Stichting Mathematisch Centrum

en

Instituut voor Actuariaat en Econometrie

S 382 (SB 1)

Transportprobleem

door

H.C. Tijms

Scriptie Besliskunde

mei 1967

Probleem

Gegeven is een aantal stations, waartussen wagons worden getransporteerd door lokomotieven. Aan een transport van wagons van een station naar een verschillend station werkt slechts één lokomotief tegelijk. Het is bekend tussen welke tweetallen stations transporten plaatsvinden, en tevens is de grootte van ieder transport bekend. De transporten vinden tijdens de nacht en de vroege ochtend plaats. Voor elk station, waar vanaf transporten plaatsvinden geldt dat de lokomotieven pas na een gegeven tijdstip vertrekken mogen.

Voor een lokomotief vertrekt wordt deze eerst aan een remproef en andere controlehandelingen onderworpen. Dit neemt 40 tijdseenheden in beslag. Hierbij nemen wij als tijdseenheid één-honderdste van een uur. Vanaf een station moeten de lokomotieven met een onderling verschil van tenminste 10 tijdseenheden vertrekken. Voor de stations waarheen wagons worden gebracht is bepaald dat de gebrachte wagons voor een vastgesteld tijdstip gerangeerd moeten zijn. Per wagon wordt een vaste rangeertijd gerekend, n.l. 1 tijdseenheid. Vanzelfsprekend zijn de rijduren tussen de diverse stations bekend.

In dit probleem wordt verondersteld dat een lokomotief slechts één transport tegelijk kan uitvoeren.

Men wil nu bepalen met hoeveel lokomotieven minimaal de transporten kunnen worden uitgevoerd. Tevens wil men weten welke transporten door welke lokomotief gedaan worden en voor transport afzonderlijk op welk tijdstip ermee begonnen moet worden. Het doel is dus zo weinig mogelijk lokomotieven in te zetten.

Wij zullen voor het probleem twee modellen opstellen. Alleen met het tweede model zullen wij berekeningen uitvoeren.

Eerste model

Laten wij de in het probleem optredende stations aangeven met $S_1,\ldots,S_N$. Stel dat van station S_1 transporten naar $S_3,S_5,\ldots,S_{k_1}$ plaatsvinden, van S_2 naar $S_4,S_5,\ldots,S_{k_2}$, enz. Deze transporten duiden wij aan door $S_1S_3,S_1S_5,\ldots,S_1S_{k_1}$, $S_2S_4,\ldots,S_2S_{k_2}$, enz. Wij kunnen nu de transporten nummeren. Transport S_1S_3 noemen wij transport 1, transport S_1S_5 wordt transport 2, etc.

Stel dat er n transporten uit te voeren zijn. Voor elk transport is de rijtijd bekend van het beginstation naar het eindstation, die bij het transport behoren. Laat a_i de rijtijd zijn van de lokomotief, die transport i uitvoert. Met r_{ih} geven wij de rijtijd aan tussen het eindstation van transport i en het beginstation van transport h. Zowel a_i als r_{ih} worden uitgedrukt in de hiervoor gedefinieerde tijdseenheid.

Uit de probleemstelling volgt dat de lokomotief, die transport i uitvoert pas na een gegeven tijdstip, aangeduid door b_i, vertrekken mag. Voor de lokomotief, die transport i uitvoert kan men direct een tijdstip c_i bepalen, voor welk of waarop de lokomotief in elk geval moet vertrekken om op tijd klaar te kunnen komen. Wanneer het transport i station k als eindstation heeft en r_k is het gegeven tijdstip waarop al de wagons in station k gerangeerd behoren te zijn dan kunnen wij $c_i=r_k-a_i-w_i$ stellen. Hierbij is w_i het aantal wagons, dat transport i telt.

In beide modellen zullen wij de eis dat de naar een station gebrachte wagons voor een gesteld tijdstip gerangeerd moeten zijn, vervangen door de eis dat de lokomotief die transport i uitvoert voor of op het tijdstip c_i vertrekken moet. Wij komen hierop bij het tweede model nog terug.

De eis dat vanaf een station de lokomotieven met een tussenperiode moeten vertrekken laat zich enkel in het eerste model eenvoudig formuleren. In het tweede model laten wij de eis buiten beschouwing.

Laat m een bovengrens zijn voor het aantal in te zetten lokomotieven. Altijd kunnen wij $m \leq n$ nemen. Wij nummeren de lokomotieven 1, ..., m. Wij zullen nu de in het eerste model optredende variabelen gaan invoeren.

Wij definiëren de grootheid t_{ij} als volgt:

$t_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ transport i wordt niet door lokomotief j gedaan

$t_{ij} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ transport i wordt door lokomotief j gedaan, en t_{ij} is het tijdstip waarop lokomotief j vertrekt met transport i.

Wat de tijdschaal betreft, deze kan zo gekozen worden dat bovenstaande definitie geen aanleiding tot dubbelzinnigheden geeft.

Uit deze definitie volgt direct

$$t_{ij} \geq 0 \; (i=1,\dots,n; \; j=1,\dots,m) \tag{1}$$

Lokomotief j voert transport i uit of voert het transport i niet uit. Bijgevolg,

$$t_{ij} = 0 \quad \text{of} \quad b_i \leq t_{ij} \leq c_i, \text{ alle } i,j \tag{2}$$

(De tijdstippen b_i zijn zodanig gekozen dat alle $b_i > 0$)
Anders gesteld,

$$t_{ij} = 0 \quad \text{of} \quad b_i \leq t_{ij} \tag{3}$$

Verder geldt,

$$t_{ij} \leq c_i \tag{4}$$

Vanwege (1) kunnen wij in plaats van $t_{ij} = 0$ schrijven $t_{ij} \leq 0$. De alternatieven $t_{ij} \leq 0$, $b_i - t_{ij} \leq 0$ zullen wij vervangen door enkele voorwaarden, die er "gewoon" uitzien, d.w.z. die niet met behulp van de "of-vorm" geformuleerd zijn. In de loop van dit model zullen wij dit herhaaldelijk moeten doen. Daarom gaan wij nader hierop in.

Stel gegeven een probleem waarin de vektor $(x_1,\dots,x_n)$, behalve aan een stelsel gegeven voorwaarden, voldoen moet aan tenminste k van de q voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0 \qquad (i=1,\dots,q) \tag{5}$$

Wij nemen aan dat bij elke i een eindig getal L_i bepaald kan worden zodanig dat voor iedere toegelaten $(x_1,\dots,x_n)$ geldt,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq L_i \qquad (i=1,\dots,q) \tag{6}$$

De eis dat tenminste k van de voorwaarden (5) moeten gelden is weer te geven door

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq \delta_i L_i$$

$$\sum_{i=1}^{q} \delta_i = q - k \qquad (7)$$

$$0 \leq \delta_i \leq 1, \ \delta_i \text{ geheel } (i=1,\ldots,q)$$

Uit $\sum_{i=1}^{q} \delta_i = q-k$ volgt direct dat een k-tal van de δ_i gelijk aan nul zijn, en dat zijn tenminste k van de ongelijkheden (5) vervuld (bedenk dat $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq L_i$ geen werkelijke restrictie is, omdat L_i een "natuurlijke" bovengrens is).

Dit voorgaande passen wij op (3) toe.
Voor de geheelwaardige variabelen γ_{ij} in, met $0 \leq \gamma_{ij} \leq 1$.
Wij vervangen (3) door

$$t_{ij} \leq \gamma_{ij} L$$

$$b_i - t_{ij} \leq (1-\gamma_{ij})L \qquad (8)$$

$$0 \leq \gamma_{ij} \leq 1$$

$$\gamma_{ij} \text{ geheel, alle } i,j$$

L is een geschikte bovengrens, b.v. $L = \max_i \{ c_i \} + 1$

Met behulp van (1) en (8) (bedenk $b_i > 0$) leidt men eenvoudig af,

$$\gamma_{ij} = 0 \Leftrightarrow t_{ij} = 0 \Leftrightarrow \text{lokomotief } j \text{ doet transport } i \text{ niet}$$
$$\qquad (9)$$
$$\gamma_{ij} = 1 \Leftrightarrow t_{ij} > 0 \Leftrightarrow \text{lokomotief } j \text{ doet transport } i$$

Stel nu de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} = 1 \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad (10)$$

Met behulp van (8) en (9) volgt nu dat door het stellen van de voorwaarden (10) ieder transport gedaan wordt en wel door één machine tegelijk.

Vanaf eenzelfde station moeten de lokomotieven met een tussentijd van tenminste 10 tijdseenheden vertrekken.

Laten I(1),..., I(N) de indicesverzamelingen zijn van de transporten die respectievelijk station 1,..., N als beginstation hebben.

Uit (8), (9), (10) volgt dat

$$t_{ik} = \sum_{j=1}^{m} t_{ij} \text{ als } t_{ik} > 0 \tag{11}$$

Er moet gelden

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ij} - \sum_{j=1}^{m} t_{hj} \geq 10 \text{ of } \sum_{j=1}^{m} t_{hj} - \sum_{j=1}^{m} t_{ij} \geq 10 \tag{12}$$

$$(i,h \in I(k),\ i \neq h;\ k=1,\dots,N)$$

Voer de geheelwaardige variabelen δ_{hik} in, met $0 \leq \delta_{hik} \leq 1$. Wij vervangen de voorwaarden (12) door

$$10 - \sum_{j=1}^{m} (t_{ij}-t_{hj}) \leq \delta_{hik} L_1$$

$$10 - \sum_{j=1}^{m} (t_{hj}-t_{ij}) \leq (1 - \delta_{hik})L_1$$

$$0 \leq \delta_{hik} \leq 1,\ \delta_{hik} \text{ geheel} \qquad (i \neq h,\ i,\ h \in I(k);k=1,\dots,N)$$

Hierbij is L_1 een geschikte bovengrens.

Wij moeten enkel nog voorwaarden stellen, die impliceren dat een lokomotief slechts één transport tegelijk uitvoeren kan.

Wanneer $t_{ij} > 0$ en $t_{hj} > 0$ dan moet in verband met de rijtijden en de remproef gelden

$$t_{ij} \geq t_{hj}+a_h+r_{hi}+40 \quad \text{of} \quad t_{hj} \geq t_{ij}+a_i+r_{ih}+40 \tag{14}$$

$$(i \neq h;i,h=1,\dots,n)$$

Vanwege $t_{ij} > 0 \Leftrightarrow \gamma_{ij}=1$ kunnen wij i.p.v. (14) de volgende voorwaarden stellen

$$
\begin{aligned}
& t_{hj}+a_h+r_{hi}+40-t_{ij} \leq (3-\gamma_{ij}-\gamma_{hj}-\mu_{hij})L_2 \\
& t_{ij}+a_i+r_{ih}+40-t_{hj} \leq (2-\gamma_{ij}-\gamma_{hj}+\mu_{hij})L_2 \\
& 0 \leq \mu_{hij} \leq 1, \ \mu_{hij} \quad \text{geheel} \\
& (i \neq h; i,h=1,\ldots,n; \ j=1,\ldots,m)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Tenslotte geven wij een kriteriumfunctie.
Het doel is een minimaal aantal lokomotieven in te zetten.
Wij weten

$$\gamma_{ij} = 1 \Leftrightarrow \text{lokomotief } j \text{ doet transport } i$$

$$\gamma_{ij} = 0 \Leftrightarrow \text{lokomotief } j \text{ doet transport } i \text{ niet.}$$

Stel
$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \tag{16}$$

Dan is λ_j het aantal transporten, dat door lokomotief j gedaan wordt. Voor elke j geldt $0 \leq \lambda_j \leq n$. Als $\lambda_j=0$ dan voert lokomotief j geen enkel transport uit, terwijl de lokomotief tenminste één transport uitvoert als $\lambda_j > 0$.

Voer de geheelwaardige variabelen μ_j in, en stel de voorwaarden

$$
\begin{aligned}
& \lambda_j - n\mu_j \leq 0 \\
& 0 \leq \mu_j \leq 1, \ \mu_j \quad \text{geheel } (j=1,\ldots,m)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Uit (17) en met behulp van $\lambda_j \geq 0$ volgt dat $\lambda_j=0$ ingeval $\mu_j=0$. Als $\mu_j=1$, dan $\lambda_j \leq n$, bijgevolg aan λ_j is dan geen werkelijke beperking opgelegd.

Neem nu als kriteriumfunctie

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \tag{18}$$

Men bereikt dat een minimaal aantal lokomotieven ingezet wordt door (18) te minimaliseren onder de voorwaarden (1), (4), (8), (10), (13), (15) en (17). Het zo verkregen mathematische programmeringsprobleem is een gemengd lineair programmeringsprobleem. Dit gemengde lineair programmeringsprobleem is niet geschikt voor berekeningen, omdat het aantal bijvoorwaarden al snel bijzonder groot wordt. De stelsels (13) (15) geven verreweg de meeste voorwaarden.

Tweede model

Door J.M. Anthonisse wordt in rapport S 379 (M 87), Mathematisch Centrum een methode gegeven om een bepaalde klasse van toewijzigingsprobleem op te lossen. Bij deze toewijzigingsproblemen wordt verondersteld, dat de "machines", waaraan de "taken" worden toegewezen, onafhankelijk van elkaar werken. Het toewijzigingsprobleem kan dan in twee stappen worden opgelost.

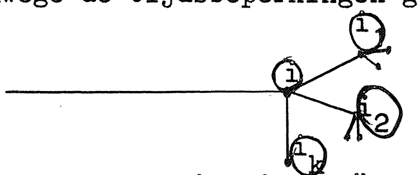
Voor ons probleem werken de lokomotieven niet onafhankelijk van elkaar. Immers vanaf een station mogen de lokomotieven enkel met een tussenperiode vertrekken, en verder moeten de naar een station gebrachte wagons voor een gesteld tijdstip gerangeerd zijn.

Zoals al eerder opgemerkt zullen wij bij het opstellen van het tweede model bovengenoemde twee eisen buiten beschouwing laten. Dit doen wij om de werkzaamheden van de lokomotieven onderling onafhankelijk te maken. Wij stellen wel dat een transport vanaf station j pas na een gegeven tijdstip b_j plaatsvinden kan. Verder moet een transport dat station k als eindstation heeft voor of op het tijdstip u_k in dit station binnengebracht worden. Hierbij is $u_k=r_k-w$, r_k is het tijdstip waarop het rangeren in station k beëindigd moet zijn en w is het aantal wagons, dat het transport telt.

Wanneer het probleem m.b.v. het tweede model opgelost is, zal men achteraf moeten nagaanof aan de buiten beschouwing gelaten twee eisen vervuld is of vervuld kan worden.

Wij zullen nu laten zien hoe wij ons probleem met de in bovengenoemd rapport beschreven methode kunnen aanpakken (voor nadere details wordt men naar het rapport verwezen).

Wijs aan elk transport een lokomotief toe. Dit geeft de lokomotieven 1, ..., n. Beschouw het transport i, i vast. Zodra aan transport i begonnen mag worden gaat de lokomotief i rijden om dit transport uit te voeren. Wanneer lokomotief i transport i gedaan heeft, gaan wij na welke transporten in aanmerking komen om door de lokomotief i als tweede opdracht te worden uitgevoerd. Natuurlijk in overeenstemming met de gestelde tijdsbeperkingen. Hierbij mag de lokomotief "leeg" van het eindstation van transport i rijden naar het beginstation van een ander transport. Stel het blijkt dat de lokomotief i als tweede opdracht elk van de transporten $i_1, \ldots i_k$ kan uitvoeren. Voor ieder van deze transporten gaan wij vervolgens na welke transporten de lokomotief i na het volbrengen van de tweede opdracht nog kan doen. En zo gaan wij verder, totdat wij op het punt belanden dat lokomotief i vanwege de tijdsbeperkingen geen enkel transport meer kan uitvoeren. Voor ieder van deze transporten gaan wij vervolgens na welke transporten de lokomotief i na het volbrengen van de tweede opdracht nog kan doen. En zo gaan wij verder, totdat wij op het punt belanden dat lokomotief i vanwege de tijdsbeperkingen geen enkel transport meer kan uitvoeren.



Zo vindt men voor de lokomotief i een "vertakking", waarvan de takken worden voorgesteld door "pakketten". Elk pakket bestaat uit een aantal transporten. Wij zullen de lokomotief i hoogstens één pakket laten uitvoeren. Men kan voor elke lokomotief de pakketten bepalen, die door de lokomotief uitgevoerd kunnen worden. De pakketten kunnen wij nummeren 1, ..., M. Aan ieder pakket j kennen wij een variabele x_j toe, x_j 0 of 1. De variabel x_j is gelijk aan 1 als pakket j uitgevoerd wordt, anders is x_j gelijk aan nul.

Wanneer de variabelen x_j ingevoerd zijn, kunnen wij een mathematisch programmeringsprobleem formuleren door aan de x_j een aantal voorwaarden op te leggen. Wij zullen zien dat deze voorwaarden er zorg voor dragen dat elk transport uitgevoerd wordt, en een lokomotief hoogstens aan één transport tegelijk werkt.

Wij zien dat het probleem in twee stappen aangepakt wordt. Eerst wordt aan de voorwaarden, die ontstaan vanwege de tijdslimieten b_j, u_k, voldaan door een "zeefachtige" procedure te volgen. Voor iedere lokomotief wordt n.l. bepaald welke pakketten van transporten de lokomotief uitvoeren kan. Voor elk pakket is bekend in welke volgorde de tot het pakket behorende transporten worden uitgevoerd en voor elk transport afzonderlijk in het pakket is het vroegste begintijdstip bekend, waarop het transport in het kader van het pakket kan worden uitgevoerd. Daarna kan men een programmeringsprobleem formuleren, en dit trachten op te lossen.

Wij lichten het bovenstaande aan een voorbeeld toe.
Beschouw vier stations, n.l. de stations 1, 2, 3 en 4. De rijduren tussen de stations, het vroegste vertrekstijdstip b_j vanaf elk der stations en het tijdstip r_k waarop het rangeren beëindigd behoord te zijn worden hieronder gegeven.

Afstandstabel (in rijtijd)

Station	1	2	3	4
1		30	150	105
2	30		120	95
3	150	120		165
4	105	95	165	

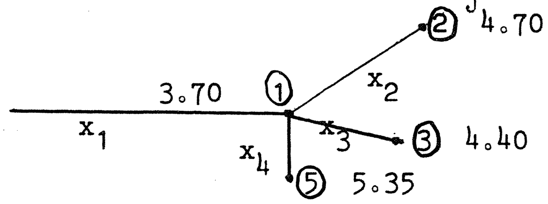
$b_1=3.70$ $r_1=6.96$
$b_2=3.40$ $r_2=6.56$
$b_3=3.30$ $r_3=7.37$
$b_4=4.70$ $r_4=6.53$

Zes transporten moeten gedaan worden, en wel de volgende
1 station 1 - station 2, aantal wagons 24
2 station 1 - station 3, aantal wagons 50
3 station 2 - station 4, aantal wagons 11
4 station 3 - station 4, aantal wagons 32
5 station 4 - station 1, aantal wagons 24
6 station 4 - station 3, aantal wagons 40

Wijs aan de transporten 1, ..., 6 resp. de lokomotieven 1, ..., 6 toe. Lokomotief 1 kan met transport 1 op zijn vroegst om 3.70 vertrekken, de lokomotief is dan om 4.00 in station 2. De lokomotief 1 kan na transport 1 als tweede opdracht nog elk van de transporten 2, 3 en 5 doen. Met transport 2 kan de lokomotief 1 op zijn vroegst om 4.70 beginnen (n.l. 400+30+40=470). De lokomotief is dan om 6.20 in station 3. De gebrachte wagons kunnen dan om 6.70 (620+50=670) gerangeerd zijn, mits er geen andere wagons in station 3 te rangeren zijn.

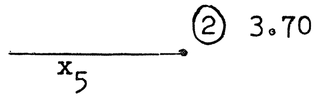
Met transport 3 kan de lokomotief op zijn vroegst om 4.40 beginnen, met transport 5 om 5.35. Men gaat direct na dat de lokomotief 1 na het uitvoeren van één der transporten 2, 3, 5 geen enkel transport meer kan doen. Wij vinden voor lokomotief 1 dus de volgende vertakking, aan elke tak kennen wij een variabele x_j toe.

lok 1

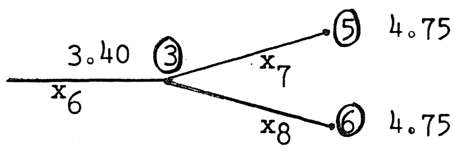


Evenzo vinden wij voor de andere lokomotieven de volgende vertakkingen,

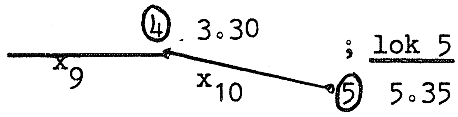
lok 2



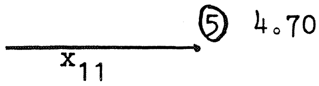
; lok 3



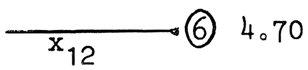
lok 4



; lok 5



lok 6



Betekenis van de variabelen x_i:

$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{als lokomotief 1 transport 1 uitvoert} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{als lokomotief 1 transport 1 uitvoert, daarna transport 2} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{als lokomotief 1 transport 1 uitvoert, daarna transport 3} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$x_4 = \begin{cases} 1 & \text{als lokomotief 1 transport 1 uitvoert, daarna transport 5} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$\vdots$

$x_{12} = \begin{cases} 1 & \text{als lokomotief 6 transport 6 uitvoert} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

Beschouw nu het volgende tableau,

	lokomotief 1				2	3			4		5	6	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
transp. 1	1	1	1	1									= 1
2		1			1								= 1
3			1			1	1	1					= 1
4									1	1			= 1
5				1			1			1	1		= 1
6								1				1	= 1

Het mathematisch programmeringsprobleem waarmee wij het hiervoor gestelde voorbeeld zullen proberen op te lossen, luidt

$$\text{Minimaliseer} \sum_{i=1}^{12} x_i \tag{19}$$

onder

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
x_2 + x_5 &= 1\\
x_3 + x_6 + x_7 + x_8 &= 1\\
x_9 + x_{10} &= 1\\
x_4 + x_7 + x_{10} + x_{11} &= 1\\
x_8 + x_{12} &= 1
\end{aligned} \tag{20}$$

$$x_i \quad 0 \text{ of } 1 \quad (i=1, \ldots, 12) \tag{21}$$

Men gaat direct na dat tengevolge van de voorwaarden een transport uitgevoerd wordt door slechts één lokomotief, en een lokomotief hoogstens aan één transport tegelijk werken kan. Met het minimaliseren van $\sum_{i=1}^{12} x_i$ bereikt men dat zo weinig mogelijk lokomotieven ingezet worden.

Het geformuleerde programmeringsprobleem heet een <u>discreet lineair programmeringsprobleem</u> (afkorting discreet L.P.-probleem).

Vervangen wij in bovenstaand programmeringsprobleem de voorwaarden x_i 0 of 1 door de voorwaarden $x_i \geq 0$ (i=1, ...,12) dan krijgen wij een L.P-probleem. Het zo verkregen L.P.-probleem hebben wij met behulp van een rekenautomaat opgelost, en wij vonden de geheelwaardige oplossing $x_1=x_8=x_{10}=1$, overige $x_i=0$. Dit is tevens de oplossing van het discrete L.P-probleem.

Bijgevolg kunnen de transporten door drie lokomotieven uitgevoerd worden. Voor de transporten 1 en 2 is een lokomotief nodig, de transporten 3 en 6 kunnen ook door eenzelfde lokomotief gedaan worden, evenals de transporten 4 en 5. Vertrekken de lokomotieven volgens de tijdstippen gegeven bij de vertakkingen, dan vertrekken vanaf station 1 en 4 de lokomotieven met een tussenperiode van resp. 100 en 60 tijdseenheden. Men gaat verder eenvoudig na dat het rangeren op de stations 1, 2, 3 en 4 beëindigd kan zijn om resp. 6.64(535+105+24=664), 4.24, 7.10, 5.27. Voor elk station is het rangeren op tijd beëindigd.

Op de rekenautomaat hebben wij nog een aantal problemen, met ongeveer de grootte van het voorgaand probleem, opgelost met lineaire programmering. De gevonden oplossingen waren in de meeste gevallen nul-één oplossingen. Wij vonden ook een aantal oplossingen waarin de variabelen gelijk aan 0, $\frac{1}{2}$ of 1 waren. Men behoeft niet met lineaire programmering een geheelwaardige oplossing te vinden, om zeker ervan te zijn zo'n oplossing te vinden zal men een oplossingstechniek voor discrete L.P.-problemen moeten aanwenden. Wij zullen nu de gegevens vermelden van het spoorwegprobleem, dat wij met behulp van het tweede model hebben getracht op te lossen. In dit probleem is sprake van 10 stations, waartussen in totaal 46 transporten plaatsvinden. Hieronder worden de gegevens van het te beschouwen probleem verstrekt.

Afstandstabel (deze is symmetrisch). Tabel 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		.30	.90	1.50	1.05	.65	1.35	1.95	1.70	1.50
2			.60	1.20	.95	.55	1.25	1.85	1.60	1.40
3				.60	1.15	1.00	.40	1.00	1.25	1.25
4					1.65	1.50	.80	1.25	1.50	1.70
5						.40	.85	1.35	.85	.65
6							.70	1.30	1.05	.85
7								.60	.85	.95
8									.50	.70
9										.20
10										

Tabel 2

Station	Vroegste vertrektijd	Einde rangeren	Station	Vroegste vertrektijd	Einde rangeren
1	4.10	6.96	6	3.60	7.08
2	3.80	6.56	7	3.70	7.00
3	2.90	-	8	3.70	6.92
4	3.70	7.37	9	4.70	6.68
5	4.70	6.53	10	4.70	6.40

Transporten tussen de stations, met daarbij tussen haakjes het aantal te transporteren wagons. Tabel 3.

Transport	Station→ station						
1	1-2 (24)	13	4-7 (25)	25	6-10 (8)	37	9-4 (40)
2	1-4 (50)	14	4-8 (17)	26	7-1 (18)	38	9-5 (34)
3	1-8 (35)	15	4-9 (33)	27	7-5 (23)	39	9-7 (32)
4	1-9 (22)	16	4-10 (15)	28	7-6 (29)	40	9-10 (40)
5	2-5 (11)	17	5-1 (24)	29	7-9 (11)	41	10-1 (25)
6	2-6 (19)	18	5-4 (40)	30	7-10 (17)	42	10-2 (34)
7	2-10 (14)	19	5-6 (37)	31	8-1 (26)	43	10-4 (30)
8	3-1 (13)	20	5-7 (26)	32	8-4 (25)	44	10-5 (10)
9	3-9 (11)	21	5-8 (23)	33	8-7 (16)	45	10-8 (24)
10	3-10 (15)	22	6-4 (18)	34	8-9 (33)	46	10-9 (11)
11	4-5 (32)	23	6-8 (28)	35	8-10 (12)		
12	4-6 (16)	24	6-9 (22)	36	9-1 (27)		

Voor elk transport is het vroegste vertrektijdstip bekend, verder kan met direct een tijdstip u_k aangeven waarop het transport zeker binnengebracht moet zijn. Als het transport w wagons telt, station k als eindstation heeft en r_k het tijdstip is, waarop al de wagons in station k gerangeerd moeten zijn, dan u_k gelijk aan r_k-w te nemen. Voor een aantal transporten kan men vrij eenvoudig het tijdstip waarop het transport in elk geval binnengebracht moet zijn beter benaderen. Neem b.v. station 4 en beschouw al de transporten die station 4 als eindstation hebben. Veronderstel dat elk van deze transporten zo vroeg mogelijk uitgevoerd wordt en wel onafhankelijk van de overige transporten. Dit geeft de volgende situatie, Tabel 4

transport	vroegste aankomsttijd	aantal wagons	rangeren klaar om
32	4.95	25	5.20
22	5.10	18	5.38
2	5.60	50	6.10
37	6.20	40	6.60
18	6.35	40	7.00
43	6.40	30	7.30

Bijgevolg zijn onder de hiervoor gemaakte veronderstelling in station 4 alle wagons om 7.30 gerangeerd. Wij merken op dat dit het vroegste tijdstip is waarop alle wagons in station 4 gerangeerd kunnen zijn. Het rangeren moet in station 4 om 7.37 beëindigd zijn. Beschouw nu uit tabel 4 de transporten (in volgorde van boven naar beneden) die meer dan 737-730=7 wagons tellen. Voor elk van deze transporten gaan wij na op welk tijdstip het transport zeker naar het bijbehorend eindstation gebracht moet zijn, waarbij wij dan aannemen dat de overige transporten uit tabel 4 zo vroeg mogelijk gedaan worden. Eerst beschouwen wij het transport 32, dit transport telt 25 wagons. Van deze 25 wagons kunnen er 7 na 7.30 gerangeerd worden, 10 tussen 6.10 en 6.20 en de overige 8 tussen 5.38 en 5.60 (zie tabel 4). Hieruit volgt dat transport 32 in elk geval om 5.60+ - 8 = 5.52 in station 4 moet aankomen.

Analoog vindt men dat de transporten 22, 2, 37 en 18 in elk geval om resp. 5.59, 5.77, 6.27 en 6.42 binnengebracht moeten zijn. Op dezelfde wijze analyseert men de situatie bij de andere stations. Men vindt dan nog voor de transporten 31, 41 en 1 de tijdstippen 6.18, 6.44 en 5.98 waarop zij binnen moeten zijn.

Evenals bij het hiervoor behandelde voorbeeld kennen wij aan elk van de 46 transporten een lokomotief toe. Het probleem wordt vervolgens in twee stappen aangepakt. Eerst bepalen wij voor elke lokomotief de "pakketten van transporten", die de lokomotief uitvoeren kan in overeenstemming met de gestelde tijdslimieten. Wij hebben deze pakketten door een rekenautomaat laten bepalen. Het voor de rekenautomaat benodigde programma is geschreven door J.M. Anthonisse, met wiens programma voor de Land en Doig procedure het hieronder te formuleren discrete L.P.-probleem is opgelost.

De rekenautomaat genereerde 367 "pakketten van transporten". Aan elk pakket j wordt een variabele x_j toegekend. Vervolgens formuleren wij een discreet L.P.-probleem, dit luidt,

$$\text{Minimaliseer} \sum_{i=1}^{367} x_i \tag{22}$$

onder

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{367} \alpha_{ik} x_i = 1 \quad (k=1,\ldots,46) \\ &x_i \quad 0 \text{ of } 1 \quad (i=1,\ldots,367) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\text{waarbij } \alpha_{ik} = \begin{matrix} 1 & \text{als transport k in pakket i} \\ 0 & \text{anders} \end{matrix}$$

Wij hebben getracht het discrete L.P.-probleem met lineaire programmering op te lossen. De gevonden oplossing was echter niet geheelwaardig. Daarna hebben wij een oplossingstechniek voor discrete aangewend, n.l. de Land en Doig procedure. De rekenautomaat heeft 3 oplossingen gevonden, met 25 als minimum van de kriteriumfunctie. Bijgevolg kunnen wij de transporten met 25 lokomotieven uitvoeren. Het is alleen de vraag of aan de twee, in het model niet opgenomen voorwaarden voldaan is of voldaan kan worden. Hieronder geven wij 3 gevonden oplossingen. Iedere oplossing geven wij door voor elke lokomotief te vermelden welke transporten door de betreffende lokomotief uitgevoerd worden. Tussen haakjes vermelden wij de tijdstippen vanaf waar aan de transporten begonnen mag worden. De afkorting abi betekent: als bij i. (i=1,2)

Oplossing 1		Oplossing 2		Oplossing 3	
2	(5.60)	5;21	(4.90;6.65)	5;45	(4.90;6.65)
3	(6.05)	ab1		ab1	
4	(5.80)	ab1		ab1	
5;19	(4.90;5.70)	8;2	(3.80;5.70)	ab2	
7;44	(5.20;6.25)	ab1		ab1	
8;45	(3.80;6.40)	10;28	(4.15;6.20)	9;37	(4.15;6.20)
9;42	(4.15;6.15)	ab1		10;42	(4.15;6.10)
10;37	(4.15;6.25)	16;45	(5.40;6.50)	13;30	(4.50;5.85)
11;20	(5.35;6.60)	ab1		ab1	
14;35	(4.95;6.05)	ab1		ab1	
15;39	(5.20;6.45)	ab1		ab1	
16;46	(5.40;6.00)	19;46	(5.10;6.55)	ab1	
18	(6.35)	ab1		ab1	
22;13	(5.10;6.30)	ab1		22	(5.10)
23;34	(4.90;5.80)	ab1		ab1	
24;33	(4.65;6.15)	ab1		24-43	(4.65;6.95)
25;41	(4.45;6.35)	ab1		ab1	
26;1;6	(5.05;5.75;6.70)	ab1		ab1	
27;17	(4.55;6.00)	ab1		ab1	
28;21	(4.40;6.55)	37	(6.20)	ab1	
29;36	(4.55;6.65)	ab1		ab1	
30;38	(4.65;6.10)	ab1		33;40	(4.30;5.75)
31	(5.65)	ab1		ab1	
32;12	(4.95;6.85)	ab1		ab1	
40;43	(4.90;7.00)	ab1		38;19	(5.55;6.35)

Wij zijn vervolgens nagegaan of aan de in het model niet opgenomen twee eisen m.b.t. het rangeren en vertrekken vervuld is. Men bepaalt voor elk van de oplossingen eenvoudig op welke tijdstippen het rangeren in de stations beëindigd is, als wij er van uitgaan dat de transporten vertrekken op de tijden aangegeven in voorgaande tabel. Men vindt dan de volgende tijdstippen, waarop het rangeren klaar is met daarachter vermeld de tijd die men te kort komt of over houdt in vergelijking met de gestelde tijd, waarop het rangeren klaar moet zijn.

	Oplossing 1	Oplossing 2	Oplossing 3
Station 1	6.92; +4	6.92; +4	6.92; +4
2	6.49; +7	6.49; +7	6.44; +12
3	--	--	--
4	7.35; +2	7.30; +7	7.30; +7
5	6.54; -1	6.54; -1	6.35; +18
6	7.05; +3	7.05; +3	7.07; +1
7	7.14; -14	7.14; -14	7.03; -3
8	6.87; +5	6.97; -5	7.02; -10
9	6.46; +22	6.66; +2	6.46; +22
10	6.17; +23	6.17; +23	6.17; +23

Men ziet dus dat er bij elke oplossing stations zijn waarop het rangeren niet op tijd beëindigd is. Wat het rangeren betreft is oplossing 3 de "gunstigste" oplossing van de gevonden oplossingen. Verder blijkt bij nadere uitwerking van de gevonden oplossingen dat ook aan de andere eis niet voldaan is, bij de eerste oplossing zijn er 7 stations vanaf waar de lokomotieven niet met de vereiste tussenperiode vertrekken, bij de tweede oplossing 9 en bij de derde oplossing 8. Het blijkt dat deze laatste eis de meeste moeilijkheden oplevert.

In enkele gevallen kan men ervoor zorgen dat de lokomotieven vanaf een station met de vereiste tussenperiode vertrekken, door gebruik te maken van het feit dat men in een aantal stations voor het gestelde tijdstip klaar is met het rangeren. Men verkrijgt hier echter geen belangrijke verbeteringen door.

Wij merken op dat mogelijk meer dan 25 lokomotieven nodig zijn om de transporten uit te voeren in overeenstemming met de gestelde eisen. Indien dit het geval is, moet aan het discrete L.P.-probleem de voorwaarde $\sum_i x_i \geq 26$ toegevoegd worden.

Samenvatting Wij hebben twee modellen voor het spoorwegprobleem opgesteld en met het laatste model getracht het probleem op te lossen. Dit is niet gelukt. De reden hiervan is dat de werkzaamheden van de lokomotieven onderling afhankelijk zijn, terwijl wij in het model onafhankelijkheid verondersteld hebben. Men kan in het kader van het tweede model aan de eis, dat het rangeren op een station voor een gesteld tijdstip beëindigd moet zijn, voldoen door aan het reeds geformuleerde programmeringsprobleem een aantal voorwaarden toe te voegen. Om deze te bepalen beschouwen wij de 367 "pakketten" bestaande uit transporten. Wij nemen al die combinaties van k pakketten uit de 367 pakketten, waarbij de pakketten uit de combinatie geen enkel transport gemeen hebben. Wij doen dit voor k=2, ...,46 (het aantal uit te voeren transporten is immers 46). Stel wij hebben zo'n combinatie van k pakketten, en wel de pakketten $i_1,\ldots,i_k$. Voor een oplossing met $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 1$ gaan wij na of de wagons behorende bij de transporten die bevat zijn in de pakketten $i_1,\ldots,i_k$ op tijd gerangeerd kunnen worden. Wanneer dit niet het geval is, stellen wij de voorwaarde $\sum_{h=i_1,\ldots,i_k} x_h \leq k-1$. (Wij merken op dat wanneer wij, wanneer wij deze laatste voorwaarde gesteld hebben, niet meer de combinaties van pakketten behoeven te beschouwen, die de pakketten $i_1,\ldots,i_k$ bevatten). Het genereren van bovengenoemde voorwaarden kan men door een rekenautomaat laten doen, maar dit zal veel tijd kosten.

Wij hebben de rekenautomaat enige tijd laten werken aan combinaties van twee pakketten. Het aantal voorwaarden dat wij hierdoor verkregen was dermate groot dat ons discrete L.P.-probleem een onhanteerbare omvang kreeg. Men kan op de rekenautomaat slechts programmeringsproblemen van een beperkte omvang uitrekenen.

Het zal niet eenvoudig zijn om in het kader van het tweede model - in tegenstelling tot het eerste model - te voldoen aan de eis dat de lokomotieven vanaf een station met een tussenperiode moeten vertrekken.

Wanneer men genoegen neemt met een oplossing die mogelijk enkele lokomotieven meer telt dan het optimum, kan men als volgt te werk gaan.

Men kan eisen dat een lokomotief i.p.v. het tijdstip b_j pas enige tijd later voor het eerst vanaf station j mag vertrekken. Verder kan men het tijdstip r_k, waarop het rangeren in station k beëindigd moet zijn, vervroegen. De drie gevonden oplossingen van probleem (22) (men gaat voor elk van de stations afzonderlijk na hoever het misloopt met "het vertrekken en rangeren") geven een aanwijzing hoe men de tijdstippen b_j, r_k wijzigen zal.

Wijzigt men de tijdstippen b_j en r_k dan verkrijgt men een kleiner discreet L.P.-probleem, het aantal variabelen zal minder zijn dan in probleem (22). Met de oplossing(en) van het nieuwe programmeringsprobleem heeft men meer mogelijkheden om aan de oorspronkelijk gestelde eisen te voldoen. Door zo met de tijdstippen b_j, r_k te experimenteren vindt men mogelijk een oplossing die dicht bij het optimum ligt en aan al de gestelde eisen voldoet.

Wij kunnen tenslotte concluderen dat het spoorwegprobleem moeilijk op te lossen is vanwege de afhankelijkheid tussen de werkzaamheden van de lokomotieven. Deze afhankelijkheid is niet eenvoudig in een model te formuleren, zodanig dat wij tevens in staat zijn om met het model berekeningen uit te voeren.

Litteratuur:

G. Hadley, Nonlineair and dynamic programming.

A.H. Land and A.G. Doig, An automatic method of solving discrete programming problems, Econometrica 28 (1960), 497-520.

J.M. Anthonisse, Solution of certain assignment-scheduling problems with discrete lineair programming, Mathematisch Centrum S 379.