STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 264

Beslissingsvoorbereiding met behulp van wiskundige methoden

door

J. Kriens

Januari 1960

1. Inleiding.

Wanneer het bedrijfsleven behoefte heeft aan advies, dan verkeert men in het algemeen in één van de volgende drie situaties:

a_1) er moet een concrete beslissing genomen worden,
a_2) er is onbehagen over de huidige gang van zaken in het bedrijf,
a_3) er bestaat ongerustheid over de ontwikkeling in de toekomst.

Bovendien acht men de eigen capaciteiten onvoldoende en verwacht men dat de adviseur deze in minstens één van de volgende opzichten kan aanvullen:

b_1) kennis van en/of ervaring op het betreffende terrein,
b_2) objectiviteit en onafhankelijkheid ten opzichte van de gestelde problemen,
b_3) onbevangenheid ten opzichte van de problemen,
b_4) hoeveelheid beschikbare tijd.

In alle gevallen zal steeds minstens één van de punten a_1) t/m a_3) aanwezig zijn en één of meer van de argumenten b_1) t/m b_4).

Vraagt men advies in een geval waarin er een beslissing genomen moet worden, dan zijn er steeds alternatieve mogelijkheden, die aan de hand van één of meer maatstaven tegen elkaar afgewogen moeten worden, hetgeen tot een keuze dient te leiden. In de gevallen a_2) en a_3) moet nagegaan worden of het onbehagen respectievelijk de ongerustheid terecht bestaat en zo ja, welke de oorzaken zijn en welke maatregelen er ter verbetering genomen kunnen worden. Aangezien ook hier uiteindelijk een beslissing genomen moet worden, kunnen wij ons in de gedachtengang op goede gronden beperken tot situaties a_1).

De vraag om advies, wanneer men een beslissing moet nemen, impliceert de behoefte aan <u>een voorspelling</u> van de consequenties van de verschillende mogelijke keuzen. Vaak zal deze gegeven kunnen worden op grond van de aanwezige kennis of op grond van ervaringen bij soortgelijke problemen in het verleden, of op een mengsel van beide.

Indien kennis en ervaring niet aanwezig zijn of niet in voldoende mate ofwel wanneer ze niet voldoende betrouwbaar zijn, dan kan het opstellen van een model een hulpmiddel zijn.

Voorbeeld I.

Een spoorwegbedrijf voerde oorspronkelijk een politiek, waarbij de rangeerterreinen zoveel mogelijk gelijkmatig over het land verdeeld werden. Door toevallige omstandigheden ontdekte men dat de rangeerwerkzaamheden juist vlot verliepen, wanneer sommige rangeerterreinen dicht bij elkaar lagen. Deze ervaring kan bij de aanleg van nieuwe rangeeremplacementen goed gebruikt worden.

Voorbeeld II.

Een industrie heeft een nieuwe fabriek voor onderdelen nodig, die reeds op twee plaatsen gemaakt worden. Er is keuze tussen drie vestigingsplaatsen, een keuze die men af wil laten hangen van de transportkosten van de onderdelen maar de fabrieken waar ze nodig zijn. Men bezit geen ervaring, omdat men nooit verschillende plaatsen "geprobeerd" heeft. Zoals wij in paragraaf 2 zullen zien, kan een model hier steun geven bij het bepalen van de keuze.

2. Modellen.

In een situatie, als aangegeven in voorbeeld II kan een reden voor het opstellen van een model zijn: gebrek aan ervaring. Door middel van een model wil men zich inzicht verwerven. Eén van de eenvoudigste voorbeelden is wel de etalagepop. In de Waterloopkundige Laboratoria in Delft en in de Noord-Oost-Polder worden voortdurend proeven gedaan om de beste ligging van dijken en vaargeulen te bepalen, bijvoorbeeld voor de werken van het Deltaplan. Maquettes geven een beeld van de nieuwe situatie in een ontworpen stadsplan, terwijl ze ook gebruikt worden om verkeerssituaties bij bestaande en toekomstige kruispunten te analyseren.

De modellen zijn niet identiek met de werkelijke situatie. Wel tracht men de belangrijkste kenmerken in het beeld op te nemen, teneinde op grond van de eigenschappen van het beeld bruikbare conclusies omtrent de meestal veel ingewikkeldere werkelijkheid te kunnen trekken. Aangezien de genoemde modellen vervaardigd zijn naar analogie van de te onderzoeken situatie, noemt men ze analoge modellen; vaak ligt het verschil hoofdzakelijk in de schaal, waarop ze gemaakt zijn. Men kan er sneller en goedkoper ervaring mee opdoen dan in de werkelijkheid het geval is.

Naast de analoge modellen onderscheidt men symbolische of wiskundige modellen. Een klassiek voorbeeld hiervan levert de landmeetkunde, waarin steden en dorpen door punten voorgesteld worden, wegen door lijnen, enzovoorts. De physische grootheden zijn door abstracte, wiskundige grootheden vervangen, zonder enige uiterlijke overeenkomst met de grootheden die ze voorstellen. In het vervolg beperken wij ons tot wiskundige modellen. Ter illustratie zullen wij er eerst één opstellen voor voorbeeld II uit paragraaf 1.

Voorbeeld II.

Laten er van de onderdelen reeds 1000 exemplaren per maand gemaakt worden in A en 2000 in B, en laat de productie gepland voor de nieuwe fabriek 1500 per maand bedragen. Van deze onderdelen zijn er in de fabriek in E 2000 en in die in F 2500 per maand nodig. De nieuwe fabriek kan gevestigd worden in K, L of M. De kosten van vervoer per eenheid tussen de fabrieken in E en F en de (eventuele) productieplaatsen A, B, K, L en M zijn opgegeven in tabel I.

Tabel I.
Vervoerskosten per eenheid tussen fabrieken en productieplaatsen

	A	B	K	L	M
E	5	2	2	1	3
F	2	1	3	4	2

Laten wij eerst de consequenties onderzoeken, wanneer wij de nieuwe fabriek in K vestigen; A, B en K dienen dan E en F te voorzien. Wij hebben ondersteld dat er evenveel nodig is, als er geproduceerd wordt; verder nemen wij aan dat de transportkosten evenredig zijn met de hoeveelheid vervoerde goederen. Transporteren wij x_{ij} onderdelen van de productieplaats i naar de fabriek j, dan bedragen de vervoerskosten v:

$$v = 5x_{AE} + 2x_{AF} + 2x_{BE} + x_{BF} + 2x_{KE} + 3x_{KF} . \qquad (2.1)$$

De zes variabelen die in (2.1) voorkomen kunnen vrij gekozen worden, mits men ze niet negatief maakt en men er voor zorgt dat de fabrieken in E en F iedere maand de vereiste hoeveelheden krijgen, terwijl er uit A, B en K per maand niet meer verzonden kan worden, dan er geproduceerd wordt. De overgebleven vrijheid in de keuze kan men gebruiken om de vervoerskosten v te minimaliseren. Na enige berekeningen blijkt dit minimum 75 te bedragen.

Een dergelijke berekening kan men ook maken voor de gevallen waarin de nieuwe productieplaats in L respectievelijk in M gevestigd zou worden. De minimale kosten van vervoer blijken dan 60 respectievelijk 90 te bedragen. De beste keuze voor de nieuwe plaats van productie is dus L.

In dit voorbeeld hebben wij het werkelijke probleem vervangen door een - weliswaar eenvoudig - wiskundig probleem, waardoor de gunstigste vestigingsplaats bepaald kon worden zonder dat eerst alle mogelijke schema's van transportrouten met behulp van auto's en klokken vergeleken zijn. Uiteraard is het niet uitgesloten dat de in tabel I opgegeven constanten via experimenten bepaald moeten worden, maar wanneer bijvoorbeeld voor de vervoerskosten per eenheid aangenomen mag worden dat ze evenredig zijn met de af te leggen afstand, dan zal ook dat niet nodig zijn. Mocht de ervaring geleerd hebben dat een bepaald routenschema ongunstiger is dan een ander, dan kan van deze ervaring ook bij de wiskundige behandeling van het probleem gebruik gemaakt worden. (Of men dit altijd zal doen is uiteraard een andere vraag.) Bij voorbeeld I kan men dit overwegen.

Gaat men nu na welke stappen gedaan worden bij de behandeling van voorbeeld II, dan kan men ruw geschetst zeggen, dat eerst onderzocht is welke alternatieven er zijn en welk doel men wil bereiken, dat vervolgens nagegaan is wat dit wiskundig betekent en aan welke relaties de voorkomende grootheden moeten voldoen, dat daarna het probleem wiskundig is opgelost en dat tenslotte deze wiskundige oplossing weer in de taal van het oorspronkelijke probleem is geformuleerd. In de volgende paragraaf zullen wij de verschillende fasen nauwkeuriger onderzoeken.

3. Fasen in de beslissingsvoorbereiding met behulp van wiskundige methoden.

In deze paragraaf wordt geen volledig overzicht gegeven van alle fasen die in de voorbereiding van een beslissing onderscheiden kunnen worden. Wij beperken ons tot voorbereiding met behulp van wiskundige methoden en leggen de nadruk op die onderdelen, waarin de wiskunde een belangrijke rol speelt.

Wij noemen de volgende fasen.

a) Formulering van het doel dat met de beslissing wordt nagestreefd en bepaling van het criterium (de criteria), waarmee nagegaan zal worden of en zo ja in hoeverre dit doel bereikt is; voorbeelden van deze criteria zijn: de kosten aan grondstoffen per ton product, verloop onder de werknemers per maand, winst in een bepaalde periode.

b) Onderzoek naar de factoren die het criterium vermoedelijk beïnvloeden, de factoren die hiervan beheersbaar zijn, in hoeverre zij dit zijn en in hoeverre zij veranderd kunnen worden; vaststellen van de gewenste nauwkeurigheid van de uitkomsten.

c) Opstellen van een wiskundig model; hieronder vallen het bepalen van de relaties tussen het criterium en de beïnvloedende factoren en tussen deze factoren onderling en het vaststellen welke waarden de variabelen die de factoren voorstellen, aan kunnen nemen.

d) Binnen het wiskundige model de waarden van de beheersbare variabelen bepalen, die de waarde van het criterium zo gunstig mogelijk maken; in de meeste gevallen komt dit neer op het maximaliseren of minimaliseren van een functie, waarbij ervoor gezorgd moet worden, dat de te kiezen variabelen aan de in het model gestelde voorwaarden blijven voldoen.

Dit punt bestaat nog uit twee verschillende onderdelen, te weten:

d_1) het zoeken naar een wiskundige methode, waarmee de oplossing in principe gevonden kan worden; vaak kan een dergelijke methode alleen afgeleid worden nadat het model vereenvoudigd is, dat wil zeggen dat het onder c) opgestelde model door een ander, wiskundig gezien eenvoudiger vervangen wordt;

d_2) het numeriek berekenen van de oplossing met de onder d_1) gevonden methode en de voor het concrete geval beschikbare gegevens.

e) Interpretatie van de gevonden oplossing in de terminologie van het oorspronkelijke probleem.

f) Onderzoek naar de bruikbaarheid van de gevonden conclusies, bijvoorbeeld door een onderzoek naar de consequenties in een aantal praktijkgevallen.

g) Introductie van de gevonden oplossing, respectievelijk het afwegen van de gevonden oplossing tegen de niet in het onderzoek betrokken factoren (zoals imponderabilia en factoren waarover geen gegevens beschikbaar zijn).

Hoewel de hier vermelde fasen in een bepaalde volgorde zijn genoemd, willen wij er op wijzen, dat in de praktijk deze volgorde helemaal niet zo nauwkeurig vastligt, terwijl sommige fasen meer dan één keer in een onderzoek kunnen voorkomen, bijvoorbeeld omdat de in een bepaalde fase genomen beslissing in een latere onhoudbaar kan blijken.

Wij zullen de bovengenoemde punten verduidelijken aan de hand van twee nieuwe voorbeelden.

Voorbeeld III.

Een fabriek maakt een mengsel (bijv. veevoeder), dat aan bepaalde eisen voldoet wat de samenstelling betreft. De grondstoffen voor het product worden op de wereldmarkt ingekocht. Wanneer er verschillende mengsels van de grondstoffen zijn, die alle aan de gestelde eisen voldoen, dan kan men zich afvragen welk mengsel men moet kiezen, opdat de kosten aan grondstoffen per ton product minimaal zijn.

In dit voorbeeld kan het doel zelf als criterium gekozen worden, dus de kosten K aan grondstoffen per ton (punt a). Deze kosten worden bepaald door de percentages van de grondstoffen in het mengsel en door de kosten per ton van de gebruikte grondstoffen (punt b).

Wanneer men aanneemt dat de bijdragen in de totale kosten evenredig zijn met de gebruikte hoeveelheden, dat er gekozen kan worden uit n grondstoffen, dat de kosten per ton van de i^{de} grondstof c_i zijn en dat er van deze grondstof per ton product x_i ton gebruikt wordt, dan is

$$K = c_1x_1 + \ldots\ldots + c_nx_n \quad . \tag{3.1}$$

Dit is dus de relatie tussen het criterium K en de beïnvloedende factoren c_i en x_i. Verder moet het mengsel aan verschillende eisen voldoen, bij een veevoeder bijvoorbeeld hoogstens b% onverteerbaar eiwit bevatten. Is het percentage onverteerbaar eiwit in de i^{de} grondstof a_i, dan moet dus gelden

$$a_1x_1 + \ldots\ldots + a_nx_n \leq b \quad . \tag{3.2}$$

Ook voor de andere eigenschappen kan men dergelijke relaties opstellen, terwijl ook voldaan moet zijn aan

$$x_1 + \ldots\ldots + x_n = 1 \tag{3.3}$$

en aan $\quad x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,\ldots,n).$

De algemene vorm van het hier ingevoerde wiskundige model is: men heeft een functie K, waarin de variabelen $x_1,\ldots,x_n$ in hoogstens de eerste graad voorkomen en kan deze variabelen willekeurig kiezen, mits voldaan wordt aan een aantal voorwaarden, waarin deze variabelen eveneens alle in hoogstens de eerste graad voorkomen. De variabelen zijn zoals men zegt continu, dat wil zeggen dat ze alle waarden in een bepaald interval kunnen aannemen (punt c).

Het criterium K is zo gunstig mogelijk, wanneer het minimaal is en wij moeten dus de waarden van $x_1,\ldots,x_n$ zodanig bepalen dat de bijbehorende waarde van K gelijk is aan het onder de gestelde voorwaarden bereikbare minimum. Modellen zoals dit, waarin alle variabelen in het criterium en in de bijvoorwaarden hoogstens in de eerste graad voorkomen, noemt men lineaire programmeringsproblemen. Voor deze problemen bestaat een algemeen toepasbare oplossingsmethode, de simplexmethode, om de gezochte waarden van $x_1,\ldots,x_n$ te vinden. Zeer kleine problemen kan men hiermee met potlood en papier of op tafelrekenmachines uitrekenen; bij grotere moeten ponskaartmachines en/of electronische machines ingeschakeld worden, terwijl zeer omvangrijke problemen nog vrijwel onoverkomelijke moeilijkheden bieden (punt d).

De interpretatie en het onderzoek naar de bruikbaarheid van de gevonden oplossing leveren bij dit soort problemen meestal weinig moeilijkheden. Mocht de oplossing onbruikbaar blijken, dan kan dit veroorzaakt worden doordat men bij het opstellen van het model verzuimd heeft een bepaalde eis als nevenvoorwaarde op te nemen, bijvoorbeeld een eis betreffende het percentage vet of een eis over het minimumpercentage, dat van een grondstof opgenomen moet worden, als deze in het mengsel verwerkt wordt (eisen van het laatste type maken het probleem wiskundig veel ingewikkelder) (punt f). Problemen die zich bij de introductie van de gevonden oplossing kunnen voordoen, zullen wij hier buiten beschouwing laten.

Voorbeeld IV.

In het kader van haar werkzaamheden verzocht de Deltacommissie in 195 het Mathematisch Centrum een statistisch en economisch verantwoorde basis te verstrekken voor de bepaling der verhoging, welke de dijken langs de Westerschelde en de Nieuwe Waterweg moesten ondergaan. Later werd dit verzoek aangevuld met de vraag naar een methode om de gewenste verhoging te berekenen.

Ook in dit geval is een te nemen beslissing de aanleiding tot het onderzoek, namelijk de beslissing hoeveel meter de betreffende dijken verhoogd dienen te worden. Het doel van de verhoging is de zo goed mogelijke beveiliging van het land tegen overstromingsrampen.

Bij een kleine verhoging van de dijken zijn de investeringskosten laag, maar de kans op overstroming en dus het optreden van schaden is verhoudingsgewijs groot. Bij een grote verhoging van de dijken zijn de investeringskosten hoog, maar de kans op een overstroming is verhoudingsgewijs laag. Als criterium voor een zo goed mogelijke beveiliging werd gekozen de som S van de investeringskosten in de dijken I en de contante waarde R van de verwachtingen van de toekomstige schaden; die verhoging werd de gunstigste, de optimale genoemd, waarbij deze som minimaal was. Hiermee is voor het criterium een bepaalde keuze gedaan, waarbij men zich moet realiseren dat deze keuze de grootte van de optimale waarde kan beïnvloeden (punt a).

Onder de factoren die op het criterium van invloed zijn, bevinden zich onder andere: de initiële kosten I_0 bij dijkverhoging, de kosten I_1 van dijkverhoging per meter, het aantal meters x waarmee men de dijken verhoogt, de huidige in het gebied te beschermen waarde V, de procentuele vermeerdering γ van deze waarde per jaar, de rentevoet δ, de frequenties f(h) van hoge waterstanden h en de relatieve bodembepaling η. In het onderhavige onderzoek werd alleen X beheersbaar geacht en wel werd ondersteld dat X iedere niet negatieve waarde kon aannemen (punt b).

Het wiskundige model dat voor deze situatie werd opgesteld, zullen wij hier niet behandelen. Aangezien het uit gebrek aan voldoende betrouwbare gegevens nog het beste leek voor bijvoorbeeld δ, γ en η constante gemiddelde waarden te kiezen, bleef het model wiskundig gezien vrij eenvoudig en was ook de formule voor de optimale dijkverhoging zonder al te veel moeite af te leiden. Het gebrek aan voldoende betrouwbare gegevens was oorzaak van grote moeilijkheden bij de numerieke bepaling van de optimale X. Bovendien bleek deze waarde zeer gevoelig voor verschillen in de bodemdaling η per jaar. Derhalve werd de situatie opnieuw onderzocht en daarbij bleek dat men aansluitende bij de huidige praktijk van waterstaat ook een model kon opstellen, waarin de bodemdaling de optimale waarde van X vrijwel niet beïnvloedde (punten c en d).

Door het genoemde gebrek aan goede gegevens en het moeilijk weegbaar zijn van verschillende factoren zoals verliezen aan mensenlevens en culturele waarden, kan het via het wiskundige model gevonden antwoord niet gezien worden als de definitieve oplossing. Wel kan dit antwoord dienen als basis waarop de beslissingen genomen worden, omdat het een systematische behandeling van de verschillende projecten van dijkverhoging waarborgt, waarbij de verschillende economische en andere factoren steeds op dezelfde wijze in rekening gebracht worden (punt g). Verder leerde het onderzoek onder meer welke factoren de optimale verhoging sterk beïnvloeden en welke dit niet doen en welke factoren voor dit probleem naar verhouding het slechtst bekend zijn en dus bij voorkeur nader onderzocht moeten worden. Ook verkreeg men inzicht in de wijze waarop mensenlevens, culturele goederen e.d. in rekening gebracht kunnen worden en hoe nationaal economische projecten bestudeerd kunnen worden met behulp van wiskundig-economische methoden.

4. <u>Het kader waarin de beslissingsvoorbereiding plaatsvindt</u>.

Uit de in paragraaf 3 genoemde fasen en de daar behandelde voorbeelden volgt dat steeds gewerkt wordt met behulp van een bepaald wiskundig model. Dit houdt verschillende onderstellingen en beperkingen in, waarvan wij de volgende noemen.

1. Er wordt bij punt a) ondersteld dat het gekozen criterium aan de eis voldoet dat men ermee kan nagaan wanneer het nagestreefde doel bereikt is. Wanneer men meent dat twee verschillende criteria hiervoor geschikte maatstaven zijn, dan dient men na te gaan of deze criteria bij de vergelijking van alternatieven deze steeds op dezelfde wijze rangschikken. Mocht dit laatste niet het geval blijken te zijn, dan dient men eerst een onderzoek in te stellen naar de te volgen werkwijze, Deze kan bijvoorbeeld zijn dat men de consequenties van beide maatstaven onderzoekt, maar ook dat men aan één van de criteria de voorkeur geeft.
2. In punt b) beperkt men zich in de factoren, waarvan onderzocht wordt, of en zo ja, in hoeverre ze invloed hebben op het gekozen criterium.
3. Hetzelfde kan bij punt c) met betrekking tot de keuze van het wiskundige model het geval zijn. Zo kan men aannemen dat een relatie van de eerste graad is, dus van de vorm $y = ax + b$ en dat men daarna uit de zo toegestane relaties degene kiest die het verband het beste weergeeft. Ook moet men zich soms vóór het onderzoek uitspreken over de waarden die een variabele aan kan nemen. Stelt n bijvoorbeeld het aantal auto's voor dat men nodig heeft, dan zal men in een probleem, waarin het om een klein aantal auto's gaat, moeten eisen, dat n alleen gehele waarden aanneemt, terwijl men in een probleem waarin het om grote aantallen auto's gaat vaak alle waarden van n toe kan laten, omdat de onnauwkeurigheden ten gevolge van latere afrondingen verwaarloosbaar zijn.

Het is duidelijk dat de gevonden optimale waarden van de beheersbare factoren wel optimaal zijn binnen het gekozen model, maar dat zij dit bij een ander model niet behoeven te zijn en de conclusie is dus <u>dat een gevonden oplossing in het algemeen</u>

alleen de gunstigste is binnen het kader waarin men heeft gewerkt. Zo is in voorbeeld II plaats L inderdaad de beste plaats van vestiging, wanneer men er van uitgaat dat alleen tussen K, L en M gekozen kan worden en dat de vervoerskosten naar E en F het criterium vormen, waarnaar men moet optimaliseren.

Het hier gestelde geldt weliswaar voor alle methoden van beslissingsvoorbereiding, maar het komt meer expliciet tot uiting, wanneer men bij de voorbereiding wiskundige methoden gebruikt. Verder moet er op gewezen worden, dat men zich bij vrijwel iedere beslissing beperkingen oplegt en dat een onderzoek, waarbij alles variabel gesteld mag worden meestal onmogelijk is.

5. Wanneer kunnen wiskundige methoden tot een bruikbaar antwoord leiden?

Zoals reeds in par. 1 werd opgemerkt impliceert de vraag om advies de behoefte aan kennis omtrent de consequenties van verschillende alternatieven, waaruit gekozen kan worden. Preciezer gezegd: de behoefte aan voldoende kennis om op grond van het gestelde doel te kunnen beslissen welk alternatief het beste is.

Wiskundige methoden kunnen bij de beslissingsvoorbereiding dus in ieder geval bruikbaar genoemd worden, wanneer ze dergelijke kennis kunnen verschaffen. Maar ook in situaties, waarin ze dit doel niet bereiken, kan men er vaak profijt van hebben, namelijk wanneer andere wegen om tot voldoend nauwkeurige en voldoend betrouwbare kennis te komen niet bekend zijn. Men kan dan trachten althans zoveel mogelijk kennis te vergaren, terwijl het wiskundig onderzoek het inzicht in de situatie aanzienlijk kan verdiepen.

Wij beperken ons in deze paragraaf tot gevallen, waarin het doel van het wiskundig onderzoek is een basis te geven voor de te verrichten keuze en zullen aan de hand van de in par. 3 opgesomde fasen nagaan aan welke eisen voldaan moet zijn opdat dit mogelijk is. Deze eisen zijn niet voldoende om het inroepen van wiskundige hulp zinvol te maken, zoals wij in par. 6 zullen zien.

1) In de eerste plaats volgt uit de fasen a) en b) dat het probleem <u>schematiseerbaar</u> moet zijn, dat wil zeggen dat het mogelijk moet zijn (bijvoorbeeld tijdens het overleg tussen de opdrachtgever en de al dan niet wiskundig onderlegde adviseur) het probleem in hoofdlijnen te schetsen en dat men enig inzicht moet hebben in wat hoofdzaken zijn en wat details. Er moeten één of meer, bij voorkeur objectieve maatstaven zijn om uit te maken wat goed is en wat niet en om bij vergelijkingen tussen alternatieven aan te geven welke men prefereert. Wat de relevante factoren betreft, betekent schematiseerbaar zijn, dat een lijst verstrekt moet kunnen worden, die de factoren met de grootste invloed op het criterium bevat en waarop geen groot aantal weinig of niet belangrijke factoren voorkomen. Mocht aan de laatste eis niet voldaan zijn, dan zal men vaak in principe wel in staat zijn de invloed van al deze factoren na

te gaan, maar praktisch gezien kan het probleem onoverkomelijk omvangrijk worden. Anderzijds behoeft de lijst in bepaalde gevallen ook weer niet volledig te zijn omdat juist het onderzoek vaak aanwijzingen kan verschaffen omtrent de belangrijke relevante factoren en het al of niet volledig zijn van de lijst.

2) Voor de fase c), het opstellen van het wiskundig model, is het in het algemeen noodzakelijk, dat het criterium en een belangrijk deel van de relevante factoren kwantificeerbaar zijn. Bovendien moet men voldoende numerieke gegevens over deze factoren bezitten of binnen de voor het onderzoek beschikbare tijd kunnen verzamelen. Het is zeker niet noodzakelijk dat men alle factoren kan kwantificeren. Vooral bij een keuze tussen slechts eindig veel alternatieven, kan vaak beslist worden, welke de voorkeur verdient, ook al is niet nauwkeurig bekend hoeveel beter het ene alternatief is dan het andere. Zo heeft men zich bij het Deltaplan afgevraagd of het als sluitpost in de economische balans van dit plan opgenomen bedrag een verantwoorde uitgave was voor de bescherming van mensenlevens, culturele waarden en andere imponderabilia. Op analoge wijze kan bij voorraadproblemen soms nagegaan worden of men de bij een bepaalde politiek vereiste offers om "neenverkoop" te reduceren respectievelijk te vermijden, inderdaad er voor over heeft. Ook een indeling in de vorm van moeilijk-gemakkelijk, beter-minder goed, enzovoorts is soms voldoende om een probleem oplosbaar te maken.

3) Tenslotte volgt hier nog een voorwaarde, die een enigszins ander karakter heeft dan de onder 1) en 2) genoemde eisen. In de inleiding van deze paragraaf is reeds gezegd dat het doel van het advies vaak is voldoende gegevens te verstrekken om een keuze mogelijk te maken. Wanneer men hierbij wiskundige methoden toepast, dan zal men trachten een zo goed mogelijk bij de werkelijkheid aansluitend model op te stellen. Uit fase d) volgt nu dat alleen dan een bruikbaar antwoord te verwachten is, als het door het model geformuleerde probleem zowel wiskundig als numeriek oplosbaar is.

Of het bij een probleem aangepaste model wiskundig hanteerbaar is, kan in het algemeen slechts beoordeeld worden op grond van literatuurkennis en/of ervaring, opgedaan bij het oplossen van wiskundige modellen. Wel kan men zeggen dat zogenaamde lineaire modellen, waarin dus alle variabelen slechts in de eerste graad voorkomen beter hanteerbaar zijn dan niet lineaire modellen.

Wanneer een model wiskundig niet hanteerbaar is, dan kunnen er nog twee wegen openstaan om de gevraagde kennis te verstrekken. In de eerste plaats kan men trachten het opgestelde model door een hanteerbaarder model te vervangen. Dit nieuwe model kan extra onderstellingen bevatten, waardoor het een ruwer beeld kan geven van de situatie, zodat men zich steeds moet afvragen of van het vereenvoudigde model wel een voldoend nauwkeurige voorspelling verwacht kan worden. In de tweede plaats staan de wiskundige zogenaamde Monte-Carlo-methoden ter beschikking, waarmee het bestudeerde probleem binnen het wiskundige model nagespeeld kan worden. Deze methoden zijn in zoverre vergelijkbaar met de in par. 2 genoemde analoge modellen, dat bij beide methoden experimenten worden verricht: in de analoge modellen binnen het opgestelde fysische model en bij de Monte-Carlo-methoden binnen het opgestelde wiskundige model. Het gebruik van Monte-Carlo-methoden is van vrij recente datum, maar toch zijn er al frappante resultaten mee behaald, vooral bij ingewikkelde problemen.

Verder willen wij er op wijzen dat problemen die nu nog onoverkomelijke moeilijkheden bieden, dat over enige tijd niet meer behoeven te doen; de ontwikkeling van lineaire programmering en Monte-Carlo-methoden geeft hiervan duidelijke voorbeelden.

Tot zover de wiskundige oplossing van het probleem. In par. 3 maakten wij reeds onderscheid tussen wiskundig en numeriek oplosbaar zijn. Het eerste impliceert niet noodzakelijk het tweede, omdat het probleem zo omvangrijk kan zijn dat het antwoord zelfs met behulp van electronische machines niet gevonden kan worden.

Voor de numerieke oplosbaarheid moet dus behalve het in punt 2) gestelde nog geëist worden, dat men het antwoord kan berekenen wanneer alle vereiste gegevens bekend zijn. Bij de overgrote meerderheid van de problemen is dit inderdaad het geval.

6. Wanneer dient men het inroepen van wiskundige hulp te overwegen?

In het grootste deel van deze paragraaf beperken wij ons wederom tot situaties waarin een keuze gedaan moet worden, dus geval a_1) van paragraaf 1. Deze situaties kenmerken zich doordat er alternatieven zijn waaruit gekozen moet worden, er een doel bestaat dat door het ene alternatief in hogere mate bereikt wordt dan door het andere en doordat er voorwaarden zijn, die de vrijheid van keuze (kunnen) beperken.

Bij het doen van een keuze resp. het nemen van een beslissing, zal men overwegen wiskundige methoden te gebruiken, wanneer:

1) ervaring en andere methoden geen antwoord kunnen geven op de vraag welk alternatief de voorkeur verdient,
2) ervaring en andere methoden geen voldoend betrouwbare antwoorden geven,
3) van wiskundige methoden verwacht mag worden, dat ze goedkoper en/of sneller tot een antwoord leiden.

In het bijzonder de onder 2) genoemde situatie verdient de aandacht, omdat men vaak ten onrechte denkt over een voldoend betrouwbare basis te beschikken om de beslissing te nemen. Zo blijkt herhaaldelijk, dat zelfs jarenlange ervaring geen garantie is voor een voldoende basis; men denke onder andere aan mengproblemen (vgl. voorbeeld III), waarbij in veel gevallen vooral wanneer er keuze is uit een groot aantal grondstoffen, zelfs na herhaaldelijk proberen geen optimale oplossing gevonden wordt. Bovendien zijn veel "op inzicht" gebaseerde of "vanzelfsprekende" oplossingen lang niet zo gunstig, als men zich wel voorstelt; men denke hierbij onder andere aan standaardregels op het gebied van voorraadbeheer en vestigingsplaatsen.

In principe kan voor ieder keuzeprobleem een oplosbaar wiskundig model geformuleerd worden. Of het in de onder 1) en 2) genoemde situaties zinvol is dit te doen, hangt af van het al dan niet mogelijk zijn een oplosbaar model te construeren, dat zodanig bij de werkelijkheid aansluit, dat voldoende kennis verkregen wordt om aan de hand van het vastgestelde criterium een keuze mogelijk te maken. De hiervoor nodige eisen werden in par. 5 opgesomd.

In situaties waarin wiskundige methoden bruikbare antwoorden kunnen geven zal de beantwoording van de vraag of men ze ook zal gebruiken enerzijds beïnvloed worden door het al of niet bestaan van andere oplossingsmethoden en anderzijds door de tijd en kosten aan het wiskundig onderzoek verbonden. Deze laatsten zijn op hun beurt in hoge mate afhankelijk van het al of niet bekend zijn van standaardmethoden om het bij het probleem aangepaste model op te lossen.

De problemen waar het gebruik van wiskundige methoden overwogen moet worden, vallen grof geschetst in twee groepen uiteen:

a) omvangrijke, weinig overzichtelijke problemen, waarin een groot aantal factoren een rol speelt,
b) problemen, waarin het van belang is het werkelijke optimum te vinden, omdat men zich een andere oplossing moeilijk kan veroorloven.

Niet wiskundige aanwijzingen voor de bruikbaarheid van wiskundige methoden zijn dan de punten 1) en 2) van paragraaf 5, doch of het in een concreet geval inderdaad aan te bevelen is deze methoden te gebruiken kan slechts in overleg met wiskundigen beslist worden, onder andere in verband met de te verwachten kosten en tijdsduur.

Behalve het verkrijgen van meer gefundeerde kennis dan vaak met andere methoden mogelijk is en eventuele besparingen in tijd en/of kosten, kan het gebruik van wiskundige methoden aanzienlijke <u>bijkomende voordelen</u> opleveren, waarvan wij de volgende noemen:

1) men wordt gedwongen het probleem, de alternatieven en de te gebruiken criteria zorgvuldiger te formuleren dan bij andere methoden noodzakelijk is; een eventueel niet gelijkwaardig zijn van bepaalde maatstaven om na te gaan in hoeverre het doel bereikt wordt, komt expliciet tot uiting bij het gebruik van wiskundige methoden;
2) men verwerft inzicht in de voor het probleem relevante factoren, de wijze waarop en de mate waarin zij het criterium beïnvloeden en men krijgt een overzicht van de factoren, waarover reeds voldoende kwantitatieve gegevens beschikbaar zijn en van die factoren, waarvoor dit nog niet het geval is;

3) men verkrijgt methoden om moeilijk weegbare factoren te elimineren, respectievelijk kwantitatief te schatten;
4) men krijgt de beschikking over middelen om groepen problemen op meer uniforme en objectievere wijze te behandelen dan anders het geval zou zijn, bijvoorbeeld doordat het emotionele element in grotere mate geëlimineerd kan worden.

Er zijn tal van situaties, waarin alleen de bijkomende voordelen zoals de bovengenoemde een studie met wiskundige methoden ruimschoots rechtvaardigen; men denke bijvoorbeeld aan het in voorbeeld IV besproken economisch-statistisch onderzoek in verband met de bescherming van ons land tegen hoge waterstanden.

Conclusie.

Ons beperkend tot keuzeproblemen, kunnen wij samenvattend zeggen dat het aanbeveling verdient advies van een wiskundige in te roepen bij redelijk schematiseerbare en grotendeels kwantificeerbare problemen, die hetzij omvangrijk en onoverzichtelijk zijn, hetzij een werkelijk optimale oplossing vereisen.