STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

LEIDING: PROF. DR D. VAN DANTZIG
ADVISEUR VOOR STATISTISCHE CONSULTATIE: PROF. DR J. HEMELRIJK

Rapport S 248

Wachttijdtheorie bij één loket

door

J.Th.Runnenburg

en

F.W.Steutel

april 1959

Inleiding

In dit rapport, dat een uittreksel is van enkele hoofdstukken uit het boek "Problèmes Stochastiques" 1) door F.Pollaczek, aangevuld met enige figuren, wordt een aantal wachttijdproblemen behandeld, die zich voordoen bij één loket. Hierbij wordt slechts zeer in het kort de wiskundige kant der problemen besproken en de nadruk gelegd op de toepassingen.

Eenvoudigheidshalve is de terminologie aangehouden, die past bij het helpen van klanten aan een loket, doch de theorie is ook toepasbaar op analoge problemen, die zich voordoen bij telefooncentrales, havens e.d.

Onder verschillende veronderstellingen omtrent de verdelingsfuncties der aankomstintervallen en bedieningstijden worden de verdelingsfunctie $C_n(w)$ van de wachttijd van de n^{de} klant en de verdelingsfunctie $C(w)$ van de wachttijd van een willekeurige klant in de stationnaire situatie berekend.

Hoewel er in veel practische gevallen na een zekere aanlooptijd in goede benadering een evenwichtstoestand zal tot standkomen, zodat men kan volstaan met de verdelingsfunctie $C(w)$, die in het algemeen gemakkelijker te berekenen is dan $C_n(w)$, is het voor bepaalde problemen noodzakelijk $C_n(w)$ te beschouwen voor eindige n. Dit is bij voorbeeld het geval, als alleen die klanten geholpen worden, die aankomen in een bepaald eindig tijdsinterval (men denke aan patienten, die op het spreekuur van een dokter komen: komen zij niet in een bepaalde vrij korte periode de wachtkamer binnen, dan worden zij die dag niet geholpen. Analoge situaties doen zich voor in winkels, bij loketten in een postkantoor e.d.). Men dient echter te bedenken, dat de theorie slechts toepasbaar is op homogene perioden, d.w.z. perioden waarin de kansverdelingen van de aankomstintervallen en van de bedieningstijden niet veranderen; men moet dus "piekuren" en dergelijke als afzonderlijke perioden behandelen.

De nummering der formules is ten behoeve van de lezers, die van een bepaalde situatie iets meer willen weten dan hier vermeld wordt, gelijk gehouden aan die in het boek van F.Pollaczek, de notatie is echter gewijzigd (voor de correspondentie der notaties zie men blz. 18).

---

1) Problèmes Stochastiques, posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés; Gauthier-Villars, Paris 1957.

Formules, die direct uit die van Pollaczek volgen, maar niet in zijn boek voorkomen, worden aangegeven met het nummer van de formule van Pollaczek, waarop ze gebaseerd zijn, gevolgd door een letter a, b of c (enz.).

In dit rapport is niet, zoals in het boek, de gemiddelde bedieningstijd als tijdseenheid genomen, omdat dit niet altijd practisch is; de tijdseenheid is willekeurig en de gemiddelde bedieningstijd wordt voorgesteld door b. Hierdoor wordt een aantal formules enigszins gewijzigd. Kiest men $b = 1$, dan vindt men de formules van Pollaczek terug.

Hoofdstuk I

Beschouwde situatie

In het dagelijkse leven en in de industrie kent men tal van situaties, waarbij wachttijden optreden. Zoveel zelfs, dat het onmogelijk is, ze hier alle op te noemen. Om over deze situaties te kunnen spreken, zullen we gebruik maken van de terminologie van één ervan, nl. de terminologie, die gebruikt wordt bij het aankomen van klanten aan een loket. We beperken ons hierbij tot het geval, dat slechts één loket beschikbaar is. We denken de klanten, die aankomen aan het loket, in volgorde van aankomst genummerd (0, 1, 2, ...). In dit rapport zullen wij ons beperken tot het beschouwen van wachttijdproblemen, waarbij de volgorde van aankomst tevens de volgorde is, waarin de klanten behandeld worden. Het is duidelijk, dat in vele praktische situaties volgens andere regels bediend wordt. Noemen wij slechts de prioriteit die b.v. de P.T.T. toekent aan zijn klanten, wanneer deze een telegram aan het loket aanbieden. Dergelijke gevallen beschouwen we hier dus niet.

De n^{de} klant heeft een zekere bedieningstijd nodig, wanneer hij eenmaal aan de beurt gekomen is. De tijd vanaf zijn aankomst aan het loket tot hij aan de beurt komt noemen we zijn wachttijd.

Veronderstellingen

Bij de wiskundige behandeling van het wachttijdproces gaan we er van uit, dat de lengte van het interval tussen de n^{de} en de $(n+1)^{ste}$ aankomst (het "aankomstinterval") en de bedieningstijd van de n^{de} klant (voor $n = 0, 1, 2, \ldots$) stochastische[1] variabelen zijn met een gegeven kansverdeling en bovendien de kansverdeling van de wachttijd van de 0^{de} klant gegeven is.

We zullen in het nu volgende steeds veronderstellen, dat de lengten van alle aankomstintervallen dezelfde kansverdeling bezitten, die we de aankomstintervalverdeling zullen noemen en dat ook alle bedieningstijden eenzelfde kansverdeling hebben, die we aanduiden met bedieningstijd verdeling. Verder veronderstellen we dat de lengten der aankomstintervallen onderling onafhankelijk zijn en onafhankelijk van de bedieningstijden en dat ook de

---

[1] Stochastische grootheden zijn grootheden, die een kansverdeling bezitten.

bedieningstijden onderling onafhankelijk zijn. Op grond van deze gegevens vragen we nu naar de eigenschappen van de wachttijd van de n^{de} klant, die bij de gemaakte veronderstellingen een stochastische grootheid is.

Ter toelichting van de veronderstellingen moge het volgende dienen:

1e. De bedieningstijden zullen in de praktijk, in het algemeen weinig van elkaar en van de aankomstintervallen afhangen. Ter vereenvoudiging van het probleem kunnen we daarom zonder bezwaar veronderstellen, dat de bedieningstijden onderling onafhankelijke variabelen zijn, die niet van de lengten der aankomstintervallen afhangen.

2e. De aankomsten zullen in de praktijk vaak aan de volgende eisen voldoen:

a) In een eindig tijdsinterval komen eindig veel klanten aan.

b) De verdelingsfunctie van het aantal klanten, dat in een tijdsinterval aankomt, is alleen afhankelijk van de <u>lengte</u> van dat interval (en niet van de <u>plaats</u> van dat interval op de tijdas), mits het in zijn geheel na het aanvangstijdstip van het proces valt.

Geldt nu <u>bovendien</u> nog:

c) De aantallen klanten, die aankomen in tijdsintervallen, die (behoudens eventueel hun begin- of eindpunten) geheel buiten elkaar vallen, zijn onderling onafhankelijk verdeeld,

dan ligt de verdeling van de lengte van het aankomstinterval reeds vast, als nog het gemiddelde aantal aankomsten per tijdseenheid, λ , gegeven is. Deze verdeling is dan de exponentiële met $\frac{1}{\lambda}$ als gemiddelde lengte van het aankomstinterval 1). Bovendien volgt uit a), b) en c), dat de lengten der aankomstintervallen onderling onafhankelijk zijn.

Wil men veronderstelling c) niet maken, dan kan men iets algemener veronderstellen, dat de aankomstintervallen wel onderling onafhankelijk zijn, maar in plaats van een exponentiële verdeling een willekeurige verdeling bezitten. In dat geval is veronderstelling b) alleen bij een stationnaire toestand vervuld. Nog algemenere problemen, waarbij de aankomstintervallen dus afhankelijk zijn, zijn op het ogenblik nog niet mathematisch op te lossen.

1) De verdelingsfunctie van het aankomstinterval is dan $1-e^{-\lambda y}$.

In Hoofdstuk II wordt uitgegaan van de onderstellingen a), b) en c), dus van onafhankelijke exponentiëel verdeelde aankomstintervallen. Over de bedieningstijd verdeling veronderstellen we nog, dat de kans op een bedieningstijd van de lengte nul gelijk aan nul is 1).

Stationnaire situatie

We zullen het beschouwde wachttijdproces stationnair noemen, als de verdeling van de wachttijd van een klant niet afhangt van het nummer dat deze klant bij aankomst aan het loket krijgt. Als de gemiddelde bedieningstijd van een klant langer is dan de tijd, die gemiddeld tussen twee opeenvolgende aankomsten verloopt, dan is een stationnaire situatie niet mogelijk, daar in dat geval het aantal wachtende klanten steeds groter zal worden.

Ter onderscheiding van de mogelijke situaties voeren we de bezettingsgraad ρ in, dit is de verhouding van de gemiddelde bedieningstijd tot de gemiddelde lengte van het aankomstinterval. Voor een stationnaire situatie moet dus $\rho < 1$ 2) zijn.

Onder de gemaakte veronderstellingen blijkt er, als $\rho < 1$ is, slechts één wachttijd verdeling te bestaan met de eigenschap, dat, indien de 0^{de} klant die wachttijd verdeling heeft, alle volgende klanten diezelfde wachttijd verdeling bezitten. Deze verdeling noemen we de stationnaire wachttijd verdeling. In de stationnaire situatie geeft ρ tevens de fractie van de tijd aan, dat het loket bezet is en ook de kans, dat de wachttijd van een klant positief is (ρ is dus de kans, dat een klant moet wachten).

Men kan zich voorstellen (en op grond van de gemaakte veronderstellingen bewijzen), dat de wachttijd verdeling van de n^{de} klant bij toenemende n steeds minder van een bepaalde limiet verdeling verschilt. Deze limiet verdeling hangt niet af van de beginsituatie, die de 0^{de} klant bij het loket aantreft en is juist de bovengenoemde stationnaire wachttijd verdeling. Na een zekere eindige aanlooptijd zal het proces fysisch niet meer van een stationnair proces te onderscheiden zijn (theoretisch is deze aanlooptijd oneindig). De limiet verdeling is heel karakteristiek voor het systeem. Men beperkt zich dan ook meestal tot

1) Dit houdt in, dat de bedieningstijd verdelingsfunctie in de oorsprong begint.

2) Ook bij $\rho = 1$ is een stationnaire situatie onmogelijk.

het bepalen van deze limiet verdeling, ook al, omdat de verdeling van de wachttijd van de n^{de} klant òf niet, òf alleen met heel veel moeite berekend kan worden en bovendien vaak lang niet zo interessant is. Immers als $\rho < 1$ is en de aanlooptijd naar de stationnaire situatie vrij klein is, dan geeft de limiet verdeling meestal alle gewenste informatie, want het nummer van de klant is slechts zelden van belang, zodat het onderscheiden van de wachttijd verdelingen naar het getal n dan weinig zin heeft. Slechts als $\rho \geq 1$ is of als $\rho < 1$ is, maar weinig van 1 verschilt, zodat de aanlooptijd naar het evenwicht groot is of reeds na behandeling van een gering aantal klanten het proces gestaakt wordt (b.v. door eindigen van het spreekuur of de werkdag), zal het essentieel zijn, dat men de verdeling van de wachttijd van de n^{de} klant ook voor kleine waarden van n leert kennen.

Het is in het algemeen niet mogelijk, bij de gegeven exponentiële verdeling van het aankomstinterval en een willekeurige verdeling van de bedieningstijd de limiet verdeling van de wachttijd te vinden. Wel kan de momenten voortbrengende functie 1) $\gamma(\xi)$ van de wachttijd verdeling berekend worden. Hiervoor vindt men (zie Appendix)

$$\gamma(\xi) = \frac{\xi}{\xi - \lambda + \lambda\beta(\xi)}(1-\rho) , \tag{1.30}$$

waarin ρ de bezettingsgraad, λ het aantal aankomsten per tijdseenheid en $\beta(\xi)$ de momenten voortbrengende functie van de bedieningstijd verdeling voorstellen en ξ een willekeurige variabele is.

Zoals de naam reeds aangeeft, kunnen met behulp van de functie $\gamma(\xi)$ de momenten van de wachttijd verdeling berekend worden; men vindt deze momenten door differentiatie van de voortbrengende functie. Voor het k^{de} moment μ_k van de wachttijd verdeling wordt op deze wijze gevonden

$$\mu_k = (-1)^k \gamma^{(k)}(0) \tag{1.30a}$$

Hoewel de wachttijd verdeling in principe door $\gamma(\xi)$ bepaald is, is het in het algemeen niet mogelijk deze verdelingsfunctie expliciet te vinden.

---

1) Meestal wordt niet $\gamma(\xi)$, maar $\gamma(-\xi)$ de momentenvoortbrengende functie genoemd. Het is echter vaak practisch, om met $\gamma(\xi)$ te werken, daar deze functie de getransformeerde volgens Laplace van de verdelingsfunctie van de wachttijd is.

Gezien het feit, dat de limiet van de wachttijd verdeling slechts in speciale gevallen berekend kan worden, is het niet verwonderlijk, dat de verdeling van de wachttijd van de n^{de} klant niet algemeen te vinden is. Zelfs voor de momenten voortbrengende functie $\gamma_n(\xi)$, van deze verdeling is meestal slechts een benadering voor grote n te vinden.

Evenals uit $\gamma(\xi)$ de momenten van de limietverdeling van de wachttijd berekend kunnen worden, kan men uitgaande van $\gamma_n(\xi)$ de momenten van de verdeling van de wachttijd van de n^{de} klant bepalen. In fig. 10 en 11 wordt hiervan een voorbeeld gegeven voor het eerste moment (de verwachting van de wachttijd van de n^{de} klant).

Hoofdstuk II

In dit hoofdstuk wordt een aantal resultaten gegeven, die voor het merendeel gebaseerd zijn op de relaties (1.30) en (1.30a).

Hierbij wordt van de volgende notatie gebruik gemaakt:

$\underline{y}_n$ = de lengte van het interval tussen de aankomsten van de n^{de} en de $(n+1)^{ste}$ klant.

$\underline{y}_n$ is (voor alle n) exponentiëel verdeeld met gemiddelde $\frac{1}{\lambda}$, zodat de verdelingsfunctie van $\underline{y}_n$ gegeven wordt door $1-e^{-\lambda y}$.

$\underline{s}_n$ = de bedieningstijd van de n^{de} klant.

$\underline{s}_n$ heeft (voor alle n) de verdelingsfunctie $B(s)$ met $\mathcal{E}\underline{s}_n = b$, zodat $\rho = \lambda b$ is. De momentenvoortbrengende functie van $\underline{s}_n$ wordt aangegeven door $\beta(\xi)$, dus $\beta(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi s} dB(s)$.

$\underline{w}_n$ = de wachttijd van de n^{de} klant.

$\underline{w}$ = de wachttijd van een willekeurige klant in de stationnaire toestand.

De verdelingsfuncties van $\underline{w}_n$ en $\underline{w}$ worden aangeduid met resp. $C_n(w)$ en $C(w)$, hun momentenvoortbrengende functies met resp. $\gamma_n(\xi)$ en $\gamma(\xi)$.

Voor de algemene wiskundige notatie zie men blz. 18.

Alvorens enkele voorbeelden te behandelen, waarin de bedieningstijd verdeling $B(s)$ nader wordt gespecificeerd, geven we nog enkele algemene formules.

In de evenwichtstoestand vindt men voor de kans op een wachttijd van de lengte nul, $C(0)$, d.i. de kans, dat het loket vrij is,

$$C(0) = 1-\rho \quad . \tag{2.4}$$

Dit houdt in, dat $C(w)$ discontinu is voor $w=0$, waar een sprong van de grootte $1-\rho$ optreedt (zie bijv. fig. 4).

Voor het eerste en tweede moment van de limietverdeling vindt men

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{E}\underline{w} = \frac{\lambda}{2(1-\rho)}\beta''(0) = \frac{\lambda\mathcal{E}\underline{s}^2}{2(1-\lambda\mathcal{E}\underline{s})} \\ &\mathcal{E}\underline{w}^2 = \frac{\lambda^2}{2(1-\rho)^2}(\beta''(0))^2 - \frac{\lambda}{3(1-\rho)}\beta'''(0) = \frac{\lambda^2(\mathcal{E}\underline{s}^2)^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{3(1-\rho)}\mathcal{E}\underline{s}^3 \\ &\sigma(\underline{w}) = \sqrt{\mathcal{E}\underline{w}^2 - (\mathcal{E}\underline{w})^2} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4(1-\rho)^2}(\beta''(0))^2 - \frac{\lambda}{3(1-\rho)}\beta'''(0)} \;. \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

Voorbeelden

1. B(s) is een exponentiële verdelingsfunctie

Als de bedieningstijden exponentieel verdeeld zijn met gemiddelde b, dus

$$B(s) = 1-e^{-\frac{s}{b}} \quad (s \geq 0),$$

dan is de verdelingsfunctie van de wachttijd in de stationnaire toestand

(2.12) $$C(w) = 1-\rho e^{-\frac{1-\rho}{b}w} \qquad (w \geq 0).$$

Dit is dus behoudens de sprong voor $w = 0$ weer een exponentiële verdelingsfunctie. $C^*(w)$ in fig. 5 is een voorbeeld van de verdelingsfunctie (2.12), waarbij $\rho = b = 0,607$ (hier is $\rho = b$, omdat $\lambda = 1$ gekozen werd). De gemiddelde wachttijd is

(2.12a) $$\mathcal{E}\underline{w} = \frac{b\rho}{1-\rho},$$

zodat de verhouding van de gemiddelde wachttijd tot de gemiddelde totale tijd, dat een klant aanwezig is, gegeven wordt door

$$\frac{\mathcal{E}\underline{w}}{\mathcal{E}\underline{w}+\mathcal{E}\underline{s}} = \frac{\mathcal{E}\underline{s}}{\mathcal{E}\underline{y}} = \rho$$

De spreiding van de wachttijd verdeling is

(2.12b) $$\sigma(\underline{w}) = \frac{b}{1-\rho}\sqrt{\rho(2-\rho)}.$$

In fig. 1 zijn $\mathcal{E}\underline{w}$ en $\sigma(\underline{w})$ getekend als functie van ρ, waarbij $\mathcal{E}\underline{y} = \frac{1}{\lambda}$ gelijk aan 1 genomen is, zodat $\rho = b$ is.

2. B(s) is een mengverdeling van twee exponentiële verdelingen

Als B(s) een mengverdeling is van twee exponentiële verdelingen, dan is dus

(2.13) $$\begin{cases} B(s) = a_1(1-e^{-\mu_1 s}) + a_2(1-e^{-\mu_2 s}) \\ a_1 + a_2 = 1; \quad \mu_1, \mu_2 > 0, \end{cases}$$

zodat $b = \mathcal{E}\underline{s} = \frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2}$.

De verdelingsfunctie (2.13) verkrijgt men bijvoorbeeld als men met twee soorten klanten te doen heeft, waarvan de ene soort onafhankelijk van de andere aankomt, waarbij de lengte van het aankomstinterval voor iedere soort een exponentiële verdeling heeft met gemiddelden resp. $(a_1\lambda_1)^{-1}$ en $(a_2\lambda_2)^{-1}$ en waarbij de eerste soort een exponentiële bedieningstijd verdeling met verwachting μ_1^{-1} heeft en de andere een exponentiële bedieningstijd met verwachting μ_2^{-1}. Dit kan ook zo geïnterpreteerd worden, dat de klanten aankomen met exponentiëel verdeelde aankomstintervallen met gemiddelde $\frac{1}{\lambda}$ en met kans a_1 resp. a_2 geloot wordt of een klant van de eerste, dan wel van de tweede soort is, waarbij de bedieningstijd van de eerste resp. tweede soort klanten exponentiëel verdeeld is met verwachting μ_1^{-1}, resp. μ_2^{-1}.

Deze interpretatie houdt in, dat $a_1 \geqslant 0$ en $a_2 \geqslant 0$ is. Er is echter wiskundig geen bezwaar tegen a_1 of a_2 negatief te kiezen, als men maar vasthoudt aan $a_1+a_2=1$, daar dit een noodzakelijke voorwaarde is, opdat (2.13) een verdelingsfunctie voorstelt. Bovendien moet men eisen als $\mu_1 \neq \mu_2$ is en in geval $a_2 < 0$ is (en analoog voor $a_1 < 0$), dat $\frac{-a_2}{a_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$ is.

Bij een bedieningstijd verdeling als gegeven door (2.13) vindt men voor de wachttijd verdeling $C(w)$

$$(2.25)\quad \begin{cases} C(w) = 1 - \lambda \dfrac{b\beta_2 - 1 + \rho}{\beta_2 - \beta_1} e^{-\beta_1 w} - \lambda \dfrac{b\beta_1 - 1 + \rho}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 w} \\ \left.\begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{\mu_1 + \mu_2 - \lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\mu_1 + \mu_2 - \lambda}{2}\right)^2 - \mu_1 \mu_2 (1-\rho)}\,, \end{cases}$$

waarin

$$b = \mathcal{E}\,\underline{s} = \frac{a_1}{\mu_1} + \frac{a_2}{\mu_2}.$$

Voor de gemiddelde wachttijd vindt men in dit geval

$$\mathcal{E}\,\underline{w} = \frac{\lambda}{1-\rho} \; \frac{b(\mu_1 - \mu_2) - 1}{\mu_1 \mu_2}.$$

De mogelijkheden van een verdeling van de vorm (2.13) illustreren we nu aan de hand van enkele figuren.

Uitgaande van twee exponentiële verdelingen $B_1(s) = 1 - e^{-\mu_1 s}$ en $B_2(s) = 1 - e^{-\mu_2 s}$ beschouwen we de mengverdeling $B(s) = a_1 B_1(s) + a_2 B_2(s)$ en vergelijken deze met de exponentiële verdeling $B^*(s)$, die zo is aangepast, dat hij hetzelfde gemiddelde heeft als $B(s)$. Eenvoudigheidshalve is $\lambda = 1$ genomen, zo dat $\mathcal{E}\,\underline{s} = \rho$.

In fig. 2 zijn $B_1(s)$, $B_2(s)$, $B(s)$ en $B^*(s)$ getekend voor $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1{,}5$ en $a_1 = a_2 = 0{,}5$.

In fig. 3 is hetzelfde gedaan met $\mu_1 = 3{,}4$, $\mu_2 = 3{,}2$, $a_1 = -16$ en $a_2 = 17$. Men ziet, dat in fig.2 $B(s)$ en $B^*(s)$ nauwelijks ~~te~~ onderscheiden zijn, terwijl in fig.3 de mengverdeling sterk van de aangepaste exponentiële verdeling verschilt.

In fig. 4 zijn de wachttijd verdelingsfuncties $C(w)$ en $C^*(w)$ getekend, behorende bij de bedieningstijd verdelingsfuncties $B(s)$ en $B^*(s)$ in fig. 2. $C(w)$ en $C^*(w)$ verschillen eveneens zeer weinig.

In fig. 5 zijn C(w) en $C^*(w)$ getekend corresponderende met B(s) en $B^*(s)$ uit fig. 3. C(w) en $C^*(w)$ verschillen nu vrij aanzienlijk.

In fig. 6 is $\mathcal{E}\underline{s}$, het eerste moment van de verdelingsfunctie B(s), getekend als functie van a_2 voor $\mu_1 = 3$ en $\mu_2 = 1,5$.

In fig. 7 zijn de eerste momenten van C(w) en $C^*(w)$ ($\mathcal{E}\underline{w}$ en $\mathcal{E}\underline{w}^*$) als functies van a_2 getekend voor $\mu_1 = 3$ en $\mu_2 = 1,5$.

In fig. 8 zijn de spreidingen van C(w) en $C^*(w)$ getekend ($\sigma(\underline{w})$ en $\sigma(\underline{w}^*)$) als functies van a_2.

Daar voor $a_2 = 2$ $\mathcal{E}\underline{s} = 1$ is (zie fig.6), zijn de eerste momenten en de spreidingen in fig.7 en fig.8 voor $a_2 = 2$ oneindig.

3. <u>B(s) is een mengverdeling van n exponentiële verdelingen</u>

Als B(s) een mengsel van n exponentiële verdelingen is, dus

$$(2.28)\qquad \begin{cases} B(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i (1 - e^{-\mu_i s}) \\ \mu_i > 0 \,; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{cases},$$

zodat $\mathcal{E}\,\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mu_i}$, dan vindt men voor C(w)

$$(2.31)\qquad C(w) = 1 - (1-\rho) \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k - \beta_k}{\beta_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\mu_i - \beta_k}{\beta_i - \beta_k}\, e^{-\beta_k w} \qquad (w \geq 0).$$

Hierin zijn $-\beta_1, \cdots, -\beta_n$ die nulpunten van de functie $1 - \frac{\lambda}{\lambda - z} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \mu_i}{z + \mu_i}$, waarvoor geldt $\mathcal{R}e\, \beta_i > 0$. De β_i zijn hier alle verschillend ondersteld; in het geval van meervoudige nulpunten krijgt de wachttijdverdeling een enigszins andere vorm, die door limietovergang uit (2.31) berekend kan worden.

4. <u>De bedieningstijd is constant</u>

Als de bedieningstijd $\underline{s}$ voor alle klanten dezelfde constante waarde b heeft, dan wordt de wachttijd verdeling

$$(2.36)\qquad C(w) = (1-\rho) \sum_{j=0}^{[w']} \frac{\rho^j (j - w')^j}{j!}\, e^{\rho(w' - j)} \qquad (w \geq 0).$$

Hierin is $w' = \frac{w}{b}$ en $\rho = \lambda b$. In fig. 9 is deze verdelingsfunctie getekend voor $\rho = 0,5$ en $\rho = 0,8$. Voor grote positieve waarden van w kan men van de volgende benadering gebruik maken:

$$(2.39)\qquad C(w) = 1 - \frac{1-\rho}{b\beta_0+\rho-1}\, e^{-\beta_0 w} - 2(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{-\beta_n w}}{b\beta_n+\rho-1},$$

waarin voor $n \geqslant 1$

$$(2.38)\qquad \beta_n = \frac{1}{b}\log\frac{\pi}{2\rho}(1+2n) + \frac{i\pi}{2b}(1+2n) + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$ 1)

en $-\beta_0$ het reële nulpunt is van

$$z - \lambda + \lambda e^{-bz}$$

met $\beta_0 > 0$.

Voor de gemiddelde wachttijd vindt men in het geval van constante bedieningstijd

$$(2.36a)\qquad \mathcal{E}\underline{w} = \frac{b\rho}{2(1-\rho)},$$

voor de spreiding

$$(2.36b)\qquad \sigma(\underline{w}) = \frac{b\rho}{2(1-\rho)}\sqrt{1+\frac{4(1-\rho)}{3\rho}}.$$

Hier is de gemiddelde wachttijd dus de helft van die in het geval van exponentiëel verdeelde bedieningstijden (zie (2.12b)).

5. B(s) is een gammaverdeling

Als B(s) een gammaverdeling is met n vrijheidsgraden met gemiddelde b, dus

$$(2.11n)\qquad B(s) = \int_0^s \frac{e^{-\frac{nu}{b}}\left(\frac{n}{b}\right)^n u^{n-1}}{(n-1)!}\,du,$$

dan vindt men voor de verwachting en de spreiding van de wachttijd

$$(2.12n)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}\underline{w} = \dfrac{b\rho(n+1)}{2n(1-\rho)}, \\[2ex] \sigma(\underline{w}) = \dfrac{b\rho(n+1)}{2n(1-\rho)}\sqrt{1+\dfrac{4(1-\rho)(n+2)}{3\rho(n+1)}}. \end{cases}$$

Een gammaverdeling met één vrijheidsgraad is hetzelfde als een exponentiële verdeling, zodat men door substitutie van $n=1$ in (2.12n) de formules (2.12a) en (2.12b) terugvindt. Voor $n \to \infty$ gaat (2.11n) over in de constante verdeling. Laat men dus in

---

1) Formule (2.38) in het boek van Pollaczek is onjuist.

(2.12n) n naar oneindig gaan, dan vindt men de formules (2.36a) en (2.36b) terug. Voor $1 < n < \infty$ zijn de verwachting en de spreiding van de wachttijd behorende bij een gammaverdeling met n vrijheidsgraden voor de bedieningstijd steeds kleiner dan de waarden die behoren bij de exponentiële verdeling en groter dan de waarden die behoren bij de constante verdeling voor de bedieningstijd. In fig. 10 zijn $\mathcal{E}\underline{w}$ en $\sigma(\underline{w})$ getekend voor een bedieningstijd, die een gammaverdeling met n vrijheidsgraden bezit, waarbij n = 1,2, ..., resp. 15 genomen is.

6. <u>B(s) is een trapfunctie</u>

Als B(s) een trapfunctie is, dan is dus

$$(2.40) \quad \begin{cases} B(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i & \text{als} \quad s_n \leq s \leq s_{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots N) \\ a_1, \ldots, a_N > 0 \; ; \quad \sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \\ 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N < s_{N+1} = \infty \end{cases}$$

met $b = \mathcal{E}\underline{s} = \sum_{i=1}^{N} a_i s_i$.

Als N = 2 vinden we voor de wachttijd verdeling

$$(2.42) \quad C(w) = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\left[\frac{w}{s_2}\right]} \sum_{i_1+i_2=i} \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2}}{i_1! \, i_2!} \lambda^i (i_1 s_1 + i_2 s_2 - w)^i e^{\lambda(w - i_1 s_1 - i_2 s_2)} \, . \quad {}^{1)}$$

Een bedieningstijdverdeling van de vorm (2.40) geeft aanleiding tot de volgende formule voor de gemiddelde wachttijd

$$(2.45) \quad \mathcal{E}\underline{w} = \frac{\lambda}{2(1-\rho)} \left\{ b^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq N} a_i a_k (s_i - s_k)^2 \right\} .$$

Uit (2.45) blijkt, dat van alle bedieningstijd verdelingen van de vorm (2.40) met dezelfde verwachting $\mathcal{E}\underline{s} = b$ degene met N = 0 (het geval van constante bedieningstijd) aanleiding geeft tot de kleinste gemiddelde wachttijd. Daar men iedere verdelingsfunctie willekeurig goed kan benaderen met trapfuncties, kan men bewijzen, dat bij bediening met constante bedieningstijd de kleinste gemiddelde wachttijd optreedt, mits de lengten der aankomstintervallen exponentiëel verdeeld zijn.

---

1) Formule (2.42) in het boek van Pollaczek is onjuist.

Tenslotte geven we een voorbeeld van een benadering voor de wachttijd van de n^e klant voor grote n voor het geval van exponentiëel verdeelde bedieningstijden.

Voorbeeld

Als $B(s)=1-e^{-\frac{s}{b}}$ is, geldt voor de verdelingsfunctie, van de wachttijd van de n^e klant de volgende benadering:

$$
(2.47)\quad C_n(w)=\begin{cases}
1-\rho e^{-\frac{1-\rho}{b}w}+n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{(1+\rho)^2}{4\rho}\right)^{-n}\frac{\rho(1+\rho)}{\sqrt{\pi}(1-\rho)^2}e^{-\frac{1-\rho}{2b}w}\left(1+\frac{1+\rho}{2b}w+O_w(\frac{1}{n})\right) & (\rho<1)\\
n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{(1+\rho)^2}{4\rho}\right)^{-n}\frac{\rho(1+\rho)}{\sqrt{\pi}(1-\rho)^2}e^{-\frac{1-\rho}{2b}w}\left(1+\frac{1+\rho}{2b}w+O_w(\frac{1}{n})\right) & (\rho>1)\\
\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{w}{b}\right)+O_w\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & (\rho=1).
\end{cases}
$$

Om de verwachting van de wachttijd van de n^e klant, $\mathcal{E}\underline{w}_n$, te berekenen, kan men gebruik maken van de functie $\Phi(\xi,z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\gamma_n(\xi)$.

In fig. 10 zijn met behulp van deze functie de verwachting van de wachttijd van de n^e klant $\mathcal{E}\underline{w}_n$ en het gemiddelde van de verwachting van de wachttijd genomen over de eerste $n+1$ klanten $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{E}\underline{w}_k$ getekend als functies van n voor $\rho=0,382$ en $\rho=0,836$ (deze waarden van ρ bleken het rekenwerk te vereenvoudigen), waarbij de verwachting van de bedieningstijd $\mathcal{E}\underline{s}=1$ gekozen is. De limietwaarde, die voor beide functies dezelfde is, is aangegeven door een horizontale lijn.

In fig.11 zijn $\mathcal{E}\underline{w}_n$ en $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{E}\underline{w}_k$ getekend als functies van n voor $\rho=1,196$. Bovendien zijn voor beide krommen de asymptoten getekend.

De grootheden $\mathcal{E}\underline{w}_n$ en $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{E}\underline{w}_k$ zijn voor kleine n exact berekend, voor grote n is gebruik gemaakt van een vrij ingewikkelde benaderingsformule, die we hier niet vermelden.

Appendix

Daar de in het voorafgaande gegeven resultaten voornamelijk berusten op de relatie

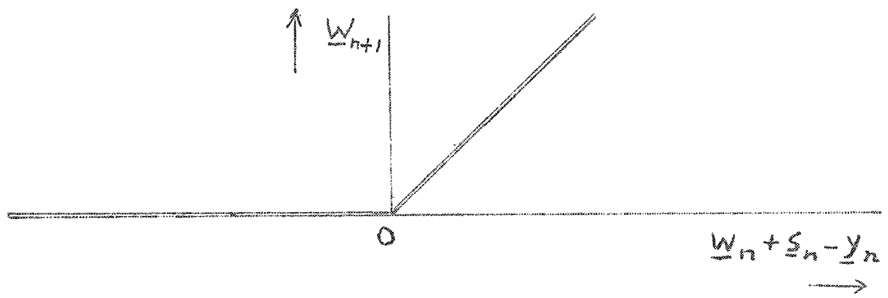
(1.30) $$\gamma(\xi) = \frac{\xi}{\xi - \lambda + \lambda\beta(\xi)},$$

geven we hier een afleiding van deze formule. Deze afleiding is analoog aan die, welke door Pollaczek gegeven wordt, doch iets eenvoudiger.

Laat de n^{de} klant aankomen op het tijdstip $\underline{t}_n$, zodat $\underline{t}_{n+1} - \underline{t}_n = \underline{y}_n$.

De wachttijd van de $n+1$ ^{ste} klant $\underline{w}_{n+1}$ is nul, wanneer de n^{de} klant vertrokken is (op het tijdstip $\underline{t}_n + \underline{w}_n + \underline{s}_n$), vóór de $n+1$ ^{ste} klant aankomt (op het tijdstip $\underline{t}_{n+1}$), dus $\underline{w}_{n+1} = 0$, als $0 \leq \underline{t}_{n+1} - (\underline{t}_n + \underline{w}_n + \underline{s}_n) = \underline{y}_n - \underline{w}_n - \underline{s}_n$. Is daarentegen de n^e klant nog niet vertrokken bij aankomst van de $n+1$ ^{ste} klant, dan wacht deze vanaf het moment van zijn aankomst ($\underline{t}_{n+1}$) tot het moment van vertrek van de n^e klant ($\underline{t}_n + \underline{w}_n + \underline{s}_n$), zodat dan $\underline{w}_{n+1} = \underline{t}_n + \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{t}_{n+1} = \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n$. Dus (zie figuur)

(a) $$\underline{w}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n \leq 0 \\ \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n & \text{als} \quad \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n > 0 \end{cases}$$



In formule (a) zijn $\underline{w}_n$, $\underline{s}_n$ en $\underline{y}_n$ onderling onafhankelijke variabelen, daar $\underline{y}_n$ en $\underline{s}_n$ onderling onafhankelijk ondersteld zijn en $\underline{w}_n$ bepaald wordt door de bedieningstijden nodig om klanten met nummer kleiner dan n te helpen en door de lengten van de intervallen tussen de aankomsten van klanten met nummer kleiner dan of gelijk aan n . $\underline{w}_n$ is dus een functie van $\underline{s}_i$ en $\underline{y}_i$ met $0 \leq i \leq n-1$ en dus is $\underline{w}_n$ onafhankelijk van de onderling onafhankelijke variabelen $\underline{y}_n$ en $\underline{s}_n$. Omdat $\underline{w}_n$, $\underline{y}_n$ en $\underline{s}_n$ onderling onafhankelijk zijn, is de verdelingsfunctie van $\underline{w}_{n+1}$ door de verdelingsfunctie van $\underline{w}_n$ bepaald (bij gegeven $B(s)$ en $A(y)$).

Ter berekening van $\gamma_{n+1}(\xi) = \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_{n+1}}$ zouden we kunnen volstaan met het berekenen van $\mathcal{E}\, e^{-\xi(\underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n)}$, als slechts $\underline{w}_{n+1} = \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n$ was. Volgens (a) is dit niet altijd correct. We voeren daarom de functie $\underline{v}_n$ in:

$$\text{(b)} \quad \underline{v}_n = \begin{cases} \underline{y}_n - \underline{w}_n - \underline{s}_n & \text{als} \quad \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n \leq 0 \\ 0 & \text{als} \quad \underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n > 0 . \end{cases}$$

Dan geldt

$$e^{-\xi \underline{w}_{n+1}} = e^{-\xi(\underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n)} + 1 - e^{\xi \underline{v}_n} .$$

Is namelijk $\underline{w}_{n+1} > 0$, dan is $\underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n > 0$ en dus $\underline{v}_n = 0$ en $e^{\xi \underline{v}_n} = 1$ zodat dan aan (b) voldaan is. Is $\underline{w}_{n+1} = 0$, dan zijn zowel linker als rechterlid van (b) gelijk aan 1, daar nu $\underline{v}_n = \underline{y}_n - \underline{w}_n - \underline{s}_n$. Nu is dus (voor $0 \leq Re\, \xi < \lambda$)

$$\text{(c)} \qquad \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_{n+1}} = \mathcal{E}\, e^{-\xi(\underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n)} + 1 - \mathcal{E}\, e^{\xi \underline{v}_n},$$

zodat ons doel, $\mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_{n+1}}$ uit te drukken in $\mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_n}$, bereikt is, als $\mathcal{E}\, e^{\xi \underline{v}_n}$ berekend kan worden, want, daar $\underline{w}_n$, $\underline{s}_n$ en $\underline{y}_n$ onderling onafhankelijk zijn, is

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} \mathcal{E}\, e^{-\xi(\underline{w}_n + \underline{s}_n - \underline{y}_n)} = \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_n} \cdot \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{s}_n} \cdot \mathcal{E}\, e^{\xi \underline{y}_n} = \\ = \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_n}\, \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{s}_n} \dfrac{\lambda}{\lambda - \xi} . \end{cases}$$

Beschouwen we nu de verdelingsfunctie van $\underline{v}_n$ onder de voorwaarde, dat $\underline{v}_n > 0$ is, dan geldt volgens een bekende eigenschap van de exponentiële verdeling (1.9)

$$P\{\underline{v}_n \leq v \mid \underline{v}_n > 0\} = 1 - e^{-\lambda v}, \qquad \text{als} \quad v > 0 .$$

Nu geldt dus, daar $\underline{v}_n > 0$ is, dan en slechts dan, als $\underline{w}_{n+1} > 0$ is,

$$\mathcal{E}\, e^{\xi \underline{v}_n} = \mathcal{E}(e^{\xi \underline{v}_n} \mid \underline{v}_n > 0) . P\{\underline{v}_n > 0\} + \mathcal{E}(e^{\xi \underline{v}_n} \mid \underline{v}_n = 0) P\{\underline{v}_n = 0\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{\xi v}\, d(1 - e^{-\lambda v})\, P\{\underline{w}_{n+1} > 0\} + P\{\underline{w}_{n+1} = 0\},$$

zodat

(e) $$\mathcal{E}\, e^{\xi \underline{v}_n} = \frac{\lambda}{\lambda-\xi} P\{\underline{w}_{n+1} > 0\} + P\{\underline{w}_{n+1} = 0\} = 1 - \frac{\xi}{\lambda-\xi} P\{\underline{w}_{n+1} = 0\}.$$

Combinatie van (c), (d) en (e) levert dus

$$\mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_{n+1}} = \frac{\lambda}{\lambda-\xi}\, \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}_n}\, \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{s}_n} + P\{\underline{w}_{n+1} = 0\} \frac{\xi}{\lambda-\xi}.$$

In de stationnaire toestand, waarin alle $\underline{w}_n$ dezelfde kansverdeling hebben, geldt dus voor $0 \leq Re\, \xi < \lambda$

$$\mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}} = \frac{\lambda}{\lambda-\xi}\, \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{w}}\, \mathcal{E}\, e^{-\xi \underline{s}} - \frac{\xi}{\lambda-\xi} P\{\underline{w} = 0\}$$

of

$$\gamma(\xi) = \gamma(\xi)\beta(\xi)\frac{\lambda}{\lambda-\xi} - \frac{\xi}{\lambda-\xi} P\{\underline{w} = 0\}.$$

Door differentiatie naar ξ en substitutie van $\xi = 0$ vindt men

$$P\{\underline{w} = 0\} = 1 + \lambda\beta'(0) = 1 - \rho,$$

zodat men krijgt

$$\gamma(\xi) = \frac{\lambda\gamma(\xi)\beta(\xi)}{\lambda-\xi} - \frac{(1-\rho)\xi}{\lambda-\xi}$$

of tenslotte

(1.30) $$\gamma(\xi) = (1-\rho)\frac{\xi}{\xi - \lambda + \lambda\beta(\xi)}$$

voor alle waarden van ξ met $Re\, \xi \geq 0$ (daar uit de geldigheid van (1.30) voor $0 \leq Re\, \xi < \lambda$, door analytische voortzetting de geldigheid voor $Re\, \xi \geq 0$ volgt).

Notaties en Definities

Stochastische variabelen, d.w.z. variabelen, die een kansverdeling bezitten, worden door onderstreping van hun symbolen onderscheiden van getallen (dus b.v. van waarden, die zij kunnen aannemen).

$P\{A\}$ = de kans, dat de gebeurtenis A optreedt.

$P\{A \mid B\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{de kans, dat A optreedt onder de voorwaarde,} \\ \text{dat B optreedt, waarbij } P\{B\} \neq 0 \text{ is.} \end{array} \right.$

Verdelingsfuncties worden steeds aangegeven met Romeinse hoofdletters, bij voorbeeld

$$C(x) = P\{\underline{w} \leq x\}.$$

Getransformeerden volgens Laplace van verdelingsfuncties van niet-negatieve stochastische variabelen worden aangeduid met de corresponderende kleine Griekse letter. Als A(x) een dergelijke verdelingsfunctie is, zodat A(0-) = 0, dan is

$$\alpha(\xi) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\xi x}\, dA(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{-\xi x}\, dA(x).^{1)}$$

De verwachting van $f(\underline{x})$ wordt voorgesteld door

$$\mathcal{E} f(\underline{x}) = \int_{0^-}^{\infty} f(x)\, dF(x),$$

waarin F (x) de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ is.

We kunnen dus voor $\alpha(\xi)$ ook schrijven $\alpha(\xi) = \mathcal{E} e^{-\xi \underline{x}}$.

We gebruiken de volgende afkortingen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x),$$

$[x]$ = het grootste gehele getal $\leq x$,

$Re\, f(x)$ = het reële deel van $f(x)$,

1) Integralen van de vorm $\int f(x)\, d\mathcal{G}(x)$ duiden Stieltjes integralen aan; als $\mathcal{G}(x)$ differentieerbaar is kan men hiervoor schrijven $\int f(x)\, \mathcal{G}'(x)\, dx$.

$\mathrm{Im}\, f(x)$ = het imaginaire deel van $f(x)$.

$f(x) = O(g(x))$ $(x \longrightarrow a)$ wil zeggen, dat de verhouding $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ voor x gaande naar a begrensd is.

$f(x,y) = O_y(g(x))$ $(x \longrightarrow a)$ wil zeggen, dat de verhouding $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ voor x gaande naar a begrensd is en van y kan afhangen.

<u>Belangrijkste corresponderende notaties</u>

	Rapport	Pollaczek
aankomsttijdstip	$\underline{t}_n$, $\underline{t}$	X_n
aankomstinterval	$\underline{y}_n$, $\underline{y}$	Y_n
verdelingsfunctie	$A(y)$	$f_2(t)$
L.T. 1)	$\alpha(\xi)$	$\mathcal{E}_2(-q)$
verwachting	λ^{-1}	η^{-1}
bedieningstijd	$\underline{s}_n$, $\underline{s}$	T_n
verdelingsfunctie	$B(s)$	$f_1(t)$
L.T.	$\beta(\xi)$	$\mathcal{E}_1(-q)$
verwachting	b	1
wachttijd	$\underline{w}_n$, w	τ_n, τ
verdelingsfunctie	$C_n(w)$	$\rho_n(\tau)$, $\rho(\tau)$
L.T.	$\gamma_n(\xi)$, $\gamma(\xi)$	$E\, e^{-q\tau_n}$, $E\, e^{-q\tau}$
verwachting	$\mathcal{E}\underline{w}_n$, $\mathcal{E}\underline{w}$	$m_1(\tau_n)$, $m_1(\tau)$

1) L.T. = getransformeerde volgens Laplace.

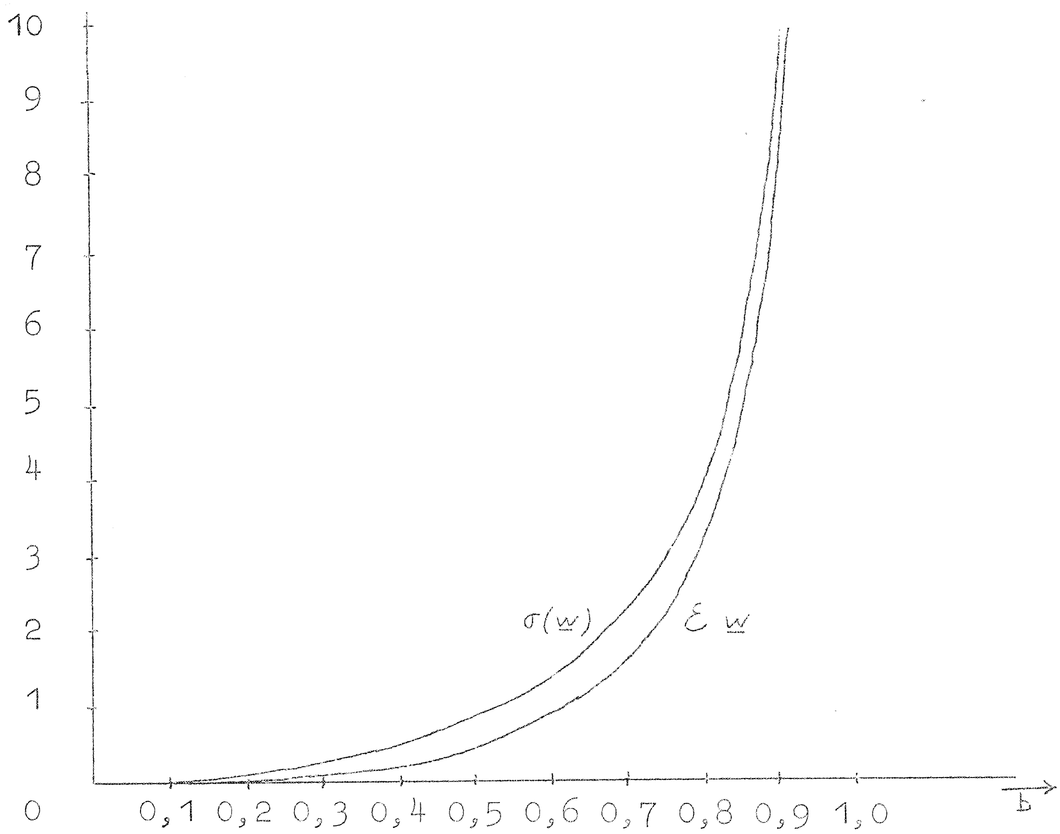


Fig. 1. Gemiddelde $\mathcal{E}\,\underline{w}$ en spreiding $\sigma(\underline{w})$ van de wachttijdverdeling voor het geval van een exponentiëel verdeelde bedieningstijd als functie van de bezettingsgraad ρ. $\mathcal{E}\,\underline{w} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

$\sigma(\underline{w}) = \frac{\rho}{1-\rho}\sqrt{\rho(2-\rho)}$. $\lambda = 1$, zodat $b = \rho$.

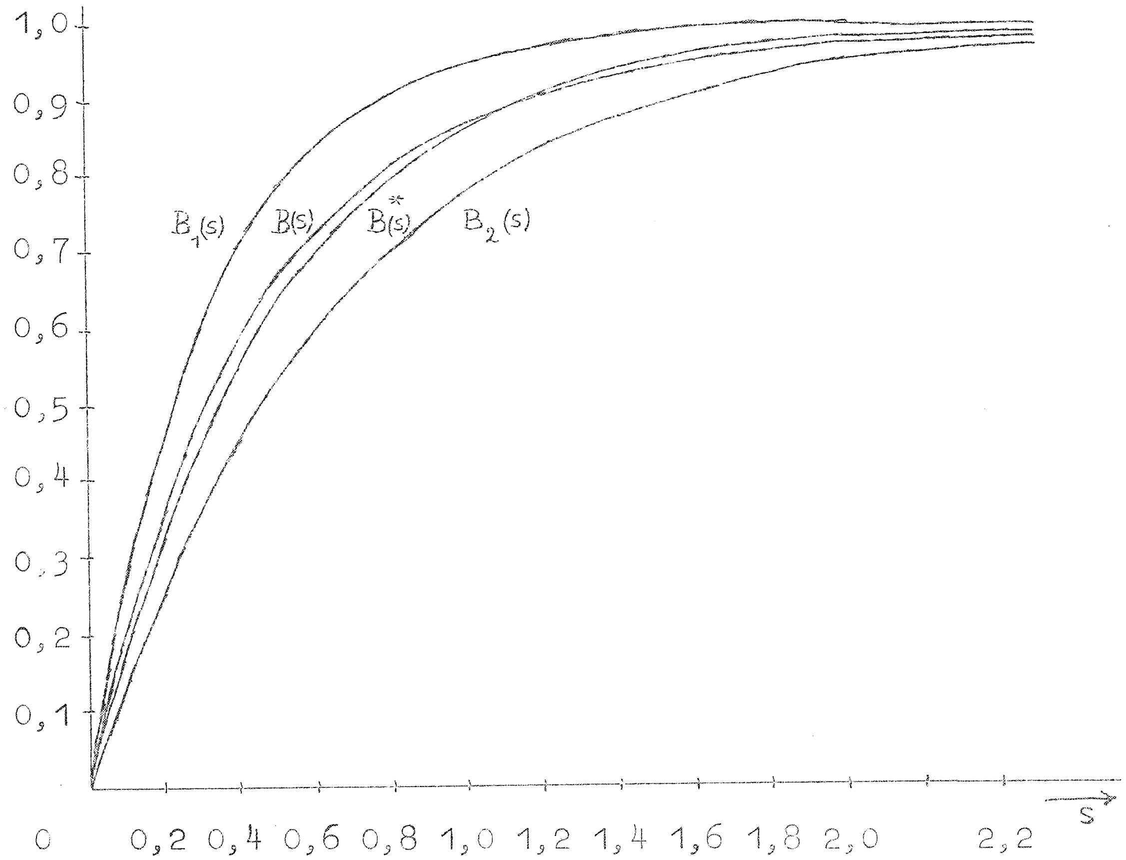


Fig. 2. Twee exponentiële verdelingsfuncties $B_1(s)$ en $B_2(s)$, de mengverdelingsfunctie $B(s)$ met mengverhouding 1 en de aangepaste exponentiële verdelingsfunctie $B^{*}(s)$. $B_1(s) = 1-e^{-3s}$, $B_2 = 1-e^{-1,5s}$, $B(s) = 0,5(1-e^{-3s}) + 0,5(1-e^{-1,5s})$.
$B^{*}(s) = 1-e^{-2s}$.

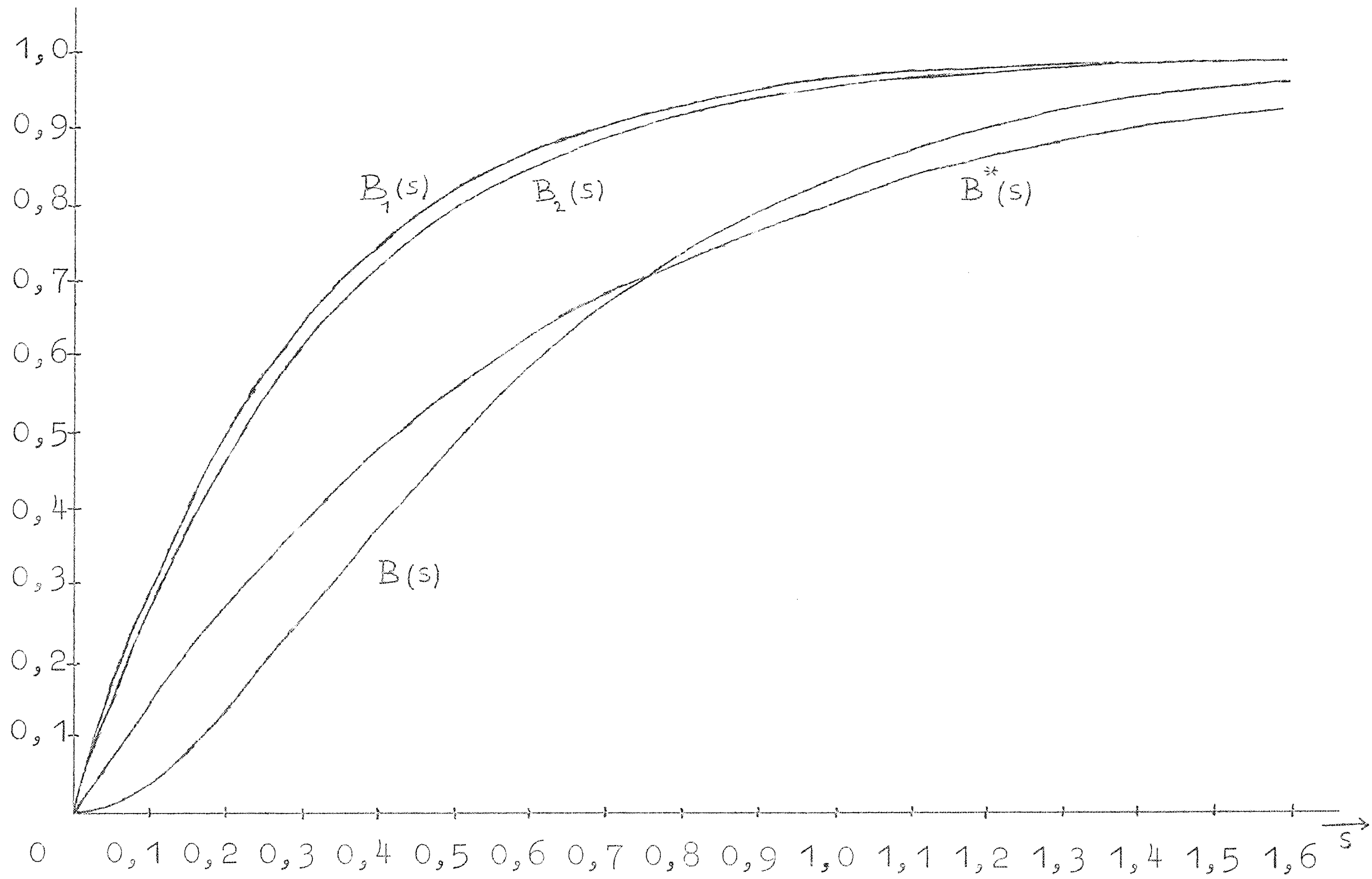


Fig. 3. Twee exponentiële verdelingsfuncties $B_1(s)$ en $B_2(s)$, de mengverdelingsfunctie $B(s)$ met mengverhouding $\frac{-16}{17}$ en de aangepaste exponentiële verdelingsfunctie $B^*(s)$. $B_1(s) = 1-e^{-3,4s}$, $B_2 = 1-e^{-3,2s}$, $B(s) = -16(1-e^{-3,4s}) + 17(1-e^{-3,2s})$, $B^*(s) = 1-e^{-1,65s}$.

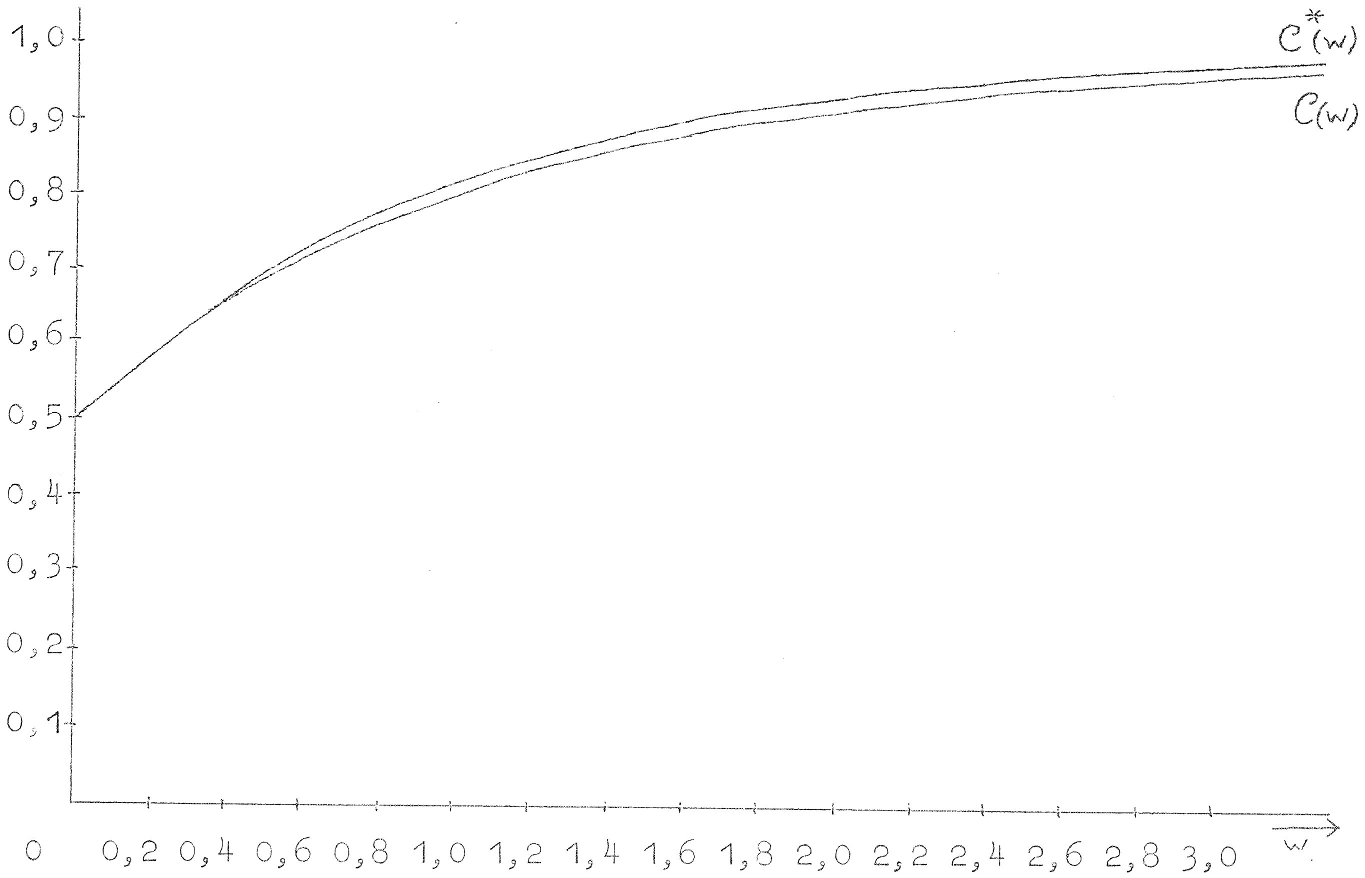


Fig. 4. De verdelingsfuncties van de wachttijd $C(w)$ en $C^*(w)$ behorende bij de bedieningstijdverdelingsfuncties $B(s)$ en $B^*(s)$ uit fig. 2, ($\lambda=1$).

$C(w) = 1 - 0{,}04202^{-0{,}849w} - 0{,}458\ e^{-2{,}65w}$, $C^*(w) = 1 - 0{,}500$ e

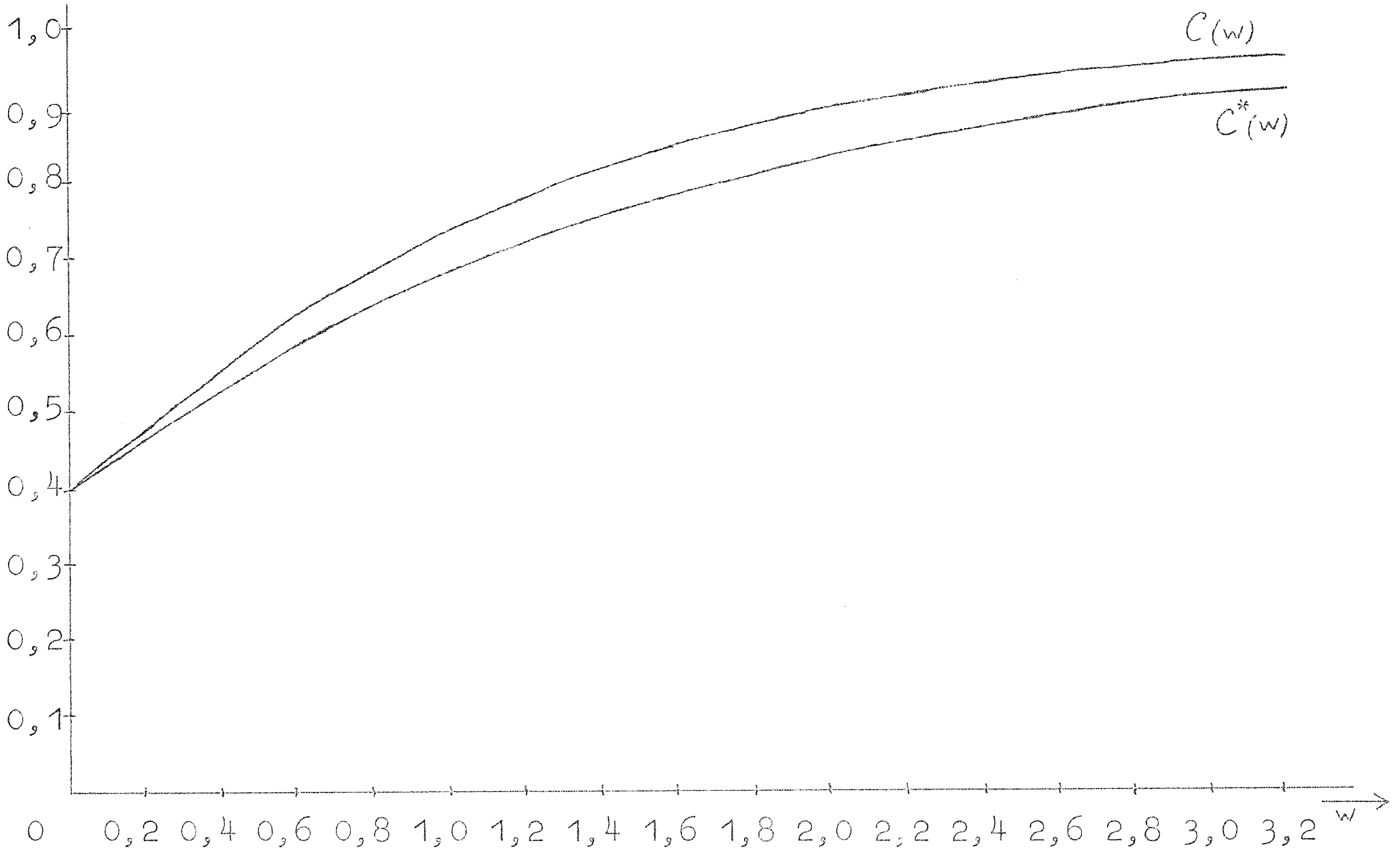
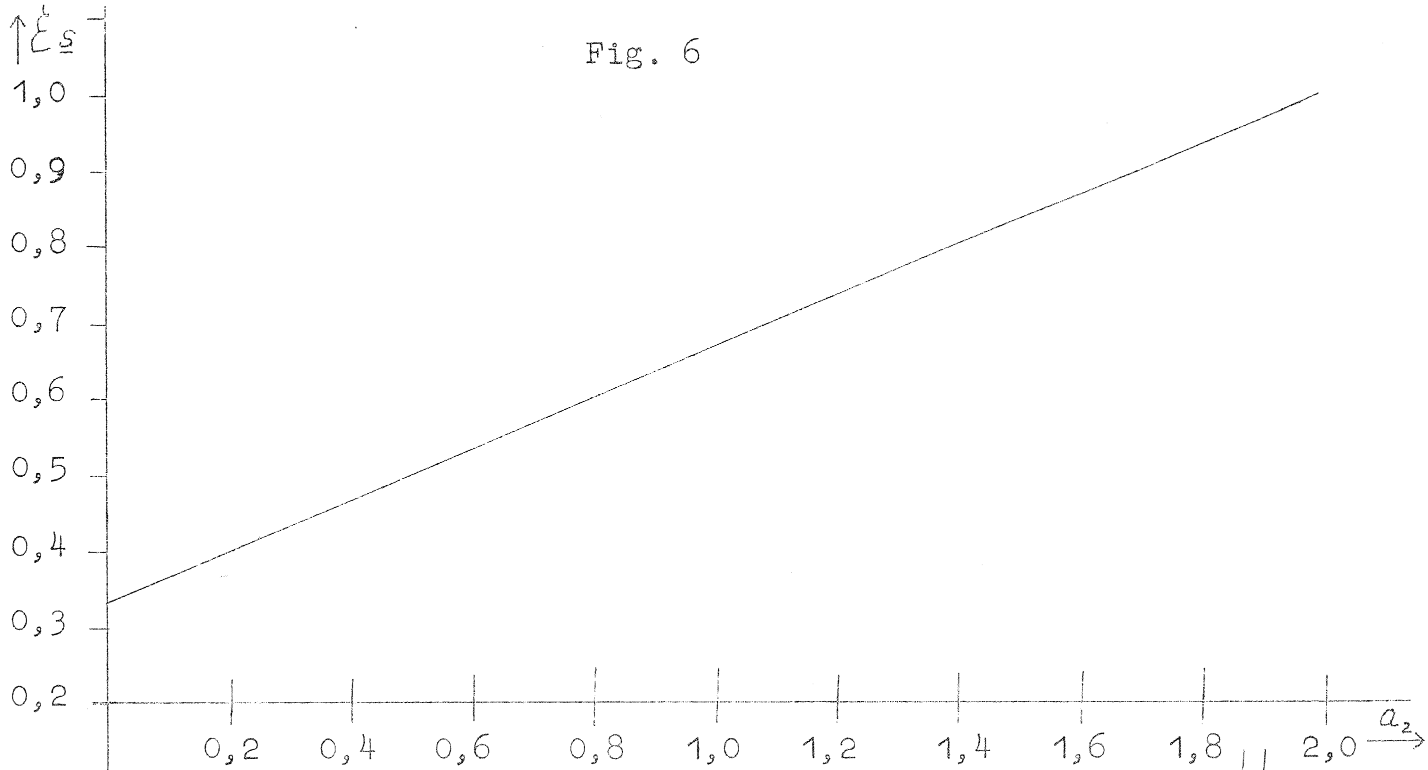


Fig. 5. De verdelingsfuncties van de wachttijd $C(w)$ en $C^{*}(w)$ behorende bij de bedieningstijdverdelingsfuncties $B(s)$ en $B^{*}(s)$ uit fig. 3, ($\lambda = 1$).

$C(w) = 1 + 0{,}0426\ e^{-4{,}69w} - 0{,}649\ e^{-0{,}913w}$,

$C^{*}(w) = 1 - 0{,}607\ e^{-0{,}648w}$.



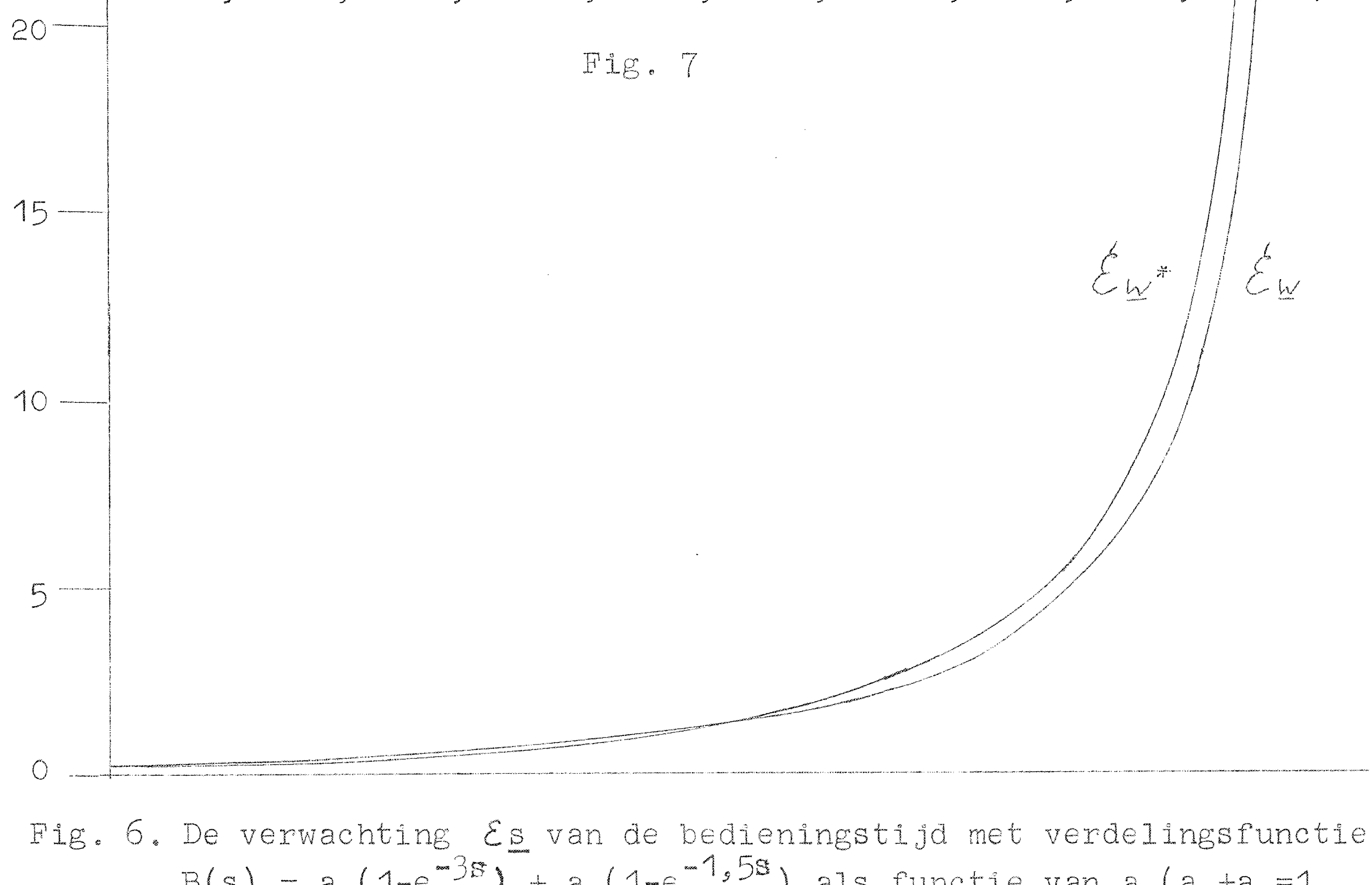


Fig. 6. De verwachting $\mathcal{E}\underline{s}$ van de bedieningstijd met verdelingsfunctie $B(s) = a_1(1-e^{-3s}) + a_2(1-e^{-1,5s})$ als functie van $a_2 (a_1+a_2=1, \lambda=1)$ $\mathcal{E}\underline{s} = \frac{a_2+1}{3}$.

Fig. 7. De verwachtingen van de wachttijd ($\mathcal{E}\underline{w}$ en $\mathcal{E}\underline{w}^*$) behorende bij de bedieningstijd-verdelingsfuncties $B(s) = a_1(1-e^{-3s}) +$ $a_2(1-e^{-1,5s})$ en $B^*(s) = 1-e^{-\frac{3}{1+a_2}s}$, als functie van a_2 .

$$\mathcal{E}\underline{w} = \frac{3a_2+1}{6-3a_2}\ ,\quad \mathcal{E}\underline{w}^* = \frac{(a_2+1)^2}{6-3a_2}, (\lambda=1)\ .$$

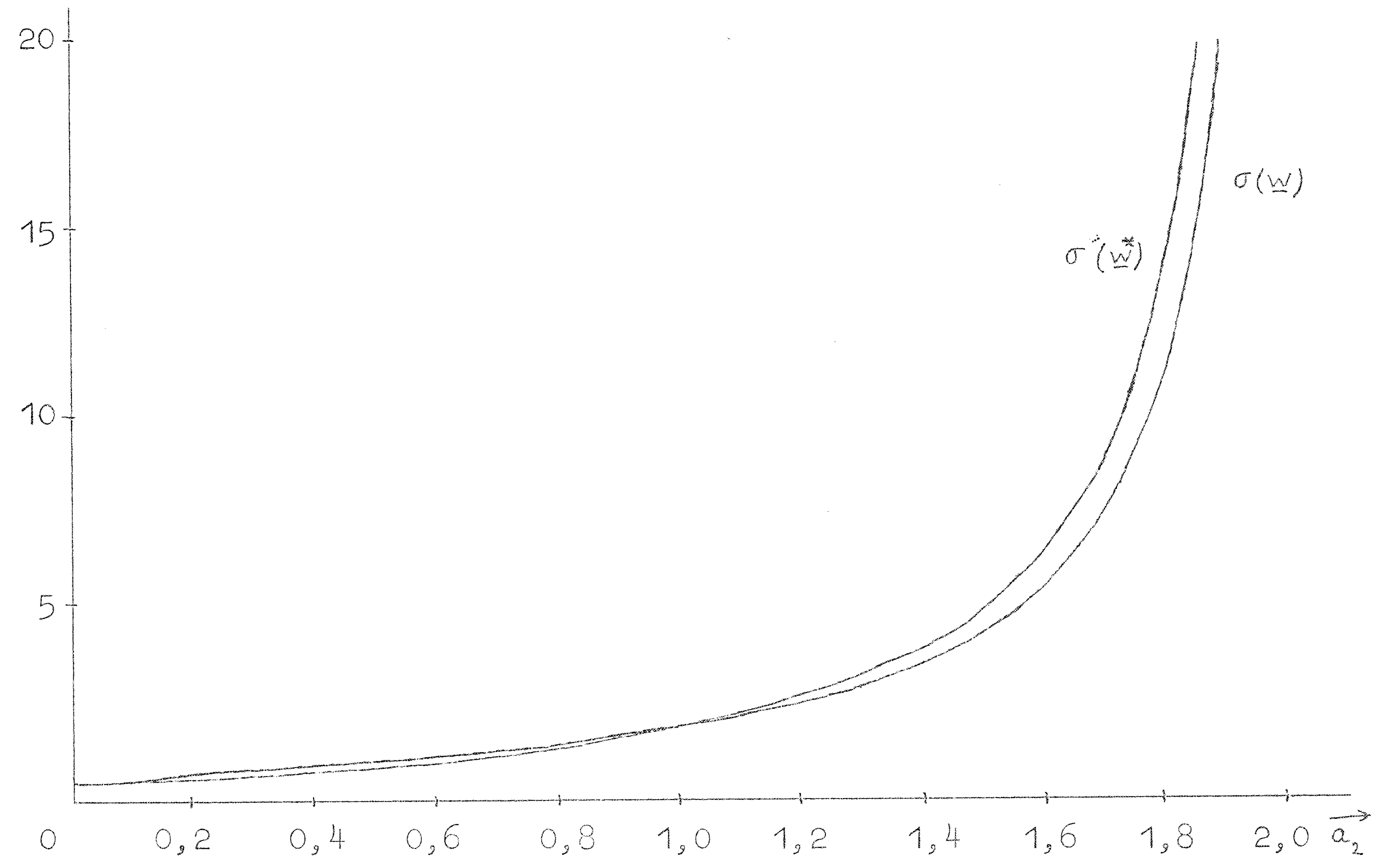


fig. 8. De spreidingen $\sigma(\underline{w})$ en $\sigma(w^*)$ van de wachttijdverdeling behorende bij de bedieningstijdverdelingsfuncties $B(s) = a_1(1-e^{-3s}) + a_2(1-e^{1,5s})$ en $B^*(s) = 1-e^{-\frac{3}{1+a_2}s}$ als functies van a_2. $\sigma(\underline{w}) = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{3a_2+1}{2-a_2}\right)^2 + 2\,\frac{7a_2+1}{2-a_2}}$, $\sigma(w^*) =$

$\frac{a_2+1}{6-3a_2}\sqrt{5 + 4a_2 - a_2^2}$, $(\lambda = 1)$.

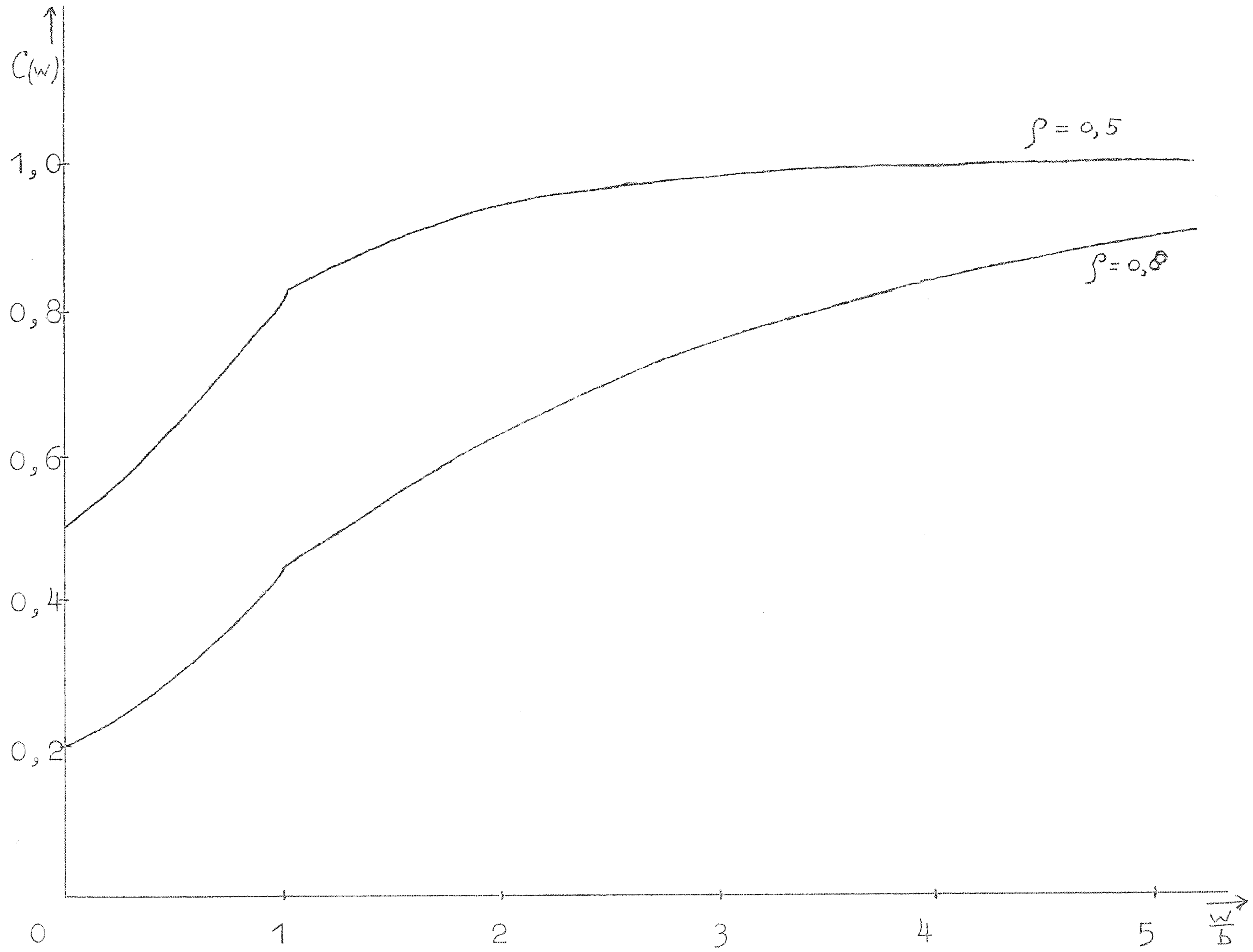


Fig. 9. De wachttijdverdelingsfunctie

$$C(w) = (1-\rho)\sum_{j=0}^{[w']} \frac{\rho^j (j-w')^j}{j!} e^{\rho(w'-j)},$$

voor $\rho = 0{,}5$ en $\rho = 0{,}8$, waarbij $w' = \frac{w}{b}$.

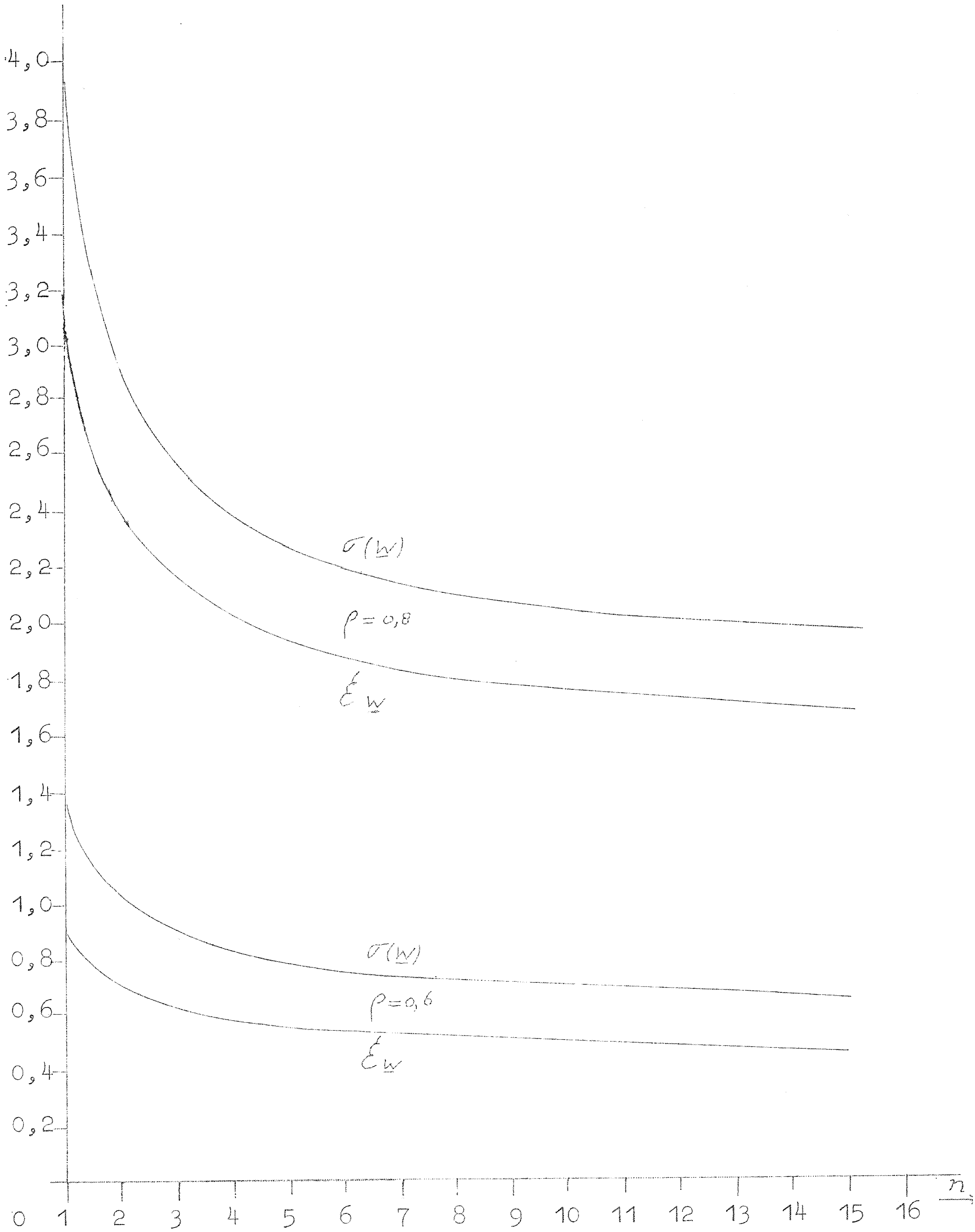


Fig. 10. Gemiddelde $\mathcal{E}\underline{w}$ en spreiding $\sigma(\underline{w})$ van de wachttijdverdeling bij een gamma verdeling met n vrijheidsgraden voor de bedieningstijd als functie van n.

$$\mathcal{E}\underline{w} = \frac{\rho^2(n+1)}{2n(1-\rho)}, \quad \sigma(\underline{w}) = \frac{\rho^2(n+1)}{2n(1-\rho)}\sqrt{1+\frac{4(1-\rho)(n+2)}{3\rho(n+1)}} .$$

$\lambda = 1$, zodat $b = \rho$.

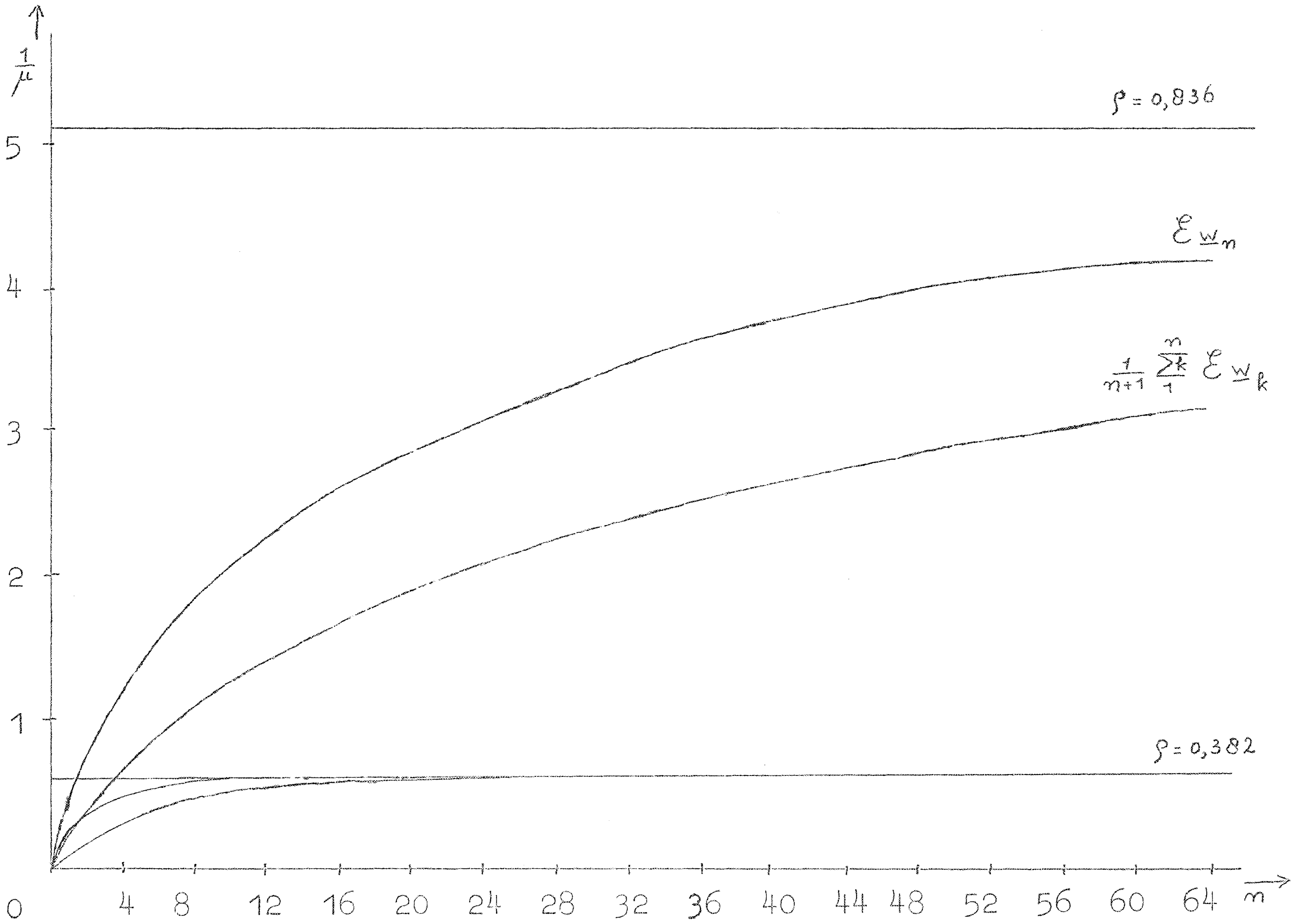


Fig. 11. $\mathcal{E}\,\underline{w}_n$ en $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathcal{E}\,\underline{w}_k$ bij exponentiëel verdeelde bedieningstijden als functies van n voor $\rho = 0,382$, $\rho = 0,836$, $(\mathcal{E}\,\underline{s} = 1)$.

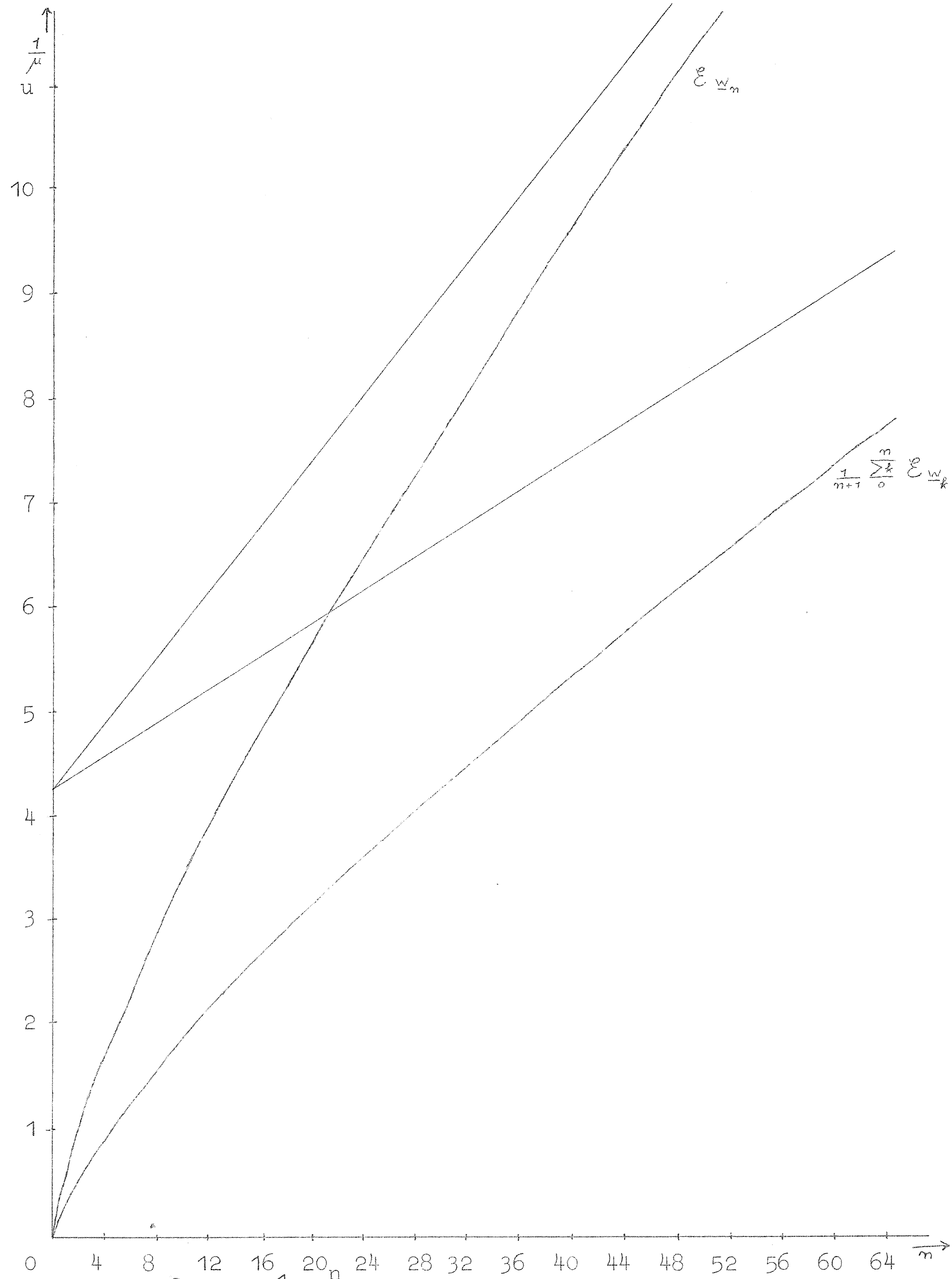


Fig. 12. $\mathcal{E}\underline{w}_n$ en $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathcal{E}\,\underline{w}_k$ als in fig. 11 voor ρ = 1,196 en de asymptoten van beide functies, resp. 4,256 + 0,164n en 4,256 + 0,0819 n.