mu+1) - \psi(z+1) = \sum_0^\infty{}_k \frac{(-1)^k}{k+1}\, \frac{\mu(\mu-1)\cdots\cdots(\mu-k)}{(z+1)(z+2)\cdots\cdots\cdots(z+k+1)} .$$

Voor $\log z!$ geldt de integraalvoorstelling van Plana:

$$\log z! = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \left\{ z - \frac{1-e^{-zx}}{1-e^{-x}} \right\} dx$$

$$= -\int_0^1 \left\{ z - \frac{1-t^z}{1-t} \right\} \frac{dt}{\log t} .$$

Maakt men tenslotte nog gebruik van

$$\log(z+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-(z+1)x}}{x}\, dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{1-t^z}{\log t}\, dt \quad ,$$

dan vindt men

(1) $$\psi(z+1) - \log(z+1) = -\int_0^1 t^z \left\{ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} \right\} dt$$

$$\log z! - (z+\tfrac{1}{2}) \log(z+1) = -\int_0^1 \left\{ t^z\left(\frac{1}{1-t} + \tfrac{1}{2} + z\right) - \frac{1}{1-t} - \tfrac{1}{2} \right\} \frac{dt}{\log t} \quad .$$

In de laatste integraal nemen we eerst eens de grenzen 0 en $a < 1$.
Nu is

$$\int_0^a \frac{z t^z}{\log t}\, dt = \frac{a^{z+1}}{\log a} - \int_0^a t^z \left(\frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log^2 t} \right) dt \quad .$$

Verder gebruik makend van

$$\int_0^a \frac{dt}{t \log^2 t} = -\frac{1}{\log a}$$

vinden we

$$\int_0^a \left\{ t^z\left(\frac{1}{1-t} + \tfrac{1}{2} + z\right) - \frac{1}{1-t} - \tfrac{1}{2} \right\} \frac{dt}{\log t} =$$

$$\int_0^a \frac{t^z}{\log t} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} - \tfrac{1}{2} \right) dt - \int_0^a \left(\frac{1}{1-t} + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{t \log t} \right) \frac{dt}{\log t} - \frac{1-a^{z+1}}{\log a} \quad .$$

In beide integralen is nu de integrand eindig voor $a = 1$, we kunnen dus de limiet overgang $a \to 1$ uitvoeren. Op deze wijze blijkt

$$\log z! - (z+\tfrac{1}{2}) \log(z+1) = -\int_0^1 \frac{t^z}{\log t} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} - \tfrac{1}{2} \right) dt \quad - (z+1)$$
$$+ \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{t \log t} \right) \frac{dt}{\log t} \quad .$$

De eerste integraal zullen we in een faculteitreeks ontwikkelen; die in een halfvlak $\mathrm{Re}\, z > z_0$ een tot nul naderende functie definieert. Stirling's asymptotische formule levert

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{t \log t} \right) \frac{dt}{\log t} = \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$

Dus

(2) $$\log z! = (z+\tfrac{1}{2}) \log(z+1) - (z+1) + \tfrac{1}{2} \log 2\pi - \int_0^1 \frac{t^z}{\log t} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} - \tfrac{1}{2} \right) dt \quad .$$

Met behulp van de integraalvoorstellingen (1) kan men $\psi(z+1)$ en $\log(z+1)!$ na de substitutie $t_1 = t^{\alpha}$ in gegeneraliseerde faculteitreeksen ontwikkelen, die de asymptotische reeksen van Stirling vervangen. Ook hier is een ondergrens voor de α-waarden aan te geven, waarvoor de reeks in een zeker halfvlak convergeert. Voor de ψ-functie krijgen we, na de substitutie $t_1 = t^{\alpha}$ de integraalvoorstelling:

$$\psi(z) - \log(z+1) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t_1^{\,z+1/\alpha - 1}\left(\frac{1}{1-t_1^{1/\alpha}} + \frac{\alpha}{\log t_1}\right) dt_1$$

De singulariteiten van $\varphi(t) = \frac{1}{1-t_1^{1/\alpha}} + \frac{\alpha}{\log t_1}$ zijn het punt $t_1 = 0$ en de punten, waarvoor $\sqrt{\ }= 0$ gekozen wordt. De enige singulariteiten, die ons interesseren, zijn die, welke binnen de cirkel $|1-t| = 1$ liggen en waarvoor $|\arg t| < \frac{\pi}{2}$. Men ziet dat deze er slechts zullen zijn als $\alpha < 1/6$. Voor $\alpha > 1/6$ krijgen we dus convergente faculteitreeksen, en wel convergent voor $\Re(z+1) > 0$, daar de orde van $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ 1 is.

Hetzelfde geldt voor de faculteitreeks voor $\log z!$

Voor $\alpha = 1$ krijgt men de volgende reeksen.

$$\psi(z+1) = \log(z+1) - \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{12(z+1)(z+2)} - \frac{1}{12(z+1)(z+2)(z+3)}$$

$$- \frac{19}{120(z+1)(z+2)\ldots(z+4)} - \frac{9}{20(z+1)(z+2)\ldots(z+5)} + \ldots.$$

$$\log z! = (z+\tfrac{1}{2})\log(z+1) - (z+1) + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12(z+1)}$$

$$- \frac{1}{360(z+1)(z+2)(z+3)} - \frac{1}{120(z+1)(z+2)\ldots(z+4)} + \ldots..$$

$\sqrt{\ }$ $t_1^{1/\alpha} = 1$, behalve $t_1 = 1$ indien hiervoor het argument

5. <u>Toepassingen van faculteitreeksen en Bêta-integralen.</u>

I. <u>Stelling I:</u> Zij van een functie $f(z)$ die in $z = 0$ regulier is, gegeven, dat ze eenwaardig en analytisch is in het z-vlak, waarin als coupures zijn aangebracht de halfrechten, die een eindig aantal punten $s_1, \ldots, s_n$ met resp. $s_1\infty, \ldots s_n\infty$ verbinden. Neem verder aan, dat $f(z)$ in de omgeving van een punt s_j ($j = 1, \ldots, n$), alsmede langs de halfrechte, die s_j met $s_j\infty$ verbindt is voor te stellen door

$$f(z) = g_j(z) + h_j(z)$$

waarin $g_j(z)$ in de omgeving van en langs de halfrechte, met uitzondering van het punt $z = s_j$ analytisch is en $h_j(z)$ in die omgeving en langs de halfrechte analytisch en eenwaardig is.

Stel tenslotte, dat er een reëel getal q is te vinden, zodat geldt

$$|g_j(z)| < A\,|z|^q \qquad j = 1,\ldots\ldots,n$$

als $|z|$ voldoende groot is en op de halfrechte van s_j naar $s_j\infty$ ligt, terwijl in het gehele opengesneden z-vlak geldt

$$|f(z)| < A'\,|z|^q \quad .$$

Indien dan a_k wordt gedefinieerd door

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_k z^k$$

geldt voor $k > q$

$$a_k = -\sum_1^n s_j^{-k}\, B_1\left(k, 1\,;\, g_j\left(\frac{s_j}{t}\right)\right)$$

Bewijs:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_R} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dz$$

waarin K_R bijv. een (in positieve zin te doorlopen) cirkel is met de oorsprong als middelpunt en voldoend kleine straal R. Laten we R toenemen, dan moet men, om de singulariteiten s_j te ontgaan de cirkel van lussen voorzien die om s_j lopen en tweemaal, in tegengestelde richtingen, een stuk langs de halfrechten van s_j naar $s_j\infty$. De bijdrage langs de cirkel nadert tot nul als $R \to \infty$ en $k > q$ en de integralen langs de halfrechten + lussen om s_j convergeren, daar de bijdrage van $h_j(z)$ nul is en $|g_j(z)| < A|z|^{q}$ ondersteld werd.

$$a_k = -\frac{1}{2\pi i}\sum_1^n \int_{s_j\infty}^{(s_j+)} z^{-k-1}\, g_j(z)\, dz \quad .$$

Door te substitueren $t = \frac{s_j}{z}$ vinden we

$$a_k = -\frac{1}{2\pi i}\sum_1^n s_j^{-k}\int_{W_1} t^{k-1}\, g_j\left(\frac{s_j}{t}\right) dt$$

$$= -\sum_1^n s_j^{-k}\, B_1\left(k, 1\,;\, g_j\left(\frac{s_j}{t}\right)\right) \qquad (q.e.d)$$

Als dus $g_j(z)$ van de vorm $\sum_0^{p_j} \left(\frac{s_j}{z} - 1\right)^{\beta_{\ell j}-1} \log^{m_{\ell j}}\left(\frac{s_j}{z} - 1\right)\varphi_{\ell j}\left(\frac{s_j}{z}\right)$ is, waarin $\varphi(t)$ een in de cirkel $|1-t| < 1$ reguliere functie is die daar voldoet aan

$$|\varphi(t)| < |t|^{-\mathrm{Re}\, q'}\left(1 - |1-t|\right)^{-p}$$

dan kan men de a_k schrijven als een eindige som van faculteitreeksen

$$a_k = -\sum_1^n \sum_0^{p_j} s_j^{-k}\, B_1\left(k, \beta_{\ell j}\,;\, \varphi_{\ell j}(t)\log^{m_{\ell j}}(t-1)\right) .$$

Men kan op deze manier bijv. de coefficiënten van de machtreeks ontwikkeling van $(z-a_1)^{\nu_1}\ (z-a_2)^{\nu_2}\ \ldots (z-a_3)^{\nu_3}$ in faculteitreeksen ontwikkelen.

II. Zij $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda+\mu > 0$ en $a_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{\lambda h}(t-1)^{\mu h}\, g(t)\varphi(t)\,dt$

Hierin stellen $g(t)$ en $\varphi(t)$ functies voor, die aan dezelfde voorwaarden voldoen als onder IV van § 1 met $p + q' + Re\, q = 0$.

Zij verder $t^q \varphi(t) = \sum_0^\infty k\ \gamma_k (1-t)^k$ de machtreeksontwikkeling van $t^q \varphi(t)$ om het punt 1.

Zij $G(w) = \sum_0^\infty h\ b_h w^h$ een functie, die binnen de cirkel $|w| < R$ analytisch en eenwaardig is, terwijl we bovendien onderstellen, dat na het aanbrengen van een eindig aantal coupures langs halfrechten, die een punt j met $j\infty$ verbinden, $G(w)$ in het gehele opengesneden w-vlak analytisch en eenwaardig is.

Dan is de functie $F(z) = \sum_0^\infty h\ a_h b_h z^h$ in een z-vlak, dat opengesneden is door coupures aan te brengen langs de halfrechten, die de punten $j\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^\lambda \mu^\mu} e^{-\mu\pi i}$ met $j e^{-\mu\pi i}\infty$ verbinden en langs de halfrechten, die de punten $j\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^\lambda \mu^\mu} e^{+\mu\pi i}$ met $j e^{+\mu\pi i}$ verbinden een analytische en eenwaardige functie, die voor te stellen is door de integraal

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} G\left(z t^\lambda (t-1)^\mu\right) g(t)\, \varphi(t)\, dt$$

of door de reeks

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty k\, (-1)^k \gamma_k \int_{W_1} G\left(z t^\lambda (t-1)^\mu\right) t^{-q}\, g(t)\,(t-1)^k\, dt$$

De straal van de cirkel om 1 van de integratieweg W_1 moet zo klein gekozen worden, dat geen singulariteiten van $G\left(z t^\lambda (t-1)^\mu\right)$ omsloten worden.

Voor het bewijs vervangt men in $F(z) = \sum_0^\infty h\ a_h b_h z^h$ de coëfficiënten a_h door hun integraalvoorstelling, indien $|z| < \frac{\lambda^\lambda \mu^\mu}{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}} R$ kan men dan sommatie en integratie verwisselen en men vindt de vereiste integraalvoorstelling, die in het gehele opengesneden z-vlak een analytische functie voorstelt. Door het aanbrengen van de coupures n.l. voorkomt men dat een singulariteit van $G(z t^\lambda (t-1)^\mu)$ op het segment $0 < t < 1$ komt te liggen. De ontwikkeling volgt uit de algemene ontwikkelingsstelling.

N.B. Neemt men slechts aan dat voor $\psi(t) = g(t)\,\varphi(t)$ de eisen van paragraaf 1, II gelden, dan is de integraalvoorstelling nog juist, mits $q_0 = 0$.

III. Zij $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda+\mu>0$; $a_h = \int_0^1 t^{\lambda h}(1-t)^{\mu h}\, g(t)\varphi(t)dt$;
$g(t)$ en $\varphi(t)$ voldoen aan de eisen van sectie V van paragraaf 1;
$G(w)=\sum_{h=0}^{\infty} b_h w^h$ voldoet aan de eisen van II van deze paragraaf.

Men vindt dan, dat $F(z)=\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h z^h$ analytisch is voort te zetten in een z-vlak opengesneden langs de halfrechten, die $j\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^{\lambda}\mu^{\mu}}$ met $j\infty$ verbinden, en daarin is voor te stellen door

$$F(z)=\int_0^1 G\left(zt^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right) g(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_0^1 G\left(zt^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right) t^{-q} g(t)(1-t)^k\,dt$$

waarin $t^q\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (1-t)^k$ is gesteld. Bewijs als bij II.

IV. We nemen in II van deze paragraaf $G(w)=(1-w)^{-1}$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$ en $\psi(t)= g(t)\varphi(t)$.

Aan $\psi(t)$ wordt slechts de eis van paragraaf 1, II gesteld. Dan is dus

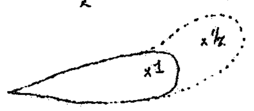
$$a_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^h \psi(t)\,dt \quad ; \quad b_h = 1$$

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} (1-zt)^{-1}\psi(t)\,dt$$

Dit levert ons de analytische voortzetting van $F(z)$ in het complexe z-vlak met een snede langs de positieve reële as vanaf $z = 1$. De integratieweg W_1 moet zo gekozen worden, dat het punt $t = \frac{1}{z}$ er niet op ligt.

Ligt z dicht genoeg in de buurt van 1, dan kan men behalve de oorspronkelijke contour W_1 ook één W_{11} beschouwen, die de punten $t = \frac{1}{z}$ en $t = 1$ omsluit en geen andere singulariteit van $\psi(t)$.

Dit betekent, dat men aan de integraal het residu van de integrand in $t = \frac{1}{z}$ toevoegt.



Dus

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_{11}} (1-zt)^{-1}\psi(t)\,dt + \frac{1}{z}\psi\left(\frac{1}{z}\right) .$$

Hierin kunnen we de integratieweg onafhankelijk van z kiezen, als z tot 1 nadert, en we vinden dus

$$F(z) = \frac{1}{z}\psi\left(\frac{1}{z}\right) + H(z) ,$$

waarin $H(z)$ een in de omgeving van $z = 1$ reguliere functie is.

Vervangen we in het bovenstaande z door ϑz, waarin $\vartheta \neq 0$, dan vinden wij dat de functie

$$\sum_{k_0}^{\infty} a_k \vartheta^k z^k$$

in de omgeving van het punt $z = \frac{1}{\vartheta}$ geschreven kan worden in de gedaante

$$\frac{1}{\vartheta z}\,\psi\left(\frac{1}{\vartheta z}\right) + H(z)$$

waarbij $H(z)$ in de omgeving van $z = \frac{1}{\vartheta}$ regulier is.

Als voorbeeld diene de opgave: Bepaal de aard van de op de eenheidscirkel gelegen singulariteiten van de functie

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\lambda}$$

Als λ niet geheel positief is, geldt de formule

$$\frac{1}{k^\lambda} = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\pi i}\int_{W_1} t^{k-1}(\log t)^{\lambda-1}\,dt\,,$$

dus

$$F(z) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\pi i}\, z \int_{W_1} (1-zt)^{-1}(\log t)^{\lambda-1}\,dt$$

zodat volgens het bovenstaande $F(z)$ in de omgeving van het punt $z = 1$ afgezien van een reguliere functie, gelijk is aan $\Gamma(1-\lambda)\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\lambda-1}$.

Is λ echter wel geheel positief, dan is

$$\frac{1}{k^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{k-1}\log(t-1)(-\log t)^{\lambda-1}\,dt$$

dus

$$F(z) = \frac{1}{(\lambda-1)!}\,\frac{z}{2\pi i}\int_{W_1}(1-zt)^{-1}\log(t-1)(-\log t)^{\lambda-1}\,dt$$

zodat in dat geval $F(z)$ in de omgeving van het punt $z = 1$, op een reguliere functie na, gelijk is aan $\frac{1}{(\lambda-1)!}\cdot\log(1-z).\ \log^{\lambda-1}(z)$. In dit speciale geval treedt dus in het punt $z = 1$ een logarithmische singulariteit op.

V. Zij in II $G(w) = e^w$, dus $b_h = \frac{1}{h!}$. Verder weer $\lambda = 1$, $\mu = 0$, bovendien $g(t) = (t-1)^{\beta-1}$, $q = 0$. Dan is $G(w)$ en dus ook $F(z)$ een gehele functie. Men heeft

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k \gamma_k \int_{W_1} e^{zt}(t-1)^{\beta-1+k}\,dt.$$

Hierin is als $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} e^{zt}(t-1)^{\lambda-1}\,dt = \frac{\sin\pi\lambda}{\pi}\int_0^1 e^{zt}(1-t)^{\lambda-1}\,dt = \frac{\sin\pi\lambda}{\pi}\,\frac{e^z}{z^\lambda}\,\Gamma(z;\lambda),$$

waarin $\Gamma(z;\lambda) = \int_0^z e^{-t}t^{\lambda-1}\,dt$

de onvolledige Gamma-functie voorstelt.

Door analytische voortzetting geldt dit ook voor $\mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0$.

We vinden zo

$$F(z) = \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \frac{e^z}{z^\beta} \sum_0^\infty{}_k \gamma_k \frac{\Gamma(z;\beta+k)}{z^k} .$$

Als $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, zal als $|z| \to \infty$ de onvolledige Gamma-functie $\Gamma(z;\beta+k)$ tot de volledige Gamma-functie $\Gamma(\beta+k)$ naderen. Door het vervangen van de onvolledige Gamma-functie door de volledige, gaat de convergente ontwikkeling in een divergente asymptotische ontwikkeling over.

Is n.l. $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ dan is $\Gamma(z;\lambda) = \Gamma(\lambda) - \int_z^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt$. Hierin zijn zowel $\Gamma(z;\lambda)$, $\Gamma(\lambda)$ als $\int_z^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt$ analytische functies van λ , dus bovenstaande relatie blijft ook gelden als $\mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0$. We vinden dus zo

$$\Gamma(z;\lambda) = \Gamma(\lambda) + \mathcal{O}(e^{-z} z^{\lambda-1})$$

en

$$e^z \Gamma(z;\lambda) = \frac{e^z \Gamma(\lambda)}{z^\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) .$$

We zien dus dat het vervangen van de onvolledige Gamma-functie door de volledige een fout introduceert, die van kleinere orde in z is, dan welke term van de reeksontwikkeling ook.

Nadert $|z|$ tot oneindig met $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}$, dan zal de term $\mathcal{O}(\frac{1}{z})$ de hoofdbijdrage leveren, in de reeksontwikkeling worden alle termen van dezelfde orde.

VI. Neem nu in II $G(w) = \cosh w$, dus

$$b_k = \frac{1}{k!} \qquad k \text{ even}$$
$$= 0 \qquad k \text{ oneven} .$$

Verder weer $\lambda = 1, \mu = 0, q = 0$ en $g(t) = (t-1)^{\beta-1}$

In dit geval vinden we

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} (\cosh zt)(t-1)^{\beta-1} \varphi(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_0^\infty{}_k (-1)^k \gamma_k \int_{W_1} (\cosh zt)(t-1)^{\beta-1+k}\, dt$$

$$= \frac{\sin \pi\beta}{2\pi} \sum_0^\infty{}_k \gamma_k \left\{ \frac{e^z \Gamma(z;\beta+k)}{z^{\beta+k}} + \frac{e^{-z}\Gamma(-z;\beta+k)}{(-z)^{\beta+k}} \right\}$$

$$= \frac{\sin \pi\beta}{2\pi} \sum_0^\infty{}_k \gamma_k P_k(z)$$

met

$$P_k(z) = \frac{e^z \Gamma(z,\beta+k)}{z^{\beta+k}} + \frac{e^{-z}\Gamma(-z,\beta+k)}{(-z)^{\beta+k}} .$$

Als $|z| \to \infty$ met $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, krijgt men een asymptotische reeks door $P_k(z)$ door $e^z \Gamma(\beta+k) z^{-\beta-k}$ te vervangen; als $|z| \to \infty$ met $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}$ krijgt men een asymptotische reeks, door $P_k(z)$ door $e^{-z}\Gamma(\beta+k)(-z)^{-\beta-k}$ te vervangen.

Als voorbeeld van de laatste stelling nemen we

$$a_k = \frac{k!}{2^k \left(\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}+n\right)!}$$

en dus

$$F(z) = \sum_0^\infty{}_k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(k+n)!} = \frac{2^n}{z^n} I_n(z)$$

Toepassing van de duplicatieformule

$$k! = 2^k \frac{\left(\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}}$$

levert

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{k}{2}+n\right)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{k}{2}+n\right)!\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}\left(-n-\frac{1}{2}\right)!$$

$$= \frac{\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} u^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} (u-1)^{n-\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \frac{2\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} t^k (t-1)^{n-\frac{1}{2}} (t+1)^{n+\frac{1}{2}} \, dt .$$

In dit voorbeeld is dus

$$\beta = n + \tfrac{1}{2}$$

$$\psi(t) = \frac{2\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} (t+1)^{n+\frac{1}{2}}$$

en we vinden

$$\left(\frac{2}{z}\right)^n I_n(z) = \frac{2\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} (\cosh zt)(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \, dt ,$$

wat overeenkomt met de integraalvoorstelling van Poisson voor de Besselfuncties.

Tenslotte

$$(-1)^k \gamma_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-n-\tfrac{1}{2}\right)! \, 2^{n-\frac{1}{2}-k} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!}{\left(n-\frac{1}{2}-k\right)!\,k!} ;$$

dus vinden we de reeksontwikkeling

$$I_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sum_0^\infty{}_k \frac{2^{-k}}{k!\left(n-\frac{1}{2}-k\right)!} \left\{ (-1)^k \frac{e^z \Gamma\left(z; n+k+\frac{1}{2}\right)}{z^k} + (-1)^n e^{-\frac{1}{2}\pi i} \frac{e^{-z}\Gamma\left(-z; n+k+\frac{1}{2}\right)}{z^k} \right\} .$$

Beschouwen we alleen de eerste term tussen de haken en nemen we $\Gamma(n+k+\frac{1}{2})$ i.p.v. de onvolledige Gamma-functie, dan krijgen we

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_0^\infty{}_k \, (-1)^k \frac{2^{-k}\,(n-\frac{1}{2}+k)!}{k!\,(n-\frac{1}{2}-k)!\, z^k}$$

$$= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_0^\infty{}_k \, (-1)^k \frac{2^{-k}(n+\frac{1}{2})\cdots\cdots(n-\frac{1}{2}+k)(n-\frac{1}{2})\cdots\cdots(n-k+\frac{1}{2})}{k!\; z^k}$$

$$= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_0^\infty{}_k \, (-1)^k \frac{2^{-k}(n^2-\frac{1^2}{4})(n^2-\frac{3^2}{4})\cdots\cdots(n^2-\frac{(2k-1)^2}{4})}{k!\; z^k}$$

$$= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_0^\infty{}_k \, (-1)^k \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\cdots\cdots(4n^2-(2k-1)^2)}{k!\;(8z)^k}$$

wat de bekende asymptotische reeks is.

VII. Neem tenslotte in III $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $G(w)=e^w$, $q = 0$, $g(t)= (1-t)^{\beta-1}$. We vinden na in de integralen t door $1-t$ vervangen te hebben

$$F(z) = \sum_0^\infty{}_k \, \gamma_k \int_0^1 e^{zt}\, t^{\beta-1+k}\, dt$$

$$= \sum_0^\infty{}_k \frac{\gamma_k}{(-z)^{\alpha+k}}\, \Gamma(-z\,;\alpha+k) \quad .$$

Nu is weer

$$\frac{\Gamma(-z\,;\alpha+k)}{(-z)^{\alpha+k}} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{(-z)^{\alpha+k}} + \mathcal{O}\left(\frac{e^z}{z}\right)$$

als dus $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}$ maken we in iedere term van de laatstgenoemde reeks een fout die van kleinere orde in z is, dan welke term van de reeksontwikkeling ook, indien we de onvolledige Gamma-functie door de volledige vervangen. Zo krijgen we voor $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}$ de asymptotische reeks

$$F(z) = \sum_0^\infty{}_k \, \gamma_k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{(-z)^{\alpha+k}} \quad .$$