

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 173

Onderzoek naar vroegtijdige symptomen van essentiële hypertensie

door

E.C. Bos-Levenbach en Rina Korswagen

Mei 1955

1. Inleiding

Volgens ons door de onderzoeker verstrekte inlichtingen wordt essentiële hypertensie (hoge bloeddruk) beschouwd als een ziekte met een dominant erfelijke factor. Wanneer dus één van beide ouders aan deze ziekte lijdt, zou ongeveer de helft van de kinderen uit dit huwelijk essentiële hypertensie krijgen.

Meestal komt dit pas op latere leeftijd naar voren en het is nu van belang om na te gaan of bij mensen, waarvan de ouders aan essentiële hypertensie lijden, ook op jongere leeftijd reeds een bloeddruk geconstateerd kan worden die hoger ligt dan normaal. Speciaal het effect van lichamelijke inspanning zou een verschil in deze geest naar voren kunnen brengen.

2. Proefopzet

Bij een groep van 252 mannelijke studenten (allen medisch kandidaat) werden bloeddruk en polsfrequentie gemeten vóór en ná het maken van 15 diepe kniebuigingen.

Verder werd geïnformeerd naar eventuele essentiële hypertensie van de ouders, terwijl tenslotte leeftijd, lengte en gewicht opgenomen werden.

Het aldus verkregen materiaal bestond uit:

A: Een "negatieve" groep van 189 studenten (d.w.z. studenten, die verklaarden, dat geen van beide ouders aan essentiële hypertensie lijden of eraan overleden zijn).

B: Een "positieve" groep van 63 studenten (d.w.z. studenten, die verklaarden, dat minstens één van beide ouders aan essentiële hypertensie lijdt of eraan overleden is).

Van beide groepen waren dus gegeven:

1e: Leeftijd, lengte en gewicht,

2e: Systolische bloeddruk vóór en ná inspanning, die wij resp. zullen aangeven met S_1 en S_2 ,

3e: Diastolische bloeddruk vóór en ná inspanning (D_1 en D_2),

4e: Polsfrequentie vóór en ná inspanning (P_1 en P_2).

De door de onderzoeker gestelde vragen worden geformuleerd en beantwoord in par. 4.1 t/m 4.5.

3. Enige opmerkingen naar aanleiding van de proefopzet.

1. Bij onderzoek bleken in totaal 11 namen 2 maal voor te komen. Om een eventueel effect dat het vóórkomen van broers in het materiaal op het resultaat zou kunnen hebben (aangezien dan niet meer met onderling onafhankelijke gegevens gewerkt zou worden) te voorkómen, werden van de waarnemingen van personen met namen die in één groep dubbel voorkwamen, één van beiden (naar willekeur) weggelaten, terwijl de waarnemingen van personen met namen die in beide groepen voorkwamen, beide weggelaten werden. Hierna bleven in groep A 180 en in groep B 58 studenten over.

2. Verder is de polsfrequentie gevonden door het aantal slagen in 15 seconden (resp. 30 seconden) te vermenigvuldigen met 4 (resp. met 2), zodat de waarnemingen van de polsfrequentie niet alle even nauwkeurig zijn. Er was echter niet opgegeven in welke gevallen in 15 sec. en in welke gevallen in 30 sec. gemeten was, zodat wij niet meer na konden gaan of er, wat dit betreft, een verschil is tussen de groepen A en B.

3. Tenslotte willen wij nog opmerken, dat de (medische) studenten van te voren op de hoogte gesteld waren van het doel van het onderzoek. De vraag is nu of, als gevolg hiervan, de studenten van groep B niet anders gereageerd hebben dan die van groep A, dus of de verschillen die wij tussen de groepen vinden niet geheel of gedeeltelijk hierdoor veroorzaakt zouden kunnen zijn. Dit mogelijke psychologische effect kan bij de statistische analyse niet geëlimineerd worden, zodat de conclusies onder voorbehoud gegeven moeten worden.

Opmerking

Bij het onderzoek wordt gebruik gemaakt van statistische methoden, die berusten op het toetsen van bepaalde hypothesen (zie bijlage S 47(M6)). Als onbetrouwbaarheidsdrempel nemen wij 0,05. Voor speciale methoden die werden gebruikt wordt in de tekst naar de desbetreffende bijlagen verwezen.

4. Onderzoek

4.1. Vraag A

Zijn de systolische bloeddruk en de diastolische bloeddruk van de positieve groep (groep B) systematisch hoger dan de overeenkomstige gegevens van de negatieve groep (groep A) en is er een systematisch verschil tussen de polsfrequenties van de twee groepen, zowel vóór als ná inspanning?

Wij gebruiken de toets van Wilcoxon om dit te onderzoeken (zie bijlage S 47(M7)).

Wat betreft de bloeddruk gebruiken wij de éézijdige toets, omdat wij willen onderzoeken of de bloeddruk van groep B hoger is dan die van groep A, terwijl het omgekeerde effect als medisch onaannemelijk beschouwd moet worden; voor de overige onderzoeken gebruiken wij tweezijdige toetsen, daar bovengenoemde overwegingen speciaal voor de bloeddruk gelden.

De toetsen zijn zodanig uitgevoerd dat de waarnemingen van groep A corresponderen met de waarnemingen aangeduid met $x_1, \dots, x_n$ in de bijlage, en die van groep B met $y_1, \dots, y_m$. Wanneer wij nu een toetsingsgrootte U vinden die groter is dan $\frac{1}{2} mn$, betekent dit dat in het materiaal in meer gevallen een waarneming uit groep B groter is dan één uit groep A, dan omgekeerd. Wanneer $U < \frac{1}{2} mn$ is, geldt uiteraard het tegengestelde. Wij nemen dus voor de vergelijking der bloeddruk de rechtséézijdige toets.

Het resultaat van de boven-vermelde toets wordt weergegeven in tabel 4;1:

Tabel 4;1

Vergelijking van de groepen A en B wat betreft bloeddruk en polsfrequentie, zowel vóór als ná inspanning.

	2U-mn	k ¹⁾
S ₁	4203	$2 \cdot 10^{-6}$
S ₂	3980	$6 \cdot 10^{-6}$
D ₁	3095	$3 \cdot 10^{-4}$
D ₂	2708	10^{-3}
P ₁	1825	0,04
P ₂	638	0,48

1) k = overschrijdingskans

Conclusie

Uitgezonderd bij de polsfrequentie ná inspanning vinden wij een duidelijk verschil tussen de groepen A en B in die zin dat groep B systematisch hoger is dan groep A. De figuren 1 t/m 5 (zie pag. 12 t/m 13) dienen ter illustratie.

4.2. Vraag B

Deze vraag wordt in vier delen behandeld

4.2.1. Is er een verschil tussen de systolische bloeddruk (resp. de diastolische bloeddruk, resp. de polsfrequentie) ná en vóór de inspanning?

Dit wordt onderzocht door de tekentoets (zie bijlage S 53 (M22)) toe te passen op de verschillen tussen de waarnemingen ná en vóór inspanning voor groep A en B apart. Het resultaat wordt gegeven in tabel 4;2.

Tabel 4;2

Onderzoek naar de stijging of daling van bloeddruk en polsfrequentie tijdens inspanning

	Groep A k	Groep B k	
systolische bloeddruk	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	stijging
diastolische bloeddruk	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	daling
polsfrequentie	$< 10^{-3}$	$< 10^{-3}$	stijging

Conclusie

De systolische bloeddruk en de polsfrequentie zijn tijdens inspanning gestegen, de diastolische bloeddruk is gedaald. Deze conclusie geldt voor beide groepen.

4.2.2. Is de stijging van de systolische bloeddruk tijdens inspanning, zowel relatief als absoluut beschouwd, bij groep B anders dan bij groep A?

Onder absolute stijging verstaan wij het verschil tussen de waarneming ná en die vóór inspanning; delen wij deze absolute stijging door de waarneming vóór inspanning, dan krijgen wij de relatieve stijging.

Wij maken weer gebruik van de toets van WILCOXON (zie par. 4.1); in tabel 4;3 worden de resultaten gegeven.

Tabel 4;3

Vergelijking van de groepen A en B wat betreft de stijging der systolische bloeddruk tijdens inspanning.

	2U - mn	k
$S_2 - S_1$	1688	0,06
$\frac{S_2 - S_1}{S_1}$	554	0,54

Conclusie

Er is, relatief beschouwd, geen systematisch verschil te constateren; absoluut genomen is er een zwakke aanwijzing aanwezig, dat de systolische bloeddruk bij groep B tijdens inspanning meer gestegen zou zijn dan bij groep A

4.2.3. Is de daling van de diastolische bloeddruk tijdens inspanning, zowel relatief als absoluut beschouwd, bij groep A anders dan bij groep B?

Tabel 4;4 geeft de met behulp van de toets van WILCOXON gevonden resultaten.

Tabel 4;4

Vergelijking van de groepen A en B wat betreft de daling der diastolische bloeddruk tijdens inspanning.

	2U - mn	k
$D_1 - D_2$	-242	0,79
$\frac{D_1 - D_2}{D_1}$	-840	0,36

Conclusie

Er is geen systematisch verschil te constateren.

4.2.4. Is de stijging van de polsfrequentie tijdens inspanning, zowel absoluut als relatief beschouwd, bij groep B anders dan bij groep A?

Tabel 4;5 geeft weer de met behulp van de toets van WILCOXON gevonden resultaten.

Tabel 4;5

Vergelijking van de groepen A en B wat betreft de stijging der polsfrequentie tijdens inspanning.

	2U - mn	k
$P_2 - P_1$	-1577	0,08
$\frac{P_2 - P_1}{P_1}$	-1810	0,047

Conclusie

Er is enige aanwijzing, dat, zowel relatief als absoluut beschouwd, tijdens inspanning de polsfrequentie bij groep A meer gestegen is dan bij groep B. Het eerste geval wordt geïllustreerd in fig. 6 (zie pag. 13)

4.3. Vraag C

Deze vraag wordt in drie delen behandeld. De toegepaste methode is die der rangcorrelatie (zie bijlage S 73(M13)).

4.3.1. Is er verband tussen de systolische bloeddruk en de stijging van de systolische bloeddruk tijdens inspanning?

Het resultaat wordt gegeven in tabel 4;6. De resultaten van de groepen A en B werden gecombineerd zoals aangegeven is in bijlage S 102(M17b), waarbij $h=2$, $c_i = \frac{1}{n_i(n_i-1)}$ en waarbij n_i het aantal waarnemingen in de i^e groep is. In de nu volgende tabellen stelt T de in deze bijlage genoemde toetsingsgrootheid voor.

Tabel 4;6

Onderzoek naar een verband tussen de systolische bloeddruk en de stijging van de systolische bloeddruk tijdens inspanning.

		S	T	k
absoluut	Groep A	+1258	-	0,12
	Groep B	+ 312	-	0,04
	gecombineerd	-	+0,13	0,01
relatief	Groep A	-1175	-	0,15
	Groep B	- 48	-	0,75
	gecombineerd	-	-0,05	0,32

Conclusie

Een hogere systolische bloeddruk gaat samen met een grotere absolute stijging van de systolische bloeddruk tijdens inspanning. Deze stijging is bij groep B duidelijker dan bij groep A; ter illustratie diene fig. 7 (zie pag. 14). Verder vinden wij geen verband tussen de systolische bloeddruk en de relatieve stijging hiervan.

4.3.2. Is er verband tussen de diastolische bloeddruk en de daling van de diastolische bloeddruk tijdens inspanning?

De resultaten worden vermeld in tabel 4;7; ook hier werden de resultaten weer gecombineerd.

Tabel 4;7

Onderzoek naar een verband tussen de diastolische bloeddruk en de daling der diastolische bloeddruk tijdens inspanning.

		S	T	k
absoluut	Groep A	- 79	-	0,92
	Groep B	+ 194	-	0,19
	gecombineerd	-	+0,06	0,28
relatief	Groep A	- 2320	-	0,004
	Groep B	+ 8	-	0,96
	gecombineerd	-	-0,07	0,18

Conclusie

Een hogere diastolische bloeddruk gaat, in groep A, samen met een kleinere relatieve daling van de diastolische bloeddruk tijdens inspanning, bij groep B vinden wij dit niet. Verder vinden wij geen verband tussen de diastolische bloeddruk en de absolute daling hiervan.

4.3.3. Is er verband tussen de polsfrequentie en de stijging van de polsfrequentie tijdens de inspanning?

Wij passen weer de rangcorrelatie-methode toe en vinden dan:

Tabel 4;8

Onderzoek naar een verband tussen de polsfrequentie en de stijging der polsfrequentie tijdens inspanning

		S	T	k
absoluut	Groep A	- 928	-	0,25
	Groep B	- 161	-	0,28
	gecombineerd	-	- 0,08	0,13
relatief	Groep A	- 2866	-	$4 \cdot 10^{-4}$
	Groep B	- 317	-	0,034
	gecombineerd	-	- 0,18	$3 \cdot 10^{-4}$

Conclusie

Een hogere polsfrequentie gaat samen met een kleinere relatieve stijging der polsfrequentie tijdens inspanning. Wat betreft groep B wordt dit geïllustreerd in fig. 8 (zie pag. 14). Een verband tussen de polsfrequentie en de absolute stijging hiervan vinden wij niet.

4.4 Vraag D₁

Is er verband tussen de polsfrequentie en de systolische bloeddruk?

Dit wordt weer onderzocht met behulp van de methode der rangcorrelatie, en wel op de waarnemingen vóór inspanning. Deze resultaten worden vermeld in tabel 4;9.

Tabel 4;9

Onderzoek naar een eventueel verband tussen de systolische bloeddruk en de polsfrequentie vóór inspanning.

	S	T	k
Groep A	+ 3515	-	10^{-5}
Groep B	+ 339	-	0,025
gecombineerd	-	+ 0,21	$4 \cdot 10^{-5}$

Conclusie

Er bestaat een duidelijke positieve correlatie tussen de polsfrequentie en de systolische bloeddruk, vóór inspanning. Wat betreft groep B wordt dit geïllustreerd in fig. 9 (zie pag.14)

4.5. Vragen D₂ en E

Gevraagd werd nog naar de gemiddelde leeftijd van alle studenten, en naar de gemiddelde polsfrequentie vóór en ná inspanning van beide groepen.

Deze gegevens worden vermeld in tabel 4;10. Om rekening te houden met het feit, dat de opgegeven leeftijd het aantal gehelen is in de werkelijke leeftijd, hebben wij bij het gemiddelde van de opgegeven leeftijden 0,5 opgeteld.

Tabel 4;10
Enkele gemiddelden

	Groep A	Groep B	Totaal
Gemiddelde leeftijd	25,29	25,34	25,30
Gemiddelde P ₁	73,20	78,55	
Gemiddelde P ₂	84,57	86,76	

5. Invloed van postuur op de bloeddruk

Om na te gaan of de systematisch hogere bloeddruk van groep B geheel of gedeeltelijk te wijten zou kunnen zijn aan een systematisch verschil in postuur tussen beide groepen, c.q. daarmede verband zou kunnen houden, werd in de eerste plaats onderzocht of er verband bestond tussen postuur en bloeddruk.

Als maat van het postuur werd de grootheid gewicht/lengte gekozen. Vervolgens werd met behulp van de methode der rangcorrelatie onderzocht of de systolische bloeddruk vóór inspanning samenhangt met deze maat voor het postuur.

De resultaten staan vermeld in tabel 5;1

Tabel 5;1

Onderzoek naar een verband tussen gewicht/lengte en systolische bloeddruk.

	S	T	k
Groep A	+ 1472	-	0,03
Groep B	+ 175	-	0,12
gecombineerd	-	+ 0,14	0,02

Conclusie

Wij zien een duidelijke positieve correlatie optreden, dus relatief zwaardere personen hebben een hogere bloeddruk.

Gezien dit resultaat diende nog onderzocht te worden of gewicht/lengte van groep B systematisch groter is dan die van groep A. De rechtséénzijdige toets van WILCOXON geeft het in tabel 5;2 vermelde resultaat.

Tabel 5;2

Onderzoek naar een eventueel verschil tussen de groepen A en B wat betreft de factor gewicht/lengte.

2U - mn	k
+ 953	0,10

Conclusie

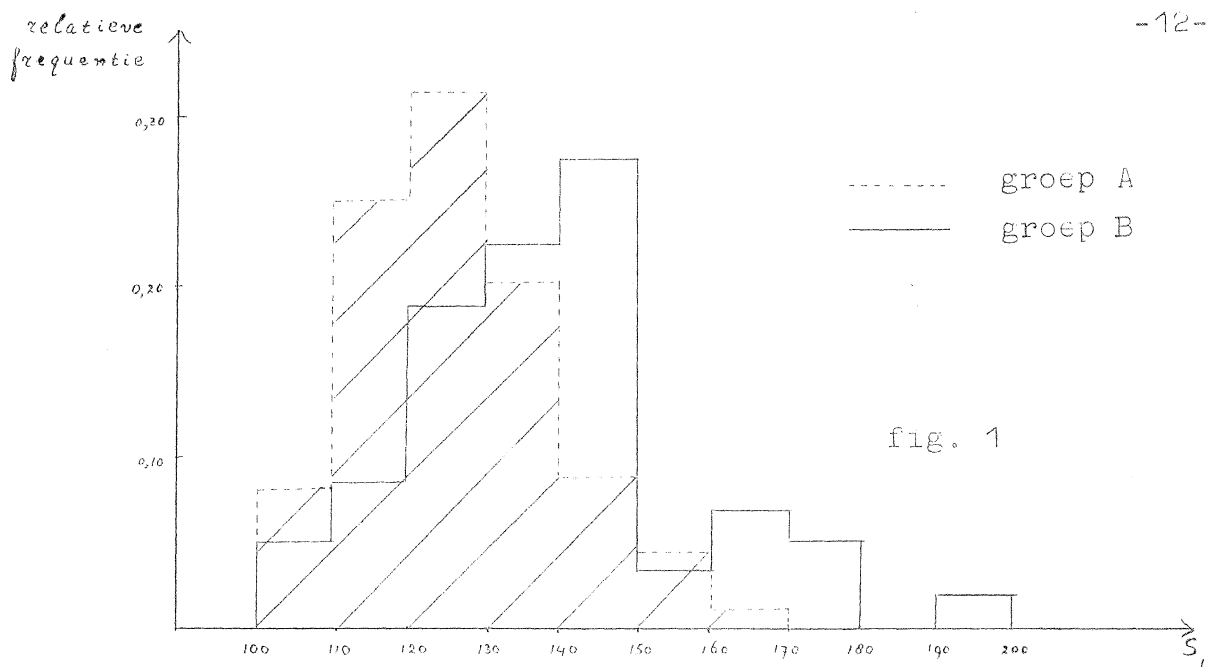
Het resultaat houdt geen aanwijzing voor een systematisch verschil in.

6. Samenvatting der resultaten

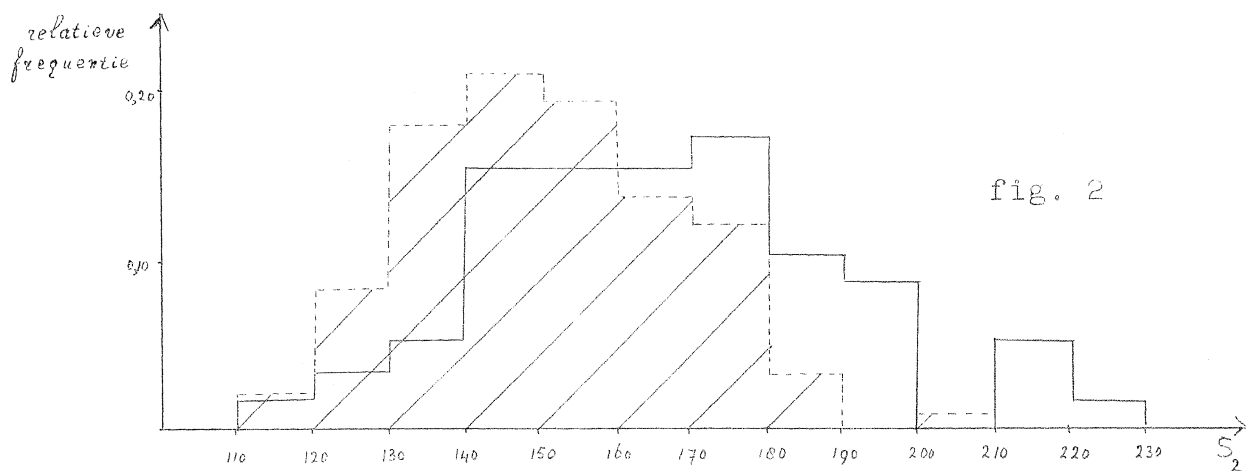
1. De bloeddruk van de studenten uit de positieve groep ligt, zowel systolisch als diastolisch, systematisch hoger dan die van de studenten uit de negatieve groep. Dit geldt bovendien zowel vóór als ná het verrichten van 15 diepe kniebuigingen. Hetzelfde geldt voor de polsfrequentie, echter alleen vóór inspanning (zie par. 4.1).
2. De systolische bloeddruk en de polsfrequentie stijgen in beide groepen tijdens inspanning; de diastolische bloeddruk daalt. (zie par.4.2.1)
3. Er is een zwakke aanwijzing dat de absolute stijging der systolische bloeddruk bij groep B hoger is dan bij groep A. Voor de relatieve stijging vinden wij geen verschil tussen de twee groepen (zie par. 4.2.2)
4. Er is geen reden om aan te nemen dat er een verschil is tussen de groepen A en B wat betreft de absolute en relatieve daling van de diastolische bloeddruk (zie par. 4.2.3).
5. Er is een aanwijzing dat de polsfrequentie, relatief beschouwd, tijdens inspanning bij de negatieve groep systematisch meer gestegen is dan bij de positieve groep (zie par. 4.2.4).
6. Een hogere systolische bloeddruk geeft systematisch een grotere absolute stijging van de systolische bloeddruk tijdens inspanning. Wij vinden geen verband tussen de systolische bloeddruk en de relatieve stijging hiervan. (zie par. 4.3.1).

7. Bij de negatieve groep gaat een hogere diastolische bloeddruk samen met een relatief kleinere daling van de diastolische bloeddruk ten gevolge van inspanning; bij groep B vinden wij dit niet. Ook vinden wij geen verband tussen de diastolische bloeddruk en de absolute daling hiervan. (zie par. 4.3.2)
8. Zowel bij de negatieve als bij de positieve groep vinden wij bij hogere polsfrequentie een systematisch kleinere relatieve stijging van de polsfrequentie ten gevolge van inspanning; er is geen reden om aan te nemen dat er een verband is tussen de polsfrequentie en de absolute stijging hiervan (zie par. 4.3.3).
9. In beide groepen wordt, vóór inspanning, bij hogere systolische bloeddruk systematisch een hogere polsfrequentie gevonden (zie par. 4.4).
10. Wij vinden een positieve correlatie tussen de verhouding tussen gewicht en lengte en de systolische bloeddruk vóór inspanning. Er is geen reden om aan te nemen dat deze verhouding bij groep B systematisch groter is dan bij groep A (zie par. 5).

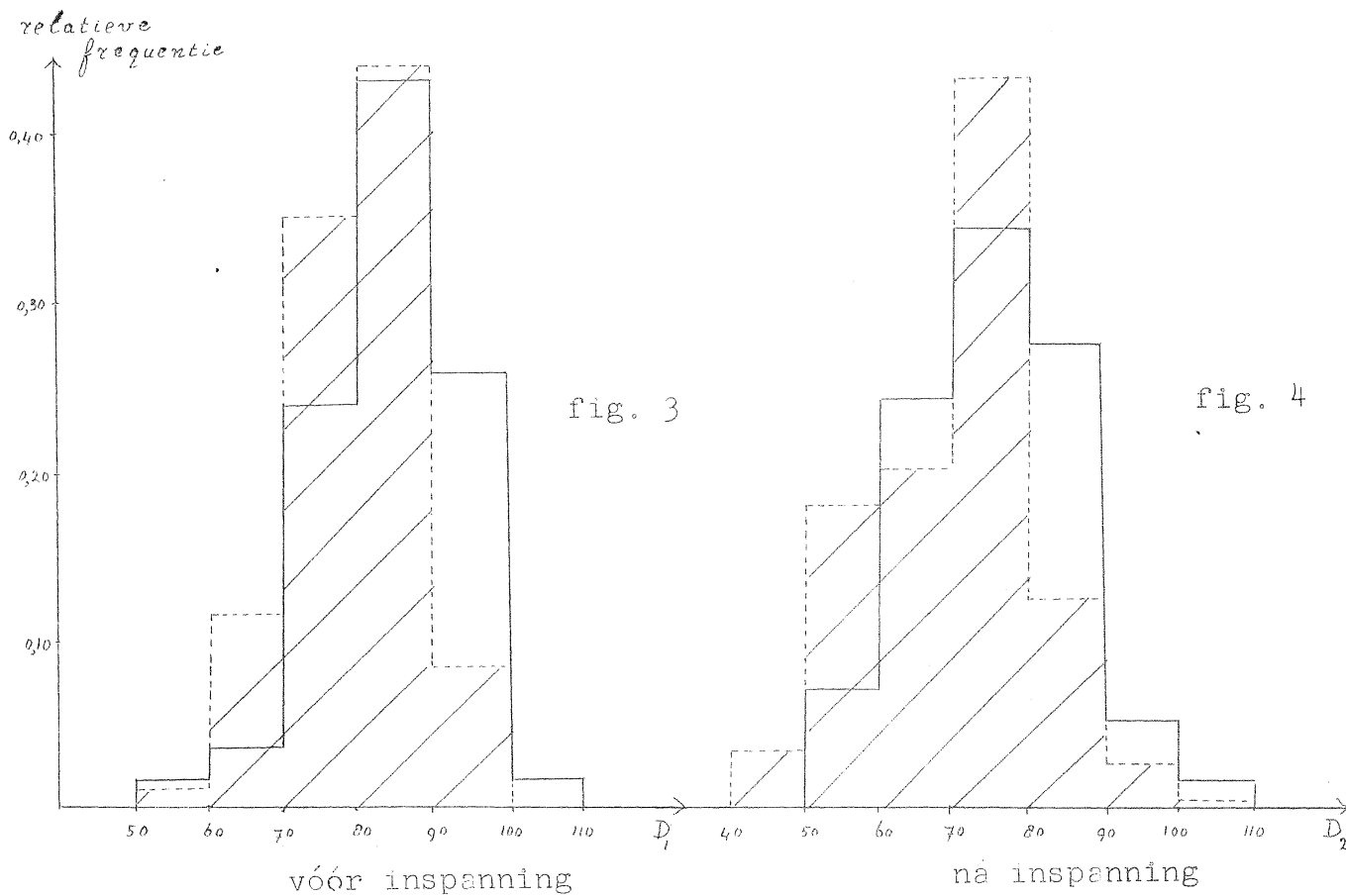
Opmerking: Deze conclusies moeten onder een zeker voorbehoud gegeven worden, daar de mogelijkheid van psychologische effecten (vgl. par. 3.3) aanwezig was



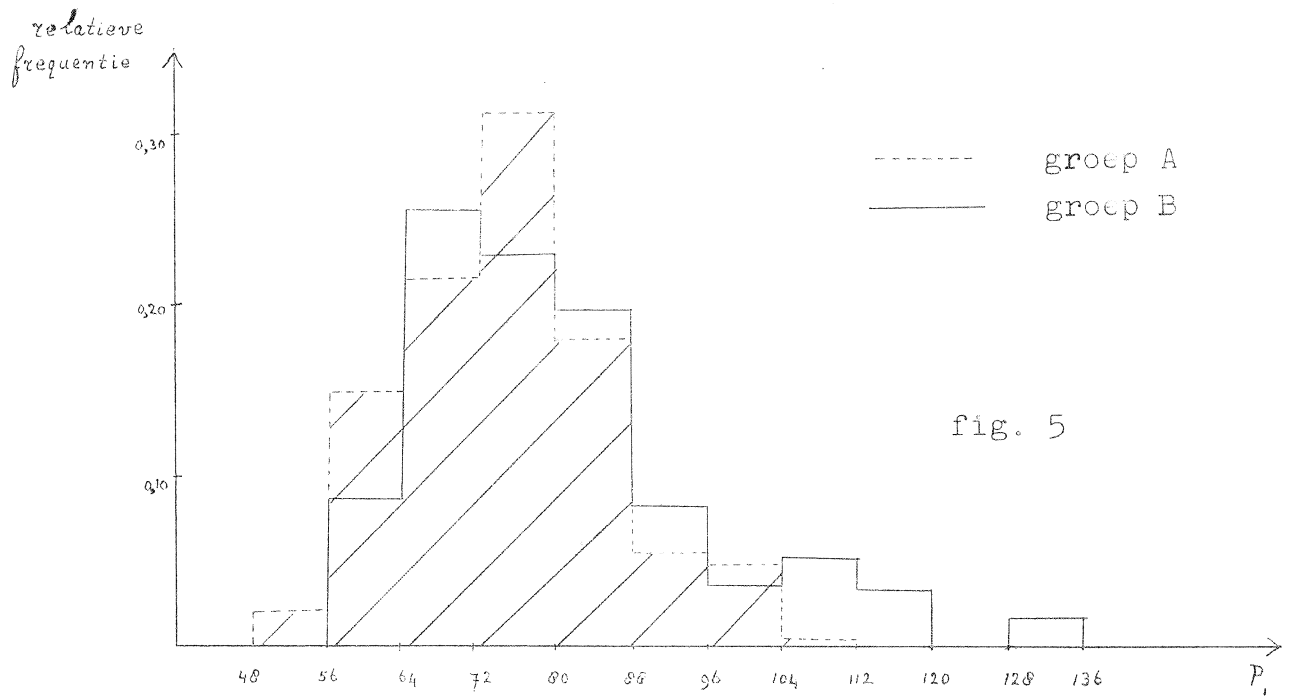
Histogram voor de systolische bloeddruk vóór inspanning.



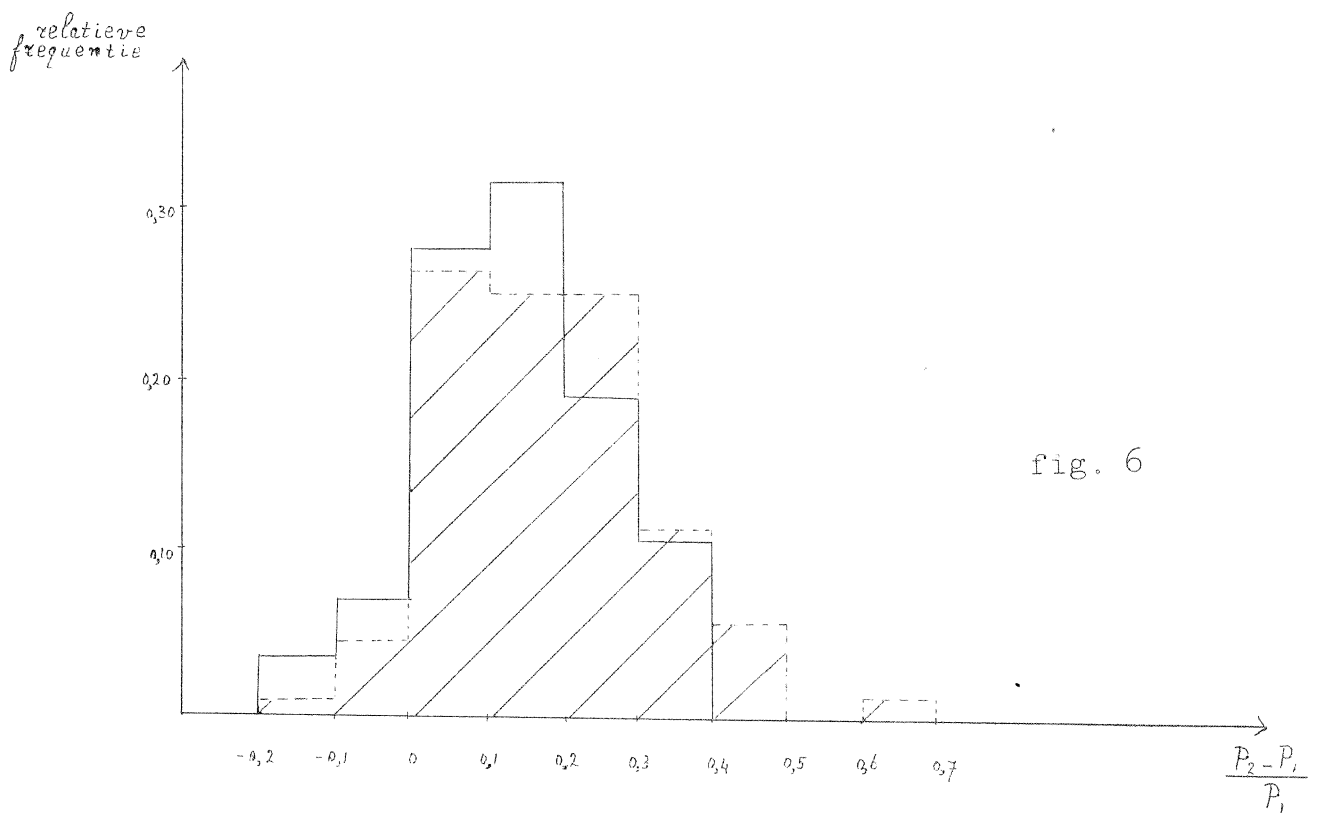
Histogram voor de systolische bloeddruk ná inspanning.



Histogrammen voor de diastolische bloeddruk.



Histogram voor de polsfrequentie vóór aanspanning.



Histogram voor de relatieve polsfrequentie.

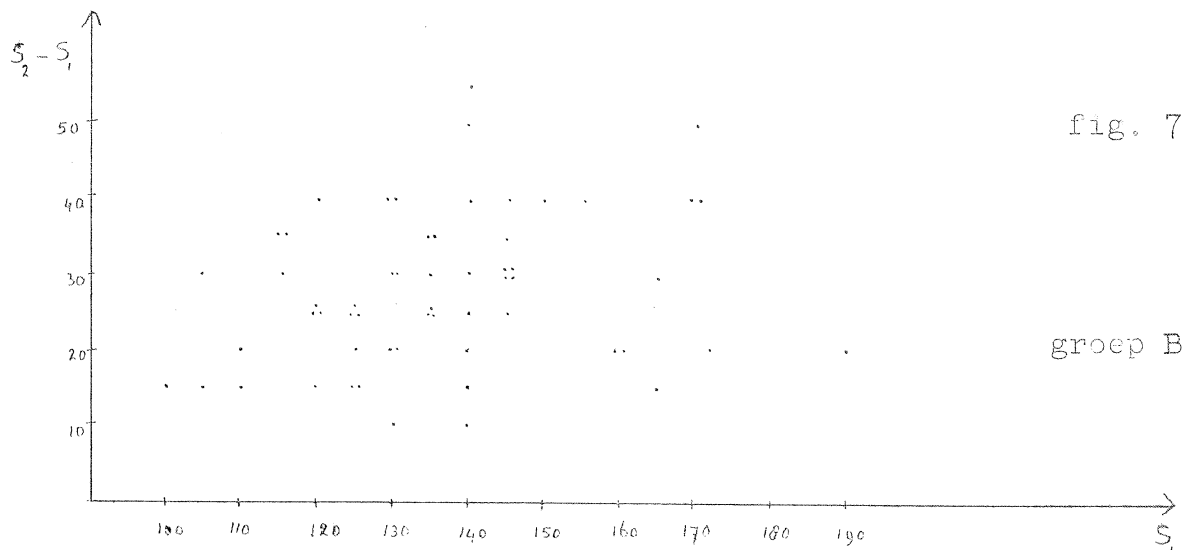


fig. 7

groep B

Verband tussen systolische bloeddruk vóór inspanning en absolute stijging tijdens inspanning.

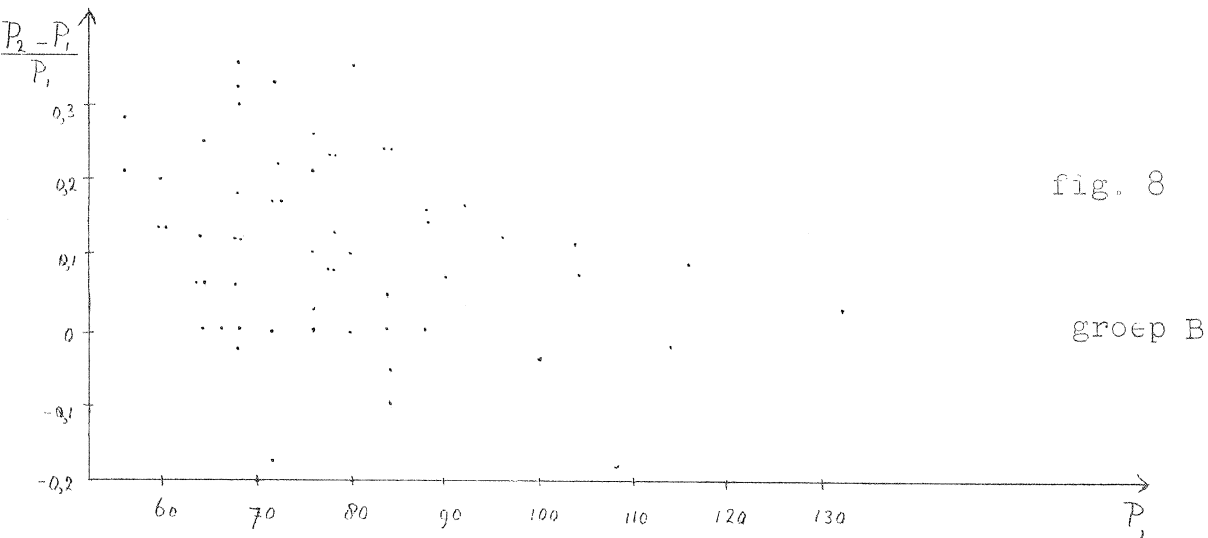


fig. 8

groep B

Verband tussen polsfrequentie vóór inspanning en relatieve stijging tijdens inspanning.

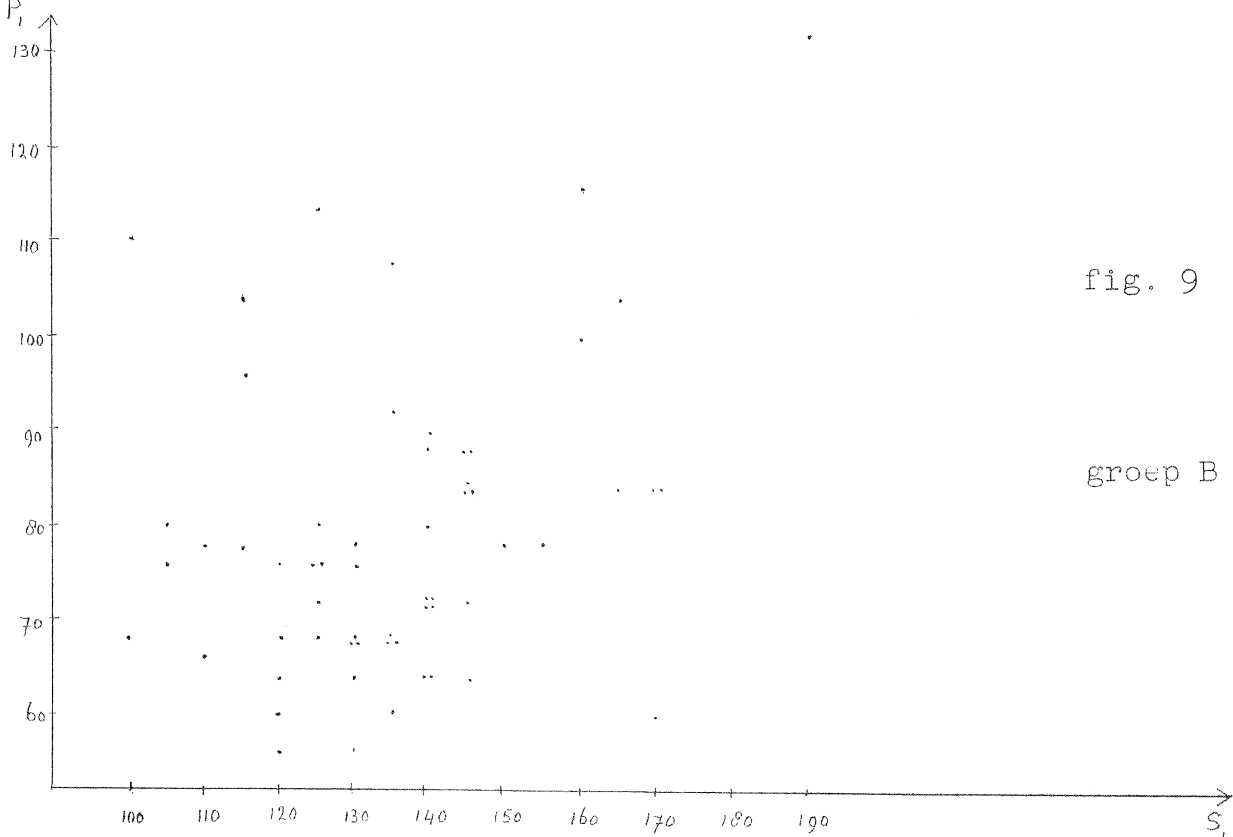


fig. 9

groep B

Verband tussen systolische bloeddruk en polsfrequentie vóór inspanning.

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een ¹⁾
hypothese.

De toetsing van een hypothese H_0 berust steeds op een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \dots, x_n$ van één of meer stochastische grootheden ²⁾, of op enige groepen van waarnemingen (bv. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid u (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waargenomen waarden $x_1, x_2, \dots, x_n$ een waarde aanneemt, die berekend kan worden (bv.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootheid wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat H_0 juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootheid kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van u , en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat u een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese H_0 , gelijk is aan een gegeven getal α , zodat Z dus van α afhankelijk is. Z heet de kritieke zone van de toets, α de onbetrouwbaarheidsdrempel (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verwerpt nu H_0 op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \dots, x_n$, indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van u in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment "significant" is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien H_0 juist is, gelijk aan α . Derhalve is α de kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met $\alpha = 0,05$ resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een collectie (universum, populatie) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

3) Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leq \alpha$ is.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen geen mogelijkheid om tot aanvaarding van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelf alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze nevenvoorwaarden dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de overschrijdingskans k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α , waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan. Anders gezegd: de kleinste α , waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootte nog juist in de (bij α behorende) kritieke zone Z ligt. Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α , dan wordt verworpen, indien $k \leq \alpha$ is.

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijk men bv. de tweede hieronder gegeven literatuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

Litteratuur:

J.Neyman, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.

J.Hemelrijk en H.R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950) p.54-66.

Mathematisch Centrum,
2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam O.
Statistische Afdeling,
S47 (M7).

Maart, 1952.

De toets van Wilcoxon.¹⁾

Deze methode dient tot het toetsen van de hypothese H_0 , inhoudende, dat twee steekproeven $x_1, \dots, x_n$ en $y_1, \dots, y_m$ afkomstig zijn uit één collectie (ook wel populatie of universum genaamd).

Voor het toetsen van de hypothese H_0 wordt gebruik gemaakt van een toetsingsgrootte $\underline{U}$ ²⁾, die als volgt uit de waarnemingen berekend wordt. Onderstellen we, dat de waarnemingen $x_1, \dots, x_n$ en $y_1, \dots, y_m$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn, dan bepalen we eerst het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef, dat kleiner is dan de kleinste waarneming x_1 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid tellen wij $\frac{1}{2}$ in plaats van 1). Noem dit aantal V_1 . Vervolgens wordt het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef bepaald, dat kleiner is dan de op één na kleinste waarneming x_2 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid wordt weer een $\frac{1}{2}$ in plaats van 1 geteld). Dit aantal noemen we V_2 . Evenzo worden met betrekking tot $x_3, x_4, \dots, x_n$ de aantallen $V_3, V_4, \dots, V_n$ bepaald. De waarde U van de toetsingsgrootte $\underline{U}$ wordt voor de twee steekproeven dan gegeven door

$$U = V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

Wanneer onder de waarnemingen niet te veel gelijken voorkomen, kan bewezen worden, dat de toetsingsgrootte $\underline{U}$ onder de hypothese H_0 voor grote waarden van n en m (beide ≥ 10) bij benadering een normale verdeling bezit. De waarnemingen $x_1, \dots, x_n$ en $y_1, \dots, y_m$ tezamen genomen vallen uiteen in een aantal groepen van gelijke waarnemingen. Noem het aantal van deze groepen k , dan is k minstens 1 (als alle waarnemingen gelijk zijn) en hoogstens $m+n$ (als alle waarnemingen verschillend zijn).

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Stochastische grootheden worden door onderstreping aangeduid.

Zijn $t_1, \dots, t_k$ de aantallen waarnemingen in deze groepen van gelijken, dan worden het gemiddelde μ en de variantie σ^2 van de toetsingsgrootte $\underline{U}$ gegeven door

$$\mu(\underline{U}) = \frac{1}{2}nm,$$

en

$$\sigma^2 = \text{Var}(\underline{U}) = \frac{1}{12} \frac{nm}{(n+m)(n+m-1)} \left\{ (n+m)^3 + (t_1^3 + t_2^3 + \dots + t_k^3) \right\} \quad 1)$$

De grootte $\mu(\underline{U})$ is dus onafhankelijk van de waarden vast. Indien de hypothese H_0 niet vervuld is, zal de grootte $\underline{U}$ grote of kleine waarden bezitten, al naar gelang $\underline{y}$ systematisch kleiner of groter is dan $\underline{x}$.

De (tweezijdige) toets bestaat nu daarin, dat men H_0 verworpt indien de gevonden waarde U van $\underline{U}$ te sterk van μ afwijkt, d.w.z. als

$$\frac{|U - \mu|}{\sigma} > \xi_{\alpha} \quad 2)$$

waarin α de onbetrouwbaarheidsdrempel is en ξ_{α} volgt uit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_{\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \alpha,$$

en in een tabel van de normale verdeling kan worden opgezocht.

De (tweezijdige) overschrijdingskans k , behorende bij T , is gedefinieerd als

$$k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|U - \mu|}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad 2)$$

en kan ook in een tabel van de normale verdeling worden gevonden.

Bij eenzijdige toetsing wordt α door 2α vervangen, resp. k gehalveerd.

Een bijzonder geval van het bovenstaande is, dat onder de waarnemingen voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in 't geheel geen gelijken voorkomen. In dat geval kan de uitdrukking voor de variantie herleid worden tot

$$\sigma^2 = \frac{1}{12} nm(n+m+1).$$

1) Deze formule is een door T.J.Terpstra gegeven vereenvoudiging van de door J.Hemelrijk ([5] en [7]) afgeleide formule. De afleiding van deze vereenvoudigde formule zal nog gepubliceerd worden.

2) Deze formules berusten op de normale benadering van de verdeling van $\underline{U}$.

Indien n en m kleiner zijn dan 10, zijn tabellen beschikbaar voor het berekenen van de overschrijdingskans k voor de uit de steekproef bepaalde waarde U van $\underline{U}$ (zie [2] en [4]).

Dergelijke tabellen bestaan echter niet voor het geval, dat gelijke waarnemingen optreden.

Opmerking. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat de variantie van $\underline{U}$ door het optreden van gelijke waarnemingen vermindert. Het verschil, dat door deze gelijken optreedt, is echter in het algemeen gering. Men kan daarom in eerste instantie deze correctie op σ^2 verwaarlozen. De overschrijdingskansen, die men dan vindt, zijn iets te groot.

Litteratuur:

1. F.Wilcoxon, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945), p.80-83.
- 2 H.B.Mann and D.R.Whitney On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Amer.Math.Stat. 18 (1947), p. 50-60.
- 3 H.R.van der Vaart Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the problem of two samples, Proceedings van de Kon. Ned.Ak.v.Wet., 53 (1950), p. 494-520.
- 4 H.R.van der Vaart Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon, met tabellen voor n en $m \leq 10$, Rapport S32 (M4) (1950).
- 5 H.R.van der Vaart De toets van Wilcoxon voor het probleem van twee steekproeven. (Cursus "Parameter vrije Methoden", 1951-'52).
- 6 D.van Dantzig Kadercursus Mathematische Statistiek, Math. Centrum, Amsterdam (1947-'50), hoofdst. 6, § 3.
- 7 J.Hemelrijk Note on Wilcoxon's two sample test, when ties are present, Ann.Math.Stat. 23 (1952) no. 2.

Rangcorrelatie¹⁾

1. Beschrijving van de methode.

De door M.G. Kendall ontwikkelde methode der rangcorrelatie is toepasbaar op de volgende situatie:

De stochastische grootheden x en y bezitten een simultane verdeling. Over deze verdeling zelf behoeft niets ondersteld te worden.

(x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$), zijn onafhankelijke waarnemingsparen van deze stochastische grootheden

Voorbeeld:

$i =$	1	2	3	4	5	6
x_i	0,11	0,12	0,10	0,11	0,15	0,13
y_i	3,4	3,0	3,2	3,5	3,5	3,5

Wij zeggen dat de waarnemingsparen (x_i, y_i) en (x_j, y_j) positief gecorreleerd zijn, als de volgorde van x_i en x_j hetzelfde is als die van y_i en y_j (bv. $x_i < x_j$ en $y_i < y_j$); zij zijn negatief gecorreleerd als de volgorde van x_i en x_j tegengesteld is aan de volgorde van y_i en y_j (bv. $x_i > x_j$ en $y_i < y_j$) en zij zijn niet gecorreleerd als $x_i = x_j$ of $y_i = y_j$.

In tabel 1 hebben wij van alle tweetallen (x_i, y_i) en (x_j, y_j) uit ons voorbeeld nagegaan of zij positief, negatief dan wel niet gecorreleerd zijn. Een positieve correlatie is aangeduid met +1, een negatieve met -1, terwijl het ontbreken van correlatie wordt aangegeven door een 0.

De toetsingsgrootte van de methode van rangcorrelatie is nu het aantal positief gecorreleerde tweetallen verminderd met het aantal negatief gecorreleerde, of wel de som van de getallen, die in tabel 1 in de kolom "correlatie" voorkomen.

De verdeling van S voor het geval dat x en y onafhankelijk zijn is bekend (zie § 2). De hypothese dat x en y onafhankelijk

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter orientatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

Tabel 1

Berekening van S
voor het voorbeeld

i	j	Correlatie
1	2	-1
1	3	+1
1	4	0
1	5	+1
1	6	+1
2	3	-1
2	4	-1
2	5	+1
2	6	+1
3	4	+1
3	5	+1
3	6	+1
4	5	0
4	6	0
5	6	0

$$S = +5$$

zijn, kan dus getoetst worden.

Is de hypothese van onafhankelijkheid niet vervuld, dan is de waarschijnlijkheid van grote positieve of grote negatieve waarden van S groter, dan wanneer dit wel het geval is. De kritieke zône is daarom van de vorm $|S| \geq S_0$, en bij éézijdige toetsing van de vorm $S \geq S'_0$ (rechtszijdige toetsing) of $S \leq S''_0$ (linkszijdige toetsing).

2. Verdeling van S als x en y onafhankelijk zijn.

Als er noch bij de x_i noch bij de y_j gelijke waarden voorkomen kunnen wij gebruik te maken van exacte tabellen, die voorkomen in [1] pg 141 ($n = 4 \text{ t/m } 10$) en in [2] (tables I and II, $n = 4 \text{ t/m } 40$). Bovendien vindt men in [2] table III de kleinste waarden van $\underline{S}$, waarvan de overschrijdingskansen onder de hypothese van onafhankelijkheid hoogstens gelijk zijn aan α voor $\alpha = 0,005; 0,01; 0,025; 0,05$ en $0,10$ en $n = 4, 5, 6, \dots, 40$.

Als er bij de x_i óf bij de y_i , doch niet bij beide tweetallen of drietallen gelijken voorkomen, kan men voor $n \leq 10$ gebruik maken van de tabel van Sillitto [4].

Voor grote waarden van n is de verdeling van $\frac{S - \underline{S}}{\sigma_s}$ (waarin

σ_s de spreiding van $\underline{S}$ is, die uit een hieronder op te geven formule berekend kan worden) bij benadering normaal met gemiddelde 0 en spreiding 1. Hiervan kunnen we gebruik maken om de hypothese van onafhankelijkheid te toetsen in de gevallen waar de exacte verdeling niet getabelleerd is. Dit geschiedt dan, door in een tabel van de normale verdeling de

overschrijdingskans op te zoeken, die behoort bij de gevonden waarde van $\frac{S}{\sigma_S}$.

Om σ_S te berekenen, nemen wij in de rij der waarnemingen x_i de gelijke waarnemingen in groepen bij elkaar. De aantallen waarnemingen in die groepen duiden wij aan met t_h , waarin $h = 1, 2, \dots, k_1$. Evenzo doet men in de rij der waarnemingen y_j , waar we de overeenkomstige aantallen aanduiden met u_l , waarin $l = 1, 2, \dots, k_2$. σ_S kan dan gevonden worden uit de volgende formule:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sigma_S^2 = & \frac{1}{18} \left\{ n(n-1)(2n+5) - \sum_{h=1}^{k_1} t_h(t_h-1)(2t_h+5) - \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^{k_2} u_l(u_l-1)(2u_l+5) \right\} + \\ & + \frac{1}{9n(n-1)(n-2)} \sum_{h=1}^{k_1} t_h(t_h-1)(t_h-2) \sum_{l=1}^{k_2} u_l(u_l-1)(u_l-2) + \\ & + \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{h=1}^{k_1} t_h(t_h-1) \sum_{l=1}^{k_2} u_l(u_l-1). \end{aligned}$$

In ons voorbeeld van § 1 komt in de rij x_i één tweetal gelijken (dus $k_1=1$ en $t_1=2$) en in de rij y_j één drietal gelijken ($k_2=1$, $u_1=3$) voor. Dus geldt:

$$\begin{aligned} t_1(t_1-1)(2t_1+5) &= 2.1.9 = 18 \\ u_1(u_1-1)(2u_1+5) &= 3.2.11 = 66 \\ t_1(t_1-1)(t_1-2) &= 0 \\ u_1(u_1-1)(u_1-2) &= 0 \\ t_1(t_1-1) &= 2.1 = 2 \\ u_1(u_1-1) &= 3.2 = 6 \\ n(n-1)(2n+5) &= 6.5.17 = 510 \\ n(n-1) &= 6.5 = 30 \end{aligned}$$

zodat:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{18} \{ 510 - 18 - 66 \} + \frac{1}{60} \times 2 \times 6 = 23,87$$

en $\sigma_S = 4,89$ is.

Als alle t_h en alle u_l gelijk zijn aan 1 en er dus in geen van beide rijen gelijken voorkomen, gaat formule (2) over in:

$$(2) \quad \sigma_S = \sqrt{\frac{1}{18} n(n-1)(2n+5)}$$

Een tabel van deze functie voor $n = 40, 41, \dots, 100$ vindt men in [2] (table IV).

3. Rangcorrelatiecoëfficiënt

Als maat voor de correlatie in de rij van waarnemingsparen $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ heeft Kendall de coëfficiënt τ gedefinieerd, die +1 is als de volgorden der waarnemingen in beide rijen $x_1, \dots, x_n$ en $y_1, \dots, y_n$ volledig overeenstemmen en -1 is, als deze volgorden volkomen tegengesteld zijn. De definitie van τ is:

$$(3) \quad \tau = \frac{2S}{\left\{ n(n-1) - \sum_{h=1}^{k_1} t_h(t_h-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ n(n-1) - \sum_{l=1}^{k_2} u_l(u_l-1) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Als er in geen van beide rijen gelijke waarnemingen voorkomen wordt deze formule:

$$(4) \quad \tau = \frac{2S}{n(n-1)}.$$

Literatuur:

- [1] M.G. Kendall. Rank correlation Methods London 1948, Hoofdstuk 1.
- [2] L. Kaarsemaker en A. van Wijngaarden. Tables for use in rank correlation . (1952)
Report R 73 of the Computation Department of the Mathematical Centre.
- [3] J. Hemelrijk. Kendall's rangcorrelatie-coëfficiënt .
Hoofdstuk I der cursus "Parameterervrije Methoden" Rapport S 59 (1951) Mathematisch Centrum, blz. 1-17.
- [4] G.P. Sillitto. "The Distribution of Kendall's coefficient of rankcorrelation in rankings containing ties. Biometrika 34 (1947) p. 36-40.

Het combineren van onafhankelijke toetsen (aanvulling) ¹⁾

In memorandum S 73 (M 17a) wordt een methode voor combinatie van onafhankelijke toetsen behandeld, waarbij het nodig is de overschrijdingskans van iedere toets te bepalen. In vele gevallen kan men de combinatie ook direct op de afzonderlijke toetsingsgrootheden baseren en dit verdient zelfs de voorkeur.

Wij beschouwen hier het geval, dat een bepaalde toets moet worden toegepast op een heterogeen materiaal. Dit materiaal wordt dan eerst verdeeld in h homogeen geachte groepen. Het aantal waarnemingen van de i^e groep zij n_i en de toetsingsgrootheid t_i ²⁾. Laat verder gegeven zijn, dat de verdeling van t_i onder de getoetste hypothese (voor de i^e groep aangeduid door H_i) voor grote n_i asymptotisch normaal ³⁾ is, met bekende verwachting μ_i en bekende spreiding σ_i . Aan deze voorwaarden is o.a. voldaan, indien wij te doen hebben met toetsen van WILCOXON, rangcorrelatietoetsen van KENDALL of SPEARMAN, tekentoetsen enz.

Wij toetsen met al de hier te behandelen gecombineerde methoden de hypothese H , dat voor iedere groep de desbetreffende hypothese H_i geldt, terwijl de groepen onderling onafhankelijk zijn. De toetsen verschillen echter ten aanzien van de alternatieve (van H afwijkende) hypothesen waarvoor zij gevoelig ⁴⁾ zijn.

De meest gebruikelijke toetsingsgrootheden van gecombineerde toetsen zijn van de gedaante:

$$T = \sum_{i=1}^h c_i (t_i - \mu_i)$$

waarin de letters c_i ($i = 1, 2, \dots, h$) constanten voorstellen, die voor ieder van de combinatiemethoden op een bepaalde wijze

-
- 1) Dit memorandum dient slechts ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid. Het is bedoeld als een aanvulling op Rapport S 73 (M 17a).
 - 2) De onderstreping geeft aan dat een toetsingsgrootheid stochastisch is, d.w.z. een waarschijnlijkheidsverdeling bezit.
 - 3) Dit houdt in dat t_i een waarschijnlijkheidsverdeling heeft, die als n_i toeneemt, steeds minder van een normale verdeling (verdeling van Gauss) afwijkt.
 - 4) Een toets van hypothese H is gevoelig ten opzichte van een alternatieve hypothese H' , als de kans dat H verworpen wordt, indien H' juist is, groot is.

gekozen worden. Onder de hypothese H zal $\bar{T}$ asymptotisch (voor grote h en/of grote n_i) normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en spreiding $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^h c_i^2 \sigma_i^2}$. De dubbele overschrijdingskans van een gevonden waarde $\bar{T}$ van $\bar{T}$ is dus bij benadering gelijk aan:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\frac{\bar{T}}{\sigma}|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

en kan bepaald worden met behulp van een tabel van de normale verdeling. Indien de dubbele overschrijdingskans kleiner is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel α , zal men H verwerpen.

Wij geven hier 3 combinatiemethoden van dit type:

Methode 1: $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 1$

$$\text{dus: } \bar{T} = \sum_{i=1}^h \bar{t}_i - \sum_{i=1}^h \mu_i \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^h \sigma_i^2}$$

Methode 2: $c_1 = \frac{1}{\sigma_1}$, $c_2 = \frac{1}{\sigma_2}$, ..., $c_h = \frac{1}{\sigma_h}$

$$\text{dus: } \bar{T} = \sum_{i=1}^h \frac{\bar{t}_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{h}$$

Methode 3: $c_1 = \frac{1}{n_1}$, $c_2 = \frac{1}{n_2}$, ..., $c_h = \frac{1}{n_h}$

$$\text{dus: } \bar{T} = \sum_{i=1}^h \frac{\bar{t}_i - \mu_i}{n_i} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^h \left(\frac{\sigma_i}{n_i}\right)^2}$$

Deze methoden zijn alleen gevoelig ten aanzien van alternatieve hypothesen volgens welke de grootheden $\bar{t}_i$ verdelingen hebben die, voor zover zij afwijken van de verdelingen onder de corresponderende hypothesen H_i , dit over het algemeen in dezelfde richting doen. Men zal dan methode 1 bij voorkeur toepassen als men aan de $\bar{t}_i$ met een kleine spreiding (in de regel zullen dat de $\bar{t}_i$ van kleine groepen zijn) een geringer gewicht wil toekennen dan aan de $\bar{t}_i$ met een grote spreiding. De methoden 2 en 3 zijn te gebruiken als men aan de verschillende groepen waarnemingen, ongeacht hun grootte, een ongeveer gelijke invloed op het resultaat wil toekennen. De keuze tussen deze twee methoden hangt verder van hier niet te behandelen theoretische overwegingen af (zie literatuur [1]).

Indien men verwacht dat mogelijke verschuivingen van de verdelingen der $\bar{t}_i$ in beide richtingen kunnen liggen, verdient het de voorkeur om gebruik te maken van de volgende toetsingsgroottheid:

$$\sum_{i=1}^h \left(\frac{\bar{t}_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (\text{methode 4})$$

Deze grootheid is onder de hypothese H asymptotisch verdeeld volgens een χ^2 -verdeling met h vrijheidsgraden. De overschrijdingskans van een gevonden waarde van deze grootheid kan dus met behulp van een tabel van de χ^2 -verdeling bepaald worden.

De toets, behandeld in memorandum S 73 (M 17a) par. 1, waarbij men het product van linkszijdige en product van alle rechtszijdige overschrijdingskansen bepaalt en het kleinste van deze twee producten gebruikt, heeft betrekking op dezelfde gevallen als de hier behandelde methoden 2 of 3, terwijl de methode, behandeld in S 73 (M 17a) par. 2, berustend op het product van de tweezijdige overschrijdingskansen, meer overeenkomt met methode 4. Men mag echter verwachten, dat, zo aan de asymptotische normaliteit der t_i voldaan is, de in dit memorandum behandelde methodenscherper zijn dan de toetsen behandeld in S 73 (M 17a).

Literatuur:

- 1 C.van Eeden, Methoden voor het vergelijken, toetsen en schatten van onbekende kansen, Rapport S 115 (M 45) van het Mathematisch Centrum (1953).
- 2 -----, Trendtoets met behulp van rangcorrelatie, Memorandum S 73 (M 13a). (Voorbeeld van toepassing van methode 1.)
- 3 Dr J.Hemelrijk, Het combineren van onafhankelijke toetsen, Memorandum S 73 (M 17a).

Tekentoets¹⁾

Deze toets dient voor het toetsen van de hypothese H_0 , dat een aantal grootheden $z_1, \dots, z_n$ alle nul tot mediaan hebben, d.w.z. dat

$$P [z_i > 0] = P [z_i < 0] \quad i = 1, \dots, n,$$

is. De toets geldt zonder enige verdere beperking dan de eis, dat de grootheden z_i onderling onafhankelijk verdeeld zijn; zij behoeven niet dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling te bezitten.

De toets berust op één waarneming van ieder der grootheden z_i , dus op n waarnemingen $z_1, \dots, z_n$. De waarnemingen, die de waarde 0 bezitten, laten wij buiten beschouwing²⁾. Als toetsingsgrootte gebruiken wij nu n_1 , het aantal positieve waarnemingen. Zijn er m waarnemingen $\neq 0$, dan bezit n_1 een binomiale verdeling, onderstellende, dat H_0 juist is:

$$P [n_1 = n_1 \mid H_0] = \binom{m}{n_1} 2^{-m}.$$

Als kritieke zone worden de grote en kleine waarden van n_1 genomen. De kritieke zone is, voor onbetrouwbaarheidsdrempels 0,01; 0,05; 0,10 en 0,25 en $m = 1$ tot 100 getabelleerd door

W.J.Dixon and A.M.Mood, The statistical sign test, Jrn.Am.Stat.Ass. 41 (1946) p. 556-566.

Voor een groter aantal waarnemingen gebruikt men als benadering van de binomiale verdeling de aangepaste normale verdeling.

Opmerking: De toets wordt vaak gebruikt, indien men een aantal grootheden twee maal heeft waargenomen, voor en na een bepaalde gebeurtenis, om na te gaan of deze gebeurtenis invloed op de grootheden heeft uitgeoefend. Noemen wij de waarnemingen vóór het optreden der gebeurtenis x_i ($i=1, \dots, n$) en erna y_i , dan hebben de grootheden $x_i - y_i$ alle 0 als mediaan, indien x_i dezelfde verdeling bezit als y_i (dus als de gebeurtenis geen invloed heeft gehad). De toets wordt nu toegepast op $z_i = x_i - y_i$ ($i=1, \dots, n$).

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) In tegenstelling tot de gewoonte deze waarnemingen voor de helft bij de positieve en voor de helft bij de negatieve te tellen; de door ons gebruikte methode geeft de toets een groter onderscheidingsvermogen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.

Statistische Afdeling
Rapport S 173A

Supplement op rapport S 173

Onderzoek naar vroegtijdige symptomen van essentiële hypertensie.
door

E.C. Bos-Levenbach en Rina Korswagen

In aansluiting op het rapport S 173 werden ons nog enige vragen gesteld, nl.

1. (ad par. 4.3.2) Is de daling van de diastolische bloeddruk tijdens inspanning, relatief beschouwd, bij groep A anders dan bij groep C?

Groep C bestaat uit die studenten van groep B, die een verhoogde bloeddruk hebben (systolische bloeddruk $S_1 \geq 140$).

Tabel 1 geeft het met behulp van de toets van WILCOXON gevonden resultaat. De toets is zodanig uitgevoerd, dat de waarnemingen van A corresponderen met de waarnemingen aangeduid met $x_1, \dots, x_n$ in de bijlage M7 bij rapport S 173 en die van groep C met $y_1, \dots, y_m$.

Tabel 1

Vergelijking van de groepen A en C wat betreft de relatieve daling der diastolische bloeddruk tijdens inspanning.

	2U - mn	k
$\frac{D_1 - D_2}{D_1}$	- 939	0,10

Conclusie

Er is geen systematisch verschil te constateren.

2. (ad par 4 4) Is er verband tussen de polsfrequentie en de diastolische bloeddruk?

Dit wordt weer onderzocht met behulp van de methode der rangcorrelatie, en wel voor de waarnemingen vóór inspanning. De resultaten worden vermeld in tabel 2.

Tabel 2

Onderzoek naar een eventueel verband tussen de diastolische bloeddruk en de polsfrequentie vóór inspanning.

	S	T	k
groep A	+ 2088	—	0,01
groep B	- 161	—	0,28
gecombineerd	—	+ 0,0161	0,76

Conclusie

In groep A bestaat er een positieve correlatie tussen de diastolische bloeddruk en de polsfrequentie vóór inspanning. Bij groep B vinden wij dit niet.

3. (ad par. 4 5) Gevraagd werd nog naar de gemiddelde polsfrequentie, diastolische en systolische bloeddruk vóór en na inspanning voor de drie groepen.

Deze gegevens worden vermeld in tabel 3.

Tabel 3

Enkele gemiddelden.

	groep A	groep B	groep C
gemiddelde P_1	73,20	78,55	83,00
gemiddelde P_2	84,57	86,76	89,38
gemiddelde D_1	76,69	81,12	84,23
gemiddelde D_2	67,14	72,41	76,73
gemiddelde S_1	124,22	135,78	151,15
gemiddelde S_2	148,36	163,28	181,15