STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 373 (VP 28)

Niet-additiviteit in een tweeweg-klassifikatie met één waarneming per cel

Naar een afstudeeropdracht van
Prof.Ir. J.W. Sieben te Delft

door

T. de Vries

oktober 1966

Inhoud

Inleiding

Een in de statistiek veel besproken proefopzet is de volgende: twee variabelen, A' en B' te noemen, worden op verschillende niveau's gebracht (a'_1, ..., a'_i, ..., a'_m en b'_1, ..., b'_j, ..., b'_n) en bij iedere combinatie van niveau's a'_i en b'_j wordt één waarneming aan het te onderzoeken verschijnsel gedaan.
a'_1, ..., a'_m kunnen bijvoorbeeld verschillende aardappelrassen zijn, b'_1, ..., b'_n verschillende bemestingen. Het te onderzoeken verschijnsel is de opbrengst van een veldje van bepaalde afmetingen.
De resultaten van een dergelijk experiment plegen geanalyseerd te worden met de zg. variantie-analyse. Indien inderdaad slechts één waarneming per combinatie $a'_i b'_j$ gedaan wordt, is toetsing met behulp van deze variantie-analyse slechts zinvol indien geen interactie tussen de variabelen (meestal factoren) bestaat, d.w.z. indien de invloed op de uitkomsten van een factor A' niet afhangt van het constante niveau dat factor B' daarbij heeft. (Een dergelijke situatie noemen we ook wel additief.) Indien aan genoemde voorwaarde voldaan wordt, berust de toepassing van de variantie-analyse op een aan de waarnemingen ten grondslag liggend additief model dat als volgt geformuleerd kan worden:

I. $E(\underline{y}_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$,

waarin $E(\underline{y}_{ij})$ de verwachte waarde is van het te onderzoeken verschijnsel bij de niveau-combinatie a'_i, b'_j en μ, α_i en β_j parameters zijn.
Meestal wordt dan bovendien nog aangenomen dat de waarnemingen $\underline{y}_{ij}$ beschouwd mogen worden als de realisaties van onderling onafhankelijke (afkorting: o.o.) stochastische variabelen, die alle dezelfde variantie σ^2 hebben.
Indien wel interacties tussen de beide factoren A' en B' bestaan, kan het additieve model (I) niet gebruikt worden. Het moet dan vervangen worden door het model:

II. $E(\underline{y}_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$.

Het schatten van de parameters μ, α_i, β_j en γ_{ij} is niet zonder meer mogelijk omdat er meer parameters dan waarnemingen zijn. Zoals uit §2 zal blijken, kunnen we - zonder aan de algemeenheid van het model (II) afbreuk te doen - lineaire restricties aan die parameters stellen: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 0$, $\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0$. Ook dan blijft het schatten een weinig zinvolle zaak omdat er dan evenveel waarnemingen als parameters zijn, zodat de parameter σ^2 niet meer geschat kan worden en via statistische toetsen geformuleerde conclusies dus achterwege moeten blijven.

Om dit bezwaar te ondervangen zijn methoden voorgesteld door het kiezen van een "model" voor γ_{ij}. Het doel van zo'n model is om het aantal te schatten parameters te verminderen. Tukey gaf in 1948 als model voor γ_{ij}:

$\gamma_{ij} = \Lambda \alpha_i \beta_j$. De onbekende parameter γ_{ij} wordt dus teruggebracht tot één parameter Λ.

De motivatie van Tukey voor deze keuze was nogal vaag. Scheffé (1955) geeft in zijn boek "The analysis of Variance" een duidelijke motivatie voor deze keuze. Uitgaande van het model $\gamma_{ij} = \Lambda \alpha_i \beta_j$ werd vervolgens een toets geconstrueerd welke interactie in dat model moet aantonen.

Mandel (1961) kiest een iets algemener model voor γ_{ij}: $\gamma_{ij} = \tau_i \beta_j$.

De τ_i's zijn constanten. Ook voor dit model wordt een toets voor interactie ontworpen. Het model van Mandel heeft het nadeel van asymmetrie (alleen β_j komt voor). In §3 wordt daarom een nieuw model voorgesteld dat algemener is dan die van Tukey en Mandel:

$\gamma_{ij} = \alpha_i r_j + s_i \beta_j$; r_i en s_i zijn constanten.

In §8 wordt, gegeven dit model, een toets voor interactie ervoor ontworpen.

Tukey (1948) suggereerde nog een aantal andere manieren om tot toetsen voor interactie te geraken, nl. door transformatie van de output (de opbrengst), zeg $f(\underline{y}_{ij}) = g_{ij}$, zodanig dat g_{ij} wèl additief was. Deze suggestie is in 1964 door Box en Cox gebruikt en uitgewerkt d.m.v. computers.

In §1 zullen we enige algemene stellingen betreffende lineaire ruimten afleiden. De afgeleide stellingen hebben alle direct betrekking op de later te behandelen theorie. In §2 wordt aangetoond dat het model (II) niets aan algemeenheid verliest indien we de hierboven genoemde lineaire restricties opleggen. Bovendien wordt de interactie gekoppeld aan een "interactie-ruimte" die volgens §1 bijzondere eigenschappen heeft.
Het model II wordt steeds in vector notatie geschreven, waarbij $E(\underline{y}_{ij})$ de ij^e component is van een vector met $m \cdot n$ componenten.
In §2 wordt zo'n vector ontbonden in ruimten die in §1 gedefiniëerd werden. §3 geeft een opsomming van de hierboven genoemde modellen.
Voor deze modellen vinden we in §6, §7 en §8 de toetsen voor interactie.
In §9 vinden we methodes die een keuze maken tussen de hierboven genoemde modellen. Het komt ook voor dat het geponeerde model niet voldoet.
In §10 wordt dit bekeken. §11 tenslotte, geeft kleinste kwadratenschatters voor de genoemde parameters.

§1. Definities en stellingen over lineaire ruimten in het raam van de theorie

Hierna worden vectoren gedefiniëerd die in een soort matrix notatie opgeschreven zijn. De elementen van zo'n vector moet men dan rij's gewijze aflezen. De i^e rij van zo'n "matrix" bevat dus het $i1^e$, $i2^e$, ... element van een aldus gedefiniëerde vector.

Definiëer de vectoren:

$$\ell = \begin{pmatrix} 111 & \ldots\ldots & 1 \\ 111 & \ldots\ldots & 1 \\ \cdots & & \cdot \\ \cdots & & \cdot \\ \cdots & & \cdot \\ 111 & \ldots\ldots & 1 \\ 111 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Er zijn hier m rijen en n kolommen. Deze vector heeft dus $m \times n \stackrel{\text{stel}}{=} N$ elementen. Tenzij anders vermeld, hebben alle aldus genoteerde vectoren $m \times n = N$ elementen.

$$a_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 000 & \ldots\ldots & 0 \\ 000 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdots & & \cdot \\ \cdots & & \cdot \\ 000 & \ldots\ldots & 0 \\ 111 & \ldots\ldots & 1 \\ 000 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdots & & \cdot \\ \cdots & & \cdot \\ 000 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$$

De i^e rij bestaat uit enen, alle andere elementen zijn nul.
$i = 1, \ldots, m$.

$$b_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 00 & \ldots & 010 & \ldots & 0 \\ 00 & \ldots & 010 & \ldots & 0 \\ 00 & \ldots & 010 & \ldots & 0 \\ \cdot\cdot & & \cdots & & \\ \cdot\cdot & & \cdots & & \\ \cdot\cdot & & \cdots & & \\ 00 & \ldots & 010 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De j^e rij bestaat uit enen, alle andere elementen zijn nul.
$j = 1, \ldots, n$.

Tenzij anders vermeld geldt steeds $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Definitie. V_N is een ruimte gevormd door alle vectoren met N elementen. V_N is dus een lineaire ruimte. V_N is N dimensionaal (er zijn maximaal N orthogonale vectoren te construeren.

Definitie. $A \subset V_N$ is een ruimte gevormd door alle lineaire kombinaties van $\{a_i\}$.
A is dus een lineaire, m dimensionale ruimte (aangezien er maximaal m orthogonale vectoren $\{a_i\}$ zijn is A m dimensionaal).

Definitie. $B \subset V_N$ is een ruimte gevormd door alle lineaire kombinaties van $\{b_j\}$.
B is dus evenzo een lineaire n dimensionale ruimte.

Definitie. Als $P \subset V_N$ en $Q \subset V_N$, dan is er een ruimte P + Q gedefiniëerd die gevormd wordt door alle elementen van P en van Q en door alle lineaire kombinaties van de elementen van P en Q.
Als P en Q lineair zijn dan is P + Q dus ook lineair.
Beschouw $A \cap B$: rijen gelijk $\cap$ kolommen gelijk ==> alle elementen gelijk.

Definitie. L is een lineaire ruimte opgespannen door 1.
L is dus één dimensionaal.

$\sum_i a_i = \sum_j b_j \Rightarrow \quad L \subset A,\ L \subset B.$

Uit bovenstaande volgt: $A \cap B \equiv L$.
De dimensie van A + B is m+n-1, vanwege $A \cap B \equiv L$.

Definitie. c zij een vector met komponenten $\{c_i\}$, $\sum_i c_i = 0$.

Definitie. De ruimte C bestaat uit elementen c. Uit $\sum_i c_i = 0$ blijkt dat $C \perp \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, $m \times 1$, $C \subset V_m$ (m dimensionale ruimte, bestaat uit vectoren met m elementen), $C \perp \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, dus C is (m-1) dimensionaal.

C is lineair: $\sum_i (\alpha c_i + \beta c_i') = \alpha \sum_i c_i + \beta \sum_i c_i' = 0.$

<u>Definitie</u>. d zij een vector met komponenten $\{d_j\}$, $\sum_j d_j = 0$.

<u>Definitie</u>. De ruimte D bestaat uit elementen d. Evenzo blijkt dat D een n-1 dimensionale lineaire ruimte is.

<u>Definitie</u>. $c * d$ is een tensorprodukt. Deze is gedefiniëerd door de vector:

$$c * d = \begin{pmatrix} c_1d_1 & \cdots\cdots & c_1d_n \\ c_2d_1 & \cdots\cdots & c_2d_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_md_1 & \cdots\cdots & c_md_n \end{pmatrix} \implies c * d \in V_N.$$

<u>Definitie</u>. De ruimte $c * D$ bestaat uit de tensorprodukten $c * d$, waarin c een bepaalde, vaste vector uit C en waarin d de gehele ruimte D doorloopt.

$c * D \subset V_N$ omdat $c * d \in V_N$.

<u>Definitie</u>. De ruimte $C * d$ wordt analoog gedefiniëerd.

$c * D$ is een lineaire ruimte want:

zij $s = \tau(c * d) + \rho(c * d') = c * d''$

(met: $s \in V_N$, τ en ρ konstanten. Voor d en d' geldt $\sum_j d_j = \sum_j d'_j = 0$. Dan geldt ook: $\sum_j d''_j = \sum_j(\tau d_j + \rho d_j) =$

$= \tau \sum_j d_j + \rho \sum_j d'_j = 0$. Dus $c * d'' \in c * D$).

<u>Stelling 1.3.1</u>. $c * d \perp c' * d'$ als $c \perp c' \cup d \perp d'$.

Bewijs: $(c * d)'(c' * d') = \sum_{ij} c_i d_j c'_i d'_j = \sum_i c_i c'_i \sum_j d_j d'_j = 0$

als $\sum_i c_i c'_i = 0$ als $c \perp c'$

$\sum_j d_j d'_j = 0$ als $d \perp d'$.

Omdat D een n-1 dimensionale lineaire ruimte is kunnen we in D ten hoogste n-1 orthogonale vectoren vinden. Noem deze $d^1, d^2, \ldots, d^{n-1}$. Dan zijn $c * d^1, c * d^2, \ldots, c * d^{n-1}$ ook alle onderling loodrecht.

Zijn dit tevens het maximale aantal onderling loodrechte vectoren in $c * D$?

Stelling 1.4.1. $c * d' \perp c * d''$ dan en slechts dan als $d' \perp d''$ ($\exists\, c_i, d_j \neq 0$).

Bewijs: $(c * d')(c * d'') = \sum_{ij} c_i d_j' c_i d_j'' = \sum_{ij} c_i^2 \sum_j d_j' d_j'' = 0$

dan en slechts dan als $d' \perp d''$, want $\sum_i c_i^2 \neq 0$.

Dus: we kunnen $c * D$ opspannen voor maximaal n-1 onderling loodrechte vectoren, $c * D$ is dus n-1 dimensionaal.

Evenzo is $C * d$ m-1 dimensionaal.

Definitie. Onder de tensorproduktruimte $C * D$ verstaan we de verzameling van alle lineaire kombinaties van alle elementen uit de vectorruimte $\{c^{(k)} * D\} \subset V_N$. $c^{(k)} \perp c^{(k')}$, $k \neq k'$, $k=1,\ldots,m-1$.

(D.w.z. $a \in C * D \Longrightarrow a = \sum_k \alpha_k c^{(k)} * d^{(k)}$, waarin $d^{(k)}$ steeds een willekeurig element van D is. $\{\alpha_k\}$ zijn konstanten).

Dus: $c * d \in C * D$.

Opmerking. $C * D$ bevat niet uitsluitend vectoren van het type $c * d$. $\gamma(c^i * d^j) + \delta(c^{i'} * d^{j'})$ heeft niet de opbouw van $c * d$ ($i \neq i'$, $j \neq j'$).

Er zijn nu (m-1) lineaire (n-1) dimensionale ruimten $\{c^k D\}$ te vinden die onderling loodrecht zijn.

We kunnen dus maximaal (m-1)(n-1) onderling loodrechte vectoren in $C * D$ vinden $\Longrightarrow$ $C * D$ is (m-1)(n-1) dimensionaal (zie stelling (1.3.1)).

Definitie. Onder de residu-ruimte $G \subset V_N$ verstaat men een ruimte met als elementen de vectoren g.

g heeft als elementen $\{g_{ij}\}$ met

$g_{ij} = h_{ij} - h_{i.} - h_{.j} + h_{..}$, met $h_{i.} = \frac{1}{n} \sum_j h_{ij}$, $h_{.j} = \frac{1}{m} \sum_j h_{ij}$,

$h_{..} = \frac{1}{N} \sum_{ij} h_{ij}$; h_{ij} zijn willekeurige konstanten.

Opmerking. De gebruikte puntnotatie zal hierna bij elke grootheid met indices i en j toegepast kunnen worden.

G is een lineaire ruimte:

$\alpha g_{ij} = \alpha h_{ij} - \alpha h_{i.} - \alpha h_{.j} + \alpha h_{..}$ Kies $\alpha h_{ij} = p_{ij}$,

$= p_{ij} - p_{i.} - p_{.j} + p_{..}$

$g_{ij} + g'_{ij} = h_{ij} + h'_{ij} - (h_{i.} + h'_{i.}) - (h_{.j} + h'_{.j}) +$

$+ (h_{..} + h'_{..})$ Kies $h_{ij} + h'_{ij} = q_{ij}$

$= q_{ij} - q_{i.} - q_{.j} + q_{..}$, want

$\frac{1}{n} \sum_j h_{ij} + \frac{1}{n} \sum_j h'_{ij} = \frac{1}{n} \sum_j (h_{ij} + h'_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_j q_{ij} = q_{i.}$ etc.

Stelling

Iedere basisvector $a_i \in A \perp G$:

1.5.1 $\sum_i g_{ij} \cdot 1 = \sum_i (h_{ij} - h_{i.} - h_{.j} + h_{..}) = 0.$

Dus $G \perp A$.

Iedere basisvector $b_j \in B \perp G$:

1.5.2 $\sum_j g_{ij} \cdot 1 = \sum_j (h_{ij} - h_{i.} - h_{.j} + h_{..}) = 0.$

Dus $G \perp B$, en dus $G \perp A + B$.

Stelling. $G \equiv C * D$.

Stel $h_{ij} = c_i d_j \implies g_{ij} = c_i d_j - 0 - 0 + 0 = c_i d_j$.

Dus $c * d \in G$, dus ook alle lineaire kombinaties:

$\alpha c * d + \beta c' * d' \in G$, dus:

$C * D \subset G$. D.w.z.: dimensie $G \geq (m-1)(n-1)$.

$A + B \subset V_N$, $A + B$ is m+n-1 dimensionaal.

$G(\subset V_N) \perp A + B$, dus dimensie $G \leq N - m + n - 1 = (m-1)(n-1)$.

Dus dimensie $G = (m-1)(n-1)$.

$C * D \subset V_N$ en $G \subset V_N$ zijn beide lineaire, $(m-1)(n-1)$ dimensionale ruimten, met $C * D \subseteq G \implies C * D \equiv G$.

§2. Het model in de tweewegklassifikatie als een ontbinding in de ruimten A+B en $C \ast D \equiv G$.

Aangenomen wordt dat we waarnemingen verrichten die beïnvloed worden door 2 effekten A' en B', respektievelijk op m en n niveaus. Per niveaukombinatie doen we één waarneming. Totaal dus $m \ast n \overset{\text{def}}{=} N$ waarnemingen.

Definiëer

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_{11} & \underline{y}_{12} & \cdots & \underline{y}_{1n} \\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22} & & \underline{y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}_{m1} & \underline{y}_{m2} & & \underline{y}_{mn} \end{pmatrix}$$

$$E(y) = \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & & \eta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{m1} & \eta_{m2} & \cdots & \eta_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{met } E(\underline{y}_{ij}) = \eta_{ij}$$

Onder s_Q zullen we verstaan de projektie van s op de ruimte Q.
Omdat $A + B \perp G$ geldt:

2.6.1 $$\eta = \eta_{A+B} + \eta_G$$

deze ontbinding is uniek: we kunnen η op één en slechts op één manier in vectoren uit A+B en uit G ontbinden.
Evenzo:

2.6.2 $$\underline{y} = \underline{y}_{A+B} + \underline{y}_G.$$

A. <u>Aanname</u>: $\underline{y} \div N(\eta, \sigma^2 I)$, waarin I de eenheidsmatrix in V_N is.

$\eta_{A+B} \in A + B$. η_{A+B} is dus te ontbinden in twee componenten $\alpha' \in A$ en $\beta' \in B$. Stel, dat α' en β' geen nulvectoren zijn. Dus:

2.7.1 $$\eta_{A+B} = \alpha' + \beta'.$$

Definities

$A_0 \subset A$ is een ruimte met $A_0 \perp L$.
$B_0 \subset B$ is een ruimte met $B_0 \perp L$.
Dus er bestaat een unieke ontbinding van α' en β' in resp. A_0 en L en B_0 en L:

$$\alpha' = \alpha'_{A_0} + \alpha'_L$$

$$\beta' = \beta'_{B_0} + \beta'_L$$

Uit (2.7.1) volgt:

$$\eta_{A+B} = \alpha'_L + \beta'_L + \alpha'_{A_0} + \beta'_{B_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_L + \alpha'_{A_0} + \beta'_{B_0}.$$

Dus:

2.7.2 $$\eta = \mu_L + \alpha'_{A_0} + \beta'_{B_0} + \eta_G.$$

Deze ontbinding is uniek vanwege de orthogonaliteit van de ruimten L, A_0, B_0, G.

Definiëer:

$$\alpha'_{A_0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \beta'_{B_0} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix},$$

$$\eta_G = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \gamma_{1m} & \cdots & \cdots & \gamma_{nm} \end{pmatrix} = \gamma.$$

Zonder afbreuk te doen aan het algemene model dat in de inleiding genoemd werd kunnen we dus stellen:

2.8.1 $\quad \alpha'_{A_0} \perp L \rightarrow \sum_i \alpha_i = 0$

2.8.2 $\quad \beta'_{B_0} \perp L \rightarrow \sum_j \beta_j = 0$

2.8.3 $\quad \eta_G \in G \rightarrow \sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0$, zie (1.5.1) en (1.5.4).

We gaan nu de elementen afzonderlijk bekijken.
Voor een element η_{ij} geldt dus:

2.8.4 $\quad \eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$, en dus

2.8.5 $\quad \underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \underline{e}_{ij}$ met $\mathrm{var}(\underline{e}_{ij}) = \sigma^2$, $\mathrm{cov}(\underline{e}_{ij}, \underline{e}_{i'j'}) = 0$ voor $i \neq i' \cup j \neq j'$, vanwege aanname A op blz. 6.

Zuivere schatters voor α_i, β_j, γ_{ij} en μ worden dus, met (2.8.1), (2.8.2) en (2.8.3):

2.8.6 $\quad \underline{\tilde{\mu}} = \underline{y}_{..}$

2.8.7 $\quad \underline{\tilde{\alpha}}_i = \underline{y}_{i.} - \underline{y}_{..}$

2.8.8 $\quad \underline{\tilde{\beta}}_j = \underline{y}_{.j} - \underline{y}_{..}$

2.8.9 $\quad \underline{\tilde{\gamma}}_{ij} = \underline{y}_{ij} - \underline{y}_{i.} - \underline{y}_{.j} + \underline{y}_{..}$

Uit (2.8.5) blijkt dat we $\underline{y}_{ij}$ opgebouwd kunnen denken uit μ, een niveau onafhankelijk van rijen en kolommen; uit α_i, een grootheid alleen afhankelijk van een rij, dus alleen afhankelijk van het effekt A'; uit β_j een grootheid die dus (analoog α_i) afhangt van B'; uit een interactie grootheid γ_{ij} die afhangt van kolom èn rij en uit een stochastische grootheid $\underline{e}_{ij}$ waarvan wij de verdeling aangenomen hebben.

<u>Definitie</u>. We spreken van <u>additiviteit</u> van een model dat opgebouwd is in de zin van (2.8.4), (2.8.5) als geldt:

$$\eta_{ij} = \eta_{ij'} = \eta_{i'j} - \eta_{i'j'} \qquad i,j \neq i',j'.$$

<u>Stelling</u>. Is een model additief dan geldt $\gamma_{ij} = 0$

2.9.1 $$\eta_{ij} - \eta_{ij'} = \eta_{i'j} - \eta_{i'j'} \implies \sum_{i'j'} (\eta_{ij}-\eta_{ij'}-\eta_{i'j}+\eta_{i'j'}) = 0.$$

$$\sum_{i'j'} (\eta_{ij}-\eta_{ij'}-\eta_{i'j}+\eta_{i'j'}) = \eta_{ij} - \eta_{i.} - \eta_{.j} + \eta_{..} = \gamma_{ij} = 0$$

(zie (2.8.9)).

<u>Stelling</u>. Als geldt $\gamma_{ij} = 0 \; \forall_{i,j}$ dan is het model additief. Dus:

2.9.2 $$\eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \implies \eta_{ij} - \eta_{ij'} = \eta_{i'j} - \eta_{i'j'}.$$

(2.8.4) resp. (2.8.5) worden in vector notatie (zie §1):

2.9.3 $$\eta = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \gamma$$

2.9.4 $$\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \gamma + \underline{e} \text{ met } \gamma = \eta_G \quad \text{en:}$$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \underline{e}_{11} & \cdots\cdots & \underline{e}_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \underline{e}_{m1} & \cdots\cdots & \underline{e}_{mn} \end{pmatrix}$$

We spreken van niet-additiviteit indien $\gamma \neq \vec{0}$ (nulvector).

Het model (2.9.3):

2.10.1 $\underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \gamma + \underline{e}$

wordt hierna model A genoemd (A: algemeen). Zoals in de inleiding gezegd is, zullen we omtrent de γ een aantal veronderstellingen doen, teneinde het aantal te schatten parameters te reduceren.

§3. Het model van Tukey en Mandel. Voorstel voor een nieuw, symmetrisch, model.

We vonden het model A:

$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \underline{e}_{ij}$. De μ, α_i, β_j en γ_{ij} willen we graag schatten. Er zijn dus $1+m-1+n-1+(m-1)(n-1) = mn = N$ onbekenden uit N waarnemingen te schatten. Er is dus totaal niets over de nauwkeurigheid te zeggen.

Uit fysische overwegingen blijkt dat men vaak kan zeggen: $\gamma_{ij} = f(\alpha_i \beta_j)$.

We kunnen γ_{ij} ontwikkelen (t/m 2e graad):

3.11.1 $$\gamma_{ij} = A + B\alpha_i + C\beta_j + D\alpha_i^2 + \Lambda\alpha_i\beta_j + H\beta_j^2.$$

Uit (2.8.3) volgt:

$$\gamma_{i.} = A + B\alpha_i + D\alpha_i^2 + H\theta = 0, \text{ met } \theta = \frac{1}{n}\sum_j \beta_j^2$$

$$\gamma_{.j} = A + C\beta_j + D\phi + H\beta_j^2, \text{ met } \phi = \frac{1}{m}\sum_i \alpha_i^2.$$

Dus:

3.11.2 $$B\alpha_i + D\alpha_i^2 = - A - H\theta$$

3.11.3 $$C\beta_j + H\beta_j^2 = - A - D\phi$$

(3.11.2) en (3.11.3) in (3.11.1):

$$\gamma_{ij} = - A - H\theta - D\phi + \Lambda\alpha_i\beta_j$$

$$\gamma_{i.} = - A - H\theta - D\phi = 0$$

Dus, benaderen we $f(\alpha_i,\beta_j)$ voor een tweede graads polynoom, dan kunnen we volstaan met $\Lambda\alpha_i\beta_j$.

Tukey neemt daarom als model (model T):

$$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \Lambda\alpha_i\beta_j + e_{ij}$$

Def $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{pmatrix}$ ==> $\alpha \in C,\ \beta \in D = \alpha * \beta \in C * D$

==> $\alpha * \beta \in G$

want $\sum\limits_{\overset{\circ}{i}} \alpha_{\overset{\circ}{i}} = \sum\limits_{\overset{\circ}{j}} \beta_{\overset{\circ}{j}} = 0$

In vector notatie wordt model T

3.12.1 $\quad \underline{y} = \mu \ell + \sum\limits_{\overset{\circ}{i}} \alpha_{\overset{\circ}{i}} a_{\overset{\circ}{i}} + \sum\limits_{\overset{\circ}{j}} \beta_{\overset{\circ}{j}} + \Lambda \alpha * \beta + \underline{e}$ en dus

3.12.2 $\quad \eta = \mu + \sum\limits_{\overset{\circ}{i}} \alpha_{\overset{\circ}{i}} a_{\overset{\circ}{i}} + \sum\limits_{\overset{\circ}{j}} \beta_{\overset{\circ}{j}} + \Lambda \alpha * \beta$

$\alpha \in C,\ \beta \in D$ dus $\Lambda \alpha * \beta \in C * D \equiv G$

Model T is dus een bijzonder geval van model A.

3.12.3 $\quad$ Uit (2.9.3) volgt dan dat $\gamma = \eta_G = \Lambda \alpha * \beta$ voor model T.

Onder de nulhypothese H_T verstaan we het geval van additiviteit: $\Lambda = 0$ (zie stelling (2.9.2).

Onder de alternatieve hypothese $\overline{H}_T$ verstaan we het geval $\Lambda \neq 0$ (niet-additiviteit).

Eis $\alpha * \beta \neq \vec{0}$ (0 vector) of: $\exists\ \alpha_{\overset{\circ}{i}} \beta_{\overset{\circ}{j}} \neq 0$.

Mandel geeft een iets algemener model (model M):

3.12.4 $\quad \underline{y}_{\overset{\circ}{i}\overset{\circ}{j}} = \mu + \alpha_{\overset{\circ}{i}} + \beta_{\overset{\circ}{j}} + \tau_{\overset{\circ}{i}} \beta_{\overset{\circ}{j}} + \underline{e}_{\overset{\circ}{i}\overset{\circ}{j}}$ met $\tau_{\bullet} = 0$ of, indien $\rho_{\overset{\circ}{i}} = \tau_{\overset{\circ}{i}} + 1$,

3.12.5 $\quad \underline{y}_{\overset{\circ}{i}\overset{\circ}{j}} = \mu + \alpha_{\overset{\circ}{i}} + \rho_{\overset{\circ}{i}} \beta_{\overset{\circ}{j}} + \underline{e}_{\overset{\circ}{i}\overset{\circ}{j}}$ met $\rho_{\bullet} = 1$.

In vectornotatie:

3.12.6 $\quad \underline{y} = \mu \ell + \sum\limits_{\overset{\circ}{i}} \alpha_{\overset{\circ}{i}} a_{\overset{\circ}{i}} + \sum\limits_{\overset{\circ}{j}} \beta_{\overset{\circ}{j}} b_{\overset{\circ}{j}} + \tau * \beta + \underline{e}$ als

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_m \end{pmatrix}, \quad \tau_{\bullet} = 0 \implies \tau \in C.$$

Dus:

3.13.1 $\eta = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \tau * \beta$

$\tau \in C$, $\beta \in D$, dus model M is ook een bijzonder geval van model A.

3.13.2 $\tau * \beta \in C * D \rightarrow \tau * \beta \in G \rightarrow \gamma = \eta_G = \tau * \beta$.

Onder de nulhypothese H_M verstaan we het geval van additiviteit:
$\tau = \vec{0}$ of $\tau_i = 0$, $\forall_i$ ($\rho_i = 1 \ \forall_i$).
Onder de alternatieve hypothese $\overline{H}_M$ verstaan we het geval $\tau \neq \vec{0}$, of: $\exists \tau_i \neq 0$, of: $\exists \rho_i \neq 1$ (niet-additiviteit).
Eis $\beta \neq \vec{0}$ of: $\exists \beta_j \neq 0$.

Voorstel voor een nieuwe toets

Model M heeft het bezwaar van asymmetrie (in α en β). Een ander model M is nl. ook denkbaar:

3.13.3 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \alpha * \tau_{(D)} + \underline{e}$ met $\tau_{(D)} \in D$.

Kombinatie van (3.12.6) en (3.13.3) geeft:

$$\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \alpha * \tau_{(D)} + \tau_{(C)} * \beta + e$$

waarin $\tau_{(C)} = \tau$. De index (C) van $\tau_{(C)}$ duidt er op dat $\tau_{(C)} \in C$.
(Dit is dezelfde τ die gebruikt werd in (3.12.6).)
Stel C opgespannen door de (m-1) onderling loodrechte vectoren $c_{(1)}, \ldots, c_{(m-1)}$, dan:

$$\tau_{(C)} = \gamma_1 c_{(1)} + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k c_{(k)} \quad \{\gamma_k\} \text{ zijn constanten.}$$

Stel $c_{(1)} = \alpha$:

$$\tau_{(C)} = \gamma_1 \quad + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k c_{(k)}, \text{ dus:}$$

$$\tau_{(C)} * \beta = \gamma_1 \alpha * \beta + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k c_{(k)} * \beta$$

$$\tau_{(C)} * \beta + \alpha * \tau_{(D)} = \gamma_1 \alpha * \beta + \alpha * \tau_{(D)} + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k c_{(k)} * \beta$$

$$\stackrel{def}{=} s * \beta + \alpha * r, \; s \in C, \; r \in D$$

waarin: $s = \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k c_{(k)}$ en $r = \tau_{(D)} + \gamma_1 \beta$.

S wordt opgespannen door $c_{(2)}, \dots, c_{(m-1)}$ $\implies$ $s \in S \subset C$.

$c_{(1)} \perp c_{(2)}, \dots, c_{(m-1)} \rightarrow c_{(1)} \perp S \rightarrow \alpha \perp S \rightarrow \alpha \perp s$.

Het model wordt dus:

<u>Model V</u>

3.14.1 $\quad \underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \alpha * r + s * \beta + \underline{e}$ met $s \perp \alpha$.

Dit is ook te schrijven als (indien we de i,j^e komponent van y nemen)

$$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha_i r_j + s_i \beta_j + \underline{e}_{ij} \quad \text{met} \sum_i \alpha_i s_i = 0$$

3.14.2 $$= \mu + r_j' \alpha_i + s_i' \beta_j + \underline{e}_{ij} \quad \text{met } r_j' = r_j + 1$$

$$s_i' = s_i + 1$$

$$\text{en: } \sum_i \alpha_i s_i = \sum_i \alpha_i (s_i + 1) = \sum_i \alpha_i s_i' = 0.$$

Analoog model T en M is model V ook een bijzonder geval van model A.
Er geldt dus: $\gamma = \eta_G = \alpha * r + s * \beta$.
Ogenschijnlijk (vanwege $s \perp \alpha$) is (3.14.1) nog steeds asymmetrisch.
Op dezelfde wijze als boven kunnen we (3.14.1) verder opsplitsen:

3.14.3 $\quad \underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \alpha * t + s * \beta + \lambda \alpha * \beta + e,$

$$s \perp \alpha, \; t \perp \beta, \text{ met } T \subset D, \; T \perp \beta.$$

D is opgespannen door: $d_{(1)} = \beta$, $d_{(2)}, \ldots, d_{(n-1)}$ (orthogonale basis).
T is opgespannen door $d_{(2)}, \ldots, d_{(n-1)}$.
(3.12.6) is nu duidelijk volkomen symmetrisch in α en β.
(3.14.3) geeft duidelijk aan dat het model V een kombinatie is van twee Mandel modellen (met restrictie) en het model van Tukey. Kiezen we $s = \vec{0}$ òf $t = \vec{0}$ dan hebben we het model M, kiezen we $s = \vec{0}$ èn $t = \vec{0}$ dan hebben we het model T. Wegens (3.14.1):

$$\eta = \mu \ell + \sum_{i} \alpha_i a_i + \sum_{j} \beta_j b_j + \alpha * r + s * \beta, \quad \alpha \perp s.$$

<u>Dus</u>: $\eta_G = \alpha * r + s * \beta$, omdat $\alpha * r \perp s * \beta \in C * D$.

Onder de nulhypothese H_V geldt: $\eta_G = \vec{0}$.
$\alpha * r + s * \beta = \vec{0}$
$\alpha * r \perp s * \beta$ ==> onder H_V: $\alpha * r = \vec{0}$, $s * \beta = \vec{0}$.
Stellen we weer als <u>eis</u>: $\alpha \neq \vec{0}$, $\beta \neq \vec{0}$, dan moet voor additiviteit gelden $r = \vec{0}$ èn $s = \vec{0}$.
Omgekeerd is duidelijk: als $r = \vec{0}$ èn $s = \vec{0}$, dan is $\eta_G = \vec{0}$ en dan is er additiviteit.
Onder de alternatieve hypothese $\overline{H}_V$ geldt:

$r \neq \vec{0} \cup s \neq \vec{0}$.

Bekijken we (3.14.3) dan zien we dat model V algemener is dan model T of M.
Is $s = \vec{0}$ òf $t = \vec{0}$ dan hebben we een model M.
Is $s = \vec{0}$ èn $t = \vec{0}$ dan hebben we model T.
Verder geldt onder H_V:
$s_i = 0 \ \forall_i$ ==> $s_i' = 1 \ \forall_i$
$r_j = 0 \ \forall_j$ ==> $r_j' = 1 \ \forall_j$
en onder $\overline{H}_V$:
$\exists s_i \neq 0 \cup \exists r_j \neq 0$.

§4. Kanonieke transformatie, algemene opmerkingen over de ontbinding van de vector $\underline{y}$.

De ruimte V_N kan door minimaal N onderling loodrechte vectoren worden opgespannen. Wegens $V_N = (A+B) + G$, $(A+B) \perp G$, kunnen we tenminste twee vectoren hiervan willekeurig kiezen, met dien verstande dat de ene in A+B moet liggen en de andere in G.

Span A+B op door: $v_{(1)}, v_{(2)}, \ldots, v_{(m+n-1)}$.

(A+B is immers m+n-1 dimensionaal) waarbij geldt dat $||v_{(l)}|| = 1$ en $v'_{(l)}v_{(l)'} = 0$ voor $l, l' = 1, \ldots, m+n-1$; $l \neq l'$.

G spannen we onafhankelijk van A+B op door: $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(N)}$, met $||v_{(k)}|| = 1$ en $v'_{(k)}\ v_{(k)'} = 0$ voor $k, k' = m+n, \ldots, N$; $k \neq k'$.

Construeer nu een N × N matrix P' met als kolommen de elementen van de vectoren $v_{(1)}, \ldots, v_{(N)}$:

$P' = (v_1, \ldots, v_N)$. P' is dus een orthogonale matrix.

Stel:

4.16.1 $\underline{z} = P\underline{y}$. z is dus een vector met N elementen: $\{z_k\}$ $k = 1, \ldots, N$.

Uit (4.16.1) volgt:

$\underline{z}_k = v'_{(k)}\,\underline{y}$. P' is een orthogonale matrix dus:

$y = P'\,\underline{z}$, zodat

4.16.2 $$\underline{y} = \sum_{k=1}^{N} \underline{z}_k\, v_{(k)}.$$

$Var(\underline{y}) = \sigma^2 I$ (aanname A blz. 6).

Dus:

4.16.3 $Var(\underline{z}) = Var(P\,\underline{y}) = P\,\sigma^2\,I\,P' = \sigma^2 I$.

Omdat $\{\underline{z}_k\}$ verkregen wordt d.m.v. lineaire transformatie uit $\underline{y}$, heeft $\{\underline{z}_k\}$ ook een normale verdeling, omdat $\underline{y}$ normaal verdeeld is.

Uit (2.6.2) volgt:

4.16.4 $\underline{y} = \underline{y}_{A+B} + y_G$.

Uit (4.16.2) volgt:

4.17.1 $$\underline{y} = \sum_{k=1}^{m+n-1} \underline{z}_k\, v_{(k)} + \sum_{k=m+n}^{N} \underline{z}_k\, v_{(k)}$$

$\sum_{k=1}^{m+n-1} \underline{z}_k\, v_{(k)} \in A + B$ omdat A+B opgespannen is door $v_1, \ldots, v_{m+n-1}$;

$\sum_{k=m+n}^{N} \underline{z}_k\, v_k \in G$ omdat G opgespannen is door $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(N)}$.

De $\{z_k\}$ zijn dus de kentallen van de vector y op een coördinatenstelsel met als assen $\{v_{(k)}\}$.
De ontbinding van $\underline{y}$ in A+B en G is uniek dus geldt:

4.17.2 $$\underline{y}_{A+B} = \sum_{k=1}^{m+n-1} \underline{z}_k\, v_{(k)} \quad \text{en}$$

4.17.3 $$\underline{y}_G = \sum_{k=m+n}^{N} \underline{z}_k\, v_{(k)}.$$

Verder geldt:

4.17.3' $$\underline{y} = (\underline{y}_A + \underline{y}_B - \underline{y}_L) + (\underline{y} - \underline{y}_A - \underline{y}_B + \underline{y}_L),$$

4.17.4 $$\underline{y}_A = \frac{\sum_j a_{i}\underline{y}_{ij}}{||a_i||^2}\, a_i = \sum_i \frac{\sum_j \underline{y}_{ij}}{n}\, a_i = \begin{pmatrix} \underline{y}_{1.} & \underline{y}_{1.} & \cdots & \underline{y}_{1.} \\ \underline{y}_{2.} & \underline{y}_{2.} & \cdots & \underline{y}_{2.} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}_{m.} & \underline{y}_{m.} & \cdots & \underline{y}_{m.} \end{pmatrix}$$

evenzo

4.17.5 $$\underline{y}_B = \begin{pmatrix} \underline{y}_{.1} & \underline{y}_{.2} & \cdots & \underline{y}_{.n} \\ \underline{y}_{.1} & \underline{y}_{.2} & \cdots & \underline{y}_{.n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}_{.1} & \underline{y}_{.2} & \cdots & \underline{y}_{.n} \end{pmatrix}$$

$$4.18.1 \qquad \underline{y}_L = \frac{\sum_{ij} \underline{y}_{ij}}{mn}\,\ell = \begin{pmatrix} \underline{y}_{..} & \underline{y}_{..} & \cdots & \underline{y}_{..} \\ \underline{y}_{..} & \underline{y}_{..} & \cdots & \underline{y}_{..} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \underline{y}_{..} & \underline{y}_{..} & \cdots & \underline{y}_{..} \end{pmatrix}$$

Duidelijk is:

$\underline{y}_A + \underline{y}_B - \underline{y}_L \in A + B.$

Het i,j^e element van $\underline{y} - \underline{y}_A - \underline{y}_B + \underline{y}_L$ is, zie (4.17.4), (4.17.5), (4.18.1):

$\underline{y}_{ij} - \underline{y}_{i.} - \underline{y}_{.j} + \underline{y}_{ij}$, dus geldt volgens de definities in §1 gegeven:

$\underline{y} - \underline{y}_A - \underline{y}_B + \underline{y}_L \in G.$

Zodat geldt, met (4.16.4) en (4.17.3'):

4.18.2 $\quad \underline{y}_{A+B} = \underline{y}_A + \underline{y}_B - \underline{y}_L$

4.18.3 $\quad \underline{y}_G = \underline{y} - \underline{y}_A - \underline{y}_B + \underline{y}_L$, daar $\underline{y} = \underline{y}_{A+B} + \underline{y}_G$ uniek is.

Voor het model A volgt op analoge wijze (γ G):

$$\underline{y}_{A+B} = \underline{y}_A + \underline{y}_B - \underline{y}_L = \mu + \alpha_i + \beta_j + \underline{e}_{A+B}$$

met, analoog $\underline{e}_{A+B} = \underline{e}_A + \underline{e}_B - \underline{e}_L$ met $E(\underline{e}_A) = E(\underline{e}_B) = E(\underline{e}_L) = 0$.

Voor het ij^e element van y_{A+B} geldt dus:

$$\underline{y}_{A+B_{ij}} = \underline{y}_{i.} + \underline{y}_{.j} - \underline{y}_{..} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \underline{e}_{i.} + \underline{e}_{.j} - \underline{e}_{..}$$

Hieruit vinden we zuivere schatters van μ, α_i, β_j:

4.18.4 $\quad \underline{\hat{\mu}} = \underline{y}_{..}$

4.18.5 $\quad \underline{\hat{\alpha}}_i = \underline{y}_{i.} - \underline{y}_{..}$

4.18.6 $\quad \underline{\hat{\beta}}_j = \underline{y}_{.j} - \underline{y}_{..}$

Deze zuivere schatters voor μ, $\alpha_{\overset{\circ}{i}}$, $\beta_{\overset{\circ}{j}}$ hangen dus uitsluitend van $\underline{y}_{A+B}$ af.
Onder additiviteit geldt voor model A ($\gamma = \vec{0}$)

4.19.1 $E(\underline{y}) = \mu\ell + \sum_{\overset{\circ}{i}} \alpha_{\overset{\circ}{i}} a_{\overset{\circ}{i}} + \sum_{\overset{\circ}{j}} \beta_{\overset{\circ}{j}} b_{\overset{\circ}{j}}$, dus:

$$E(\underline{y}) \in A+B;\ \eta = \eta_{A+B} + \eta_G \implies \eta_G = \vec{0}.$$

Model T, M en V zijn bijzondere gevallen hiervan, onder H_T, H_M en H_V geldt dus:

4.19.2 $E(\underline{y}) \in A+B$ en: $\eta_G = \vec{0}$.

§5. Zuiverheid en onzuiverheid van toetsen gebaseerd op F verdelingen

De in deze § gehouden beschouwingen zijn van algemene aard. Voor de in de volgende §§ gehouden afleidingen zijn alleen de definities en de stellingen I en II van belang.

Definitie. Stel $\{\underline{x}_k\} \div N(\mu_k, 1)$ voor $k = 1,\dots,n$. $\mu_k \neq 0$.
$\{\underline{x}_k\}$ zijn o.o.,

$\underline{y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2$ heeft dan per definitie een niet centrale χ^2 verdeling, genoteerd door $\chi^2_{n,\lambda}$, waarin n het aantal vrijheidsgraden en λ een later te definiëren niet-centraliteits parameter is.

De afleiding van de dichtheidsfunktie van $\underline{y}$:
eerst voor n = 1.

5.20.1 $$P_r\{\underline{y} < y\} = P_r\{\underline{x}_1^2 < y\} = P_r\{-\ y < \underline{x} < \ y\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ y}^{\ y} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2} dx.$$

De kansdichtheid $f_{1,\lambda}(y)$ vindt men door differentiatie:

$$f_{1,\lambda}(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} \{e^{-\frac{1}{2}(\ y - \mu_1)^2} - e^{-\frac{1}{2}(\ y + \mu_1)^2}\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}(y+\mu_1^2)} \{e^{\mu_1\ y} - e^{-\mu_1\ y}\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}(y+\mu_1^2)} 2\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_1^{2k} y^k}{(2k)!}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y+\mu_1^2)} \{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_1^{2k} y^{k-\frac{1}{2}}}{(2k)!}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\mu_1^2}{2}} \frac{\left(\frac{\mu_1^2}{2}\right)^k}{k!}\right) \left(\frac{2^k\, k!}{(2k)!\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} y^{k-\frac{1}{2}}\right).$$

5.21.1 Stel $a_k = e^{-\frac{\mu_1^2}{2}} \frac{\left(\frac{\mu_1^2}{2}\right)^k}{k}$, dus $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, dan:

5.21.2 $F_{1,\lambda}(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k F_{2k+1}(y)$, waarin

$F_{2k+1}(y)$ de verdelingsfunctie van een $\underline{\chi}^2_{2k+1}$ is.

Er bestaat een orthogonale matrix Ω die $\underline{x} : \{ \underline{x}_k \}$, k=1, ..., n, zodanig transformeert in $\underline{z} : \{\underline{z}_k\}$, k = 1,...,n, zodat

$$\lambda \stackrel{\text{stel}}{=} E(\underline{z}_1) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2},\quad E(\underline{z}_k) = 0,\ k \geq 1.$$

Omdat Ω orthogonaal is geldt:

$$\text{Var}\,(\underline{z}_k) = 1,\ \{\underline{z}_k\}\text{o.o.},\ \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \underline{z}_k^2 .$$

In deze § blijven $\{\underline{z}_k\}$ aldus gedefinieerd.

Dus:

$$\Pr\{ \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 < a\} = \Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{z}_k^2 < a\} = \Pr\{\underline{z}_1^2 + \sum_{k=2}^{n} \underline{z}_k^2 < a\}$$

Stel $\underline{t} : \{ t_k \}$. k=1, ..., n, met $\underline{t}_k \doteq N(0,1)$, $\underline{t}_k$ o.o, dan geldt:

$$\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{t}_k < b\} = \int_0^b f_n(u)du.$$

Ook geldt met m < n:

$$\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{t}_k^2 < b\} = \Pr\{ \sum_{k=1}^{m} \underline{t}_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n} \underline{t}_k^2 < b\}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{b-x} f_m(t)\, f_{n-m}(x)\, dtdx = \int_0^{\infty} F_m(b-x)\, f_{n-m}(x)dx$$

Dus:

5.21.3 $$\int_0^{\infty} F_m(b-x)\, f_{m-n}(x)\, dx = \int_0^b f(x)\, dx,$$ waarin

$F_m(t)$ de verdelingsfunktie van χ^2_m is.

5.22.1 $\Pr\left\{\sum_{k=1}^{n} \underline{z}_k^{\,2} < a\right\} = \Pr\left\{\underline{z}_1^{\,2} + \sum_{k=2}^{n} \underline{z}_k^2 < a\right\} = \int_0^\infty F_{1,\lambda}(a-x) f_{n-1}(x)\,dx,$

Waarin $F_{\ell,\lambda}(x)$ de verdelingsfunktie van $\chi^2_{\ell,\lambda}$ is.

Nu geldt dus:

$$\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 < a\} = \Pr\{\underline{z}_1^2 + \sum_{k=2}^{n} \underline{z}_k^2 < a\}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{a-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{2k+1}(u)\, f_{n-1}(x)\, du dx$$

stel $\int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} g_k(v)\, dv$

Nu geldt: $\int_{k=0}^{\infty} a_k\, f_{2k+1}(u) \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$

$(k-v)\{a_k f_{2k+1}(u)\}$ is dus een uniform convergente reeks:

$$\int_0^{a-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, f_{2k+1}(u)\, du = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{a-x} a_k\, f_{2k+1}(u)\, du.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{a-x} f_{2k+1}(u)\, du.\ f_{n-1}(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

is dus ook uniform convergent.

Als $\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty g_k(v)$ dv bestaat, dan mogen we schrijven:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty g_k(v)\, dv = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} g_k(v)\, dv \quad *)$$

5.22.2

$$\int_0^\infty g_k(v)\, dv = \int_0^\infty \{\int_0^{a-v} a_k\, f_{2k+1}(u)\, du\}\, f_{n-1}(v)\, dv$$

$$\int_0^{a-v} f_{2k+1}(u)\, du \overset{\text{stel}}{=} b_k < 1$$

$$(5.22.2) = a_k b_k \int_0^\infty f_{n-1}(v)\, dv = a_k b_k$$

---

*) zie Titschmarch, The theory of functions pg. 43.

Dus:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} g_k(v)\, dv = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \int_0^{\infty} f_{n-1}(v)\, dv = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k < 1.$$

(5.22.2) is dus waar. Er geldt dus:

$$\Pr\{ \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 < a\} = \Pr \{\sum_{k=1}^{n} \underline{z}_k^2 < a\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \{ \int_0^{a-v} f_{2k+1}(u)\, du\} f_{n-1}(v) dv$$

met (5.21.3) wordt dit:

5.23.1 $\Pr\{ \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 < a \} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{a} f_{2k+n}(u)\, du$. Deze rij is weer te majoreren tot $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, dus de som in (5.23.1) is uniform convergent. De afzonderlijke termen zijn te differentieren, dus de dichtheid van $y = \sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2$ wordt:

$$f_{n,\lambda}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{2k+n}(y)$$

Dit is toegestaan vanwege de stelling:

Is $F = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(u)$ convergent in een punt X_o, en is de som $G = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{g}'_k (u)$ uniform convergent, dan geldt:

$F'(u) = G(u)$.

Voor $\{\underline{t}_k\}$ (definitie hierboven) geldt voor $l > n$

$\Pr \{\sum_{k=1}^{n} \underline{t}_k^2 < c\} > \Pr \{\sum_{k=1}^{b} \underline{t}_k^2 < c\}$, dus

5.23.2 $\int_0^{c} f_n(u)\, du > \int_0^{c} f_\ell(u)\, du.$

$$\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 < c\} = \int_0^{c} \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{2k+n}(u)\, du = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{c} f_{2k+n}(u)\, du, \; (\ldots\ldots),$$

Wegens (5.21.1)geldt ook:

$$\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{t}_k^2 < c\} = \int_0^c f_n(u)\,du = \int_0^c \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_n(u)du = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^c f_n(u)\,du$$

$\{\underline{t}_k\}$ gedefinieerd op pg. 21.

Dus geldt met behulp van (5.23.2), $k > 0$

$$\int_0^c f_{2k+n}(u)\,du < \int_0^c f_n(u)\,du,$$ dus:

$$\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 \geq \chi_\alpha^2\} \geq \Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{t}_k^2 \geq \chi_\alpha^2 = \alpha.$$ Of i.h.a.:

5.24.1 $F_{n,\lambda}(x) < F_n(x)$.

Dus:

5.24.2 $\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{x}_k^2 \geq \chi_\alpha^2\} > \alpha$ en $\Pr\{\sum_{k=1}^{n} \underline{t}_k^2 \geq \chi_\alpha^2\} = \alpha$.

Definitie: Stel ω is een statistische toets met een set parameters θ.

5.24.3

De nulhypothese Ho geldt indien $\theta \in \omega$, de alternatieve hypothese Ho geldt indien $\theta \in \Omega - \omega$, indien Ω de ruimte der parameters vormt. Dan noemen we de toets ω zuiver indien geldt:

$$\Pr\{\underline{\omega}|_{\theta \in \omega}\} \leq \alpha$$ en:

$$\Pr\{\underline{\omega}|_{\theta \in \Omega - \omega}\} > \alpha$$

Op grond van deze definitie en uit (5.24.2) volgt dat een toets die onder Ho een centrale χ^2 verdeling heeft en onder de alternatieve hypothese een niet centrale χ^2 verdeling heeft een zuivere toets is.

Immers: ω = alle $u_k = 0$

$\Omega - \omega$: niet alle $u_k = 0$.

Beschouw nu een toets die onder de nulhypothese H_0 een F verdeling heeft: $\underline{F}_{m,n} = \frac{n \underline{\chi}_m^2}{m \underline{\chi}_n^2}$ en onder H_0 een nietcentrale F verdeling heeft.

Definitie: Een niet-centrale F verdeling met m en n vrijheidsgraden en niet-centraliteits parameter λ is gedefinieerd als

$$F_{\lambda;\, m, n} \div \frac{n\, \underline{\chi}^2_{m,\lambda}}{m\, \underline{\chi}^2_n}$$

Voor $\lambda = 0$ is de verdeling centraal F verdeeld.

Stelling I. Een toets die onder de nulhypothese Ho een centrale F verdeling heeft en onder de alternatieve hypothese $\bar{\bar{H}}o$ een nietcentrale F verdeling heeft is een zuivere toets.

Bewijs:

Stel $\underline{F} = \frac{\underline{t}}{\underline{n}}$, waarbij we veronderstellen dat onder Ho $\frac{\underline{t}}{\underline{n}}$ een centrale F verdeling bezit. Onder $\bar{\bar{H}}o$ bezit F een nietcentrale F verdeling, dus $\underline{t}$ heeft een niet-centrale χ^2 verdeling, afgezien van een constante, en $\underline{n}$ heeft een centrale χ^2 verdeling, afgezien van een constante.

Notatie Zij $\underline{s}$ een stochastische grootheid, dan wordt de verdelingsfunctie van $\underline{s}$ voorgesteld door $F_{\underline{s}}(.)$ en de kansdichtheidsfunktie van $\underline{s}$ door $f_{\underline{s}}(.)$.

Dan:

$$\alpha = Pr_{Ho}\left\{\frac{\underline{t}}{\underline{n}} \geq F_\alpha\right\} = Pr_{Ho}\left\{\underline{t} - \underline{n}\, F_\alpha \geq 0\right. = \int_{0_{Ho}}^{\infty} F_{\underline{n}F_\alpha}(x)\, f_{\underline{t}}(x)\, dx.$$

waarin dus $F_{\underline{n}F_\alpha}(x)$ de verdelingsfunktie van $\underline{n}F_\alpha$ is, en $f_{\underline{t}}$ de dichtheidsfunktie van $\underline{t}$.

$$\int_{0_{Ho}}^{\infty} F_{\underline{n}F_\alpha}(x)\, f_t(x)dx = 1 - \int_{0_{Ho}}^{\infty} F_{\underline{t}}(x)\, f_{\underline{n}f_\alpha}(x)\, dx < 1 - \int_{0_{Ho}}^{\infty} F_{\underline{t}}(x)\, f_{\underline{n}F_\alpha}(x)dx$$

$= Pr_{\bar{\bar{H}}o}\left\{\frac{\underline{t}}{\underline{n}} \geq F_\alpha\right\}$, zie .

Dus:

$Pr_{Ho}\left\{\frac{\underline{t}}{\underline{n}} \geq F_\alpha\right\} = \alpha$ en:

$Pr_{\bar{\bar{H}}o}\left\{\frac{\underline{t}}{\underline{n}} \geq F_\alpha\right\} > \alpha$, zodat de genoemde toetsen zuiver is.

Gegeven zijn voor i= 1, ..., m:

$\{x_i\} \doteq N(\mu_{x,i},1)$, x_i o.o, $\lambda_1 = \sqrt{\sum_i \mu^2_{x,i}}$

$\{\underline{u}_i\} \doteq N(\mu_{u,i},1)$, $\{u_i\}$ o.o,. $\lambda_2 = \sqrt{\sum_i \mu^2_{u,i}}$

$\underline{r} = \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_i^2$, $\underline{s} = \sum_{i=1}^{m} \underline{u}_i^2$, dan geldt het volgende:

Lemma I. Zij $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, dan geldt:

5.26.1 $F_{\underline{r}}(x) < F_{\underline{s}}(x)$, of in de notatie van de χ^2 verdelingen:

5.26.2 $F_{m,\lambda_1}(n) < F_{m,\lambda_2}(x)$

5.26.3 $\Pr\{\sum_i \underline{u}_i^2 < c\} = \int_0^c F_{1,\lambda_2}(c-x)\, f_{m-1}(x)\, dx = F_{\underline{s}}(c) = F_{m,\lambda_2}(c).$

5.26.4 $\Pr\{\sum_i \underline{x}_i^2 < c\} = \int_0^c F_{1,\lambda_1}(c-x)\, f_{m-1}(x)\, dx = F_{\underline{r}}(c) = F_{m,\lambda_1}(c)$

Nu geldt $F_{1,\lambda_1}(x) < F_{1,\lambda_2}(x)$, want, met (5.20.1):

$$F_{1,\lambda_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}(u-\lambda_1)^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}-\lambda_1}^{\sqrt{x}-\lambda_1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

evenzo:

$$F_{1,\lambda_2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{x}-\lambda_2}^{\sqrt{x}-\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$F_{1,\lambda_1}(x) - F_{1,\lambda_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}-\lambda_1}^{\sqrt{x}-\lambda_1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}-\lambda_2}^{\sqrt{x}-\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_2-\lambda_1}^{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_2+\lambda_1}^{\lambda_1-\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt < 0.$$

Dus $F_{1,\lambda_1}(x) < F_{1,\lambda_2}(x)$. Dus met (5.26.3) en (5.26.4):

$F_{1,\lambda_1}(x) < F_{1,\lambda_2}(x)$ of:

5.27.1 $\quad F_{\underline{r}}(x) < F_{\underline{s}}(x)$.

We beschouwen twee toetsen T_1 en T_2. Beide toetsen hebben onder Ho een centrale F verdeling met m en n vrijheidsgraden. Onder $\bar{\bar{H}}$o zijn ze echter verschillend verdeeld.

Stel: $\{\underline{t}_j\} \div N(0,1)$, $\{\underline{t}_j\}$ o.o., $j=1, \ldots, n$

$\{\underline{v}_j\} \div N(\mu_{v,j}, 1)$, $\{\underline{v}_j\}$ o.o.

Onder $\bar{\bar{H}}$o zijn de T_1 en T_2 als volgt verdeeld:

$$\underline{T}_1 \div \frac{n \sum_i \underline{x}_i^2}{m \sum_j \underline{t}_j^2}, \quad T_2 \div \frac{m \sum_i \underline{u}_i^2}{n \sum_j \underline{v}_j^2}, \quad \{\underline{x}_i\} \text{ en } \{\underline{t}_j\} \text{ o.o.}, \ \{\underline{u}_i\} \text{ en } \{\underline{v}_j\} \text{ o.o.}$$

Stel verder:

5.27.2 $\quad \lambda_1 = \sqrt{\sum_i \mu_{x,i}^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\sum_i \mu_{u,i}^2}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\sum_i \mu_{v,i}^2}$, verder:

$\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 > 0.$

Lemma II. Onder de bovenstaande gegevens geldt onder $\bar{\bar{H}}$o:

$\Pr\{\underline{T}_1 < c\} < \Pr\{\underline{T}_2 < c\}$

Bewijs:

Stel $\underline{T}_1 = \frac{\underline{t}}{\underline{n}}, \quad \underline{T}_2 = \frac{\underline{T}}{\underline{N}}$, dus $\underline{t}$ en $\underline{n}$ o.o. en $\underline{T}$ en $\underline{N}$ o.o.

5.27.3 $\quad F_{\underline{xc}}(X) = \Pr\{\underline{x}c < X\} = \Pr\{\underline{x} < \frac{X}{c}\} = F_{\underline{x}}(\frac{X}{c})$

Differentiatie:

$f_{c\underline{x}}(t) = \frac{1}{c} f_{\underline{x}}(\frac{t}{c})$.

De ongelijkheid (5.27.1) geldt dus ook voor $c\underline{r}$ en $c\underline{s}$, $c > 0$.

Eerst bewijzen we dat Pr $\{ \frac{\underline{T}}{\underline{n}} < c \} <$ Pr $\{ \frac{\underline{T}}{\underline{N}} < c \}$

5.28.1 $\quad \Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{n}} < c \} = \Pr \{ \underline{T} - \underline{n}c < o \} = \int_0^\infty F_{\underline{T}}(u) f_{\underline{n}c}(u)\, du$

$$= 1 - \int_0^\infty F_{\underline{n}c}(u)\, f_{\underline{T}}(u)\, du$$

evenzo:

$\Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{N}} < c \} = 1 - \int_0^\infty F_{\underline{N}c}(u) f_{\underline{T}}(u) du$. Met (5.27.1), (5.27.2) geldt dus:

$F_{\underline{N}c}(u) < F_{\underline{n}c}(u)$. Dus:

5.28.2 $\quad \Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{n}} < c \} < \Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{N}} < c \}$

Nu bewijzen we dat: $\Pr \{ \frac{\underline{t}}{\underline{n}} < c \} < \Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{n}} < c \}$

$$\Pr \{ \frac{\underline{t}}{\underline{n}} < c \} = \int_0^\infty F_{\underline{t}}(u)\, F_{\underline{n}c}(u)\, du$$

5.28.3 $\quad \Pr \{ \frac{\underline{T}}{n} < c \} = \int_0^\infty F_{\underline{T}}(u)\, F_{\underline{n}c}(u)\, du$

Volgens (5.27.1) en (5.27.2) geldt dus:

$F_{\underline{T}}(u) > F_{\underline{t}}(u)$

Dus geldt:

5.28.4

$\Pr \{ \frac{\underline{t}}{\underline{n}} < c \} < \Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{n}} < c \}$

Met (5.28.2) en (5.28.4) geldt dus:

$\Pr \{ \frac{\underline{t}}{\underline{n}} < c \} < \Pr \{ \frac{\underline{T}}{\underline{N}} < c \}$ of:

5.28.4 $\quad \Pr_{\underline{H}o} \{ \underline{T}_1 < c \} < \Pr_{\underline{H}o} \{ \underline{T}_2 < c \}$.

Volgens definitie (5.24.3) en volgens de definitie van T_1 geldt dat T_1 een zuivere toets is.

Dus:

5.29.1 $\Pr_{Ho} \{ \underline{T}_1 > F_\alpha \} = \alpha$ en:

$\Pr_{\bar{\bar{H}}o} \{ \underline{T}_1 > F_\alpha \} > \alpha$

<u>Stelling II</u>. Gegeven zij een statistische toets T_2 die onder de nulhypothese Ho een centrale F verdeling bezit en onder de alternatieve hypothese $\bar{\bar{H}}o$ verdeeld is als het quotient van twee nietcentrale χ^2 verdelingen - afgezien van constanten. In dat geval is de toets T_2 niet zuiver. D.w.z. aan het criterium van zuiverheid wordt niet voldaan.
Er geldt dus:

5.29.2 $\Pr_{Ho} \{ \underline{T}_2 > F_\alpha \} = \alpha$. Volgens (5.28.4) geldt:

$$\Pr_{\bar{\bar{H}}o} \{ \underline{T}_1 < c \} < \Pr_{\bar{\bar{H}}o} \{ \underline{T}_2 < c \}$$

dus $\exists \varepsilon > 0$:

5.29.3 $\Pr_{\bar{\bar{H}}o} \{ \underline{T}_2 > F_\alpha \} + \varepsilon = \Pr_{\bar{\bar{H}}o} \{ \underline{T}_1 > F_\alpha \} > \alpha$

$$\Pr \{ \frac{\underline{t}}{\underline{n}} < c \} = \int_0^\infty F_{\underline{t}}(u)\, f_{\underline{nc}}(u)\, du = \int_0^\infty \{ \int_0^v \sum_{k=0}^\infty a_k\, f_{2k+n}(u)\, du \}\, f_{\underline{nc}}(v) dv =$$

Verwisselen etc. is volgens analoge redeneringen als boven weer toegestaan:

5.29.4 $= \sum_{k=0}^\infty a_k \int_0^\infty F_{2k+n}(v)\, f_{\underline{nc}}(v)\, dv \leq 1$ vanwege $\sum_{k=0}^\infty a_k = 1$

en $\int_0^\infty F_{2k+n}(v) f_{\underline{nc}}(v)\, du \leq 1$.

Nu is $a_k = e^{-\frac{\lambda_1}{2}} \frac{(\frac{\lambda_1^2}{2})^k}{k!}$ a_k is een continue functie in λ_1, $\lambda_1 \geq 0$.

Dus, aangezien (5.29.4) uniform convergent is, is (5.29.4) ook een continue functie in λ_1.

$\Pr_{\bar{\bar{H}}o, \lambda_1=0} \{ \underline{T}_1 < F_\alpha \} = 1 - \alpha$. Volgens lemma I:

$Pr_{\overline{\overline{H}}o,\lambda_1=k_1}\{ \underline{T}_1 < F_\alpha \} > Pr_{\overline{\overline{H}}o,\lambda_1=k_2}\{ \underline{T}_1 < F_\alpha \}$ voor $k_1 < k_2$.

Dus:

$Pr_{\overline{\overline{H}}o,\lambda_1}\{ \underline{T}_1 > F_\alpha \}$ is een monotoon stijgende continue functie voor

toenemende λ_1, $\lambda_1 \geq 0$, met $Pr_{\overline{\overline{H}}o,\lambda_1=0}\{ \underline{T}_1 > F_\alpha \} = \alpha$.

Dan bestaat er dus een gebied Λ: $[o,\lambda_o)$ waarvoor geldt:

$Pr_{\overline{\overline{H}}o}\{ \underline{T}_1 > F_\alpha \} < \alpha + \delta$, met $o < \delta < \varepsilon$, $\lambda_1 \in \Lambda$.

Voor zo'n $\lambda_1 \in \Lambda$ geldt dus, met (5.29.3) :

$Pr_{\overline{\overline{H}}o}\{ \underline{T}_2 > F_\alpha \} + \varepsilon = Pr_{\overline{\overline{H}}o}\{ \underline{T}_1 > F_\alpha \} < \alpha + \delta$, $\delta < \varepsilon$:

$Pr_{\overline{\overline{H}}o}\{ \underline{T}_2 > F_\alpha \} < \alpha$. De toets T_2 is dus niet zuiver.

§ 6. De toets van Tukey voor niet-additiviteit.

We beschouwen model T:

6.31.1 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \lambda\alpha * \beta + \underline{e}$

We veronderstellen eerst dat α en β bekend zijn, $\alpha * \beta \neq \vec{0}$. We willen een toets construeren voor niet-additiviteit, d.w.z. $\lambda \neq 0$. De ruimte G speelt hierbij een grote rol, immers onder H_T geldt:

6.31.2 $\eta_G = \vec{0}$ (zie (4.19.2))

en onder $\bar{H}_T$:

6.31.3 $\eta_G = \gamma = \alpha * \beta$

Noem de ruimte opgespannen door $\alpha * \beta$ Q, dan blijkt uit (3.12.3) onder $\bar{H}_T$:

$\eta_G \in Q$ en dus

$\eta_{G-Q} = \vec{0}$.

De toets voor niet-additiviteit zullen we dus afhankelijk maken van de ruimte Q. Stel daarom (we kunnen in G één vector $v_{(k)}$, $k = m + n, \ldots, N$ willekeurig kiezen) $v_{(m+n)} = \frac{\alpha * \beta}{\|\alpha * \beta\|}$, $\alpha * \beta \in G$, de resterende $v_{(k)}$, $k = m+n+1, \ldots N$, worden weer onderling loodrecht (en normaal) gekozen, $v_{(k)} \perp v_{(m+n)}$. Dus geldt ook:

$\underline{z}_{m+n} = v'_{(m+n)}\,\underline{y}$.

Onder H_T geldt:

6.31.4 $E(\underline{Z}_{m+n}) = \underline{v}'_{(m+n)}\,E(\underline{y}) = 0$ want $E(y) \in A+B$, $v_{(m+n)} \in G$.

Onder $\bar{H}_T$ geldt:

6.31.5 $E(\underline{Z}_k) = v'_{(k)}\,E(\underline{y}) = 0$ voor $k \geq m+n+1$, omdat geldt $E(\underline{y}) = \eta_{A+B} + \alpha * \beta$, $E(\underline{y}) \in (A+B) + Q$. Deze ruimte wordt dus opgespannen door $v_{(1)}, \ldots, v_{(m+n)}$.

Uit (4.16.3) blijkt dat de { $\underline{z}_k$ } o.o zijn. Uit de lineaire transformatie met P volgt tevens dat { $\underline{z}_k$ } normaal verdeeld zijn. Onder de nulhypothese H_T geldt dus:

6.32.1 $$\frac{(mn - m - n)\,\underline{z}^2_{m+n}}{\sum\limits_{k=m+n+1}^{n} \underline{z}^2_k} \div F_{1,\, mn - m - n}, \text{ zie}$$

Onder $\bar{\bar{H}}_T$ geldt $E(\underline{z}^2_{m+n}) \neq 0$. De noemer van (6.32.1) blijft dus een centrale $\sigma^2\chi^2$ verdeling houden, de teller wordt nietcentraal verdeeld. (6.32.1) heeft dan dus een nietcentrale F verdeling. Volgens § 5 vormt (6.32.1) dan een zuivere toets.

$$\underline{z}^2_{m+n} = \{ v'_{(m+n)}\, \underline{y} \}^2 = \{ \frac{\alpha * \beta'}{\|\alpha * \beta\|}\, \underline{y} \} = \frac{\{\sum_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}\}^2}{\sum \alpha_i^2 \beta_j^2}$$

Voor elke keuze van { $v_{(k)}$ }, k = m+n, ..., N geldt, (4.17.3):
$u_G = \sum\limits_{k=m+n}^{n} \underline{Z}_k\, v_{(k)}$, dus

6.32.2 $$y_G^2 = \sum_{k=m+n}^{N} \underline{z}^2_k \stackrel{def}{=} SS_{int}$$

(6.32.1) wordt dus onder H_T

6.32.3 $$\frac{(mn-m-n)\,\dfrac{\{\sum_{ij} \alpha_i\beta_j\underline{y}_{ij}\}^2}{\sum_{ij}\alpha_i^2\beta_j^2}}{SS_{int} - \dfrac{\{\sum_{ij}\alpha_i\beta_j\underline{y}_{ij}\}^2}{\sum_{ij}\alpha_i^2\beta_j^2}} \div F_{1,\, mn-m-n}$$

terwijl onder $\bar{\bar{H}}_T$ (6.32.3) een nietcentrale F verdeling heeft. De geconstrueerde toets is dus een zuivere toets.

Notatie:

6.32.4 $$(6.32.3) \stackrel{def}{=} T(\alpha, \beta, m, n, \underline{y})$$

We zullen nu de ruimte $C * D \equiv G$ opspannen met behulp van het tensorproduct $p * q$, waarbij $p \in C$, $q \in D$.

Stel $\frac{p * q}{\|p * q\|} = v^*_{(m+n)}$. $v^*_{(m+n+v)}$, ..., $v^*_{(N)}$ worden weer op dezelfde manier gevormd als de $v_{(k)}$'s hiervoor ($k \geq m+n$). De transformatie matrix P wordt op analoge wijze als hiervoor (§ 4) gevormd.

Dan geldt dus (definitie):

$$\underline{z}^*_k = v^{*\prime}_{(k)} \underline{y}, \; k \geq m+n.$$

Onder H_T geldt volgens (4.19.2) :

$E_{(\underline{y})} \in A+B$, zodat, onder H_T:

$$E(\underline{z}^*_k) = E(v^{*\prime}_{(k)} \underline{y}) = v^{*\prime}_{(k)} E_{(\underline{y})} = 0, \; k \geq m+n.$$

Omdat $\{ z^*_k \}$ o.o. en normaal verdeeld zijn geldt de simultane verdeling van $\{ \underline{z}^*_k \}$, $k= m+n$, ..., N, onder H_T een normale verdeling is met verwachting o en variatie σ^2, voor alle p en q.

Dus:

6.33.1

$$\frac{(mn-m-n)\, \underline{z}^{*2}_{m+n}}{\sum\limits_{k=m+n+1}^{N} \underline{z}^{*2}_k} \div F_{1,mn-m-n}\text{, dus analoog met hiervoor:}$$

6.33.2

$$T(p,q,m,n,\underline{y}) \div F_{1,mn-m-n}$$

Onder $\bar{\bar{H}}_T$ ligt de situatie anders dan in het geval dat we α en β kennen. Immers:

$$E(\underline{z}^*_k) = v^{*\prime}_{(k)} E(\underline{y}) = v^{*\prime}_{(k)} \eta = v^{*\prime}_{(k)} \eta_{A+B} + v^{*\prime}_{(k)} \eta_G$$

$$= v^{*\prime}_{(k)} \eta_G \text{ voor } k \geq m+n$$

Er is interactie, dus $\eta_G \neq 0$.

η_G is i.h.a. een of andere lineaire combinatie van een willekeurige basis in G dus i.h.a. geldt:

$v^{*'}_{(k)}\ \eta_G \neq 0.$

Dus:

6.34.1 $\quad E^2\{\sum_{k=m+n+1}^{N} \underline{z}^*_k\} > 0.$

6.34.2 $\quad$ Stel nu dat $v^*_{(k)} \neq \pm v_{(m+n)}$

Uit (6.31.3) volgt dat:

$\eta_G = \eta_Q$, dus:

$\eta^2_G = \eta^2_Q = (v'_{(m+n)}\ y\ v_{(m+n)})^2 = E^2(\underline{z}_{m+n}).$

Uit (4.17.3) volgt voor willekeurige basis:

$\eta^2_G = \sum_{k=m+n}^{N} E^2\{\underline{z}^*_k\}$ want:

$\eta_G = \sum_{k=m+n}^{N} E\{z^*_k\}\ v^*_{(k)}$. Uit de aanname (6.34.2) volgt dat er

minstens 2 $E\{\underline{z}_k'\} \neq 0$ bestaan, immers:

$\eta_G = \eta_Q = E(\underline{Z}_{m+n})\ v_{(m+n)} = \sum_{k=m+n}^{N} E(z^*_k)\ \vec{v}_k = \eta_G.$

Dus onder $\bar{H}_T$:

6.34.3 $\quad E^2(\underline{z}_{m+n}) > E^2(\underline{z}^*_k)$ voor $k \geqslant m+n$.

De toets voor interactie (6.33.2) is dus, volgens § 5 een onzuivere toets, omdat:

$E^2(\underline{z}_{m+n}) > E(\underline{z}^*_{m+n})$, (6.34.3) , (teller van de toets) en:

$E^2\{\sum_{k=m+n+1}^{N} \underline{z}^*_k\} > 0$ (noemer van de toets).

We doen echter voor p en q een bijzondere keus , zodanig dat p en q stochastisch worden.

$\underline{p} = \underline{\tilde{\alpha}}$, $\underline{q} = \underline{\tilde{\beta}}$.

Omdat we nu met stochastische vectoren $\underline{v}^{*}_{(k)}$ moeten werken zullen we de simultane verdeling van $\{ \underline{z}^{*}_{k} \}$ onder H_T opnieuw moeten bekijken (k=m+n, ..., N).

Uit (4.18.5) en (4.18.6) blijkt dat $\underline{\tilde{\alpha}}$ en $\underline{\tilde{\beta}}$ uitsluitend van $\underline{y}_{A+B}$ afhangen.

Beschouw de simultane verdeling van $\{ \underline{z}^{*}_{k} \} \mid_{\underline{y}_{A+B}=u}$. Dit is een simultane normale verdeling met verwachting o en variantie σ^2 ($\{ \underline{z}^{*}_{k} \}$ zijn o.o), voor alle constante u, want $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ zijn nu constanten, daar $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ alleen van $\underline{y}_{A+B}$ afhangen. Dit geval hebben we hierboven ook al beschouwd. Beschouw nu de onconditionele verdeling van $\{ \underline{z}^{*}_{k} \}$.

Onder H_T geldt, $k \geqslant m+n$,

6.35.1 $\quad E \{ \underline{z}^{*}_{k} \} = E \{ \underline{v}^{*'}_{(k)} \underline{y} \} = E \{ \underline{v}^{*'}_{(k)} \underline{y}_G \} = E \{ \underline{v}^{*'}_{(k)} \} E \{ \underline{y}_G \} = 0$

$\underline{v}_k$ en $\underline{y}_G$ zijn o.o. omdat $\underline{v}^{*}_{k}$ alleen van $\underline{y}_{A+B}$ afhangt. Daar $\underline{y}_{A+B}$ en $\underline{y}_G$ twee onderling loodrechte stochastische vectoren zijn, zijn $\underline{y}_{A+B}$ en $\underline{y}_G$ onafhankelijk.

De conditionele simultane verdeling van $\{ \underline{z}^{*}_{k} \}$ is dus gelijk aan de onconditionele verdeling van $\{ \underline{z}^{*}_{k} \}$ dus analoog met het geval met gegeven p en q ($\underline{\tilde{\alpha}} \in C$, $\underline{\tilde{\beta}} \in D$) kunnen we onder H_T schrijven:

6.35.2 $\quad T(\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\beta}}, m, n, \underline{y}) \div F_{1,\ mn-m-n}$.

De conditionele verdeling van $\{ \underline{z}^{*}_{k} \}$, $k \geqslant m+n$, onder $\bar{H}_T$ is niet gelijk voor elke u. Hetzelfde geldt dus voor de onconditionele verdeling $E \{ \underline{z}^{*}_{k} \}$ is zelfs niet bekend (zie (6.35.1)) omdat $E \{ \underline{v}^{*'}_{(k)} \}$ zeer moeilijk te vinden is. De verdeling van (6.35.2) is dus onder $\bar{\bar{H}}_T$ niet te vinden. Over de zuiverheid van (6.35.2) is niets te zeggen, daar we de onconditionele verdeling van $\{ \underline{z}_k^* \}$ niet kennen. Er kunnen dus afhankelijkheden tussen de $\{ \underline{z}_k \}$'s optreden, zodat de beschouwing die bij vaste p en q gehouden werd (t.a.v. onafhankelijkheid), die leidde tot onzuiverheid van de toets ook niet meer van toepassing is. Toch mogen we verwachten dat de toets (6.35.2) een redelijke toets vormt voor de interactie. Immers: $\underline{\tilde{\alpha}}$ en $\underline{\tilde{\beta}}$ zijn consistente schatters, in de zin van m, n → oo want

$$\mathrm{Var}\,(\underline{\tilde{\alpha}}_{i.}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{mn}\right) \text{ en}$$

$$\mathrm{Var}\,(\underline{\tilde{\beta}}_{.j}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right).$$

M.a.w.: Bij m en n naderen $\underline{\tilde{\alpha}}$ en $\underline{\tilde{\beta}}$ tot resp. α en β . Maar dan is de toets zuiver (zie afleiding voor α en β); $T(\tilde{\alpha}, \beta, m, n, \underline{y})$ is dus een asymptotisch zuivere toets. Voor grote m en n kunnen we verwachten dat de toets goed is. Simulatie werd verricht voor:

$\mu = 8$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = +3$, $\alpha_3 = +2$,

$\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = -5$, $\beta_4 = +2$, $\beta_5 = -6$.

Voor Λ werd genomen:

$\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0{,}04$.

α en β werden op twee manieren geschat :

<u>1</u> door middel van de <u>zuivere schatters</u> $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$

<u>2</u> door middel van <u>kleinste kwadraten schatters</u> (k.k. schatters).

De k.k. schatters $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$ worden verkregen d.m.v. minimalisering van $\sum_{ij} (y_{ij} - \mu - \alpha_{i} - \beta_{j} - \Lambda\alpha_{i}\, \beta_{j})^2$ en zijn dus afhankelijk van Λ en dus ook van $\underline{y}_G$. De beschouwing, gehouden voor zuivere schatters gaat dus niet meer op. De uitdrukking (6.35.1) zal i.h.a. $\neq 0$ zijn, omdat $v^*_{(k)}$ ook van y_G afhangt. Toch zullen we deze toets gebruiken. We zullen de nulhypothese H_T verwerpen indien:

$T(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, m, n, y) - F_{\alpha'; 1, mn-m-n} > 0, \alpha' = 5\%$

of:

$T(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, m, n, y) - F_{\alpha'; 1, mn-m-n} > 0, \alpha' = 5\%$

Bij duizend simulaties vonden we:

<u>Fout van de 1e soort</u> (H_T niet terecht verworpen)

4,8% voor beide soorten schatters.

<u>Fout van de 2e soort</u> ($\bar{\bar{H}}_T$ niet terrecht verworpen)

12,7% voor de zuivere schatter
11,2% voor de k.k. schatters.

De toets met de k.k. schatters blijkt toch gunstiger te zijn. Dit was te vermoeden daar we de k.k. schatters verkregen d.m.v. een iteratief proces met als startwaarden $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$. zie § 11. Daarom zijn de fouten van de 1e soort ongeveer dezelfde.

§7. De toets van Mandel

In deze § zullen we een toets voor niet-additiviteit voor het model M, (3.12.4), (3.12.6) construeren. De voor deze toets gebruikte afleiding loopt vrijwel parallel met die voor het model T in §6. In zulke gevallen van een analoge afleiding zullen we volstaan met een verwijzing naar die §.

Model M:

7.38.1 $\quad \underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \tau * \beta + \underline{e}$, met $\tau \in C$, of ook wel:

7.38.2 $\quad \underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_i \beta_j + \underline{e}_{ij}$, met $\sum_i \tau_i = 0$.

We willen de hypothese H_M: $\tau = \vec{0}$ of $\tau_i = 0$, $\forall_i$, toetsen.

Als in §6 zullen we eerst veronderstellen dat $\alpha \in C$ en $\beta \in D$ bekend zijn. Dan ligt de onbekende vector $\tau * \beta$ in de ruimte $C * \beta$ omdat $\tau \in C$.

Stel C opgespannen door $c_{(1)}, \dots, c_{(m-1)}$ (C is (m-1)-dimensionaal), waarbij $\{c_{(k)}\}$, $k = 1,\dots,m-1$, orthogonale basisvectoren van C zijn.

Volgens stelling (1.3.1) en (1.4.1) zijn

$\dfrac{c_{(1)} * \beta}{||c_{(1)} * \beta||}, \dots, \dfrac{c_{(m-1)} * \beta}{||c_{(m-1)} * \beta||}$ nu ook orthogonale basisvectoren,

het is tevens het max. aantal orthonormale vectoren in $C * \beta$. Stel:

7.38.3 $\quad v_{(m+n)} = \dfrac{c_{(1)} * \beta}{||c_{(1)} * \beta||}, \dots, v_{(2m+n-2)} = \dfrac{c_{(m-1)} * \beta}{||c_{(m-1)} * \beta||}$.

Al deze vectoren liggen in G omdat $C * \beta \subset G$.

Volgens (4.19.2) geldt weer onder H_M:

7.38.4 $\quad E(y) \in A + B$.

Omdat $\tau * \beta \in C * \beta$, geldt, met (7.38.1), onder $\overline{H}_M$:

7.38.5 $\quad E(y) \in (A + B) + C * \beta$.

We zien dus dat, indien er sprake is van een interactie-vector $\tau * \beta$, deze in de ruimte $C * \beta$ moet liggen. De te construeren toets voor niet-additiviteit zullen we dus van deze ruimte afhankelijk maken.

Construeer nu verder een orthonormale basis $\{v_{(k)}\}$ voor G, waarin $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(2m+n-2)}$ reeds in (7.38.3) gedefiniëerd zijn. Definitie en eigenschappen van $\{\underline{z}_k\}$ analoog §4.

Onder H_M geldt:

$$E(\underline{z}_k) = E\{v'_{(k)}\,\underline{y}\} = v'_{(k)}\,E(\underline{y}) = 0 \text{ voor } k \geq m+n, \tag{7.39.1}$$

vanwege (7.38.4).

Onder $\overline{H}_M$ geldt:

$$E(\underline{z}_k) = E\{v'_{(k)}\,\underline{y}\} = v'_{(k)}\,E(y) = 0 \text{ voor } k \geq 2m+n-1 \tag{7.39.2}$$

vanwege (7.38.5).

Dus geldt onder H_M (het additieve model):

$$\frac{(m-1)(n-2)\sum\limits_{k=m+n}^{2m+n-2} \underline{z}_k^2}{(m-1)\sum\limits_{k=m+n-1}^{N} \underline{z}_k^2} \div F_{(m-1),(m-1)(n-2)} \tag{7.39.3}$$

omdat $\{\underline{z}_k\} \div N(0,\sigma)$ en o.o. onder H_M.

Onder $\overline{H}_M$ heeft (7.39.3) een niet-centrale F-verdeling vanwege (7.39.2): $\exists\, k,\ k = m+n, \ldots, 2m+n-2, : E(\underline{z}_k) \neq 0$.

Dus een toets, die verdeeld is als de breuk in (7.39.3), is een zuivere toets.

De moeilijkheid is de vectoren $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(2m+n-2)}$ te vinden, oftewel de vectoren $c_{(1)}, \ldots, c_{(m-1)}$ op te zoeken, zonder een ingewikkeld orthogonalisatie-procedee te verrichten. Ter berekening van de $\{\underline{z}_k\}$, $k = m+n, \ldots, 2m+n-2$, zullen we echter een andere weg volgen.

Beschouw in de m-dimensionale ruimte V_m - dit is de lineaire ruimte van alle vectoren met m componenten - de ruimtes L_m en C. L_m is de ruimte van de vectoren met gelijke componenten, bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix},$$ waarin k een bepaald getal is (er zijn dus m van die k's).

L_m is dus 1-dimensionaal. $C \subset V_m$ is (m-1)-dimensionaal. $C \perp L_m$, want voor de componenten van elke vector $c \in C$ geldt: $\sum_i c_i = 0$. Dus $\sum_i kc_i = k \sum_i c_i = 0$.

Dan geldt dus:

$V_m = C + L_m$.

Evenzo geldt dus, met behulp van de stellingen (1.3.1) en (1.4.1):

$V_m * \beta = C * \beta + L_m * \beta$, omdat de dimensies van $C * \beta$ en $L_m * \beta$ weer resp. m-1 en 1 zijn. Analoog met §2 geldt:

7.40.1 $\underline{y}_{V_m * \beta} = \underline{y}_{C * \beta} + \underline{y}_{L_m * \beta}$, dus:

7.40.2 $\underline{y}_{C * \beta} = y_{V_m * \beta} - y_{L_m * \beta}$.

Stel $t_{(i)} \in V_m$, $t_{(i)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ m \end{array}$, dan is $\{t_{(i)}\}$ een

orthonormale basis voor V_m,(i = 1,...,m).

Stel $\underline{1}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{1}_m \in L_m$. $\dfrac{\underline{1}_m}{\sqrt{m}}$ is een normale basis vector voor L_m.

Stel verder:

7.40.3 $w_{(i)} = \dfrac{t_{(i)} * \beta}{\sqrt{\sum_j \beta_j^2}}$, $w_{(i)} = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_j \beta_j^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \dots (i).$

$\{w_{(i)}\}$ is dus een orthonormale basis voor $V_m * \beta$ (zie stelling (1.3.1) en (1.4.1).

Evenzo:

stel

7.40.4 $w_L = \dfrac{\underline{1} * \beta}{\sqrt{m \cdot \sum_j \beta_j^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{m \cdot \sum_j \beta_j^2}} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$.

De projectie van y op $V_m * \beta$ wordt:

7.41.1 $$\underline{y}_{V_m * \beta} = \sum_i \frac{\underline{y}' (t_{(i)} * \beta)}{\sqrt{\sum_j \beta_j^2}} w_{(i)},$$

en op L_m:

7.41.2 $$y_{L_m * \beta} = \frac{y' (1_m * \beta)}{\sqrt{m - \sum_j \beta_j^2}} .$$

Het i,j^e-element van $y_{C * \beta} = y_{V_m * \beta} - y_{L_m * \beta}$ wordt dus (zie (7.40.3), (7.40.4), (7.41.1) en (7.41.2)):

7.41.2' $$\sum_j \frac{\beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_j \beta_j^2} \beta_j - \frac{1}{m} \frac{\sum_{ij} \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_j \beta_j^2} \beta_j . \text{ Stel } \sum_j \frac{\beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_j \beta_j^2} = \underline{t}_i .$$

Dus:

7.41.3 $$\underline{y}^2_{C * \beta} = \sum_i (\underline{t}_i - \underline{t}_.)^2 \sum_j \beta_j^2 .$$

Omdat $C * \beta$ opgespannen is door $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(2m+n-2)}$, geldt voor de projectie $\underline{y}_{C * \beta}$:

$$\underline{y}_{C * \beta} = \sum_{k=m+n}^{2m+n-2} \underline{y}' v_{(k)} v_{(k)} = \sum_{k=m+n}^{2m+n-2} \underline{z}_k v_{(k)}, \text{ dus:}$$

$$\underline{y}^2_{C * \beta} = \sum_{k=m+n}^{2m+n-2} \underline{z}_k^2 = \sum_i (t_i - t_.)^2 \sum_j \beta_j^2 .$$

Omdat $\underline{y}^2_G = \sum_{k=m+n}^{N} \underline{z}_k^2 = \underline{SS}\text{int}$ (zie 4.17.3)), kunnen we (7.39.3) schrijven als:

7.41.4 $$\frac{(m-1)(n-2) \sum_i (\underline{t}_i - \underline{t}_.)^2 \sum_j \beta_j^2}{(m-1)\{\underline{SS}\text{int} - \sum_i (\underline{t}_i - \underline{t}_.)^2 \sum \beta_j^2\}} \overset{\text{def}}{=} M(\beta, m, n, \underline{y}).$$

Onder H_M is (7.41.4) verdeeld als een centrale F-verdeling, met resp. m-1 en (m-1).(n-2) vrijheidsgraden, onder $\overline{H}_M$ heeft (7.41.4) een niet-centrale F-verdeling.
$M(\beta,m,n,\underline{y})$ is dus een zuivere toets, die niet afhangt van α.
Analoog §6 gaan we voor β een willekeurige vector $q \in D$ invullen. (Voor α is dit niet nodig, daar (7.41.4) niet van α afhangt.) Onder H_M geldt altijd:
$E(y) \in A + B$. Voor iedere keuze van $q \neq \vec{0}$ kunnen we G opspannen d.m.v. $\{v^*_{(k)}\}$ die afhankelijk zijn van q, analoog hierboven. Stel verder $\underline{z}^*_{(k)} = v^{*\prime}_{(k)}\,\underline{y}$. Onder H_M geldt dus:
$M(q,m,n,\underline{y}) \div F_{(m-1),(m-1)(n-2)}$.
Bekijk nu $\overline{H}_M$.
Stel: We kennen τ en β niet. De ligging van $\tau * \beta$ is dus niet bekend.
Dus geldt:

$E(\underline{z}^*_k) = v^{*\prime}_{(k)}\,E(\underline{y})$. Stel $k \geq m+n$, dan:

$$E(\underline{z}^*_k) = v^{*\prime}_{(k)}\,E(\underline{y}_{A+B}) + v^{*\prime}_{(k)}\,E(\underline{y}_G) = v^{*\prime}_{(k)}\,E(\underline{y}_G)$$

$$= v^{*\prime}_{(k)} \cdot \tau * \beta \neq \vec{0}$$ met waarschijnlijkheid 1, omdat $v^{*\prime}_{(k)}$ van een willekeurige $q \in D$ afhangt. Het linkerlid van (7.39.3) is onder $\overline{H}_M$ dus verdeeld als een quotiënt van twee niet-centrale χ^2-verdelingen - afgezien van constanten. Volgens §5 is een toets die onder de nul-hypothese een centrale F-verdeling heeft, en onder de alternatieve hypothese de genoemde verdeling heeft, een onzuivere toets.
$M(q,m,n,\underline{y})$ is dus een onzuivere toets.
Stel nu weer $v^*_{(m+n)},\ldots,v^*_{(N)}$ afhankelijk van $\underline{\tilde{\alpha}}$ en $\underline{\tilde{\beta}}$. Dan worden de basisvectoren stochastische grootheden. Omdat de toets $M(\beta,m,n,\underline{y})$ alleen van β afhangt, zullen we de basis voor G ook alleen van $\underline{\tilde{\beta}}$ af laten hangen, daar deze schatter asymptotisch naar β gaat.
Zoals in §6 is aangetoond, is onder H_M (= nulhypothese: additiviteit) de simultane verdeling van $\{\underline{z}_k\}$, $k = m+n, \ldots, N$, een normale verdeling met verwachting 0 en variantie σ^2, $\underline{z}_k$ o.o. In §6 is dit afgeleid voor $\underline{v}^*_k$, afhankelijk van $\underline{\tilde{\alpha}}$ en $\underline{\tilde{\beta}}$. Hetzelfde geldt dus voor $\underline{v}^*_k$'s, die alleen van $\underline{\tilde{\beta}}$ afhangen.

Stel dat $\underline{v}^{*}_{(m+n)}, \ldots, \underline{v}^{*}_{(2m+n-2)}$ de ruimte $C * \underline{\tilde{\beta}}$ opspannen-analoog bij vaste β en dat $\{\underline{v}^{*}_{(k)}\}$ de ruimte G opspant $(k = m+n, \ldots, N)$.
Er geldt dus, onder H_M (analoge afleiding als met bekende β):

7.43.1 $$\frac{(m-1)(n-2) \sum\limits_{k=m+n}^{2m+n-2} \underline{z}_k^{*2}}{(m-1) \sum\limits_{k=2m+n-1}^{N} \underline{z}_k^{*2}} = M(\underline{\tilde{\beta}},m,n,\underline{y}) \div F_{(m-1),(m-1)(n-2)} .$$

Onder $\overline{H}_M$ is de simultane verdeling van $\{\underline{z}_k\}$ niet bekend, zodat de verdeling van (7.43.1) onder $\overline{H}_M$ ook niet bekend is.
Wèl weten we, dat:

$\text{Var}(\underline{\tilde{\beta}}_i) = \sigma^2(\frac{1}{m} - \frac{1}{mn})$, waaruit volgt dat $\underline{\tilde{\beta}}$ een consistente schatter is voor $m \to \infty$.
Voor $m \to \infty$ gaat $M(\underline{\tilde{\beta}},m,n,\underline{y}) \to M(\beta,m,n,\underline{y})$. $M(\beta,m,n,\underline{y})$ is een zuivere toets. $M(\underline{\tilde{\beta}},m,n,\underline{y})$ is dus een asymptotisch zuivere toets.
Het is dus redelijk om $M(\underline{\tilde{\beta}},m,n,\underline{y})$ als toets voor niet-additiviteit te nemen.
In §11 zullen we ook nog de k.k.-schatters voor β uitrekenen. Deze zijn via iteratieve weg te verkrijgen, waarbij we als start-waarde de zuivere schatter van β nemen. Hoewel, formeel gezien, $M(\underline{\hat{\beta}},m,n,\underline{y})$ geen bekende verdelingsfuncties heeft, blijkt toch weer, dat $M(\underline{\hat{\beta}},m,n,\underline{y})$ een iets gunstiger toetsingsgrootheid is dan $M(\underline{\tilde{\beta}},m,n,\underline{y})$.
We zullen H_M verwerpen, indien
$M(\tilde{\beta},m,n,y) - F_{(m-1),(m-1)(n-2)}: \alpha' > 0$ of:
$M(\hat{\beta},m,n,y) - F_{(m+1),(m-1)(n-2)}: \alpha' > 0$. ($\alpha' = 5\%$.)
Bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% kregen we voor 1000 simulaties:

<u>Fouten van de eerste soort:</u>

5,1% voor zuivere en k.k.-schatters in de toets.

<u>Fouten van de tweede soort:</u>

13,5% voor zuivere schatters in de toets.

12,6% voor k.k-schatters in de toets.

Genomen waarden:

$\mu = 6$,

$\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = -8$

$\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = -2$, $\beta_4 = -3$, $\beta_5 = -5$

$\tau_1 = 0{,}03$, $\tau_2 = 0{,}01$, $\tau_3 = -0{,}1$, $\tau_4 = -0{,}02$, $\tau_4 = -0{,}04$, dus

$\sum_i \tau_i^2 = -0{,}013$

Opgemerkt dient te worden dat economisch gezien het beter is om te toetsen d.m.v. zuivere schatters, daar de k.k-schatters een lang iteratief procedee vragen en slechts een weinig beter resultaat opleveren.

Door de keuze van $\tilde{\underline{\beta}}$ krijgen we nog een vereenvoudiging. Volgens (7.41.2) geldt bijvoorbeeld

$$\tilde{\underline{t}}_i = \frac{\sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j \underline{y}_{ij}}{\sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2}. \qquad \underline{t}_. \text{ wordt dan:}$$

$$\underline{t}_. = \frac{1}{m} \frac{\sum_{ij} \tilde{\underline{\beta}}_j \underline{y}_{ij}}{\sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2} = \sum_j \frac{\tilde{\underline{\beta}}_j \underline{y}_{.j}}{\sum \tilde{\underline{\beta}}_j^2} = \sum_j \frac{\tilde{\underline{\beta}}_j (\underline{y}_{.j} - \underline{y}_{..})}{\sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2} = \frac{\sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2}{\sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2} = 1.$$

Dus:

$$7.44.1 \qquad M(\underline{\beta}, m, n, \underline{y}) = \frac{(m-1)(n-2) \sum_i (\tilde{\underline{t}}_i - 1)^2 \sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2}{(m-1)\{SSint - \sum_i (\tilde{\underline{t}}_i - 1)^2 \sum_j \tilde{\underline{\beta}}_j^2\}}.$$

Dit is de toets van Mandel voor niet-additiviteit.

§ 8 Een toets voor niet-additiviteit in het model V.

De afleiding voor de toets voor niet-additiviteit in het model V loopt weer in grote lijnen parallel met de afleidingen gegeven in § 6 en § 7.

Model V - zie (3.14.1) - :

8.45.1 $\underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i \, a_i = \sum_j \beta_j \, b_j + \alpha * r + s * \beta + \underline{e}$,

met $s \perp \alpha$, $r \in D$, $s \in S$ (zie pag. 14)

$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha_i \, r_j + s_i \, \beta_j + \underline{e}_{ij}$

$\alpha * r + s * \beta \in \alpha * D + S * \beta$, waarbij

8.45.2 $S \subset C$ en $S \perp \alpha$.

Stel α en β bekend. Eis: $\alpha \neq \vec{0}$ en $\beta \neq \vec{0}$.

8.45.3 Span $S * \beta$ op door $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(2m+n-3)}$;
(S is m-2 dimensionaal).

8.45.4 span $\alpha * D$ op door $v_{(2m+n-2)}, \ldots, v_{(2m+2n-4)}$.

Span G op door $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(N)}$. Dit kan omdat:

$S * \beta \subset G$, $\alpha * D \subset G$, $S * \beta \perp \alpha * D$ omdat $S \perp \alpha$, zie (8.45.2).
Definieer $\underline{z}_k$ als in § 4, § 6 en § 7.
Onder H_v (additiviteit in het model V) geldt:

8.45.5 $E(\underline{z}_k) = 0$ voor $k \geq m+n$.

Onder $\bar{H}_v$ geldt:

$E(\underline{y}) \in \{A+B\} + S * \beta + \alpha * D$, dus met (8.45.3) en (8.45.4)

8.45.6 $E(\underline{z}_k) = 0$ voor $k \geq 2m + 2n - 3$ en:

8.45.7 $E(\underline{z}_k) \neq 0$ voor $k = m + n, \ldots, 2m + 2n - 4$.

Onder H_v geldt dus:

$$8.46.1 \quad \frac{\{\sum_{k=m+n}^{2m+n-3} z_k^2 + \sum_{k=2m+n-2}^{2m+2n-4} \underline{z}_k^2\}\ (m-2)(n-2)}{\{\underline{SS}_{int} - \sum_{k=m+n}^{2m+2n-4} \underline{z}_k^2\}\ (m+n-3)} \div F_{(m+n-3),(m-2)(n-2)}$$

Vanwege (8.45.7) en (8.46.1) geldt dat het linkerdeel van (8.46.1) onder $\bar{\bar{H}}_v$ een niet-centrale F verdeling heeft met respectievelijk (m+n-3) en (m-2)(n-2) vrijheidsgraden. Voor bekende α en β vormt een toets met de struktuur van het linkerlid van (8.46.1) een zuivere toets voor interactie (zie § 5). We zullen nu deze toets uitdrukken in de bekende grootheden. Opgemerkt zij weer dat de toets (8.46.1) weer afhankelijk gesteld is van de ruimte waarin de interactie vector ligt, n.l. $S * \beta + \alpha * D$.

Stel Q is een ruimte opgespannen door $\frac{\alpha * \beta}{\|\alpha * \beta\|}$.

$S \perp \alpha$, dus $S * \beta \perp \alpha * \beta$, dus $S * \beta \perp Q$. $S * \beta \subset C$, $\alpha * \beta \in C * \beta \Rightarrow Q \in C * \beta$.
De ruimte is m-2 dimensionaal, de ruimte $S * \beta$ is dus ook (m-2) dimensionaal. Omdat, verder, Q één-dimensionaal is geldt:

$S * \beta + Q = C * \beta$, dus geldt voor de projecties van $\underline{y}$:

$\underline{y}_{S * \beta} + \underline{y}_Q = \underline{y}_{C * \beta}$, of:

$$8.46.2 \qquad \underline{y}_{S * \beta} = \underline{y}_{C * \beta} - \underline{y}_Q.$$

Uit (8.45.3) volgt, analoog § 7,:

$\underline{y}^2_{S * \beta} = \sum_{k=m+n}^{2m+n-3} \underline{z}_k^2$. $\underline{y}^2_{S * \beta}$ kunnen we ook in α, β en $\underline{y}$ uitdrukken.

Analoog §6 is de projectie van $\underline{y}$ op Q:

$$\underline{y}' \frac{\alpha * \beta}{\|\alpha * \beta\|} \cdot \frac{\alpha * \beta}{\|\alpha * \beta\|} = \frac{\sum_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2}\, \alpha * \beta.$$ De i, j^e component van deze vector is dus:

8.47.1 $$\frac{\sum_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2} \alpha_i \beta_j$$

Uit §7, &7.41.2')kennen we de i,j^e component van $\underline{y}_C * \beta$. Deze is:

8.47.2 $$\underline{t}_i \beta_j - \underline{t}_{.} \beta_j, \text{ waarin } \underline{t}_i = \frac{\sum_{ij} \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_j \beta_j^2}$$

De i,j^e component van $\underline{y}_S * \beta$ wordt dus, met (8.46.2) :

8.47.3 $$\underline{t}_i \beta_j - \underline{t}_{.} \beta_j - \frac{\sum_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2} \alpha_i \beta_j$$

Dus:

8.47.4 $$\underline{y}_S^2 * \beta = \sum_{k=m+n}^{2m+n-3} \underline{z}_k^2 = \sum_i \left\{ \underline{t}_i - t_{.} - \frac{\sum_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2} \alpha_i \right\}^2 \sum_j \beta_j^2$$

Analoog aan § 7 kunnen we met (8.45.4) nagaan dat:

$$\underline{y}_\alpha^2 * D = \sum_{k=2m+n-2}^{2m+2n-4} \underline{z}_k^2$$

Het ij^e element van $\underline{y}_\alpha * D$ is volkomen op dezelfde wijze te berekenen als het ij^e element van $\underline{y}_C * \beta$: vervang β_j door α_i en vervang de bijbehorende somindices. Dus:

8.47.5 ij^e element van $\underline{y}_\alpha * D$: $\underline{w}_j \alpha_i - \underline{w}_{.} \alpha_i$, waarin

$$\underline{w}_j \overset{def}{=} \frac{\sum_{ij} \alpha_i \underline{y}_{ij}}{\sum_i \alpha_i^2}$$ Dus:

$$\underline{y}_\alpha^2 * D = \sum_j \{\underline{w}_j - \underline{w}_{.}\}^2 \sum_i \alpha_i^2 = \sum_{k=2m+n-2}^{2m+2n-4} \underline{z}_k^2$$

wordt dus, indien we stellen:

$$\underline{P}^2 = \sum_{k=m+n}^{2m+2n-4} \underline{z}_k^2 = \sum_i \left\{ \underline{t}_{i\circ} - \underline{t}_{\circ\circ} - \frac{\sum_{ij} \alpha_{\circ i} \beta_{\circ j} \underline{y}_{ij}}{\sum_{ij} \alpha_{\circ i}^2 \beta_{\circ j}^2} \right\}^2, \sum_j \beta_{\circ j}^2 + \sum_j \left\{ \underline{w}_{\circ j} - \underline{w}_{\circ\circ} \right\}^2 \sum_i \alpha_{\circ i}^2$$

$$= \underline{y}^2_{S * \beta} + \underline{y}^2_{\alpha * D};$$

8.48.1 $$\frac{\underline{P}^2 (m-2)(n-2)}{(\underline{SS}_{\circ int} - \underline{P}^2)(m+n-3)} \overset{def}{=} V(\alpha, \beta, m, n, \underline{y}).$$

Onder H_v geldt dus:

8.48.2 $V(\alpha, \beta, m, n, \underline{y}) \div F_{(m+n-3),(m-2)(n-2)}$

en onder $\bar{\bar{H}}_V$ is $V(\alpha, \beta, m, n, \underline{y})$ een nietcentrale F-verdeling *).

Analoog weer aan § 6 en § 7 geldt dat voor willekeurige $p \in C$ en $q \in D$ $V(p, q, m, n, \underline{y})$ een niet-zuivere toets voor niet-additiviteit is. Evenzeer geldt ook dat onder H_v.

8.48.3 $V(\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\beta}}, m, n, \underline{y}) \div F_{(m+n-3),((m-2)(n-2)}$,

maar dat de verdeling van $V(\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\beta}}, m, n, \underline{y})$ onder $\bar{\bar{H}}_v$ niet bekend is. Daar $\underline{\tilde{\alpha}}$ en $\underline{\tilde{\beta}}$ consistente schatters zijn is $V(\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\beta}}, m, n, \underline{y})$ een asymptotisch zuivere toets. We mogen dus verwachten dat $V(\underline{\tilde{\alpha}},\underline{\tilde{\beta}},m,n,y)$ een redelijke toets voor niet-additiviteit is.

Ook kunnen we weer k.k.-schatters toepassen, welke in § 11 berekend zijn. Bij berekening van deze k.k. schatters nemen we weer de zuivere schatters als startwaarde.

---

*) Dus $V(\alpha,\beta,m,n,\underline{y})$ is een zuivere toets voor niet-additiviteit in het model V.

§ 9. Modelkeuze

We kunnen ons afvragen of, indien we bijvoorbeeld gevonden hebben dat model M toepasbaar is, ook model T te gebruiken zou zijn. Dit is heel wel denkbaar, immers model T is een bijzonder geval van model M (stel maar $\tau = \alpha$).
Evenzo kunnen we ons afvragen of we, gegeven model T, niet net zo goed model M hadden kunnen gebruiken.
In deze § zullen we aannemen dat er steeds interactie optreedt, daar anders geen verschil tussen de genoemde modellen bestaat.
De toetsen worden weer eerst voor α en β (uit het model) afgeleid.
Daarna zullen we voor α en β de consistente schatters $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ invullen, zoals we in § 6, § 7 en § 8 gedaan hebben.
Stel $\alpha \neq \vec{0}$ en $\beta \neq \vec{0}$.

Keuze tussen model M en model T.

Model M:

9.49.1 $$\underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i \, a_i + \sum_j \beta_j \, b_j + \tau * \beta + \underline{e}.$$

Er is aangetoond dat, indien we model M aannemen, er interactie optreedt. De vraag is: is deze interactie te wijten aan de interactie vector zoals die bij Mandel optreedt ($\tau * \beta$) of aan de interactie zoals die bij Tukey ($\Lambda \, \alpha * \beta$) optreedt?

Model T:

9.49.1' $$\underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i \, a_i + \sum_j \beta_j \, b_j + \Lambda \, \alpha * \beta + \underline{e}.$$

$\tau * \beta \in C * \beta$. Stel $C * \beta$ opgespannen door $\{ c_{(k)} * \beta \}$, $k = 1, \ldots, m-1$, $c_{(k)}$ zijn onderling orthogonale vectoren in C.
Stel $c_{(1)} = \alpha$. Dan:

9.49.2 $$\tau * \beta = \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k \, c_{(k)} * \beta,$$ waarin γ_k scalaire constanten zijn.

(9.49.2) wordt met $c_{(1)} = \alpha$:

$\tau * \beta = \gamma_1 \; \alpha * \beta \; + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k \, c_{(k)} * \beta$. Stel $\gamma_1 = \lambda$, dan wordt

(9.49.1) :

$$9.50.1 \quad \underline{y} = \mu \ell + \sum_i \alpha_i \, a_i + \sum_j \beta_j \, b_j + \lambda \, \alpha * \beta + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k c_k * \beta \text{, dus:}$$

$$9.50.2 \quad \eta = \mu \ell + \sum_i \alpha_i \, a_i + \sum_j \beta_j \, b_j + \lambda \, \alpha * \beta + \sum_{k=2}^{m-1} \gamma_k \, c_k * \beta \, .$$

Span G op door $\{ v_{(k)} \}$, $k=m+n, \ldots, N$. $C * \beta \subset G$, dus:

$C * \beta$ kunnen we opspannen door $m-1$ orthonormale vectoren $\{ v_{(k)} \}$, $k=m+n, \ldots, 2m+n-2$. Stel:

$$v_{(m+n)} = \frac{\alpha*\beta}{\|\alpha*\beta\|}, \; v_{(k)} = \frac{c_{(k-m-n+1)} *\beta}{c_{(k-m-n+1)} *\beta}, \; k=m+n+1, \ldots, 2m+n-2.$$

Stel weer $\underline{z}_k = v'_{(k)} \, \underline{y}$

Uit (7.41.3) blijkt:

$$9.50.3 \quad \underline{y}^2_{C*\beta} = \sum_{k=m+n}^{2m+n-2} \underline{z}^2_k = \sum_i (\underline{t}_i - \underline{t}_\circ)^2 \sum_j \beta^2_j, \; \underline{t}_i = \frac{\sum_j \underline{y}_{ij} \, \beta_j}{\sum_j \beta^2_j}$$

Evenzo, indien Q opgespannen is door $\frac{\alpha*\beta}{\|\alpha*\beta\|}$,

$$9.50.4 \quad \underline{y}^2_Q = \underline{z}^2_{m+n} = \frac{\{ \sum_{ij} \underline{y}_{ij} \, \alpha_i \, \beta_j \}^2}{\sum_{ij} \alpha^2_i \, \beta^2_j}$$

Geldt model T dan geldt weer - zie § 6 -:

$$9.50.5 \quad E(\underline{z}_k) = 0 \text{ voor } k \geqslant m + n + 1.$$

Geldt model M dan geldt weer – zie § 7 –:

9.51.1 $E(\underline{z}_k) = 0$ voor $k \geq 2m + n - 1$.

Onder $\bar{\bar{H}}_T$ geldt dus, met :

9.51.2
$$\frac{(m-1)(n-2) \sum\limits_{k=m+n+1}^{2m+n-2} \underline{z}_k^2}{(m-2) \sum\limits_{k=2m+n-1}^{N} \underline{z}_k^2} \div F_{(m-2),\ (m-1)(n-2)},$$

daar de $\{ \underline{z}_k \}$ voor $k \geq m+n+1$ $N(0,6)$ en o.o. zijn.

We bekijken nu het linkerdeel van (9.51.2) onder $\bar{\bar{H}}_M$, waarbij we van de veronderstelling uitgaan dat het model T niet uitsluitend geldt. D.w.z. dat:

$\exists k$, $k=m+n+1$, ..., $2m+n-2$, met $E(\underline{z}_k) \neq 0$.

Onder die voorwaarde is het linkerdeel van (9.51.2) een niet-centrale F verdeling met (m-2) en (m-1)(n-2) vrijheidsgraden.
Met (9.50.3) en (9.50.4) kunnen we (9.51.2) schrijven als:

9.51.3
$$\frac{(m-1)(n-2)\left\{ \sum\limits_i (\underline{t}_i - \underline{t}_\circ)^2 \sum\limits_j \beta_j^2 - \dfrac{\{ \sum\limits_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij} \}^2}{\sum\limits_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2} \right\}}{(m-2)\ \{ \underline{SS}_{int} - \sum\limits_i (\underline{t}_i - \underline{t})^2 \sum\limits_j \beta_j^2 \}} \stackrel{def}{=} MT\ (\alpha,\beta,m,n,\underline{y})$$

met $\underline{SS}_{int} = \sum\limits_{k=m+n}^{N} \underline{z}_k^2$.

(9.51.3) nu, toetst $\bar{\bar{H}}_T$ met alternatief $\bar{\bar{H}}_M$. Onder dat alternatief is (9.51.3) niet-centraal F verdeeld, onder $\bar{\bar{H}}_T$ is (9.51.3) centraal F verdeeld. (9.51.3) is met betrekking tot deze twee hypothesen dus een zuivere toets. We moeten echter schatters voor α en β gebruiken:

9.51.4 $MT\ (\tilde{\underline{\alpha}}, \tilde{\underline{\beta}}, m, n, \underline{y})$.

De verdeling van (9.51.4) is – zie § 6 en § 7 – onder beide hypothezen niet bekend. (9.51.4) is wel een asymptotisch zuivere toets, zodat het redelijk is om hem te gebruiken als modeltoets.

Geldt nu, $\alpha' = 5\%$,

$MT(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, m, n, y) - F_{\alpha', (m-2),(m-1)(n-2)} < 0$ dan

verwerpen we model M en dan nemen we aan dat model T ten grondslag ligt aan de verrichte waarnemingen.

Deze procedure is met k.k.-schatters ook uit te voeren. Gezien de ervaringen met k.k.-schatters bij voorgaande simulaties lijkt het waarschijnlijk dat $MT(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, m, n, y)$ een iets groter onderscheidingsvermogen heeft dan $MT(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, m, n, y)$.

Keuze tussen model V en model M.

Gegeven een interactie in model V willen we uitmaken of deze interactie uit een model M komt of niet. We volgen dezelfde procedure als hierboven. We zullen de resultaten als afgeleid in § 8 hier gebruiken.

Model V:

9.52.1 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \alpha * r + s * \beta + \underline{e}$, $s \perp \alpha$.

We toetsen of $r = \vec{0}$, dus:

9.52.2 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + s * \beta + \underline{e}$. (Model $V(S * \beta)$)

met $s \perp \alpha$. D.w.z.: het is onmogelijk hier nog eens $\alpha * \beta$ af te splitsen. Indien dus gevonden is dat $r = \vec{0}$ dan weten we dat (9.52.1) een model van Mandel is en dat de interactie niet te wijten kan zijn aan het model T. Geldt $s = \vec{0}$ dan krijgen we:

9.52.3 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j + \alpha * r + \underline{e}$. (Model $V(\alpha * D)$)

$r \in D$, dus we kunnen schrijven:

$\alpha * r = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \alpha * d_{(k)}$, waarin $\{ d_{(k)} \}$ de basis is voor de ruimte D. Kies $d_{(1)} = \beta \in D$:

$\alpha * r = \gamma_1 \; \alpha * \beta + \sum_{k=2}^{n-1} \gamma_k . \; \alpha * d_{(k)}$. $\{ \gamma_k \}$ zijn constanten met $k=1, \ldots, n-1$.

M.a.w.: Vinden we model $V(\alpha * D)$ - dit is een Mandel model! - dan kunnen we nog onderzoeken, met behulp van de hierboven beschreven methode, of we ook het model T kunnen accepteren.

Zie (8.45.2) en (8.45.3) :

Span $S * \beta$ op door $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(2m+n-3)}$

Span $\alpha * D$ op door $v_{(2m+n-2)}, \ldots, v_{(2m-2n-4)}$

Geldt uitsluitend model $V(S * \beta)$ dan kunnen we dus schrijven:

9.53.1 $\quad E(\underline{z}_k) = 0$ voor $k \geq 2m+n-2$.

Geldt uitsluitend model $V(\alpha * D)$ dan geldt:

9.53.2 $\quad E(\underline{z}_k) = 0$ voor $k = m+n, \ldots, 2m+n-3$ èn voor $k \geq 2m+2n-3$.

Geldt uitsluitend model $V(S * \beta)$ dan kunnen we dus schrijven:

9.53.3 $$\frac{(m-2)(n-2) \sum_{k=2m+n-2}^{2m+2n-4} \underline{z}_k^2}{(n-1) \sum_{k=2m+2n-3}^{N} \underline{z}_k^2} \div F_{(n-1),\ (m-2)(n-2)},$$

terwijl het linkerdeel van (9.53.3) onder $\bar{\bar{H}}_V$, met de restrictie dat $V(S * \beta)$ niet uitsluitend geldt, een niet-centrale F verdeling heeft. In dat geval hebben we immers een mengsel van de modellen van $V(\alpha * D)$ en $V(S * \beta)$, zodat $\exists k$, $k=2m+n-2, \ldots, 2m+2n-4$, met $E(\underline{z}_k) \neq 0$. Ten aanzien van deze twee mogelijkheden: uitsluitend $V(S * \beta)$ en niet uitsluitend $V(S * \beta)$ is (9.53.3) dus een zuivere toets.

Evenzo geldt, indien uitsluitend model $V(\alpha * D)$ van toepassing is:

9.54.1 $$\frac{(m-2)(n-2)\sum\limits_{k=m+n}^{2m+n-3} \underline{z}_k^2}{(m-2)\sum\limits_{k=2m+2n-3}^{N} \underline{z}_k^2} \div F_{(m-2),(m-2)(n-2)}$$

Ten aanzien van de twee mogelijkheden: uitsluitend $V(\alpha * D)$ en niet uitsluitend $V(\alpha * D)$ vormt het linkerdeel van (9.54.1) een zuivere toets.

Het linkerdeel van (9.54.1) is te schrijven, zie (8.47.5) en (8.47.6),

9.54.2 $$\frac{\sum\limits_j \{ \underline{w}_j - \underline{w}_\circ \}^2 \sum\limits_i \alpha_i^2 \,(m-2)(n-2)}{(\underline{SS}_{int} - \underline{P}^2)(n-1)} \stackrel{def}{\equiv} \underline{L}_1(\alpha, \beta)$$

met $$\underline{P}^2 = \sum_i \left\{ \underline{t}_i - \underline{t}_\circ - \frac{\sum\limits_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum\limits_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2} \right\}^2 \sum_j \beta_j^2 + \sum_j \{ \underline{w}_j - \underline{w}_\circ \}^2 \sum_i \alpha_i^2,$$

$$\underline{w}_j = \frac{\sum\limits_i \alpha_i \underline{y}_{ij}}{\sum \alpha_i^2} \quad \text{en} \quad \underline{t}_i = \frac{\sum\limits_j \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum\limits_j \beta_j^2}$$

Evenzo is het linkerdeel van (9.54.1) te schrijven als:

9.54.3 $$\frac{\sum\limits_i \left\{ \underline{t}_i - \underline{t}_\circ - \frac{\sum\limits_{ij} \alpha_i \beta_j \underline{y}_{ij}}{\sum\limits_i \alpha_i^2 \beta_j^2} \right\}^2 \sum\limits_j \beta_j^2 \,(m-2)(n-2)}{(\underline{SS}_{int} - \underline{P}^2)\,(m-2)} \stackrel{def}{\equiv} \underline{L}_2\,(\alpha, \beta).$$

$\underline{L}_1\,(\alpha, \beta)$ en $\underline{L}_2\,(\alpha, \beta)$ leveren voor $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ dus asymptotische zuivere toetsen op, daar $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ consistente schatters voor α en β zijn.

Nu kan het geval zich voordoen, dat er interactie optreedt en bijv. $L_1(\alpha, \beta) - F_{\alpha';\,(n-1),\,(m-2)(n-2)} < 0$ is, $\alpha' = 5\%$. Volgens (9.53.3) kunnen we dan besluiten tot V(S $*$ β). We zullen dan echter nog wel moeten controleren of $L_2(\alpha, \beta) - F_{\alpha';\,(m-2),(m-2)(n-2)} > 0$, m.a.w. V (α $*$ D) geldt niet uitsluitend.

We komen dus tot de volgende toetsen:

Geldt:

$$L_1(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - F_{\alpha';\,(n-1),\,(m-2)(n-2)} < 0,$$

èn:

$$L_2(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - F_{\alpha';\,(m-2),\,(m-2)(n-2)} > 0$$

dan besluiten we tot model V (S $*$ β).

Geldt:

$$L_1(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - F_{\alpha';\,(n-1),\,(m-2)(n-2)} > 0$$

èn:

$$L_2(\alpha, \beta) - F_{\alpha';\,(m-2),\,(m-2)(n-2)} > 0$$

dan besluiten we tot model V (α $*$ D).

Analoge toetsen zijn op te bouwen voor $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$.

§ 10 Het optreden van andere modellen.

Beschouw model T:

10.56.1 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i\, a_i + \sum_j \beta_j\, b_j + \Lambda\, \alpha * \beta + \underline{e}$

en het algemene model A:

10.56.2 $\underline{y} = \mu\ell + \sum_i \alpha_i\, a_i + \sum_j \beta_j\, b_j + \gamma + e.$

Bij het model T werd verondersteld dat $\gamma = \alpha * \beta$, $\alpha * \beta$ ligt in de ruimte Q die opgespannen is door $v_{(m+n)}$ (gedefinieerd in § 6, blz. 31).

Nu kan het zijn dat dit model niet voldoet. γ kan bijvoorbeeld helemaal niet in Q liggen, maar wel in G-Q. In dat geval zou gelden:

$E(\underline{z}_{m+n}) = 0$, en: $\exists k$ zodanig dat

$E(\underline{z}_k) \neq 0$ voor $k = m+n+1, \ldots, N$; waarbij de $\underline{z}_k$ op dezelfde wijze zijn gedefinieerd als in §6.

Dan zou:

10.56.3 $$T(\alpha, \beta, m, n, \underline{y}) = \frac{(mn - m - n)\, \underline{z}^2_{m+n}}{\sum_{k=m+n+1}^{N} \underline{z}^2_k}$$

een niet-centrale χ^2 verdeelde noemer hebben en een centraal χ^2 verdeelde teller.

$T^{-1}(\alpha, \beta, m, n, \underline{y})$ is dan een zuivere toets voor niet-additiviteit voor het geval : $\gamma \in G - Q$, daar onder de nulhypothese (additiviteit):

$T^{-1}(\alpha, \beta, m, n, \underline{y}) \div F_{mn-m-n,1}$ volgens de argumentatie van § 6.

In de praktijk zullen we dus, indien we met de toets $T(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, m, n, y)$ geen additiviteit hebben kunnen aantonen, ook $T^{-1}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, m, n, y)$ moeten proberen om te onderzoeken of er geen interactie in de "rest"-ruimte G - Q optreedt. De toets van Tukey krijgt daarmee dus het karakter van een twee-zijdige toets. Helaas is het niet altijd zo dat de interactie optreedt in de ene ruimte Q of de andere G - Q.

Volgens (10.56.3):

$$10.57.1 \quad T^{-1}(\alpha, \beta, m, n, \underline{y}) = \frac{\sum_{k=m+n+1}^{N} \underline{z}_k^2}{(mn+m+n)\,\underline{z}_{m+n}^2}$$

Uit deze uitdrukking blijkt dat we ook tot de uitspraak kunnen komen: $\gamma \subset G - Q$, indien de interactievector in G - Q significant groter is dan in Q. Dit zelfde, maar andersom, geldt natuurlijk ook voor de toets van Tukey.

Op dezelfde wijze kunnen we de toetsen - bij vermeende afwezigheid van interactie - voor de modellen M en V behandelen.

Wij kunnen de interactieruimte G opspannen door de vectoren $v_{(m+n)}, \ldots, v_{(N)}$. We kiezen $v_{(m+n)}$ willekeurig. $\underline{z}_k$, $k=m+n,\ldots,N$ wordt gedefinieerd als in § 4 dus:

$\underline{z}_k = v'_{(k)}\,\underline{y}$. $\underline{z}_k$ is dus de lengte van de projectie van $\underline{y}$ op $v_{(k)}$.

Onder H_A - de nulhypothese in het algemene model A - is $E(y) \in A + B$, dus:

$E(\underline{z}_k) = 0$ voor $k \geq m+n$.

Treedt er interactie op in het model A dan $\exists k$, $k=m+n, \ldots, N$ met $E(\underline{z}_k) \neq 0$.

Dus: $\exists k$, $k = m+n, \ldots, N$, waarvoor

$\underline{z}_k^2$ niet centraal $\sigma^2\chi^2$ verdeeld is. Indien we

die σ^2 kenden, dan konden wij op niet-additiviteit in het model A toetsen. Voor een willekeurige $\underline{z}_k^2$ hebben we echter dan nog de mogelijkheid dat we mis zitten: de interactie vector kan net loodrecht (of bijna loodrecht) op $v_{(k)}$ staan. Daarom zoeken we die k op waarvoor z_k^2 het grootst is. De verdeling van die $\underline{z}_k^2$ is dan echter geen niet-centrale $\sigma^2\chi^2$ verdeling meer; door de grootste te zoeken is die $\underline{z}_k^2$

afhankelijk van $\underline{z}_{k'}^2$, $k' \neq k$. In het boek van Pearson en Hartley vinden we echter een suggestie voor deze verdeling:

Stel $\underline{M} = K \ln \{ \frac{1}{K} \sum_{k=m+n}^{K} \underline{z}_k^2 \} - \sum_{k=m+n}^{K} \ln \underline{z}_k^2$

en $\quad C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} (K - \frac{1}{K})$, met $K = m.n$,

dan heeft $\frac{\underline{M}}{C}$ bij benadering een χ^2_{K-1} verdeling onder H_A.

§ 11. Berekening van kleinste kwadraten schatters in de modellen T, M en V

In deze § zullen we ons slechts bezig houden met het berekenen van de kk.-schatters van de parameters die in de modellen T, M en V voorkomen. Dit vraagt vrij veel rekenwerk. Bij numerieke bewerking van de verkregen resultaten zal men merken dat ook dit veel tijd vergt.

Berekening van k.k.-schatters in het model T:

Minimaliseer:

11.59.1 $$f = \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \beta_j)^2 - \nu_1 \sum_i \hat{\alpha}_i - \nu_2 \sum_j \hat{\beta}_j$$

(11.59.1) moeten we minimaliseren met de restricties: $\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$ en $\sum_j \hat{\beta}_j = 0$.

We gebruiken daartoe de methode van Langrange.

11.59.2 $$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mu}} = -2 \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j) = 0 \Rightarrow \underline{\hat{\mu} = y_{..}}$$

11.59.3 $$\frac{\partial f}{\partial \hat{\alpha}_i} = -2 \sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\, \hat{\beta}_j) - \nu_1 = 0$$

11.59.4 $$\frac{\partial f}{\partial \hat{\beta}_j} = -2 \sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i) - \nu_2 = 0$$

11.59.5 $$\frac{\partial f}{\partial \hat{\lambda}} = -2 \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j)\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j = 0$$

Uit (11.59.3) en (11.59.4) volgt dus:

11.59.6 $$\sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\, \hat{\beta}_j) - \nu_1 = 0$$

11.59.7 $$\sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i\, \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i) - \nu_2 = 0$$

Uit

$$\sum_i \hat{\alpha}_i = \sum_j \hat{\beta}_j = 0 \text{ volgt:}$$

11.59.8 $$m\nu_1 = \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\, \hat{\beta}_j)$$

11.60.1 $$n\nu_2 = \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i)$$

Dus, uit (11.59.6) en (11.59.7) volgt

11.60.2 $$\sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\beta}_j) - \frac{1}{m}\sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\beta}_j) = 0$$

11.60.3 $$\sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i) - \frac{1}{n}\sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i) = 0$$

Stel:

$$\sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\beta}_j) = a_i$$

$$\sum_i (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i) = b_j$$

(11.60.2) wordt:

$$\sum_j (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\beta}_j) - \hat{\alpha}_i \sum_j (1 + \hat{\lambda}\,\beta_j) - \frac{1}{m}\sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\,\hat{\beta}_j) = 0$$

Dus:

11.60.4 $$\underline{\hat{\alpha}_i = \frac{a_i - a_\circ}{\sum_j (1 + \hat{\lambda}\,\hat{\beta}_j)^2}}$$, evenzo $\hat{\beta}_j$:

11.60.5 $$\underline{\hat{\beta}_j = \frac{b_j - b_\circ}{\sum_i (1 + \hat{\lambda}\,\hat{\alpha}_i)^2}}$$

Uit (11.59.5) volgt dan nog $\hat{\lambda}$:

11.60.6 $$\underline{\hat{\lambda} = \frac{\sum_{ij} y_{ij}\,\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j}{\sum_{ij} \hat{\alpha}_i^2\,\hat{\beta}_j^2}}$$

$\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$ en $\hat{\lambda}$ iteratief te bepalen. Neem als startwaarden voor $\{\hat{\alpha}_i\}$ en $\{\hat{\beta}_j\}$ $\{\tilde{\alpha}_i\}$ en $\{\tilde{\beta}_j\}$ en neem $\hat{\lambda} = 0$. Bereken daarna $\hat{\lambda}$.

Een kleine vereenvoudiging volgt nog uit:

$$a_o = \frac{1}{m} \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)(1 + \hat{\lambda}\, \hat{\beta}_j) = \frac{1}{m} \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_j)\, \hat{\lambda}\, \hat{\beta}_j$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\beta}_j)\, \hat{\lambda}\, \hat{\beta}_j \text{ en evenzo:}$$

$$b_o = \frac{1}{n} \sum_{ij} (y_{ij} - \hat{\alpha}_i)\, \hat{\lambda}\, \hat{\alpha}_i.$$

De kleinste kwadraten methode voor model M:

We laten de "dakjes" aanvankelijk weg:

$\underline{y}_{ij} = \mu + \alpha_i + \rho_i\, \beta_j + \underline{e}_{ij}$, zie (3.12.5)

Minimaliseer nu:

$$g \overset{def}{=} \sum_{ij} \{y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j\}^2 - \nu_1 \sum_i \alpha_i - \nu_2 \sum_j \beta_j - \nu_3 (\sum_i \rho_i - 1)$$

De minimalisatie geschiedt weer met de methode van Lagrange, met de restricties $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_i (\rho_i - 1) = 0$.

11.61.1 $$\frac{\partial g}{\partial \mu} = -2 \sum_{ij} (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j) = 0 \Rightarrow \underline{\hat{\mu} = y_{oo}}$$

11.61.2 $$\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} = -2 \sum_{ij} (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j) - \nu_1 = 0$$

11.61.3 $$\frac{\partial g}{\partial \beta_j} = -2 \sum_i (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j)\rho_i - \nu_2 = 0$$

11.61.4 $$\frac{\partial g}{\partial \rho_i} = -2 \sum_j (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j)\beta_j - \nu_3 = 0$$

Uit (11.61.2) volgt door sommering over i:

11.61.5 $\nu_1 = 0$

Uit (11.61.3) volgt door sommering over j:

$$-2 \sum_{ij} (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j)\rho_i = -2 \sum_{ij} (y_{ij}\, \rho_i - \mu - \rho_i\, \alpha_i) =$$

$$= n\nu_2.$$

11.62.1 $\nu_2 = -\frac{2}{n} \sum_{ij} (y_{ij}\, \rho_i - \mu - \rho_i\, \alpha_i)$

Uit (11.61.4) volgt door sommering over i:

11.62.2 $\nu_3 = -\frac{2}{m} \sum_{ij} (y_{ij}\, \beta_j - \beta_j^2)$

Uit (11.61.2) en (11.62.1) volgt voor $\hat{\alpha}_i$:

$$-2 \sum_j (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j) = 0$$

$\sum_j (y_{ij} - \mu - \alpha_i) = 0$ Dus:

$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_j (y_{ij} - \hat{\mu})$ of:

11.62.3 $\underline{\hat{\alpha}_i = y_{i\circ} - y_{\circ\circ}}$ Dit is ook een zuivere schatter voor α_i.

Uit (11.61.3) en (11.62.1) volgt:

$$-2 \sum_i (y_{ij} - y_{\circ\circ} - y_{i\circ} + y_{\circ\circ} - \rho_i\, \beta_j)\rho_i + \frac{2}{n} \sum_{ij} (y_{ij}\, \rho_i - \mu - \rho_i\, \alpha_i) = 0$$

omdat $\hat{\alpha}_i = y_{i\circ} - y_{\circ\circ}$

Vanwege $\rho_\circ = 1$ en $\hat{\mu} = y_{\circ\circ}$ geldt:

$$-\sum_i (y_{ij} - y_{i\circ} - \rho_i\, \beta_j)\rho_i + \frac{1}{n} \sum_{ij} (y_{ij}\, \rho_i - \rho_i\, \mu - \rho_i\, \alpha_i) = 0$$

of:

$$-\sum_i (y_{ij} - y_{i\circ})\rho_i + \beta_j \sum_i \rho_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{ij} (y_{ij} - y_{i\circ})\rho_i = 0$$

$\hat{\beta}_j$ wordt dus:

11.62.4 $$\underline{\hat{\beta}_j = \frac{\sum_i (y_{ij} - y_{i\circ}) - \frac{1}{n} \sum_{ij} (y_{ij} - y_{i\circ})}{\sum_i \hat{\rho}_i^2}}$$

De kk-schatter voor de $\hat{\rho}_i$ wordt, zie (11.61.4) en (11.62.2):

$$-2 \sum_j (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \rho_i\, \beta_j)\beta_j + \frac{2}{m} \sum_{ij} (y_{ij}\, \beta_j - \beta_j^2) = 0$$

$$-\sum_{i} (y_{ij}\ \beta_j - \rho_i\ \beta_j^2) + \frac{1}{m} \sum_{ij} (y_{ij}\ \beta_j - \beta_j^2) = 0$$

Dus: $$-\sum_{j} (y_{ij}\ \beta_j) + \rho_i \sum_{j} \beta_i^2 + \frac{1}{m} \sum_{ij} (y_{ij}\ \beta_j - \beta_j^2) = 0, \text{ of:}$$

$$\frac{-\sum_{j} (y_{ij}\ \hat\beta_j - \frac{1}{m} \sum_{ij} y_{ij}\ \hat\beta_j + \sum_{j} \hat\beta_j^2}{\sum_{j} \hat\beta_j^2} = \hat\rho_i$$

11.63.1 $$\hat\rho_i = \frac{\sum_{j} (y_{ij}\ \hat\beta_j) - \frac{1}{m} \sum_{ij} y_{ij}\ \hat\beta_j}{\sum_{j} \hat\beta_j^2} + 1, \text{ dus:}$$

11.63.2 $$\hat\tau_i = \frac{\sum_{j} (y_{ij}\ \hat\beta_j) - \frac{1}{m} \sum_{ij} y_{ij}\ \hat\beta_j}{\sum_{j} \hat\beta_j}$$

(11.62.4) en (11.63.1) kunnen weer iteratief bepaald worden. Neem in (11.63.1) eerst $\hat\beta_j = y_{\circ j} - y_{\circ\circ}$, vul dan de verkregen $\hat\rho_i$ in (11.63.1) in.

<u>k.k. schatters in het model V.</u>

Model V, zie (3.14.2),:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i\ r_j' + s_i'\ \beta_j + \underline{e}_{ij}. \text{ met } \sum_{i} \alpha_i = \sum_{j} \beta_j = \sum_{i} (s_i' - 1) =$$

$$\sum_{j}(r_j' - 1) = 0 \text{ èn } \sum \alpha_i\ s_i' = 0$$

We passen de methode van Lagrange weer toe.

Minimaliseer:

$$h = \sum_{ij} (y_{ij} - \mu - \alpha_i\ r_j' - s_i'\ \beta_j)^2 - \nu_1 \sum_{i} \alpha_i - \nu_2 \sum_{1} \beta_j$$

$$- \nu_3 \sum_{i} (s_i' - 1) - \nu_4 \sum_{j} (r_j' - 1) - \nu_5 \sum_{i} \alpha_i\ s_i'$$

Duidelijk is:

11.64.1 $$\frac{\partial h}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \underline{\hat{\mu} = y_{\circ\circ}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha_i} = \sum_j r_j^! \,(u_{ij} - \mu - \alpha_i\, r_j^! - s_i^!\, \beta_j) + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_5}{2}\, s_i^! = 0. \quad \text{Dus:}$$

11.64.2 $$\sum_j r_j^!\, y_{ij} - n\mu - \alpha_i \sum_j r_j^2 - s_i^! \sum_j r_j^!\, \beta_j + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_5}{2}\, s_i^! = 0.$$

Over i sommeren:

$$\sum_{ij} y_{ij}\, r_j^! - n\mu - \sum_j r_j^!\, \beta_j + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_5}{2}\, s_i^! = 0.$$

$$\frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_5}{2} = -\sum_{ij} y_{ij}\, r_j^! + n\mu + \sum_j r_j^!\, \beta_j.$$

Stel:

$$\sum_j y_{ij}\, \hat{r}_j^! - n\hat{\mu} - \hat{s}_i^! \sum_j \hat{r}_i^!\, \hat{\beta}_j = \hat{\mu}_i.$$ Dan volgt uit (11.64.2):

11.64.3 $$\hat{\alpha}_i = \frac{\hat{u}_i - \hat{\mu}_\circ}{\sum_j (\hat{r}_j^!)^2}$$

Evenzo:

$$\frac{\partial h}{\partial \beta_j} = -2 \sum_i s_i^! \,(y_{ij} - \mu - \alpha_i\, r_j^! - s_i^!\, \beta_j) - \nu_2 = 0$$

$$\sum_i s_i^!\, y_{ij} - m\mu - \beta_j \sum_i s_i^{!2} + \frac{\nu_2}{2} = 0$$

$$\overset{\text{def}}{=} \; y_j + \frac{\nu_2}{2} = 0$$

$$\frac{\nu_2}{2} = \sum_{ij} s_i^!\, y_{ij} - m\mu, \text{ zodat}$$

11.64.4 $$\underline{\hat{\beta}_j = \frac{\hat{v}_j - v_\circ}{\sum_i (\hat{s}_i^!)^2}}$$

De kleinste kwadratenschatters voor $\hat{\eta}$ worden verkregen door de projectie van y op de model ruimte, hier:$(A + B) + \alpha * D + S * \beta$. α en β kennen we niet, we kiezen daarom voor α : $\hat{\alpha}$ en voor β : $\hat{\beta}$.
Die projecties echter hebben we afgeleid in § 8 voor α en β. Voor $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$ geldt een analoge afleiding. (Stel $\hat{\alpha} = p$ en $\hat{\beta} = q$).
Vanwege de geëiste relatie geldt : $S \perp \hat{\alpha}$.
Dus:
$S * \hat{\alpha} \perp \hat{\alpha} * D$.
Dan geldt dus:

$$\hat{\eta}_{(S * \hat{\beta} + \hat{\alpha} * D)} = \hat{\eta}_{S * \hat{\beta}} + \hat{\eta}_{\hat{\alpha} * D} = y_{S * \hat{\beta}} + y_{\hat{\alpha} * D}$$

$$\overset{\text{stel}}{=} \hat{\alpha} * \hat{r} + \hat{S} * \hat{\beta}$$

Dus, vanwege de orthogonaliteit:

11.65.1 $\hat{\alpha} * \hat{r} = y_{\hat{\alpha} * D}$ en

11.65.2 $\hat{S} * \hat{\beta} = y_{S * \beta}$

Met (8.47.5) geldt:

$y_{\hat{\alpha} * D} = \hat{\alpha} * \hat{w}$, waarin w een vector is in de n dimensionale ruimte V_n, met als j^e component

11.65.3 $$\hat{w}_j - \hat{w}_\circ \cdot \hat{w}_j = \frac{\sum_i \hat{\alpha}_i y_{ij}}{\sum_i \alpha_i^2}.$$

Omdat $y_{\hat{\alpha} * D} = \hat{\alpha} * \hat{r} = \hat{\alpha} * w$ geldt:

11.65.4 $\hat{r}_j = \hat{w}_j - w_\circ$.

Evenzo geldt:

$y_{\hat{S} * \hat{\beta}} = \hat{s} * \hat{\beta}$, waarin volgens (8.47.3) het i^e element van de vector $\hat{s}$ gelijk is aan:

11.66.1 $$\hat{s}_i = \hat{t}_i - \hat{t}_\circ - \sum_{ij} \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j y_{ij}}{\sum_{ij} \hat{\alpha}_i^2 \hat{\beta}_j^2} \text{, waarin}$$

11.66.2 $$\hat{t}_i = \frac{\sum_j \hat{\beta}_j y_{ij}}{\sum_j \hat{\beta}_j^2}$$

De kleinste kwadratenschatters voor s'_i en r'_j volgen dan uit: $\hat{s}'_i = \hat{s}_i + 1$ en $\hat{r}'_i = \hat{r}_i + 1$. $\hat{s}_i$, $\hat{r}_j$ en $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$ kunnen we nu iteratief bepalen. In (11.65.4) en (11.66.1) gebruiken we daartoe de zuivere schatters $\tilde{\alpha}_i$ en $\tilde{\beta}_j$ van α_i en β_j. Dan berekenen we $\hat{r}_j$ en $\hat{s}_i$, en daarna $\hat{r}'_j$ en $\hat{s}'_i$. De verkregen waarden vullen we in (11.64.3) en (11.64.4) in, zodat we $\hat{\alpha}_i$ en $\hat{\beta}_j$ krijgen. Dan herhalen we het proces weer met deze $\hat{\alpha}_i$ en $\hat{\beta}_j$ enz.

Geraadpleegde literatuur:

1. G.E.P. Box and D.R. Cox:
An analysis of transformation,
Journal of the Royal Statistical Society, 26, nr.1 (1964), p. 211.

2. L.C.A. Corsten:
Vectors, a tool in statistical regression theory.

3. R.C. Elston:
On additivity in the analysis of variance,
Biometrics, June 1961, p. 125.

4. Ir. S.H. Justesen en Ir. L.R. Verdooren:
Collegedictaat wiskundige Proeftechniek (Wageningen).

5. J. Mandel and Lashof:
The interlaboratory evaluation of testing methods,
ASTM Bulletin, nr. 239 (July 1959), p. 53.

6. J. Mandel:
Non-additivity in two-way analysis of variance,
Journal of the American statistical association, December 1961, p. 878.

7. H. Scheffé:
The analysis of variance,
New York: John Wiley & Sons Inc., 1959, p. 98 and 129.

8. J.W. Tukey:
One degree of freedom for non-additivity,
Biometrics 5 (1949), p. 232.

9. G.C. Ward and I.D. Dick:
Non-additivity in randomized block designs and balanced incomplete block designs,
New Zealand Journal of Science and Technology, 33 (1952), p. 430.

10. E.J. Williams:
The interpretation of interactions in factorial experiments,
Biometrika 39 (1959), p. 65.

Errata

b.: van boven afgeteld.

o.: van onderen afgeteld.

blz.	regel	Er staat:	Moet zijn:
II	3 o.	$f(\underline{y}_{ij}) = g_{ij}$, zodanig dat g_{ij}	$f(\underline{y}_{ij}) = \underline{g}_{ij}$, zodanig dat $\underline{g}_{ij}$
2	3 b.	te construeren.	te construeren.)
2	11 o.	door 1.	door ℓ.
4	10 o.	ruimten $\{c^k\ D\}$	ruimten $\{c^k * D\}$
11	1 o.	e_{ij}	$\underline{e}_{ij}$
12	3 b.	$+ \sum_j \beta_j + \alpha * \beta$	$+ \sum_j \beta_j b_j + \lambda \alpha * \beta$
12	4 b.	$\mu\ +$	$\mu \ell +$
12	4 b.	$+ \sum_j \beta_j +$	$+ \sum_j \beta_j b_j +$
13	7 o.	e	$\underline{e}$
13	1 o.	γ_1	$\gamma_1 \alpha$
14	2 o.	e	$\underline{e}$
16	14 b.	$(v_1, \ldots, v_N)$	$(v_{(1)}, \ldots, v_{(N)})$
16	9 o.	$y =$	$\underline{y} =$
16	1 o.	y_G	$\underline{y}_G$
21	8 o.	$\{t_k\}$	$\{\underline{t}_k\}$
22	2 b.	$F_{\ell,\lambda}(x)$	$F_{1,\lambda}(x)$
22	7 b.	$\int_{k=0}^{\infty} a_k$	$\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
22	8 b.	$(k-v)\ \{a_k$	$\{a_k$
23	2 o.	$f_\ell(u)$	$f_1(u)$
24	13, 10 o.	ω	w
24	9, 8 o.	$p_r\{\underline{\omega}$	$p_r\{\underline{w}$

blz.	regel	Er staat:	Moet zijn:
31	5 b.	$\lambda \neq 0$	$\Lambda \neq 0$
31	9 b.	$\gamma = \alpha \ast \beta$	$\gamma = \Lambda \alpha \ast \beta$
32	11 b.	u_G	y_G
34	8 b.	y.	η.
34	9 o.	$z_k^{\ast}$	$\underline{z}_k^{\ast}$
34	7 o.	$\underline{Z}_{m+n}$	$\underline{z}_{m+n}$
35	15 b.	$\underline{H}_T$	H_T
36	13 b.	$T(\tilde{\alpha},\beta,m,n,\underline{y})$	$T(\underline{\tilde{\alpha}},\underline{\tilde{\beta}},m,n,\underline{y})$
40	2 o.	1	1_m
40	1 o.	y	$\underline{y}$
41	3 b.	y_{L_m}, y'	$\underline{y}_{L_m}$, $\underline{y}'$
41	4 b.	$y_{C \times \beta} = y_{V_m \ast \beta} - y_{L_m \ast \beta}$	$\underline{y}_{C \ast \beta} = \underline{y}_{V_m \ast \beta} - \underline{y}_{L_m \ast \beta}$
44	5,6 o.	$\underline{t}$.	$\underline{\tilde{t}}$.
46	10 o.	De ruimte is	De ruimte S is
47	8 b.	t.	$\underline{t}$.
48	1 b.	wordt	(8.46.1) wordt
52	2 b.	hypothezen	hypothesen
56	6 b.	$\gamma = \alpha \ast \beta$	$\gamma = \Lambda \alpha \ast \beta$
64	7 b.	$\hat{\mu}_i$	$\hat{u}_i$
65	6 o.	$\hat{w}_{.} \cdot \hat{w}_j$	$\hat{w}_{.}\, ; \hat{w}_j$