MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 166 (C9)

"Operations Research"

Hoofdstuk I: Inleidende voorbeelden

door

J. Kriens

en

G. de Leve

2e druk
1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Bij zeer veel bedrijfsproblemen wordt men geconfronteerd met de vraag, hoe één of meer regelbare productiefactoren gekozen moeten worden opdat de opbrengst van het productie-proces maximaal is. Vaak is men hierbij in de keuze van de oplossingsmogelijkheden beperkt doordat er extra voorwaarden zijn, waaraan in ieder geval moet worden voldaan.

De in het eerste hoofdstuk behandelde voorbeelden kunnen met klassieke methoden worden opgelost. In het tweede hoofdstuk zullen wij de lineaire programmering bespreken, een techniek van meer recente datum.

Wij leggen er reeds nu de nadruk op dat de theorie zich niet zal beperken tot de mathematische statistiek; ook andere delen van de wiskunde zullen ter sprake komen.

1. Voorbeeld, ontleend aan de landbouw

Wanneer men een stuk land ter beschikking heeft en dit wil bebouwen, zal de keuze van de producten afhangen van de netto opbrengst in geld, die de verschillende gewassen opleveren. Velerlei factoren spelen hierbij een rol, o.a. de opbrengst in hl per oppervlakte-eenheid, de prijs, die men per hl ontvangt, de spreiding in beide voornoemde factoren, b.v. ten gevolge van het weer; verder de bewerkelijkheid van het product en de invloed van vruchtwisseling (afwisselend verbouwen van verschillende gewassen brengt meer op dan het voortdurend telen van één bepaald gewas).

Het is uiteraard niet mogelijk met alle invloeden tegelijk rekening te houden, aangezien het model hierdoor te ingewikkeld zou worden. Dit neemt niet weg, dat wij kunnen trachten de onderstellingen zo reëel mogelijk te maken. Het voorbeeld wordt twee keer besproken; de eerste keer[1)] zonder rekening te houden met spreidingen in de oogstresultaten, terwijl dit de tweede keer wel gedaan zal worden. De beschouwingen worden gegeven voor tarwe (T) en haver (H). Voor meer dan twee gewassen kunnen analoge methoden gevolgd worden.

---

1) De stof is gebaseerd op: C. HILDRETH and S. REITER, On the Choice of a Crop Rotation Plan, hoofdstuk XI in Activity Analysis of Production and Allocation, onder redactie van Tj.C. KOOPMANS, Wiley and Sons (1951).

1.1. Bespreking zonder rekening te houden met spreidingen

Wanneer men de invloed van toevallige factoren buiten beschouwing laat, houdt men alleen rekening met de gemiddelde opbrengsten. Verder nemen wij aan, dat het land homogeen is en dat bij een bepaalde bebouwingsmethode een bepaalde bewerking van het land hoort. Ook onderstellen wij voor de eenvoud, dat noch de aanschaf van zaaigoed, noch de wijze van bewerken van land en gewas invloed heeft op het financiële resultaat. Slechts de opbrengst per oppervlakte-eenheid en de prijs per hl spelen dus nog een rol.

De aangegeven oplossingsmethode kan ook worden toegepast op de winsten, waarbij wij bovengenoemde beperkingen natuurlijk **niet** behoeven te maken; bewerkingskosten e.d. zijn dan al verdisconteerd.

1.1.1. Het eenvoudigste geval

Beperken wij ons verder nog tot het geval, dat geen vruchtwisseling wordt toegepast, dus dat op ieder stuk van het te bebouwen land steeds hetzelfde gewas wordt geteeld, dan is men alleen nog vrij in de keuze van de fractie λ van het land, dat met tarwe zal worden bezaaid; het overige deel is dan bestemd voor haver. Wij nemen aan dat het land 1 ha groot is en dat de opbrengst per ha voor tarwe a_{11} hl bedraagt en voor haver a_{22} hl.

De verkregen opbrengst kunnen wij met behulp van een rechthoekig assenstelsel als volgt in beeld brengen. Langs de x_1- resp. x_2-as (zie figuur 1) zetten wij de opbrengsten in hl van de tarwe resp. haver uit, zodat de coördinaten van ieder punt in het (x_1, x_2)-vlak de opbrengsten in tarwe en haver aangeven. Wanneer er alleen tarwe wordt geteeld, dus $\lambda = 1$, dan correspondeert hiermee het punt A_1 op de x_1-as met coördinaten (a_{11}, o). Evenzo correspondeert met alleen haver verbouwen het punt $A_2(o, a_{22})$ op de x_2-as. Bij elke waarde van λ behoort een punt A, gelegen op de verbindingslijn $A_1 A_2$; men schrijft hiervoor $A = \lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$, d.w.z. dat de coördinaten van dit punt zijn $x_1 = \lambda a_{11}$ en $x_2 = (1-\lambda) a_{22}$ of in de gebruikelijke notatie $(\lambda a_{11}, (1-\lambda) a_{22})$. Punten binnen de driehoek $A_1 O A_2$ vindt men alleen wanneer een deel van de oogst vernietigd wordt.

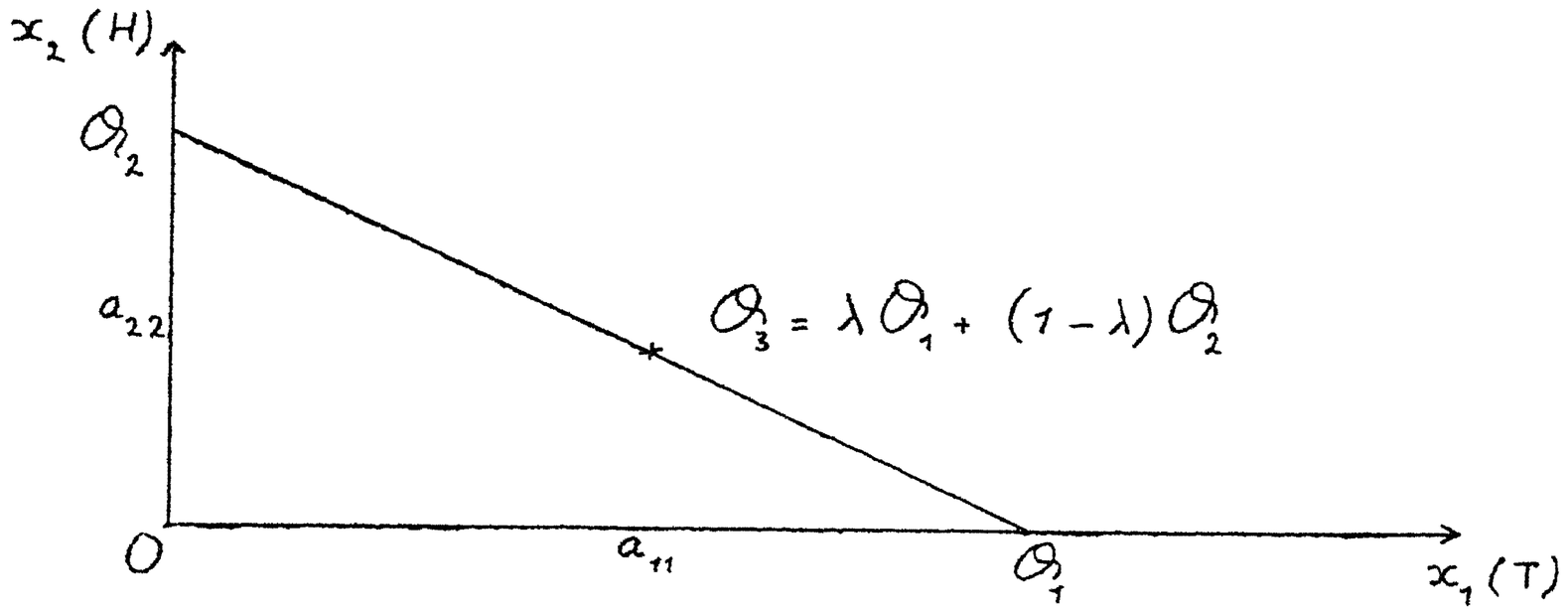


fig. 1

Opbrengsten, wanneer op een fractie van het land steeds tarwe verbouwd wordt en op de rest steeds haver.

De gemiddelde opbrengst per ha (geschat uit een reeks voorafgaande jaren) hebben wij van tarwe a_{11} hl en van haver a_{22} hl genoemd. Zijn de prijzen, die men per hl ontvangt p_1, resp. p_2, dan verdient men bij een fractie λ aan tarwe

$$z = \lambda a_{11} p_1 + (1-\lambda) a_{22} p_2 \quad . \qquad (1)$$

Uiteraard wil men z zo groot mogelijk maken, wat in het geval (1) zeer eenvoudig is. z is een lineaire functie van λ, die men ook kan schrijven in de vorm

$$(a_{11} p_1 - a_{22} p_2)\lambda + a_{22} p_2 \ ,$$

waaruit direct blijkt, dat men $\lambda = 1$ moet kiezen, indien $a_{11} p_1 - a_{22} p_2 > 0$ en $\lambda = 0$, wanneer $a_{11} p_1 - a_{22} p_2 < 0$ is. In het geval $a_{11} p_1 - a_{22} p_2 = 0$ maakt het geen verschil, hoeveel men van het ene product verbouwt en hoeveel van het andere.

Men kan dit resultaat ook zuiver grafisch afleiden door in de grafiek van figuur 1 ook nog te tekenen de lijnen $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$, waarin C een willekeurige constante voorstelt (zie fig. 2). Een dergelijke lijn stelt opbrengsten-combinaties (x_1, x_2) voor, die hetzelfde financiële resultaat C opleveren. Naarmate de afstand van O tot de lijn $p_1 x_1 + p_2 x_2$ = constant, groter is, heeft ook C een grotere waarde. Verschuiven wij de lijn AB evenwijdig aan zichzelf verder van O af, dan wordt de constante, d.w.z. de financiële opbrengst, dus groter en wij zullen het beste resultaat bereiken, wanneer deze lijn zo ver mogelijk van O verwijderd is, maar nog juist een punt met $\mathcal{O}_1\ \mathcal{O}_2$ gemeen heeft. Hierbij kunnen zich voor verschillende waarden van p_1 en p_2 drie gevallen voordoen, welke geïllustreerd worden door de figuren 3a, b en c en die

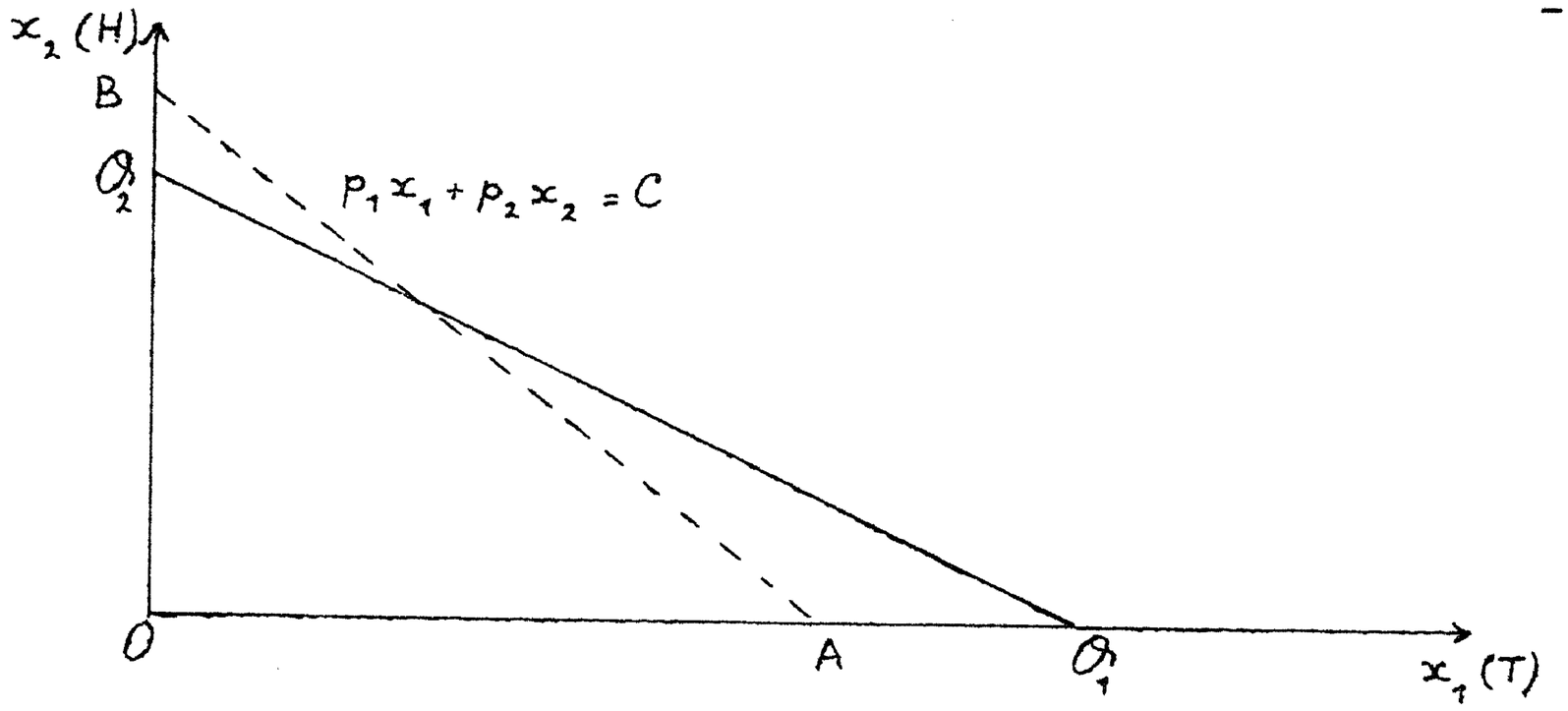


fig. 2

Grafiek voor het bepalen van de beste λ op grond van bekende opbrengsten in hl en prijzen per hl.

resp. leiden tot de keuze: alleen haver (a), alleen tarwe (b) en alle combinaties zijn even goed (c). Het is niet moeilijk na te gaan dat deze gevallen corresponderen met resp.

$a_{11} p_1 - a_{22} p_2 < o$, $> o$ en $= 0$.

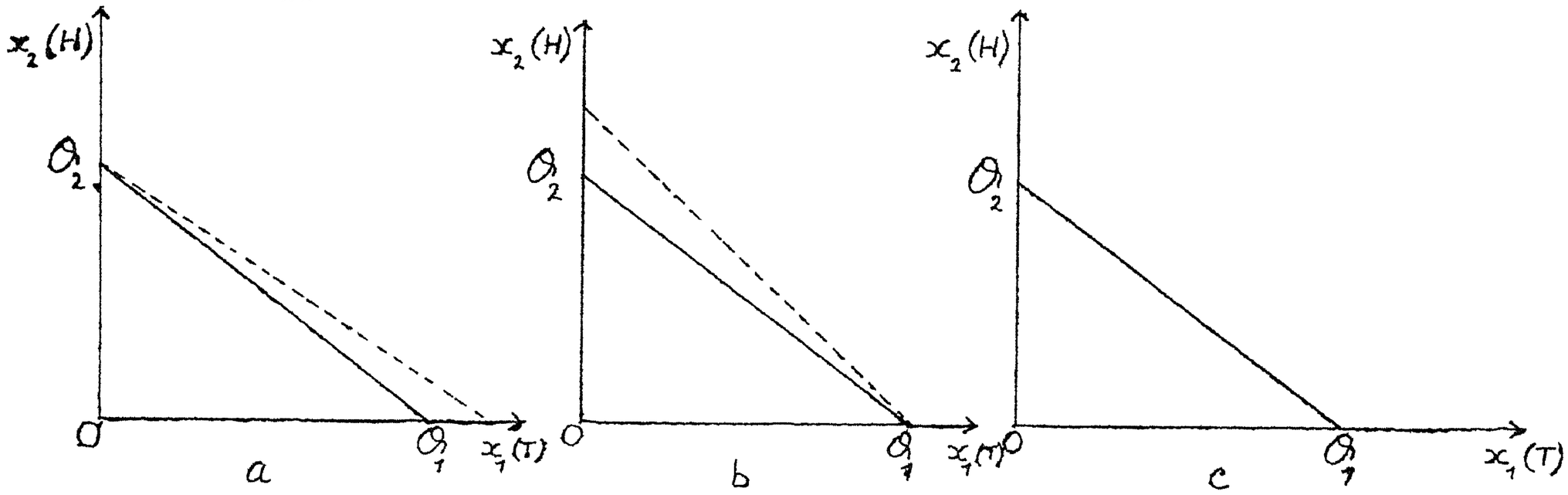


fig. 3

Grafische bepaling van de beste λ met lijnen evenwijdig $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$.

1.1.2. Toepassen van vruchtwisseling

Het in 1.1.1. gegeven model is weinig realistisch, omdat geen rekening is gehouden met het feit, dat de opbrengsten verhoogd worden door het toepassen van vruchtwisseling, een bebouwingsmethode, waarbij niet steeds hetzelfde product gezaaid wordt op een bepaald stuk land.

Daarom zullen wij nu eerst het geval bekijken, waarin men wat de vruchtwisseling betreft, kan kiezen tussen 1) voortdurend tarwe, 2) voortdurend haver, 3) twee jaar tarwe en vervolgens een jaar haver en 4) een jaar tarwe en daarna twee jaar haver. Wij gebruiken hiervoor achtereenvolgens de notaties TTT, HHH, TTH en THH. Of men de wisseling doet plaatsvinden door het stuk land in zijn geheel eerst twee jaar met tarwe te bezaaien en dan een jaar met haver, of door het stuk in drie gelijke delen te verdelen en op ieder deel met een ander stadium van de cyclus te beginnen, doet voor het onderhavige probleem niet ter zake, omdat prijsschommelingen, spreidingen in de opbrengsten en de bewerking van de gewassen buiten beschouwing zijn gelaten.

In onderstaande tabel zijn de experimenteel bepaalde gemiddelde opbrengsten per jaar per ha opgegeven voor de verschillende methoden.

Tabel I

Opbrengsten in hl per ha bij verschillende bebouwingsmethoden

		bebouwingsmethode			
		TTT	HHH	TTH	THH
Opbrengst	tarwe	a_{11}	0	a_{13}	a_{14}
	haver	0	a_{22}	a_{23}	a_{24}

Evenals in fig. 1 kunnen wij ook nu in een grafiek uitzetten wat de resultaten zijn, wanneer één van de vier methoden wordt toegepast op een stuk land van 1 ha (fig. 4). Behalve $O_1(TTT)$ en $O_2(HHH)$ zijn nu nog gegeven $O_3(TTH)$ en $O_4(THH)$. Passen wij op een deel van het land TTT toe en op de rest TTH, dan wordt de opbrengst voorgesteld door een punt van $O_1 O_3$. Een dergelijke betekenis hebben ook alle punten van de lijnstukken $O_3 O_4$ en $O_4 O_2$. Zolang de keuze beperkt blijft tot de vier genoemde vruchtwisselingen kunnen er geen opbrengsten bereikt worden, die zowel meer tarwe als meer haver opleveren dan de resultaten, voorgesteld door de punten van de gebroken lijn $O_1 O_3 O_4 O_2$ in figuur 4.

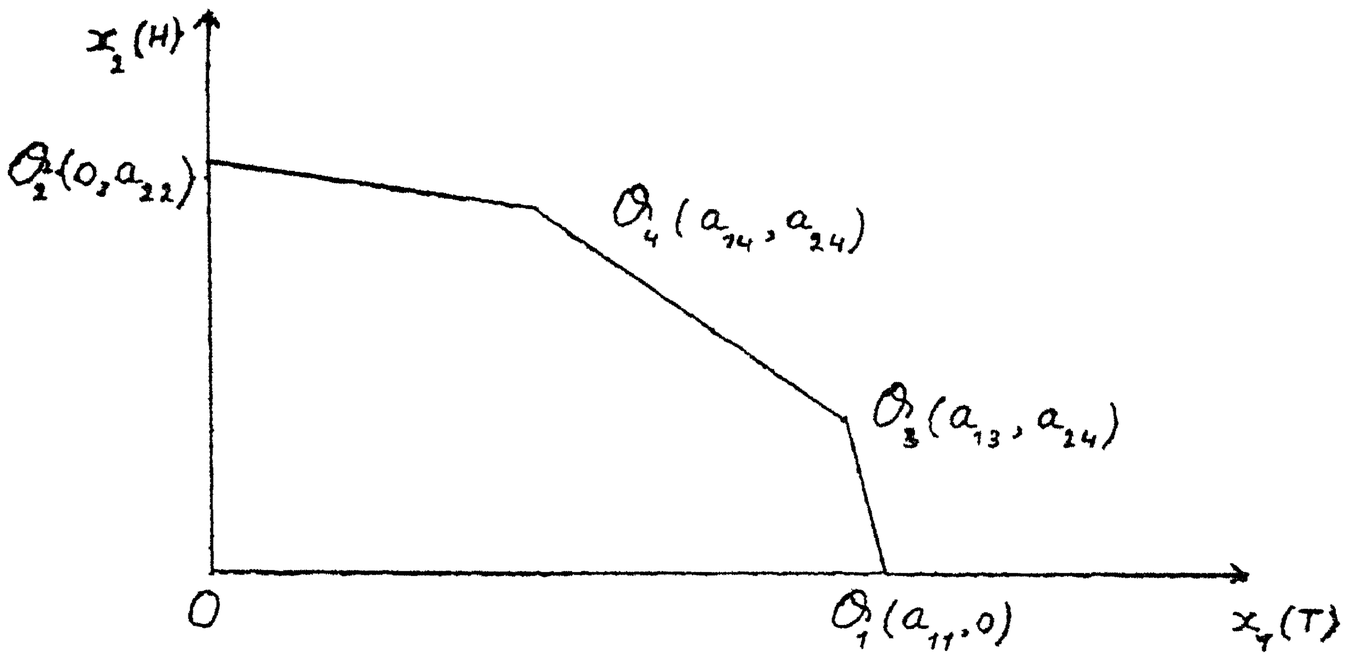


fig. 4

Opbrengsten, wanneer vier wisselende bebouwingen toegepast kunnen worden.

Voor iedere combinatie van de prijzen p_1 en p_2 kunnen wij weer nagaan welke vruchtwisseling of combinatie van vruchtwisselingen het voordeligst is. Grafisch geschiedt dit op dezelfde wijze als in 1.1.1., nl. door de rechte $p_1 x_1 + p_2 x_2 =$ constant evenwijdig aan zichzelf van O af op te schuiven, totdat er nog juist één of meer gemeenschappelijke punten zijn met de veelhoek $O O_1 O_3 O_4 O_2$.

Wij merken op dat in problemen van dit type het beste resultaat blijkbaar steeds verkregen wordt bij één van de hoekpunten, d.w.z. dat combinaties van verschillende wisselingen niet in aanmerking komen. De enige uitzondering hierop is het geval, waarin $p_1 x_1 + p_2 x_2$ = constant evenwijdig loopt met een segment van $O_1 O_3 O_4 O_2$.

In 1.1.3 zullen wij daarom combinaties van vruchtwisselingen buiten beschouwing laten. Dat dit niet meer gaat, wanneer wij ook spreidingen in onze beschouwingen betrekken, zullen wij zien in 1.2.

Algebraïsch kan men de beste bebouwingsmethode vinden door de financiële resultaten corresponderende met O_1, O_3, O_4 en O_2 met elkaar te vergelijken. Men vindt dan dat voor

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{13}} \qquad 2)$$

TTT de voorkeur verdient. Voor $\frac{p_1}{p_2} < \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{13}}$ kieze men TTH, tenzij de verhouding $\frac{p_1}{p_2}$ zodanig wordt, dat O_4 (THH) meer gaat opleveren. Op dezelfde wijze kan men inzien, dat de grens tussen de mogelijkheden TTH en THH ligt bij

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_{24} - a_{23}}{a_{13} - a_{14}} \quad , \text{ enz.}$$

---

2) Hierbij is aangenomen dat $a_{11} - a_{13} > 0$ is.

Hoewel het bovenstaande reeds een verbetering inhoudt van het model, dat in 1.1.1. is gebruikt, is het toch onbevredigend, dat van tevoren vastgesteld wordt, welke wisselingen men kan toepassen. Immers, men zal steeds zoeken naar die wisselingen, welke het meeste opleveren.

In het geval, dat alle mogelijke gemiddelde opbrengsten per jaar per ha, verkregen door allerlei verschillende vruchtwisselings-systemen, voorgesteld worden door een puntverzameling, b.v. een kromme, zoals getekend is in fig. 5, kan met de reeds behandelde grafische methode beslist worden welke opbrengstcombinatie het voordeligst is. Meestal zal deze bepaald worden door het punt E, waarin een rechte $p_1 x_1 + p_2 x_2 =$ constant, raakt aan de kromme.

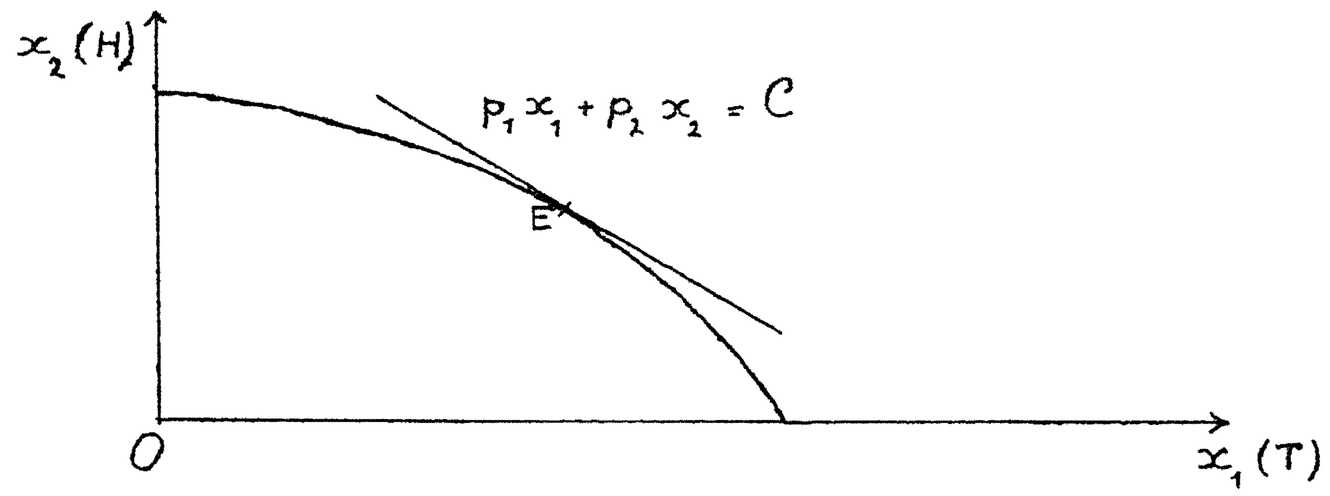


fig. 5

Bepaling maximale opbrengst bij gegeven productiekromme

Gewoonlijk heeft men echter niet een volledige kromme, maar kent men slechts de opbrengsten O_i bij een beperkt aantal vruchtwisselingen. Men kan dan door deze punten een kromme aanpassen, vervolgens weer het gunstigste punt E bepalen en dan, hetzij de vruchtwisseling O_j kiezen, die dit punt het beste benadert, hetzij trachten een nieuwe wisseling te vinden, waarvan de resultaten dichter bij E liggen dan de tot nu toe bekende. Overigens is het natuurlijk niet uitgesloten, dat bij nog niet onderzochte wisselingen punten behoren, die liggen buiten de aangepaste kromme; toepassing hiervan zou dan nog gunstigere resultaten opleveren.

In een artikel in Econometrica heeft C. HILDRETH [3] erop gewezen dat dit aanpassen van een kromme niet steeds de beste methode is. Zo kan het bijzonder lastig zijn een goede kromme aan te passen wat tengevolge kan hebben dat het berekende optimum ver verwijderd is van het werkelijke optimum. Het is dan beter zich te beperken tot een vergelijking van de discrete mogelijkheden, die men reeds gevonden heeft.

---

3) C. HILDRETH, Economic implications of some cotton fertilizer experiments, Econometrica 23 (1955) 88-98; zie ook uittreksel 43) in G. DE LEVE en J. KRIENS, Overzicht van een aantal artikelen over "Operations Research", Rapport S 167 (Ov5) van het Mathematisch Centrum.

Tenslotte willen wij nog opmerken dat men een kromme, zoals getekend in figuur 5 niet moet verwarren met de gebroken lijn van fig. 4. Daar stelden punten van de verbindingslijnen O_1O_3, O_3O_4 en O_4O_2 de opbrengsten voor wanneer op een deel van het land een bepaalde vruchtwisseling werd gebruikt en op de rest een andere. De punten van de kromme behoeven geen reële betekenis te hebben, daar wij niet weten of zij alle bereikt kunnen worden.

1.1.3. Invloed van andere factoren dan vruchtwisseling

Behalve het aantal verbouwingsmogelijkheden kan ook het aantal factoren, waarmee rekening wordt gehouden uitgebreid worden. Wij zullen dit illustreren voor het geval,dat gekozen kan worden tussen TTT, TTH, THH, HHH, waarbij wij dan tevens onderzoeken hoe de keuze afhangt van de vereiste hoeveelheid arbeid, gereedschappen en meststoffen voor de verschillende wisselingen. In tabel II is aangegeven hoeveel de opbrengst is per jaar, per ha en verder hoeveel arbeid, gereedschappen en meststoffen per jaar, per ha nodig zijn. Ter vereenvoudiging van de volgende formules behandelen wij de laatste drie factoren als negatieve opbrengsten; de a_{ij} van de regels 3 t/m 5 zijn dus < 0. De prijzen die men per eenheid ontvangt, resp. betaalt, geven wij aan met p_1 t/m p_5 ; deze p_i zijn alle positief.

Tabel II

Opbrengsten en investeringen per jaar per ha

		bebouwingsmethode			
		TTT	HHH	TTH	THH
	prijs	1	2	3	4
tarwe	p_1	a_{11}	0	a_{13}	a_{14}
haver	p_2	0	a_{22}	a_{23}	a_{24}
arbeid	p_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
gereed-schappen	p_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
mest-stoffen	p_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

Bij deze gegevens is het financiële resultaat π_j van de j-de methode:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{5} a_{ij} p_i \qquad (j = 1,2,3,4). \tag{2}$$

Het verschil tussen de j-de en de ℓ-de methode is dus

$$\pi_j - \pi_\ell = \sum_{i=1}^{5} (a_{ij} - a_{i\ell}) p_i \ . \tag{3}$$

Wanneer geldt $\pi_j - \pi_\ell < 0$ zal men de voorkeur geven aan methode ℓ, terwijl voor $\pi_j - \pi_\ell > 0$ methode j zal worden gekozen.

Meetkundig kan men de vergelijking

$$\pi_j - \pi_\ell = 0 \tag{4}$$

voorstellen als een hypervlak in een 5-dimensionale ruimte, die wij de "prijzenruimte" zouden kunnen noemen, waarin langs de assen de coördinaten $p_1, \ldots, p_5$ uitgezet zijn. Dit vlak verdeelt de ruimte dus in twee delen; ligt het punt met als coördinaten de vijf prijzen uit tabel II in het deel met $\pi_j - \pi_\ell > 0$, dan kiest men methode j , ligt het punt in het andere deel, dan kiest men methode ℓ. Zulke hypervlakken kan men vinden voor alle combinaties van de 4 methoden. Zij verdelen de "prijzenruimte" in vier delen; binnen ieder deel heeft één van de methoden de voorkeur. Men lette wel op het verschil tussen de hier gebruikte meetkundige voorstelling en die van de vorige paragrafen, waarbij op de coördinaatassen geen prijzen, maar opbrengsten, uitgezet zijn.

Wanneer de "prijzenruimte" meer dan twee en in ieder geval wanneer deze meer dan drie dimensies omvat, kunnen haar eigenschappen niet meer direct uit een figuur worden afgelezen. In veel gevallen is het echter mogelijk het probleem te benaderen door een ander met minder dimensies. Men zie hiervoor b.v. het in voetnoot 3) aangehaalde artikel van C. HILDRETH.

Laten wij eens aannemen dat bepaalde prijzen stabieler zijn dan de andere; wij kunnen deze dan beschouwen als constanten. Is dit b.v. het geval met p_3 , p_4 en p_5 , dan gaat vergelijking (4) over in

$$\pi_j - \pi_\ell = (a_{1j} - a_{1\ell}) p_1 + (a_{2j} - a_{2\ell}) p_2 + (c_j - c_\ell) = 0 \tag{5}$$

waarbij $c_j = \sum_{i=3}^{5} a_{ij} p_i$ en $c_\ell = \sum_{i=3}^{5} a_{i\ell} p_i$ bekende constanten zijn.

Vergelijking (6) stelt een rechte voor in een plat vlak, het "prijzenvlak", met p_1 en p_2 als coördinaten. Wij zullen een en ander met een voorbeeld toelichten.

Wij gaan uit van de gegevens, opgenomen in tabel IIa.

Tabel IIa

Opbrengsten en investeringen per jaar per ha

	prijs	bebouwingsmethode TTT 1	HHH 2	TTH 3	THH 4
tarwe	p_1	1,5	-	1,375	0,5
haver	p_2	-	2	0,625	1
arbeid	5	-2	-1	-2	-1
gereedschappen	3	-1	-1	-1	-1
meststoffen	2	-1	-1,5	-1,0625	-0,5

De netto opbrengsten in geld zijn voor de verschillende bebouwingsmethoden:

$$\pi_1 \equiv 1{,}5\,p_1 - 15,$$

$$\pi_2 \equiv 2\,p_2 - 11,$$

$$\pi_3 \equiv 1{,}375\,p_1 + 0{,}625\,p_2 - 15{,}125,$$

$$\pi_4 \equiv 0{,}5\,p_1 + p_2 - 9\ .$$

Indien wij een keuze willen maken uit de bebouwingsmethoden moeten wij de verschillen van de opbrengsten in geld kennen; deze zijn:

$$\pi_1 - \pi_2 \equiv \pi_{12} = 1{,}5\,p_1 - 2\,p_2 - 4,$$

$$\pi_1 - \pi_3 \equiv \pi_{13} = 0{,}125\,p_1 - 0{,}625\,p_2 + 0{,}125,$$

$$\pi_1 - \pi_4 \equiv \pi_{14} = p_1 - p_2 - 6,$$

$$\pi_2 - \pi_3 \equiv \pi_{23} = -1{,}375\,p_1 + 1{,}375\,p_2 + 4{,}125,$$

$$\pi_2 - \pi_4 \equiv \pi_{24} = -0{,}5\,p_1 + p_2 - 2,$$

$$\pi_3 - \pi_4 \equiv \pi_{34} = 0{,}875\,p_1 - 0{,}375\,p_2 - 6{,}125.$$

Voor ieder punt in ons "prijzenvlak", d.w.z. voor ieder stel gegeven waarden van p_1 en p_2 kunnen wij nu vaststellen welke methode de voorkeur verdient, omdat $\pi_{j\ell} > 0$ betekent: methode j voordeliger dan methode ℓ. Tekenen wij in het "prijzenvlak" de

lijnen $\pi_{jl} = 0$, dan verdeelt ieder van deze lijnen het vlak in twee delen; het teken van π_{jl} in deze delen kan eenvoudig bepaald worden door voor p_1 en p_2 beide nul te substitueren. Is de waarde van π_{jl} in $O > o\ (< o)$, dan ligt O in het deel, waarin $j\,(l)$ gunstiger is dan $l\,(j)$. In het "prijzenvlak" ontstaan op deze wijze vier gebieden G_i $(i = 1,2,3,4)$, waarin voor vaste i geldt, dat $\pi_{il} \geqq o$ $(l = 1,2,3,4)$ is. In het gebied G_i levert dus de i-de methode een gunstiger resultaat dan elke andere methode (zie fig. 6).

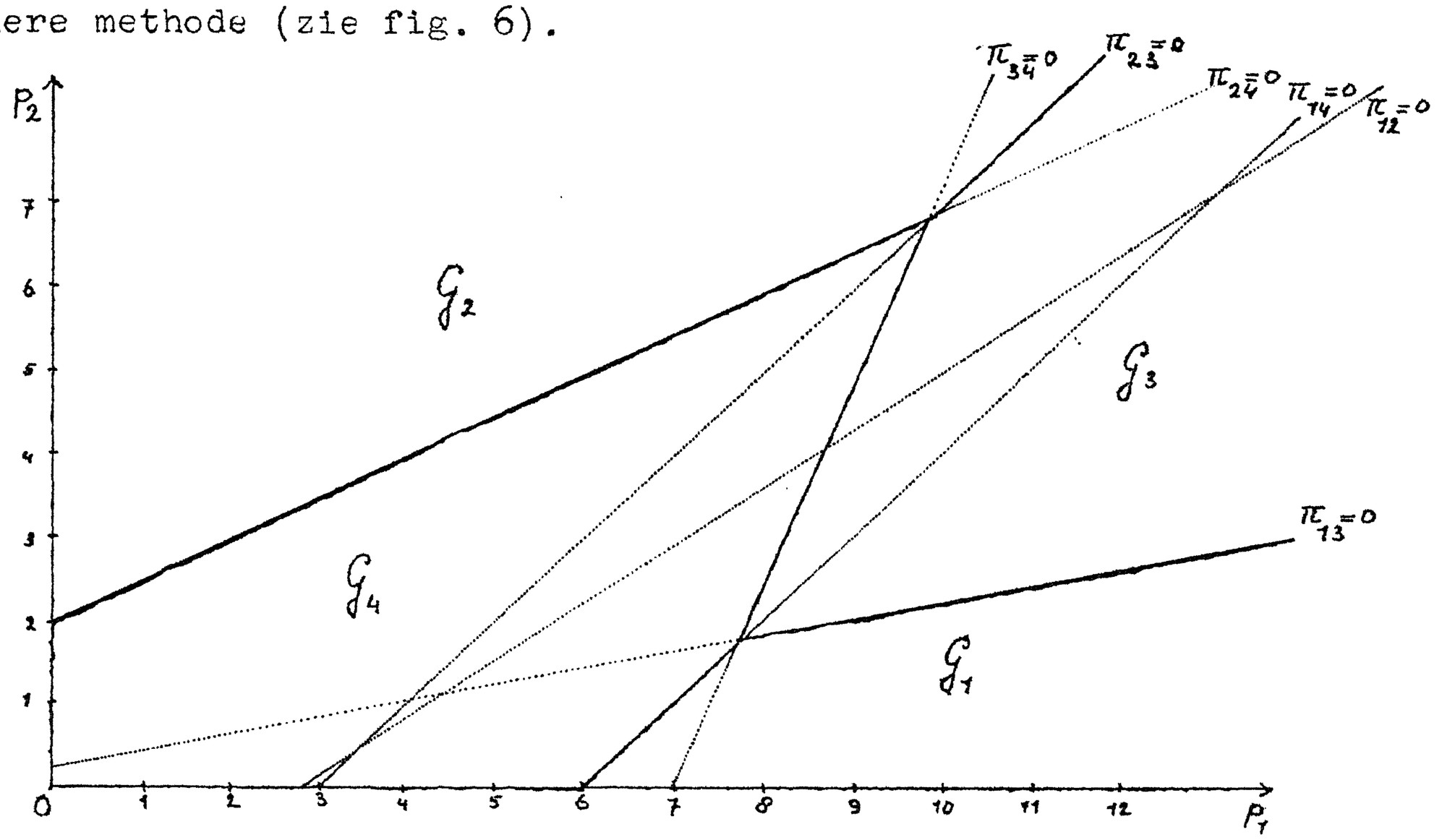


fig. 6

Bepaling van de beste methode met behulp van een "prijzenvlak"

Dat de gebieden, behorende bij een bepaalde methode samenhangend zijn en dat steeds drie lijnen door één punt gaan is niet toevallig. Beide eigenschappen kunnen worden bewezen. De laatste is zelfs zeer eenvoudig, immers als geldt

$$(a_{11} - a_{12})\,p_1 + (a_{21} - a_{22})\,p_2 + (c_1 - c_2) = 0$$

en

$$(a_{13} - a_{12})\,p_1 + (a_{23} - a_{22})\,p_2 + (c_3 - c_2) = 0\ ,$$

dan volgt door aftrekking

$$(a_{11} - a_{13})\,p_1 + (a_{21} - a_{23})\,p_2 + (c_1 - c_3) = 0\ ,$$

wat betekent, dat een punt liggende op $\pi_{12} = o$ en $\pi_{23} = o$ ook ligt op $\pi_{13} = o$. Voor iedere i, j en κ gaan dus de lijnen $\pi_{ij} = o$, $\pi_{j\kappa} = o$ en $\pi_{\kappa i} = o$ door één punt.

In gevallen, waarin het niet mogelijk is het probleem grafisch op te lossen, moet men de betreffende p -waarden in de functies π_{jl} substitueren en vervolgens nagaan of deze functies positief dan wel negatief worden.

Passen wij deze berekening toe in het gegeven voorbeeld, waarin wij voor p_3 , p_4 en p_5 weer kiezen, de waarden opgegeven in tabel IIa en bovendien p_1 de waarde 20 heeft en $p_2 = 10$ is, dan vinden wij $\pi_{12} > o$, dus π_1 beter dan π_2 , verder $\pi_{13} < o$, dus π_3 beter dan π_1 en tenslotte $\pi_{34} > o$, zodat π_3 ook de voorkeur heeft boven π_4 en dus de beste methode is, een resultaat, dat ook volgt uit figuur 6.

Het voorbeeld kan nog verder worden uitgebreid, door meer factoren en meer methoden in rekening te brengen. Het enige gevolg hiervan is, dat het aantal rijen resp. het aantal kolommen van tabel II vergroot wordt en de verschillende formules meer termen gaan bevatten. Ook kan men dezelfde vruchtwisseling gaan vergelijken met verschillende bemestingen, of dezelfde vruchtwisseling op verschillende soorten land, enz. Bij al deze wijzigingen blijft de methode echter essentieel dezelfde en vinden alleen kleine veranderingen in de formules plaats. In alle gevallen moeten de verwachte opbrengsten echter bekend zijn, of anders van te voren geschat worden.

1.2. Bespreking waarbij rekening wordt gehouden met spreidingen

Het belangrijkste bezwaar, dat men tegen de in 1.1. gegeven oplossingen kan inbrengen, is het overal verwaarlozen van afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten. Het staat bij voorbaat vast, dat allerlei factoren, die men niet in de hand heeft, zoals de weersomstandigheden, de grootte van de oogst beïnvloeden. In dergelijke gevallen is het onjuist alleen te letten op de gemiddelde resultaten, omdat dan ook zeer lage opbrengsten kunnen voorkomen, wat soms niet te aanvaarden consequenties heeft.

Om nu afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten in onze beschouwingen te betrekken, vatten wij de oogstresultaten op als stochastische grootheden, waarvan wij de verdeling kennen. Het financiële resultaat zal dan eveneens een stochastische grootheid zijn, waarvan de verdelingsfunctie uit die van de opbrengsten volgt. Acht men nu een financiële opbrengst beneden een zeker bedrag eigenlijk onaanvaardbaar, dan kan men bij voorbaat stellen, dat de kans hierop een bepaalde waarde niet mag overtreffen. Gezien de aard van het probleem zal het in het algemeen niet mogelijk zijn er voor te zorgen, dat bepaalde kleine opbrengsten in het geheel niet kunnen voorkomen.

Onder alle mogelijkheden, die door de gestelde voorwaarde niet worden uitgesloten kunnen wij nu diegene kiezen, welke de verwachting van de financiële opbrengst maximaliseert.

Op welke wijze men te werk kan gaan voor het geval, waarin op een deel van het land jaar in jaar uit tarwe wordt verbouwd en op het overige stuk voortdurend haver, zullen wij uiteenzetten in de paragrafen 1.2.1. en 1.2.2.. In 1.2.3. onderzoeken wij het probleem als vruchtwisselingen toegepast kunnen worden.

1.2.1. Wiskundige formulering van het probleem

De opbrengst in hl aan tarwe, wanneer het gehele land hiermee bezaaid wordt geven wij aan met $\underline{x}_1$; de opbrengst in hl aan haver, wanneer alleen haver wordt verbouwd met $\underline{x}_2$.[1] Wij nemen van beide grootheden aan, dat ze normaal verdeeld zijn met bekende gemiddelden en bekende spreidingen, welke wij voor tarwe, resp. haver aangeven met μ_1 en σ_1, resp. μ_2 en σ_2. Doordat de meeste toevallige factoren zowel de tarwe als de haveropbrengst zullen beïnvloeden, zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ niet onderling onafhankelijk, maar gecorreleerd; ook de waarde ρ van de correlatiecoëfficiënt onderstellen wij bekend uit waarnemingen in

---

1) Symbolen voor stochastische grootheden worden steeds onderstreept om duidelijk onderscheid te maken tussen deze grootheden en de waarden die ze kunnen aannemen.

voorafgaande jaren; $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ bezitten dus een simultane normale verdeling, waarvan alle vijf parameters gegeven zijn.

Bezaait men nu een fractie λ van het land met tarwe en de rest met haver, dan is de opbrengst aan tarwe gelijk aan $\lambda \underline{x}_1$ en die aan haver gelijk aan $(1-\lambda)\underline{x}_2$. Geven wij evenals in 1.1. de verkoopsprijs per hl aan met p_1 resp. p_2 , dan is het geldbedrag $\underline{z}$, dat men ontvangt, wanneer een fractie λ met tarwe bezaaid wordt, gelijk aan

$$\underline{z} = \lambda p_1 \underline{x}_1 + (1-\lambda) p_2 \underline{x}_2 . \qquad (1)$$

Nu is een lineaire combinatie van normaal verdeelde stochastische grootheden ook weer normaal verdeeld, zodat wij de verdeling van $\underline{z}$ volledig kennen, wanneer gemiddelde en spreiding ervan berekend zijn. Uit formule (1) en de gegevens omtrent de verdelingen van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ volgt:

$$\mathcal{E}\,\underline{z} = \lambda p_1 \mu_1 + (1-\lambda) p_2 \mu_2 \qquad (2)$$

en

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = \lambda^2 p_1^2 \sigma_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 \sigma_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sigma_1 \sigma_2 \varrho p_1 p_2 . \qquad (3)$$

Wanneer wij geen extra eisen aan de uitkomst z opleggen, is het probleem hetzelfde als in 1.1.1.: kies λ zo, dat de verwachting van de opbrengst zo groot mogelijk is, d.w.z. maximaliseer (2) als functie van λ. In de practijk zal men dit zeker niet blindelings doen, omdat het mogelijk is, dat een hoge verwachting van $\underline{z}$ gepaard gaat met een zo grote spreiding, dat men den ondanks de hoge verwachting een flinke kans loopt, betrekkelijk kleine waarden van $\underline{z}$ te vinden. Zijn de consequenties van ontvangsten kleiner dan een bepaald bedrag w onaanvaardbaar, dan zal men eisen, dat de kans hierop niet groter mag zijn dan een klein getal β . Wij krijgen dus een nevenvoorwaarde, welke er als volgt uitziet:

$$P[\underline{z} \leqq w] \leqq \beta . \qquad (4)$$

Deze voorwaarde kan tot gevolg hebben, dat wij beperkt worden in de keuze van λ . Wij moeten daarom eerst nagaan uit welke λ's er gekozen kan worden; de verwachting van de ontvangsten kan dan over de niet uitgesloten λ's worden gemaximaliseerd.

Voor de eerste van deze twee stappen voeren wij een nieuwe variabele $\underline{z}'$ in, de gereduceerde van $\underline{z}$:

$$\underline{z}' = \sigma_{\underline{z}}^{-1} (\underline{z} - \mathcal{E}\,\underline{z}) \,, \tag{5}$$

die dus normaal verdeeld is met gemiddelde nul en spreiding 1. Voorwaarde (4) gaat dan, uitgedrukt in $\underline{z}'$, over in

$$P\left[z' \leqq \sigma_{\underline{z}}^{-1}(w - \mathcal{E}\,\underline{z})\right] \leqq \beta \,, \tag{6}$$

of als wij stellen

$$w' = \sigma_{\underline{z}}^{-1}(w - \mathcal{E}\,\underline{z}) \,, \tag{7}$$

$$P\left[\underline{z}' \leqq w'\right] \leqq \beta \,. \tag{8}$$

Daar $\underline{z}'$ $N(0,1)$ verdeeld is en β van te voren wordt gekozen, kunnen wij in een fractielentabel van de normale verdeling aflezen welke waarden van w' bij gegeven β aan (8) voldoen. Wij geven de waarde, die $\underline{z}'$ met een kans β overschrijdt aan met ξ_β (zie fig. 1). Naarmate β kleiner is, is ξ_β groter,

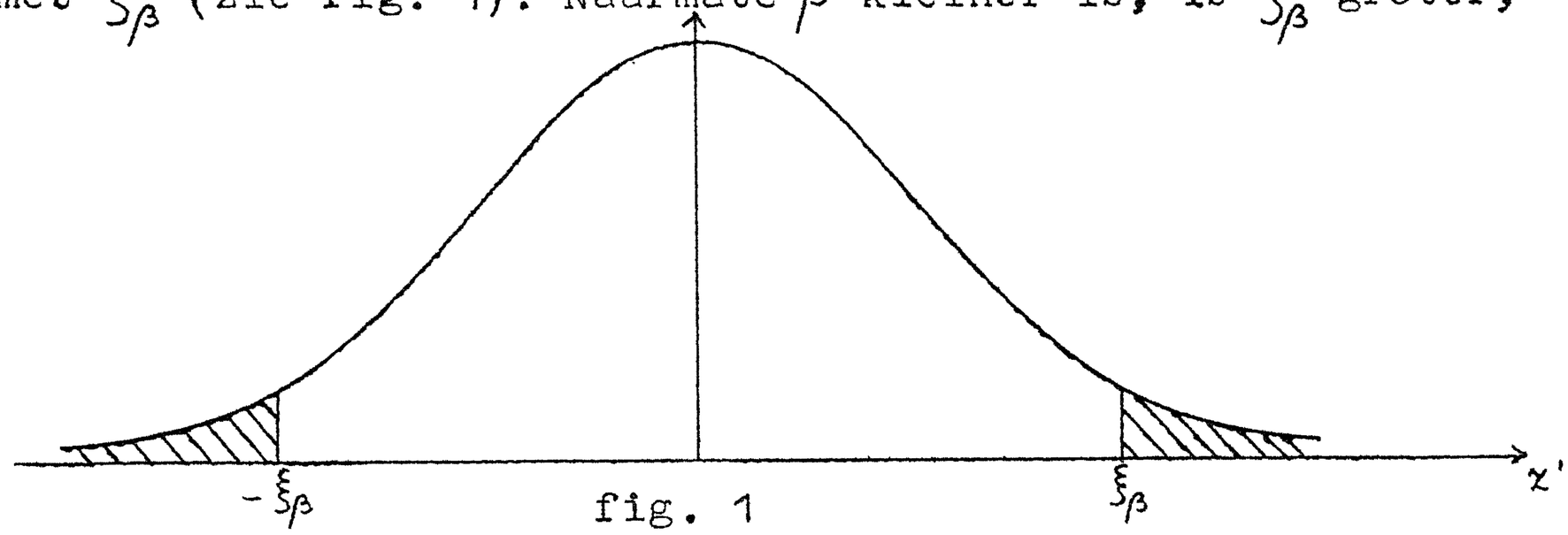


fig. 1

De overschrijdingskans bij een normale verdeling.

zodat de waarden van w' , die voldoen aan (8) gegeven worden door de ongelijkheid:

$$w' \leqq -\xi_\beta \,. \tag{9}$$

Vervangen wij hierin w' door $\sigma_{\underline{z}}^{-1}(w - \mathcal{E}\,\underline{z})$ en vullen wij voor $\mathcal{E}\,\underline{z}$ en $\sigma_{\underline{z}}$ de gevonden waarden (2) en (3) in, dan zien wij, dat λ moet voldoen aan:

$$\frac{w - \{\lambda p_1 \mu_1 + (1-\lambda) p_2 \mu_2\}}{\sqrt{\lambda^2 p_1^2 \sigma_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 \sigma_2^2 + 2(1-\lambda)\lambda p_1 p_2 \rho \sigma_1 \sigma_2}} \leqq -\xi_\beta \,. \tag{10}$$

Om de voorwaarde beter te kunnen doorzien schrijven wij deze in de vorm: [2]

$$\{-(p_1\mu_1 - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2(p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 - 2p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\}\lambda^2 +$$

$$+2\{w(p_1\mu_1 - p_2\mu_2) - p_1p_2\mu_1\mu_2 + p_2^2\mu_2^2 + \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\}\lambda + \quad (11)$$

$$-(w - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2 p_2^2\sigma_2^2 \leqq 0,$$

of

$$A\lambda^2 + B\lambda + C \leqq 0, \quad (12)$$

waarin

$$A = \{-(p_1\mu_1 - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2(p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 - 2p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\}, \quad (13)$$

$$B = 2\{w(p_1\mu_1 - p_2\mu_2) - p_1p_2\mu_1\mu_2 + p_2^2\mu_2^2 + \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\} \quad (14)$$

en

$$C = -(w - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2 p_2^2\sigma_2^2 \quad (15)$$

is.

De grootheid λ, die wij in ons probleem kunnen kiezen, moet dus voldoen aan een ongelijkheid van de tweede graad. Wij wijzen erop, dat tot nu toe geen andere onderstellingen gemaakt zijn dan die van de normaliteit en bekendheid van de verdelingen van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ en het bekend zijn van de prijzen p_1 en p_2.

Men kan het wiskundige probleem: $\mathcal{E}\underline{x}$ maximaliseren onder de voorwaarde (12) algemeen oplossen. Wij zullen dit hier niet doen en ons beperken tot de bespreking van een aantal speciale gevallen.

1.2.2. <u>Oplossing van het probleem in een aantal speciale gevallen</u>

a) <u>Het geval waarin $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ en $p_1^2\sigma_1^2 = p_2^2\sigma_2^2$</u>

De opbrengst in geld wanneer men het gehele land van 1 ha met tarwe bezaaid heeft, bedraagt $p_1\underline{x}_1$ en wanneer men dit doet met haver $p_2\underline{x}_2$. Zonder moeite is in te zien, dat $p_1\underline{x}_1$ een $N(p_1\mu_1, p_1\sigma_1)$-verdeling bezit en $p_2\underline{x}_2$ een $N(p_2\mu_1, p_2\sigma_2)$-verdeling. Als dus

---

2) Hierbij is uitgegaan van de reële onderstelling dat $\beta < \frac{1}{2}$ en dus $\xi_\beta > 0$ is.

$p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ en $p_1\sigma_1 = p_2\sigma_2$ is, zijn de waarschijnlijkheidsverdelingen van $p_1 \underline{\chi}_1$ en $p_2 \underline{\chi}_2$ aan elkaar gelijk. Hier is men wellicht geneigd te denken dat het er niet meer toe doet of men tarwe of haver, dan wel gedeeltelijk de één en gedeeltelijk de ander zaait. Toch is dit niet het geval. Men kan dit inzien door de verdeling van $\underline{\chi}$ te onderzoeken voor verschillende waarden van λ.

Voor iedere waarde van λ bedraagt volgens (2) de verwachting van χ : $\mathcal{E}\,\underline{\chi} = p_1\mu_1 = p_2\mu_2$. De variantie gaat echter over in (zie (3)):

$$\sigma_{\underline{\chi}}^2 = p_1^2\sigma_1^2\left\{1 - 2\lambda(1-\lambda)(1-\rho)\right\} \qquad (16)$$

en blijft dus een functie van λ.

Men kan de overgebleven vrijheid nu gebruiken om de variantie van $\underline{\chi}$ zo groot of zo klein mogelijk te maken. In het eerste geval speculeert men op een zeer hoge opbrengst, in het tweede geval maakt men de kans op een slecht resultaat zo klein mogelijk. Wij stelden ons op het voorzichtige standpunt en dat betekent dus dat wij $\sigma_{\underline{\chi}}^2$ moeten minimaliseren.

Door differentiatie van (16) naar λ vindt men dat $\sigma_{\underline{\chi}}^2$ minimaal is voor $\lambda = \frac{1}{2}$. De optimale oplossing is hier dus onafhankelijk van β en w; wij noemen deze oplossing daarom uniform optimaal. Een duidelijke illustratie wordt gegeven door fig. 2, waarin voor verschillende waarden van λ de cumulatieve verdelingsfunctie $F(\chi)$ van $\underline{\chi}$ is getekend. Zo leest men direct uit deze

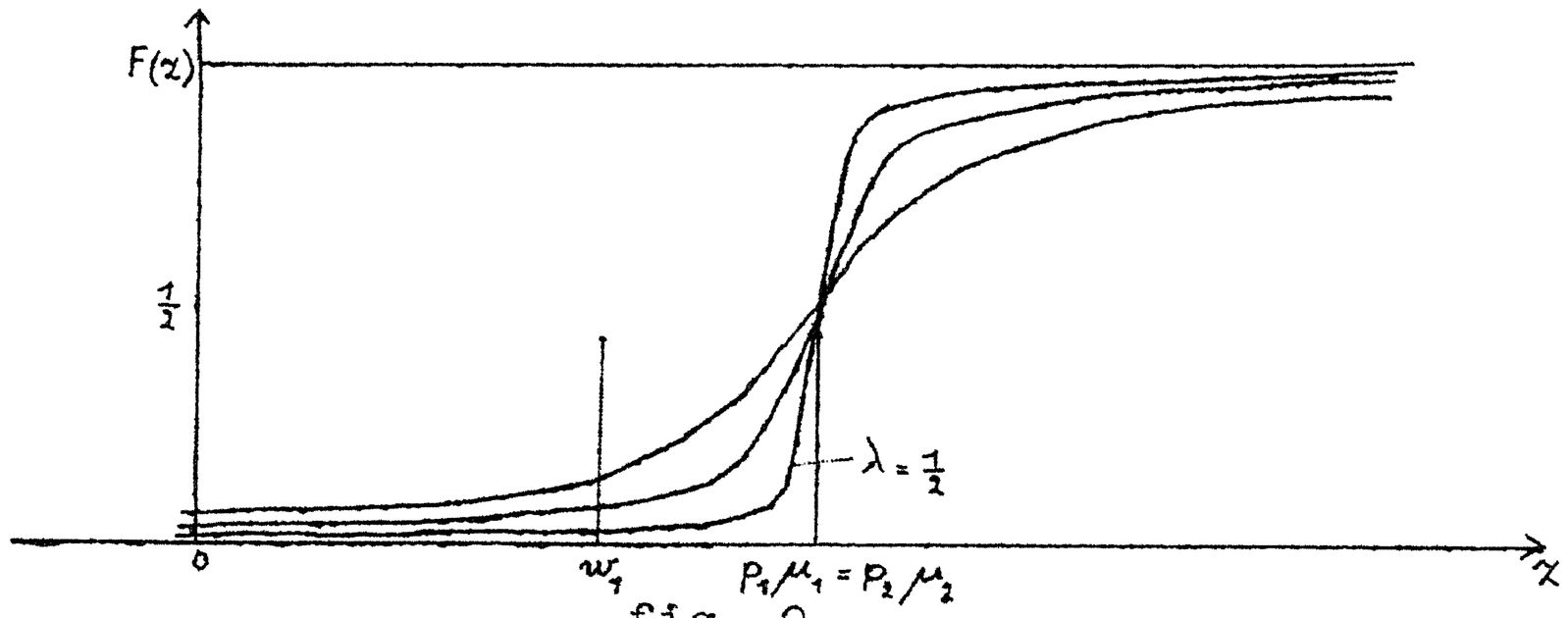


fig. 2

De cumulatieve verdelingsfunctie van $\underline{\chi}$ voor verschillende waarden van λ.

figuur af, dat de kleinste waarde van β voor een bepaalde waarde w_1 $(< p_1\mu_1)$ van w bereikt wordt bij die keuze van λ waarvoor $\sigma_{\underline{\chi}}$ minimaal is.

De bovenstaande oplossing geldt ook voor iedere waarde van ρ. Wel blijft de kleinste variantie die bereikt kan worden een functie van ρ; immers bij de keuze $\lambda = \frac{1}{2}$, gaat (16) over in

$$\left(\sigma_{\underline{x}}^2\right)_{min} = \tfrac{1}{2} p_1^2 \sigma_1^2 (1+\rho) . \qquad (17)$$

Het minimum ligt dus lager naarmate de waarde van ρ kleiner is. Men kan dit ook zo zeggen: door twee verschillende producten te verbouwen, die niet op dezelfde wijze door de toevallige omstandigheden beïnvloed worden, kunnen wij eventuele risico's verdelen; dit gaat des te beter, naarmate de opbrengsten minder samenhangen (ρ kleiner is).

Vergelijken wij de hier gevonden resultaten met die in 1.1.1., dan zien wij, dat daar voor het geval $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ van de vrijheid in de keuze van λ geen nuttig gebruik kon worden gemaakt, terwijl er hier een uniform optimale oplossing is gevonden voor $\lambda = \frac{1}{2}$.

b) <u>Het geval waarin $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$, doch $p_1^2\sigma_1^2 \neq p_2^2\sigma_2^2$</u>

De verdelingen van $p_1\underline{x}_1$ en $p_2\underline{x}_2$ bezitten nu wel dezelfde verwachting, maar niet meer dezelfde variantie. Het bepalen van de optimale oplossing gaat echter op dezelfde wijze als in a). Neemt men aan dat

$$p_1\sigma_1 = k\, p_2\sigma_2 \qquad (18)$$

is, dan is de variantie van $\underline{z}$

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = p_1^2\sigma_1^2\left\{k^2\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)k\rho\right\} . \qquad (19)$$

Deze is minimaal voor

$$\lambda = \frac{1-k\rho}{k^2+1-2k\rho} ; \qquad (20)$$

wanneer deze λ tussen 0 en 1 ligt geeft (20) de optimale waarde van λ, in het andere geval moet men hetzij $\lambda = 0$, hetzij $\lambda = 1$ kiezen. Substitueert men in (20) $k = 1$, dan vindt men weer voor de optimale waarde van λ: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ook oplossing (20) is uniform optimaal, d.w.z. geldig voor iedere combinatie van w en β. Het is echter mogelijk dat men zijn eisen zodanig heeft gesteld dat er ook door de gunstigste λ niet aan wordt voldaan; men zal dan hetzij de eisen moeten verlichten, hetzij van het productieproces moeten afzien. In gevallen waarin het minimum van (19) voor $0 \leqq \lambda \leqq 1$ niet op

de rand van dit interval wordt bereikt, kan men in de situatie verkeren dat zowel alleen tarwe als alleen haver verbouwen te grote risico's oplevert, doch dat het risico bij gedeeltelijk haver en gedeeltelijk tarwe verbouwen wel aanvaardbaar is; hetzelfde geldt uiteraard ook voor het in 1.2.1. behandelde algemene geval.

c) <u>Geen onderstellingen omtrent gemiddelden en spreidingen</u>

In 1.2.1. hebben wij reeds aangegeven op welke wijze de optimale λ kan worden berekend. Deze is nu niet meer zoals in de voorbeelden a) en b) uniform optimaal, doch een functie van β en w. De berekening is niet moeilijk, maar door het grote aantal mogelijkheden wat de constanten A, B en C uit (12) betreft, wel vrij langdradig en zal daarom niet worden gegeven.

Bovendien is het niet zeker, dat het berekenen van een optimale λ inderdaad weergeeft, hetgeen men eigenlijk wil doen. Immers de waarden van w en vooral die van β liggen minder nauwkeurig vast, dan in 1.2.1. wordt gesuggereerd. De eisen voor w volgen nog hoofdzakelijk uit nauwkeurig bekende gegevens, maar β drukt uit welke kans op een zeer slechte oogst men wil aanvaarden. Zou men door de verwachting van $\underline{x}$ iets onder het te bereiken maximum te kiezen de kans op een resultaat kleiner dan w aanzienlijk verlagen, dan zal men dit zeker in overweging nemen. Hetzelfde geldt, wanneer het bereikbare maximum sterk stijgt bij een geringe verhoging van β. Men wil dus eigenlijk voor gegeven w in een grafiek zien hoe de samenhang is tussen β en het maximum van $\mathcal{E}_{\underline{x}}$ over de toegelaten λ.

Het maximum van $\mathcal{E}_{\underline{x}}$ en β hangen samen via de toegelaten waarden van λ. De verwachting van $\underline{x}$ is een monotone functie van λ. Ook het verband tussen de toegelaten λ's en β is zonder moeite op te sporen. Als bij een bepaalde β een verzameling van λ's toelaatbaar is, dan zullen deze λ's zeker toelaatbaar zijn, wanneer men zijn eisen lager stelt, d.w.z. een grotere kans β op een opbrengst kleiner dan w accepteert. De verzameling van toegelaten λ's zal dus groter worden of gelijk blijven, wanneer β toeneemt. Hieruit volgt dat ook het maximum van $\mathcal{E}_{\underline{x}}$ zeker niet kleiner wordt bij stijgende β, m.a.w. dit maximum is een monotoon niet dalende functie van β.

Ook uit een grafiek zoals die van fig. 2 kan men een goede indruk krijgen van het verband tussen $\mathcal{E}\underline{z}$ en β bij gegeven waarde van w . Door de vrijheid in de keuze van λ zijn er verschillende waarden van $\mathcal{E}\underline{z}$ bereikbaar; het interessantste geval is nu dat waarin bij toenemende $\mathcal{E}\underline{z}$ ook $\sigma_{\underline{z}}^2$ toeneemt, waarin dus een hogere gemiddelde opbrengst samengaat met een groter risico. In figuur 3 zijn enige bereikbare cumulatieve verdelingsfuncties van $\underline{z}$ getekend. De snijpunten van de getekende krommen met de rechte $z = w$ geven aan hoe groot β is; aangezien $\underline{z}$ een symmetrische verdeling bezit, vallen mediaan en verwachting samen, zodat men $\mathcal{E}\underline{z}$ af kan lezen uit de snijpunten van de krommen met $F(z) = \frac{1}{2}$. Figuur 3 illustreert daardoor duidelijk op welke wijze β verloopt bij toenemende waarde van $\mathcal{E}\underline{z}$.

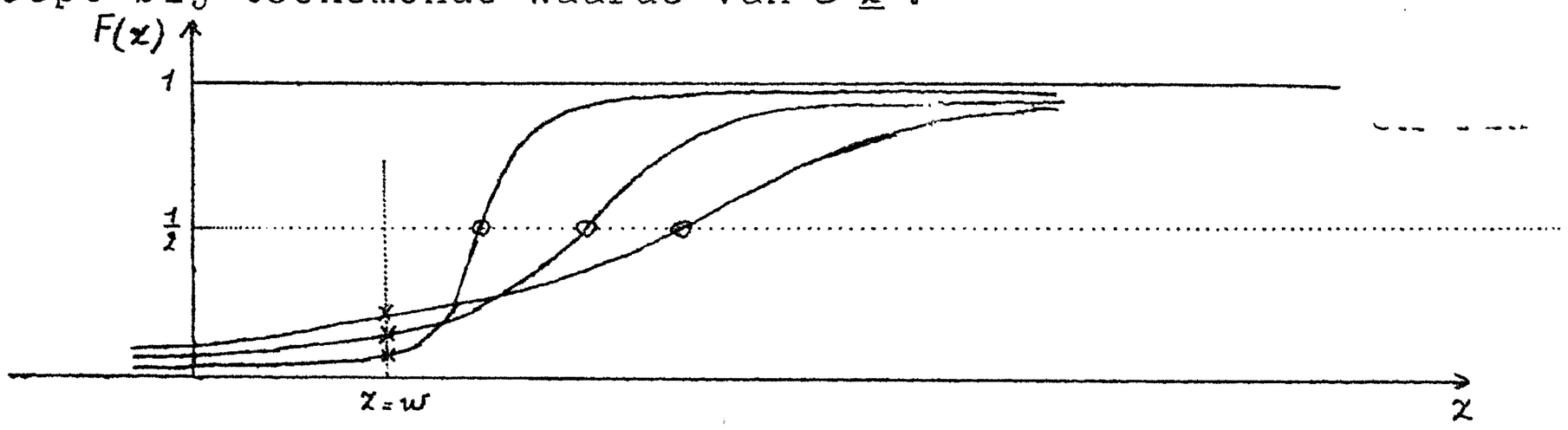


fig. 3

De cumulatieve verdelingsfunctie van z voor verschillende waarden van λ .

Aan de hand van een voorbeeld illustreren wij tenslotte op welke wijze men het beloop van $\max_{\lambda} \mathcal{E}\underline{z}$ kan vinden als functie van β . Hierbij moeten wij gebruik maken van de in 1.2.1. gegeven algemeen geldende formules.

Het is niet nodig alle in de formules (12)-(15) voorkomende constanten afzonderlijk te kennen. Het is voldoende wanneer de volgende verhoudingen en gegevens bekend zijn:

$$p_2\mu_2 = 0{,}85\ p_1\mu_1 \qquad \rho = \tfrac{1}{2}$$

$$p_1\sigma_1 = 0{,}5\ p_1\mu_1 \qquad w = 0{,}35\ p_1\mu_1 \qquad (21)$$

$$p_2\sigma_2 = 0{,}25\ p_1\mu_1$$

Wij hebben dus $p_2\mu_2$, $p_1\sigma_1$, $p_2\sigma_2$ en w uitgedrukt in $p_1\mu_1$, de gemiddelde opbrengst in geld, wanneer er alleen tarwe wordt verbouwd. De gemiddelde opbrengst (steeds in geld) van haver is dus minder dan de gemiddelde opbrengst van tarwe, doch de

spreiding van de laatste is aanzienlijk groter. De opbrengst, die wij behalve een kans β zeker willen behalen is 35% van de gemiddelde opbrengst, wanneer wij alleen tarwe verbouwen.

Substitueren wij (21) in de formules (13), (14) en (15), dan vinden wij

$$A = \left(\frac{3}{16}\xi_\beta^2 - 0{,}0225\right)p_1^2\mu_1^2 , \qquad (22)$$

$$B = -\,0{,}15\,p_1^2\mu_1^2 , \qquad (23)$$

$$C = \left(\frac{1}{16}\xi_\beta^2 - 0{,}25\right)p_1^2\mu_1^2 . \qquad (24)$$

Reeds eerder merkten wij op dat de eisen betreffende w en β niet willekeurig hoog kunnen worden gesteld. Wij gaan daarom eerst na welke waarden van β bij de gegeven w bereikt kunnen worden. Hiertoe schrijven wij voorwaarde (12) in de vorm

$$A\left(\lambda + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A} \leqq 0 \; ; \qquad (25)$$

voor $A>0$ is dit een parabool met een minimum, groot $C - \frac{B^2}{4A}$, dat bereikt wordt voor $\lambda = -\frac{B}{2A}$. Voor kleine waarden van β is (22) >0 [3] en dus kan er aan (25) niet worden voldaan, wanneer

$$C - \frac{B^2}{4A} < 0 \qquad (26)$$

is. Hieruit volgt voor ξ_β^2 de voorwaarde $\xi_\beta^2 \geqq 4{,}12$, waaruit met een tabel van de normale verdeling kan worden gevonden, dat $\beta \geqq 0{,}0212$ moet zijn. De kleinste waarde β_0 van β, waarbij nog een oplossing mogelijk is, bedraagt dus $\beta_0 = 0{,}0212$.

Wanneer men $\beta > \beta_0$ kiest, zal men een interval van λ's ter beschikking krijgen en dan moet men nagaan voor welke λ $\mathcal{E}\,\underline{z}$ maximaal is. Uit

$$\mathcal{E}\,\underline{z} = \lambda p_1\mu_1 + (1-\lambda)p_2\mu_2 = (0{,}85 + 0{,}15\lambda)p_1\mu_1 \qquad (27)$$

leest men af dat dit het geval is voor de grootste toegelaten waarde van λ. Deze grootste waarde kan wegens $0 \leqq \lambda \leqq 1$ echter niet groter zijn dan één. De bijbehorende waarde β_1 van β vinden wij door in (12) $\lambda = 1$ in te vullen; het linker lid moet dan nul worden. Men vindt op deze wijze $\beta_1 = 0{,}0968$. Het interval van β's, waarvoor het gedrag van $\max_\lambda \mathcal{E}\,\underline{z}$ moet worden nagegaan is dus $0{,}0212 \leqq \beta \leqq 0{,}0968$.

---

3) Men kan achteraf laten zien, dat A voor alle in aanmerking komende waarden van β inderdaad > 0 is.

Voor de waarden 0,0212; 0,04; 0,06; 0,08 en 0,0968 van β is de grootste wortel van $A\lambda^2 + B\lambda + C = o$ berekend, evenals de bijbehorende waarde van $\mathcal{E}\underline{x}$. In figuur 4 is het verband tussen $\max_{\lambda} \mathcal{E}\underline{x}$ en β geschetst, waarbij wij langs de verticale as als eenheid gebruikten p_1/μ_1. Wij zien dat $\max_{\lambda} \mathcal{E}\underline{x}$ bij toenemende β stijgt van 0,865 p_1/μ_1 tot p_1/μ_1 en dat alleen haver verbouwen nooit optimaal is, in tegenstelling tot alleen tarwe verbouwen, wat de optimale oplossing is bij $\beta = 0{,}0968$.

Andere voorbeelden kunnen op geheel analoge wijze worden uitgewerkt.

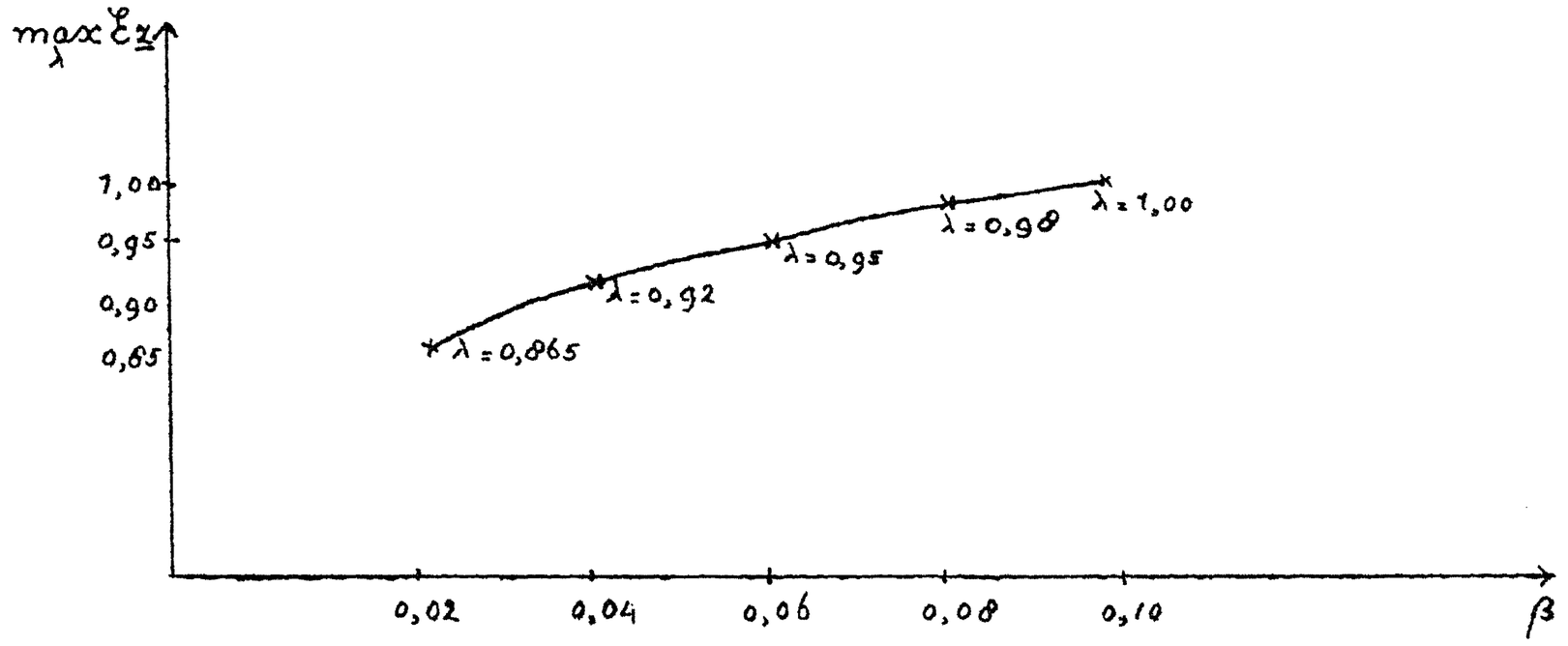


fig. 5

Verwachting van de opbrengst als functie van β bij optimale λ.

1.2.3. De invloed van vruchtwisseling en andere factoren

In 1.2.1.en 1.2.2.hebben wij ons beperkt tot de situatie, waarin wij een stuk land jaar in jaar uit konden bebouwen met hetzij tarwe, hetzij haver, hetzij gedeeltelijk tarwe en voor de rest met haver. Het probleem kan echter ook opgelost worden als gekozen moet worden tussen verschillende systemen van vruchtwisseling.

Stel wij willen de vruchtwisselingen *TTH* en *THH* toepassen en nu beslissen op welk deel van het land *TTH* en op welk *THH* toegepast moet worden. Wij kunnen niet meer volstaan met de twee stochastische grootheden, welke wij definieerden op blz. 15, aangezien de verdelingen van de opbrengsten zullen afhangen van de methode van vruchtwisseling. Zo kan b.v. de tarweopbrengst bij *THH* minder gevoelig zijn voor toevallige omstandigheden dan de tarweopbrengst bij *TTH*, waardoor de spreidingen ongelijk worden. Wij moeten daarom vier grootheden invoeren en wel:

x_1 = tarwe opbrengst in hl per jaar per ha bij TTH
x_2 = " " " " " " " " " THH
x_3 = haver " " " " " " " " TTH
x_4 = " " " " " " " " " THH

In het algemeen zullen de gemiddelden, spreidingen en onderlinge correlaties van $x_1, \ldots, x_4$ alle verschillend zijn, waardoor wij in totaal 14 verschillende constanten krijgen. Vooral over de correlatiecoëfficiënten zullen veelal geen of alleen onnauwkeurige gegevens bekend zijn. Bij de methode beschreven in de vorige paragrafen zouden wij dus, hetzij met onbetrouwbare schattingen, hetzij met extra onderstellingen over de gelijkheid van correlaties e.d. moeten werken. Daarom kan men in de practijk beter als volgt te werk gaan.

Bepaal eerst op de wijze, aangegeven in 1.2.1. de beste λ (aan te geven met λ') en teken het polygoon van mogelijke resultaten, wanneer alle combinaties van bekende vruchtwisselingen toegelaten zijn. Dit is in fig. 5 gedaan, waarbij de punten Θ_i weer de opbrengsten voorstellen, wanneer één bepaalde wisseling wordt toegepast en de verbindingslijnen de resultaten bij combinaties van wisselingen. Het punt λ' op de lijn $\Theta_1\Theta_2$ stelt de optimale oplossing zonder vruchtwisseling voor. Wij beschouwen nu de bebouwing, die verkregen wordt door die combinatie van vruchtwisselingen te kiezen, welke hoort bij het snijpunt S van $O\lambda'$ met het polygoon. In het getekende geval is dit dus: op een fractie ν van het land vruchtwisseling Θ_3 toepassen en op de rest Θ_4.

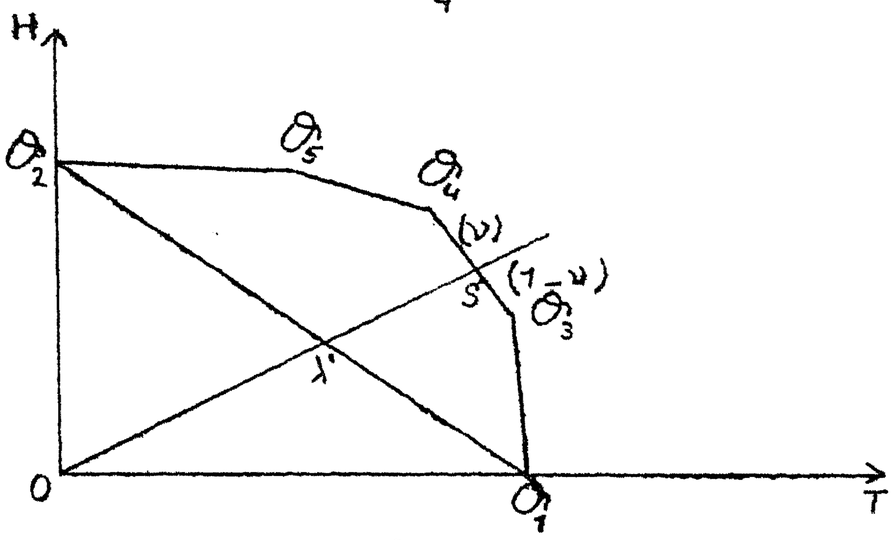


fig. 5

Grafische bepaling van de beste combinatie van vruchtwisselingen, wanneer de optimale λ bekend is.

Om nu inderdaad ieder jaar een fractie λ' van het land met tarwe bebouwd te hebben moeten wij beide delen splitsen in zoveel stukken als de wisseling phasen heeft en dan op ieder stuk met een andere phase beginnen. De risico's zijn dan op de vereiste wijze verdeeld en bovendien is gebruik gemaakt van de ervaring dat door vruchtwisseling de gemiddelde opbrengsten groter worden. Is b.v. $\mathcal{O}_3$ *TTH* en $\mathcal{O}_4$ *TTHH*, dan wordt ieder jaar op een fractie $\lambda' = 2.\frac{\nu}{3} + 2.\frac{1-\nu}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\nu$ tarwe verbouwd en men krijgt het onderstaande schema (Tabel I).

Het is natuurlijk mogelijk, dat dit niet de beste oplossing is, omdat door de vruchtwisseling alle parameters van de verdelingsfuncties kunnen veranderen, maar men mag verwachten toch niet ver van het optimale punt verwijderd te zijn, terwijl nauwkeuriger bepaling meestal niet mogelijk zal zijn. Daar de spreidingen hoofdzakelijk veroorzaakt worden door de weersomstandigheden, zullen toelaatbare oplossingen, als geen vruchtwisseling wordt toegepast, in de regel ook toelaatbaar zijn, wanneer dit wel wordt gedaan. Het is echter niet uitgesloten, dat door de vruchtwisseling de producten minder kwetsbaar worden en in dat geval zou men hogere gemiddelde opbrengsten kunnen bereiken. Op de boven aangegeven wijze verkrijgt men echter snel een redelijke oplossing.

Tabel I

Verdeling van het land, wanneer op een fractie ν wordt toegepast *TTH* en op het overige deel *TTHH*.

	Q_3 op fractie ν						Q_4 op fractie $1-\nu$				
jaar	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
$\frac{\nu}{3}$	T	H	T	T	H	$\frac{1-\nu}{4}$	T	H	H	T	T
						$\frac{1-\nu}{4}$	T	T	H	H	T
$\frac{\nu}{3}$	T	T	H	T	T	$\frac{1-\nu}{4}$	H	T	T	H	H
$\frac{\nu}{3}$	H	T	T	H	T	$\frac{1-\nu}{4}$	H	H	T	T	H

Andere uitbreidingen van het probleem ontstaan, wanneer men de bewerkingskosten, of de bedragen welke men voor zijn producten krijgt, als stochastische grootheden in het model opneemt. Het zal dan niet steeds mogelijk zijn de oplossing te vinden op de boven aangegeven wijze, maar men kan het gezochte antwoord altijd vinden met de multiplicatorenmethode van Lagrange, zolang er niet meer dan één ongelijkheid is, waaraan de variabelen moeten voldoen. Noch de te maximaliseren vorm, noch de ongelijkheid behoeft dan lineair te zijn. Als er meer dan één ongelijkheid is, kunnen varianten van deze methode in veel gevallen de oplossing geven. Wij zullen hier echter niet nader op deze problemen ingaan.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 166 (c9)

"Operations Research"

Hoofdstuk I

2. Het kiezen van de optimale steekproef bij een probleem van administratieve controle.

door

Prof. P. de Wolff

1955

Het kiezen van de optimale steekproef bij een probleem van administratieve controle.

Probleemstelling.

De administratieve bewerkingen in middelgrote en grote ondernemingen hebben dikwijls een zeer grote omvang en het is dus begrijpelijk, dat men bij de controle op dergelijke werkzaamheden, ter besparing van kosten, er naar streeft steekproeven toe te passen. Nu liggen de omstandigheden voor een dergelijke controle in de administratie veel ongunstiger dan bijv. in de techniek. In de eerste plaats eist men een zeer hoge kwaliteit, een percentage fouten van b.v. 3% is geheel onaanvaardbaar. In de tweede plaats is over de verdeling van de fouten practisch niets te zeggen. Een verschrijving, waarbij 786 i.p.v. 768 wordt geboekt, is niet waarschijnlijker dan een waarbij 7,68 als 768 wordt opgetekend. In het eerste geval is de fout nog geen 3%, in de tweede 9900! Daarbij komt nog dat de grootte van de fout niet onverschillig is. In de techniek zal een bepaalde afwijking tot afkeuring van het product leiden, hetgeen een tamelijk nauwkeurig bekend nadeel betekent. In de administratie kan een doelbewuste fout (fraude) soms tot zeer aanzienlijke schade leiden; de omvang van deze schade wordt dan echter rechtstreeks door de grootte van de "fout" bepaald.

In dit overzicht wordt een methode aangegeven, die, speciaal waar het gaat om controle op fraude, toch de mogelijkheid schept tot het toepassen van steekproeven. Om het probleem zo veel mogelijk te vereenvoudigen wordt ondersteld, dat fraude uitsluitend mogelijk is door boeking van een te hoog bedrag en verder, dat, zo fraude (ev. fraude van enige betekenis) wordt geconstateerd, een volledig onderzoek plaats vindt.

De onderstelling, dat door fraude alleen afwijkingen in één richting kunnen optreden, is niet onrealistisch. Ligt de situatie zo, dat het alleen zin heeft te lage boekingen te verrichten i.p.v. te hoge, dan kan de controle verlegd worden van de geboekte bedragen naar de bescheiden, waarop deze boekingen betrekking hebben en dan kan toch weer dezelfde gedachtengang als hierna uiteengezet is, worden gevolgd.

Als regel zal bij een onderzoek van de aangeduide soort geen fraude worden geconstateerd en nu doet zich dan de vraag voor: wat kon de controlerende instantie (bijv. de accountant) in een dergelijk geval zeggen over de graad van nauwkeurigheid van het totaal bedrag der posten, waarover zijn controle zich heeft uitgestrekt. Deze vraag is te beantwoorden als wij het

universum in twee delen verdelen naar de grootte der bedragen en de controle volledig (100%) doen plaats vinden bij alle posten boven een zekere grens en beneden deze grens steekproefcontrole toepassen. Het is dan zelfs mogelijk een optimale steekproefgrootte aan te geven.

Oplossing.

De volgende notatie wordt gebezigd:
Het totaal aantal te controleren posten zij N en hun verdeling zij gegeven door de frequentiefunctie $f(x)$ (de relatieve frequentie in het interval x tot $x+dx$ zij dus gelijk aan $f(x)dx$, terwijl $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$). Verder zij

$$\int_0^x f(\xi)\,d\xi = F(x)$$

Het totale bedrag der posten zij

$$B = N\int_0^\infty \xi f(\xi)\,d\xi$$

Verder stellen wij het gemiddelde bedrag per post: $\bar{x} = \frac{B}{N}$
De grens waarboven volledige controle plaats vindt zij x_0
De grootte van de steekproef in het interval o-x_0 zij n
De toegelaten fout in het totale bedrag zij φB $(\varphi \ll 1)$
De waarschijnlijkheidsdrempel zij ε
De kosten per onderzocht geval stellen wij gelijk aan k

Wij onderstellen nu, dat het aantal fraudegevallen ℓ in een steekproef van n stuks gelijk is aan O. Als de fractie der fraudegevallen in het deel van het universum met bedragen $\leq x_0$ gelijk is aan p , dan geldt

$$P[\ell = o \mid n, p] = (1-p)^n .$$

Hebben wij nu inderdaad $\ell = o$ gevonden, dan kunnen wij dus op grond van het bovenstaande voor p het volgende betrouwbaarheidsinterval opstellen:

$$o \leqq p \leqq 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} \qquad \text{spr } \varepsilon$$

Bij een fractie fraudegevallen gelijk aan p is het gefraudeerde bedrag in ieder geval $\leqq p N F(x_0).x_0$ en voor deze bovengrens geldt, spr ε , dat ze $\leqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} N F(x_0).x_0$ is. Wil men dus uit de steekproef de conclusie trekken, dat het gefraudeerde bedrag, spr ε , kleiner dan φB is, dan is men zeker aan de veilige kant als voldaan is aan de voorwaarde:

$$(1-\varepsilon^{\frac{1}{n}})\,.\,N\,F(x_0)\,.\,x_0 \leqq \varphi B \qquad (1)$$

De controlekosten bedragen in totaal:

$$K = \left[n + N\{1-F(x_0)\}\right] k$$

en het probleem, dat wij ons stellen, komt er nu op neer K te minimeren onder de bijvoorwaarde (1).
Wij zullen nu de onbekende grootheden x_0 en n zo kiezen dat nog juist aan (1) voldaan is, m.a.w. het $\leqq$ teken vervangen door het $=$ teken en dan geschiedt de oplossing het eenvoudigst door vorming van de Lagrange-vorm:

$$\left[n + N\{1-F(x_0)\}\right] k + \lambda\left[(1-\varepsilon^{\frac{1}{n}})\,x_0\,N\,F(x_0) - \varphi B\right]$$

Hieruit volgt door differentiatie naar x_0 en n en nulstelling der resultaten:

$$-N f(x_0) k + \lambda N (1-\varepsilon^{\frac{1}{n}})\{x_0 f(x_0) + F(x_0)\} = 0 \qquad (2)$$

en

$$k + \lambda N \frac{d}{dn}(1-\varepsilon^{\frac{1}{n}})\,x_0 F(x_0) = 0 \qquad (3)$$

Door eliminatie van λ onstaat hieruit:

$$(1-\varepsilon^{\frac{1}{n}})\{x_0 f(x_0) + F(x_0)\} + \frac{d}{dn}(1-\varepsilon^{\frac{1}{n}})\,N\,x_0 f(x_0) F(x_0) = 0 \qquad (4)$$

Uit (1) en (4) zijn n en x_0 te bepalen.

Nu is in de practisch voorkomende gevallen steeds: $n \gg 1$ (minstens enkele honderdtallen) terwijl $\varepsilon \ll 1$ (bijv. $\approx 0{,}01$), dus is steeds $\frac{1}{n}\log\frac{1}{\varepsilon} \ll 1$. Daardoor geldt bij benadering:

$$1-\varepsilon^{\frac{1}{n}} = 1 - \exp.\left(-\tfrac{1}{n}\log\tfrac{1}{\varepsilon}\right) = \tfrac{1}{n}\log\tfrac{1}{\varepsilon} - \tfrac{1}{2n^2}\left(\log\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^2 + \ldots \sim \tfrac{1}{n}\log\tfrac{1}{\varepsilon} \qquad (5)$$

Evenzo geldt:

$$\frac{d}{dn}(1-\varepsilon^{\frac{1}{n}}) \sim -\frac{1}{n^2}\log\frac{1}{\varepsilon} \qquad (6)$$

Substitutie in (1) en (4) geeft:

$$\frac{1}{n}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) x_0 N F(x_0) = \varphi B$$

of

$$n = \left(\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\varphi}\right).\frac{N}{B}.x_0 F(x_0) = \left(\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\varphi}\right).\frac{x_0 F(x_0)}{\bar{x}} \qquad (7)$$

en

$$n\left\{ x_0 f(x_0) + F(x_0) \right\} = N x_0 f(x_0) F(x_0) \qquad (8)$$

Door eliminatie van n uit (7) en (8) ontstaat tenslotte:

$$\frac{N x_0 f(x_0) F(x_0)}{x_0 f(x_0) + F(x_0)} = \left(\frac{1}{\varphi} \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{x_0 F(x_0)}{\bar{x}}$$

of

$$\frac{N\varphi}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{x_0 + \frac{F(x_0)}{f(x_0)}}{\bar{x}} \qquad (9)$$

Nu is verder (7) nog te herleiden tot:

$$\frac{n}{N F(x_0)} = \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{N\varphi} \cdot \frac{x_0}{\bar{x}} \qquad (10)$$

Het linkerlid van (10) stelt de steekproeffractie voor.
Nu nadert $f(x) \to 0$ als $x \to \infty$ terwijl $F(x) \to 1$ en dus gaat $\frac{F(x)}{f(x)} \to \infty$ (als de verdeling niet eentoppig is, kan deze breuk echter nog verschillende maxima en minima vertonen alvorens de waarde nul benaderd wordt). Dit betekent dat met aangroeiende factor $\frac{N\varphi}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$ x_0 toch betrekkelijk langzaam zal aangroeien. In de practijk is $\varphi \sim 10^{-2}$ en $\varepsilon \sim 10^{-2}$ en dus $\log \frac{1}{\varepsilon} \sim 4{,}6$ of ~ 5 en dus

$$f = \frac{N\varphi}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \sim 2 \times 10^{-3} \times N .$$

<u>Speciaal geval</u>.

(Wij behandelen nu twee speciale gevallen voor $f(x)$)

I. <u>De exponentiele verdeling</u> $\quad f(x) = a e^{-ax}$

$F(x) = 1 - e^{-ax} \qquad \bar{x} = \frac{1}{a}$.

In dat geval is $\quad f = \dfrac{x_0 + \frac{1 - e^{-ax_0}}{a e^{-ax_0}}}{\bar{x}} = \dfrac{x_0}{\bar{x}} + e^{\frac{x_0}{\bar{x}}} - 1$.

Stel $f = 10$, dus $N \sim 5000$ dan is $\frac{x_0}{\bar{x}} = 2{,}177$.

(Benadering: Stel $\frac{x_0}{\bar{x}} = \xi \qquad f = \xi + e^{\xi} - 1$ en dus

$e^{\xi_2} = f + 1 - \xi_1 \qquad \xi_2 = 2{,}3026 \ {}^{10}\log (f + 1 - \xi_1)$.)

$\frac{n}{N F(x_0)} = \frac{1}{f} \times \frac{x_0}{\bar{x}} = 0{,}2177$ of ca 22 %.

$F(x_0) = 1 - e^{-2{,}177} = 1 - 0{,}1058 = 0{,}8942$

De besparing is dus $0{,}7823 \times 0{,}8942 \times 100\% = \sim 70\%$.

II De logarithmisch normale verdeling $f(x)=\frac{x^{-1}}{S\sqrt{2\pi}}\,exp-\frac{1}{2S^2}(\log x-m)^2.$

Voor deze verdeling geldt (substitutie $\log x=\xi$)

$$J_k=\int_0^{\infty}f(x).x^k\,dx=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-\frac{1}{2S^2}(\xi-m)^2+k\xi\right)d\xi=$$

$$\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp-\frac{1}{2S^2}\left(\xi^2-2m\xi-2kS^2\xi+m^2\right)d\xi=$$

$$\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}exp-\frac{1}{2S^2}\left(\xi-m-kS^2\right)^2\,exp-\frac{1}{2S^2}(-2mkS^2-k^2S^4)\,d\xi=$$

$$=exp\left(mk+\tfrac{1}{2}k^2S^2\right).$$

$k=0$ geeft 1 zoals ook noodzakelijk is.
$k=1$ " $\bar{x}=exp\left(m+\frac{1}{2}S^2\right)$
$k=2$ " $exp\left(2m+2S^2\right)$
Dus $\sigma^2=J_2-\bar{x}^2=exp\left(2m+2S^2\right)-exp\left(2m+S^2\right)$
Verder is de mediaan $M=e^m$
Derhalve is de variatiecoëfficiënt $\frac{\sigma}{\bar{x}}=\sqrt{e^{S^2}-1}$ (dus $\sim S$ als $S\ll 1$)
Vergelijking (9) wordt nu (substitutie $\log x=\xi$)

$$\frac{\int_0^{x_0}\frac{x^{-1}}{S\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2S^2}(\log x-m)^2\,dx}{\frac{x_0^{-1}}{S\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2S^2}(\log x_0-m)^2}=\frac{\int_{-\infty}^{\log x_0}\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2S^2}(\xi-m)^2\,d\xi}{\frac{x_0^{-1}}{S\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2S^2}(\log x_0-m)^2}$$

Stel nu $\log x_0=m+kS$ of $x_0=e^{m+kS}=Me^{kS}$.

Er komt dan: $$\frac{F(x_0)}{f(x_0)}=\frac{\left[\int_{-\infty}^{m+kS}\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}exp.-\frac{1}{2S^2}(\xi-m)^2d\xi\right]e^{m+kS}}{\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2S^2}(kS)^2}$$

of met $\xi=m+St$:

$$\frac{F(x_0)}{f(x_0)}=\frac{\left[\int_{-\infty}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2}t^2dt\right]e^{m+kS}.S}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2}k^2}=\frac{Se^{m+kS}\phi(k)}{\phi'(k)}$$

als wij $\int_{-\infty}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp-\frac{1}{2}t^2\,dt=\phi(k)$ stellen.

(9) gaat dus over in:

$$f=\frac{e^{m+kS}+Se^{m+kS}\frac{\phi(k)}{\phi'(k)}}{e^{m+\frac{1}{2}S^2}}\quad\text{of}\quad f=e^{-\frac{1}{2}S^2}\left[1+S\frac{\phi(k)}{\phi'(k)}\right]e^{kS}.$$

Stel nu $S=1$ en $f=10$

Er komt dan $10=e^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{\phi(k)}{\phi'(k)}\right]e^k$ of $\left[1+\frac{\phi(k)}{\phi'(k)}\right]e^k=16{,}5$

Hieruit volgt $k=1{,}15$ $\quad\frac{x_0}{\bar{x}}=\frac{e^{m+1{,}15}}{e^{m+0{,}5}}=e^{0{,}65}=1{,}96$

De steekproeffractie is dus $\frac{1}{10}\times 1{,}96=0{,}196$ of 19,6 %

$F(x_0) = \phi(k) = 0{,}875$

De besp ring is dus ook hier $0{,}804 \times 0{,}875 \times 100\% = \sim 70\%$

Geval II lijkt voor de practijk het meest bruikbaar. Verschillende economisch belangrijke verdelingen zijn vrij goed door de logarithmisch normale verdeling te benaderen en x_0 en n zijn in dat geval te bepalen, zodra $\bar{x}$ en S of wat op hetzelfde neerkomt $\bar{x}$ en M bekend zijn. Nu is $\bar{x} = \frac{B}{N}$ altijd heel gemakkelijk te bepalen, terwijl M, zonodig, uit een kleine steekproef kan worden geschat.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 166 (C9)

"Operations Research"

Hoofdstuk II: Lineaire Programmeringstheorie

door

J. Kriens

2e druk 1957

1. Enige eenvoudige voorbeelden

1.1. Eerste voorbeeld.[1)]

In een fabriek wil men de vervaardiging van een legering ter hand nemen, welke minstens een bepaald percentage koper moet bevatten. Om het voorbeeld eenvoudiger te houden, worden aan de legering geen verdere chemische of physische eisen gesteld. Voor de fabricage kunnen verschillende grondstoffen gebruikt worden, welke men ook in willekeurige verhoudingen kan mengen. Men vraagt zich nu af op welke wijze de legering zo goedkoop mogelijk gemaakt kan worden, terwijl toch aan de gestelde eis is voldaan.

Laten wij aannemen, dat het product minstens 18% koper moet bevatten en dat er vier grondstoffen zijn, die wij kunnen gebruiken. In tabel I is opgegeven, hoeveel procent koper in iedere grondstof aanwezig is en wat de kosten zijn per ton.

Tabel I

Percentage koper en kosten van de grondstoffen

grond-stof	percentage koper	kosten per ton	kosten per % koper
A	51	40	$\frac{40}{51} = 0{,}78$
B	11	20	$\frac{20}{11} = 1{,}82$
D	14	24	$\frac{24}{14} = 1{,}71$
E	36	30	$\frac{30}{36} = 0{,}83$

Uit de vierde kolom kan men aflezen, dat grondstof A de goedkoopste bron van koper is.

Geen van de grondstoffen bevat precies 18% koper, maar de grondstoffen A en E voldoen aan de eis minstens 18% te bevatten. Het percentage van B en D, die per ton goedkoper zijn dan A en E, is echter te laag. Daarom ligt het voor de hand na te gaan, of wij door het kiezen van een mengsel van enige grondstoffen niet

---

1) De inhoud van de paragrafen 1.1 en 1.2 is gebaseerd op een artikel van N. WILLIAMS, An application of linear programming to the selection of raw materials, Applied Statistics 4, (1955), 22-31.

een product kunnen krijgen, dat aan de eis voldoet en bovendien goedkoper is dan de grondstoffen A en E afzonderlijk. Om dit systematisch te onderzoeken gaan wij als volgt te werk.

Wij gaan uit van grondstof A; deze voldoet zeker aan de gestelde eis, want A bevat zelfs 33% koper meer dan nodig is. Om een legering te verkrijgen, die goedkoper is, mengen wij A met het goedkopere, maar aan koper armere B.

Ter vereenvoudiging zullen wij aannemen, dat men 1 ton van de legering wil produceren. Stel dat wij 1 ton legering, die 18% koper bevat, verkrijgen door y ton A met 1-y ton B te mengen. Wiskundig uitgedrukt betekent dit, dat moet zijn voldaan aan de vergelijking

$$51y + 11(1-y) = 18 \qquad (1)$$

waaruit volgt, dat de legering moet bestaan uit 0,175 ton A en 0,825 ton B. De kosten bedragen dan

aan A:	0,175 x 40 =	7
aan B:	0,825 x 20 =	16,50
	totaal:	23,50 +

Dit mengsel is dus 40 - 23,50 = 16,50 per ton goedkoper dan grondstof A.

Wij kunnen op dezelfde wijze berekenen hoe duur een mengsel van A en B is, dat evenveel koper bevat als D, respectievelijk E. Indien één van deze laatste grondstoffen goedkoper is dan het overeenkomende mengsel van A en B, dan zal het voordelig zijn zoveel mogelijk van de gevonden legering door deze grondstof te vervangen.

De resultaten van de genoemde vergelijkingen kan men vinden in tabel II. In de eerste en tweede regel staat hoeveel A en hoeveel B het mengsel per ton moet bevatten om evenveel koper te bezitten als de boven de kolom vermelde stof. De kosten van deze mengsels staan in de derde regel, terwijl de laatste regel het verschil bevat tussen de kosten van een ton mengsel en een ton van de grondstof, waarmee dit mengsel overeenkomt.

De legering van 0,175 ton A en 0,825 ton B kunnen wij dus wel goedkoper maken door grondstof E te gebruiken, maar niet met behulp van D.

Tabel II

Mengsels van A en B met hetzelfde koper-gehalte als legering en grondstoffen

	legering 18% Cu	A 51% Cu	B 11% Cu	D 14% Cu	E 36% Cu
hoeveelheid A	0,175	1	0	0,075	0,625
hoeveelheid B	0,825	0	1	0,925	0,375
kosten mengsel	23,5	40	20	21,5	32,5
kosten grond-stoffen		40	20	24	30
kosten mengsel min kosten grondstof		0	0	- 2,5	2,5

Daar een mengsel van 0,625 ton A en 0,375 ton B met een ton E overeenkomt, is het niet mogelijk meer dan $\frac{0,175}{0,625} = 0,28$ ton E te nemen, omdat de hoeveelheid A aanwezig in de legering, genoemd in de eerste kolom dan is uitgeput. Behalve 0,28 ton E bevat de legering dan nog 1 - 0,28 = 0,72 ton B en de kosten zijn:

aan E: 0,28 x 30 = 8,4
aan B: 0,72 x 20 = 14,4
totaal: 22,8 +

Deze legering, die ook 18% koper bevat, is dus weer 23,5 - 22,8 = 0,7 goedkoper dan de legering van A en B.

Het is niet mogelijk een nog voordeligere samenstelling van de legering te vinden. Immers D was al duurder dan het overeenkomstige mengsel van A en B, dus zeker duurder dan een overeenkomstig mengsel van B en E, terwijl wij A juist hebben verwijderd ten gunste van E. Wat wij nog niet aangetoond hebben, is dat een legering, die meer dan 18% koper bevat niet goedkoper kan zijn. Het gehalte aan koper kan echter alleen hoger worden door, hetzij B geheel of gedeeltelijk te vervangen door A, D of E, hetzij E geheel of gedeeltelijk te vervangen door A. Tabel I leert ons, dat de legering bij ieder van deze substituties duurder wordt. Onder de legeringen, die men uit A, B, D en E kan maken en die minstens 18% koper bevatten, is dus de voordeligste: 0,28 ton E en 0,72 ton B.

1.2. Tweede voorbeeld

Iets ingewikkelder wordt het eerste voorbeeld, wanneer aan het gebruik van de grondstoffen A, B, D en E grenzen worden gesteld. Laten wij aannemen, dat de grondstoffen B en D tezamen niet meer dan 20% van de legering mogen uitmaken. De oplossing, gegeven in 1.1 voldoet dan niet meer, omdat deze voor 72% uit B bestond. Wij trachten nu onder deze extra voorwaarde de legering te vinden, die het goedkoopste is. Het is dan zeer goed mogelijk, dat deze legering meer dan 18% koper bevat, of minder dan 20% van de grondstoffen B en D. Het verschil tussen het percentage koper in de legering en het vereiste minimum percentage geven wij aan met δ_1, het verschil tussen het maximaal toegelaten percentage B en D en het aanwezige percentage met δ_2; beide variabelen moeten dus ≥ 0 zijn.

Een legering, die volgens tabel I in ieder geval voldoet, is die, welke alleen bestaat uit grondstof E. Het overschot aan koper bedraagt dan $\delta_1 = 36 - 18 = 18\%$; van de toegelaten marge aan B en D is niets gebruikt ($\delta_2 = 20\%$) en de kosten zijn 30.

Wij onderzoeken nu of op een of andere wijze een goedkopere legering te fabriceren is, die aan de eisen voldoet. Hierbij kunnen wij er gebruik van maken, dat $\delta_1 = 18\%$ en $\delta_2 = 20\%$ is. Omdat van de goedkoopste grondstof (B) de grootste prijsverlaging te verwachten is, mengen wij deze met E. Zouden wij y ton E vervangen door y ton B, dan verminderde het overschot δ_1 aan koper met $(36-11)y = 25y\%$ en δ_2 met $100.y\%$. Daar δ_1 en δ_2 geen van beide negatief mogen worden, moet y voldoen aan $25y \leq 18$ en $100y \leq 20$ en kan dus hoogstens gelijk zijn aan het minimum van $\frac{18}{25}$ en $\frac{20}{100}$. Dit betekent, dat niet meer dan 0,20 ton E door B kan worden vervangen. De kosten van 1 ton van de legering bedragen dan

aan B:	0,2 x 20 =	4
aan E:	0,8 x 30 =	24
	totaal:	28, +

wat 2 goedkoper is dan een legering alleen bestaande uit grondstof E, terwijl het percentage koper $0,2.11 + 0,8.36 = 31$ is; dus $\delta_1 = 13$ en $\delta_2 = 0$.

Een verdere verlaging van de kosten is niet mogelijk. De totale hoeveelheid van B en D mag niet toenemen wegens $\delta_2 = 0$; wel kunnen wij B vervangen door A, D of E, maar dit heeft steeds verhoging van de kosten ten gevolge. Ook vervanging van E door A leidt tot een duurder product. De voordeligste legering bestaat dus uit 0,2 ton B en 0,8 ton E en bevat 13% meer koper dan de toegelaten minimum hoeveelheid van 18%.

Wij zullen hetzelfde probleem nu formuleren in de taal der wiskunde. Hoe de legering ook is samengesteld, steeds kunnen wij zeggen, dat het een mengsel is, waarin alleen de grondstoffen A, B, D en E kunnen voorkomen. Daarom nemen wij aan, dat een ton legering λ_A ton A, λ_B ton B, λ_D ton D en λ_E ton E bevat. Alle λ's liggen dan tussen 0 en 1, maar wij mogen ze niet willekeurig kiezen. In de eerste plaats moeten de λ's voldoen aan de vergelijking

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_D + \lambda_E = 1 \qquad (2)$$

Bovendien moet het percentage koper minstens 18 bedragen, terwijl de totale hoeveelheid van B en D niet meer dan 20% van de legering mag uitmaken. In formule luiden deze voorwaarden

$$51\lambda_A + 11\lambda_B + 14\lambda_D + 36\lambda_E \geqq 18 \qquad (3)$$

en

$$100\lambda_B + 100\lambda_D \leqq 20. \qquad (4)$$

Maken wij gebruik van de boven ingevoerde variabelen δ_1 en δ_2, dan gaan (3) en (4) over in

$$51\lambda_A + 11\lambda_B + 14\lambda_D + 36\lambda_E - \delta_1 = 18 \qquad (5)$$

en

$$100\lambda_B + 100\lambda_D + \delta_2 = 20. \qquad (6)$$

Alle variabelen in de vergelijkingen (5) en (6) kunnen slechts niet-negatieve waarden aannemen.

De kosten z_0 van zo'n mengsel bedragen

$$z_0 = 40\lambda_A + 20\lambda_B + 24\lambda_D + 30\lambda_E . \qquad (7)$$

De vraag welke in het voorgaande werd beantwoord, was nu: hoe moeten wij λ_A, λ_B, λ_D en λ_E kiezen, opdat de kosten z_0 minimaal zijn onder de voorwaarden, dat voldaan is aan de vergelijkingen (5) en (6) en bovendien alle variabelen $\geqq 0$ zijn.

1.3. Derde voorbeeld [2]

In een fabriek kunnen twee soorten schroeven worden gemaakt. Bij de fabricage moeten beide soorten worden bewerkt door een machine, die de kop maakt en een machine, die de schroefdraad aanbrengt. Wanneer er voldoende arbeiders aanwezig zijn, de grondstoffen in willekeurige hoeveelheden tegen constante prijs aangevoerd kunnen worden, alle schroeven op de markt een afzet vinden tegen vaste prijzen, en ook de andere productiefactoren geen belemmeringen vormen voor het niveau waarop de productie zal plaatsvinden, dan wordt dit niveau bepaald door de capaciteiten van de twee genoemde machines. De productieleider zal nu nagaan, op welke wijze zijn fabriek de grootst mogelijke winst kan behalen. Dit probleem komt dus hierop neer, dat een functie (de winst) gemaximaliseerd moet worden onder bepaalde beperkingen.

Stel dat een schroef van type I 2 cent winst geeft en een schroef van type II 4 cent. Uit tijdstudies in voorafgaande jaren is bekend, hoeveel seconden de twee typen (S_1 en S_2) op de machines (M_1 en M_2) in bewerking zijn. De gegevens zijn vermeld in tabel III.

Tabel III

Bewerkingstijden en winsten van de schroeven

schroef	bewerkingstijd op machine		winst
	M_1	M_2	
S_1	2	5	3
S_2	3	2	4

Gedurende de periode, waarvoor het productieprogramma ontwikkeld moet worden, staan de macines beide 1 uur = 3600 seconden ter beschikking.

Wanneer er λ_1 schroeven van het eerste type en λ_2 van het tweede type worden vervaardigd, bedraagt de winst

$$z_0 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \ . \qquad (8)$$

---

2) Dit voorbeeld is ontleend aan een artikel van M.E. SALVESON, Mathematical methods in management programming, Proceedings of the conference on Operations Research in production and inventory control (1954), p. 23-41.

Door de beperkte capaciteit van de madines moeten λ_1 en λ_2 voldoen aan de voorwaarden

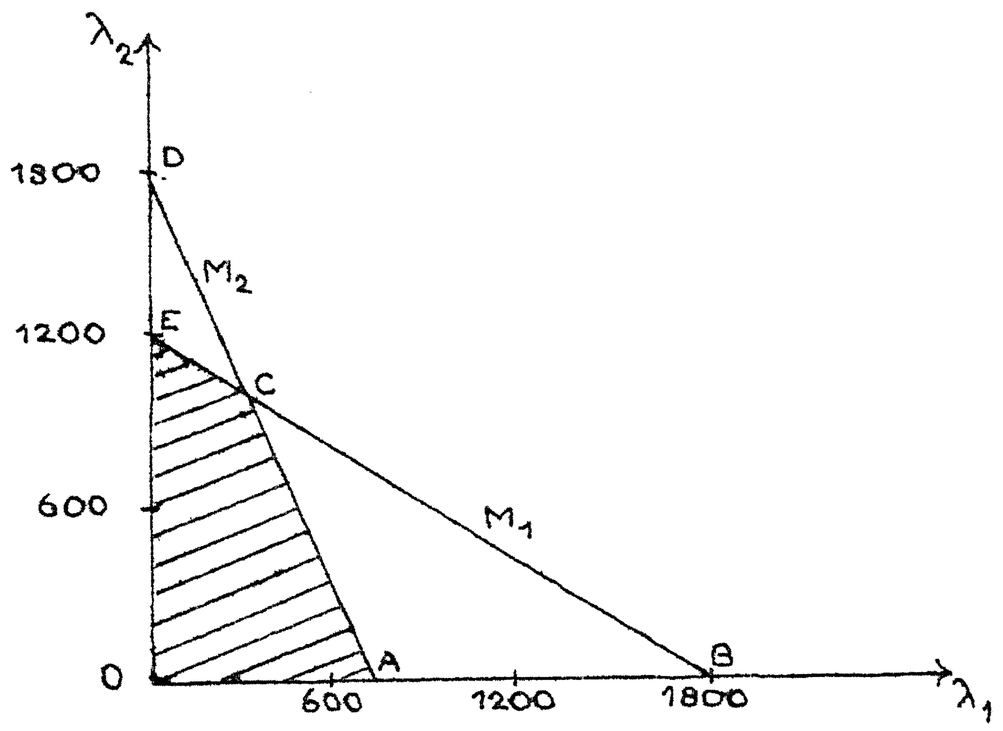
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leqq 3600 \text{ (wegens } M_1\text{)} \qquad (9)$$

en

$$5\lambda_1 + 2\lambda_2 \leqq 3600 \text{ (wegens } M_2\text{)} \qquad (10)$$

Vanzelfsprekend moet ook gelden $\lambda_1 \geqq 0$ en $\lambda_2 \geqq 0$.

Ten gevolge van deze vier ongelijkheden kunnen wij voor de λ's geen willekeurige waarden kiezen, maar zijn wij beperkt in onze keuze. In figuur 1 is dit geïllustreerd. Langs de horizontale as is het aantal schroeven S_1, dat gemaakt worden, uitgezet en langs de verticale as het aantal van type twee. Omdat λ_1 en λ_2 beide $\geqq 0$ moeten zijn, is alleen het getekende kwadrant van belang. Verder staat machine I niet toe, dat het aantal te produceren schroeven voorgesteld wordt door een punt, waarvan de coördinaten buiten de driehoek OBE liggen; evenzo beperkt machine II ons tot driehoek OAD. Alleen combinaties (λ_1, λ_2), waarvan de bijbehorende punten in het gearceerde gebied liggen, zijn dus toelaatbaar.



figuur 1

Het gearceerde gebied geeft de productiemogelijkheden aan

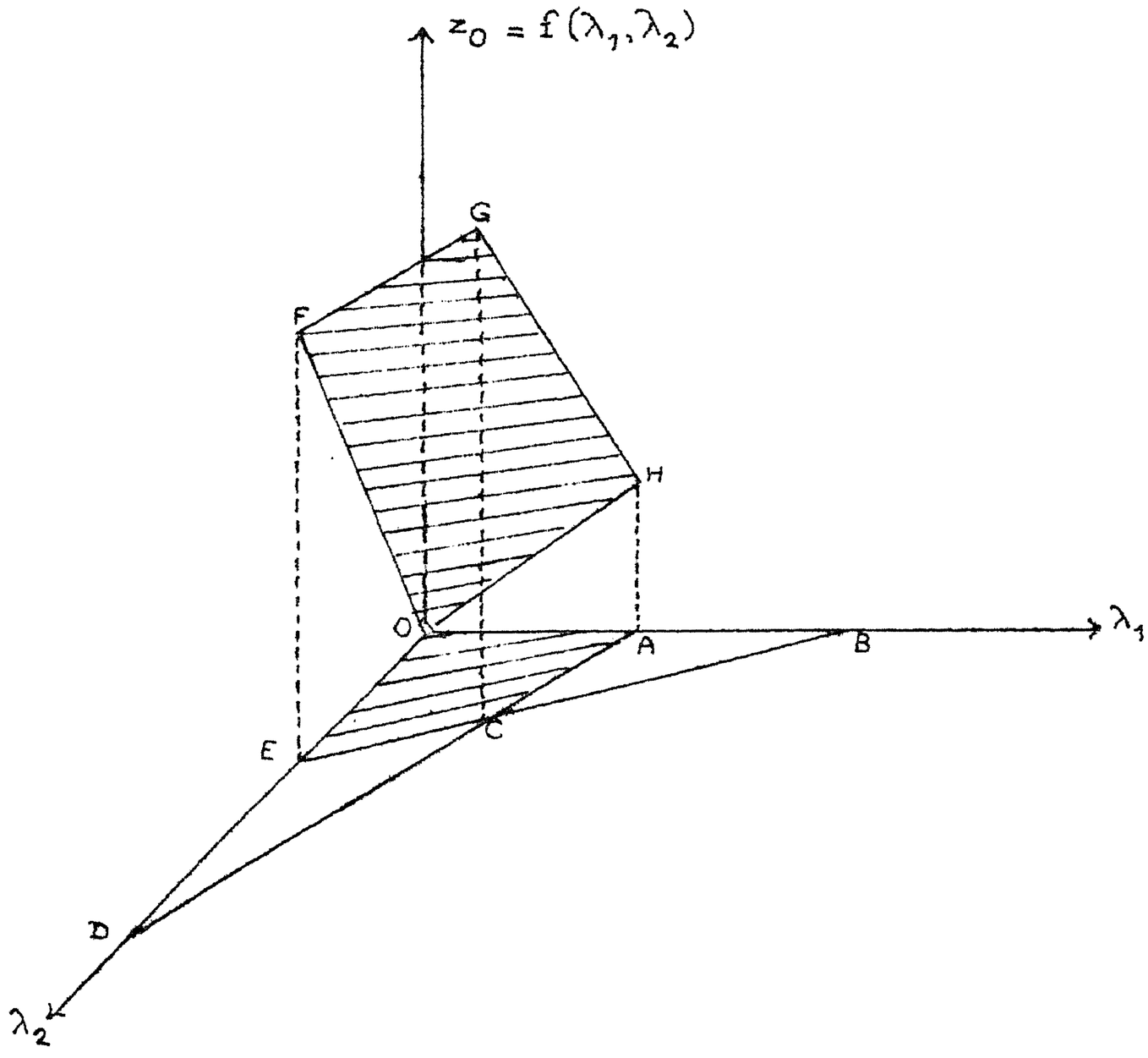
Als het productieprogramma wordt voorgesteld door een punt van EC, is machine I voortdurend in gebruik; machine II wordt, behalve in het punt C tijdens een deel van het proces buiten bedrijf gesteld. Besluiten wij tot het productieproces A, dan worden alleen schroeven van het eerste type gemaakt en is machine II volledig bezet, in tegenstelling tot machine I.

Het produceren van bijv. 1200 schroeven van type I is ten aanzien van machine I nog wel mogelijk, ten aanzien van machine II echter niet.

Onder de productieprogramma's, die uitvoerbaar zijn, willen wij nu het programma kiezen, dat de winst zo groot mogelijk maakt. Bij ieder stel waarden van λ_1 en λ_2 kunnen wij de winst berekenen; deze is bij een programma van 150 schroeven van type I en van 1100 schroeven van type II

$$150.3 + 1100.4 = 4.850 .$$

In figuur 2 is langs een derde as, loodrecht op λ_1 en λ_2 voor ieder stel waarden (λ_1, λ_2) de bijbehorende winst $z_0 = f(\lambda_1, \lambda_2)$ uitgezet. Omdat z_0 een lineaire functie is van de λ's, liggen deze punten alle in een plat vlak.



figuur 2

Winst als functie van het productieprogramma

Tabel IV geeft een overzicht van de coördinaten van de belangrijkste punten uit figuur 2.

Wat het meest winstgevende productieprogramma is, kunnen wij uit de figuur of de tabel direct aflezen. In ons geval is dit het fabriceren van 327 schroeven S_1 en 982 schroeven S_2, waarbij een winst van 4909 bereikt wordt en beide machines voortduren in bedrijf zijn.

Tabel IV

Winst als functie van het productieprogramma

productieprogramma			winst	
S_1	S_2	punt	grootte (z_0)	punt
0	0	0	0	0
720	0	A	2160	H
0	1200	E	4800	F
327	982	C	4909	G

Deze oplossing hadden wij ook kunnen vinden op de wijze, beschreven in paragraaf 1.1.2 van hoofdstuk I. Daartoe tekenen wij in figuur 1 de rechte

$$z_0 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2 ,$$

waarin z_0 een willekeurig getal is en schuiven deze evenwijdig aan zichzelf op (van 0 af) totdat er nog juist een gemeenschappelijk punt is met het gearceerde gebied. Dit punt correspondeert dan met het optimale productieprogramma.

Het is intuïtief duidelijk, dat de optimale productie van de technische mogelijkheden volledig gebruik maakt. Dit betekent, dat het optimale programma altijd ligt op de omtrek van het gebied OACE. Omdat de winst z_0 een lineaire functie is in λ_1 en λ_2, ligt het voordeligste programma in ieder geval in één van de hoekpunten van OACE. Zolang wij ons halverwege één van de zijden bevinden, is steeds verbetering mogelijk, tenzij de winst voor alle punten van die zijde even groot is. De enige punten, waarvoor de winsten dus vergeleken moeten worden, zijn de hoekpunten O, A, C en E.

In dit voorbeeld zijn beide machines in het meest winstgevende programma volledig bezet. Bij andere waarden van de in tabel III opgegeven constanten is het zeer wel mogelijk, dat één van de machines tijdens een deel van het proces niet gebruikt wordt. Daarom is het vaak gemakkelijk het aantal seconden, dat de machines niet werken aan te geven door nieuwe variabelen δ_1 en δ_2. Wij kunnen dan de ongelijkheden (9) en (10) schrijven in de vorm van vergelijkingen:

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \delta_1 = 3600 \qquad (11)$$

en

$$5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta_2 = 3600, \qquad (12)$$

waarin ook δ_1 en δ_2 alleen waarden $\geqq 0$ kunnen aannemen.

Uitgedrukt met behulp van deze vergelijkingen luidt het probleem, dat wij hebben opgelost, dus: maximaliseer

$$z_0 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2 ,$$

onder de voorwaarde, dat λ_1 en λ_2 moeten voldoen aan de vergelijkingen (11) en (12), waarin zowel λ_1 en λ_2 als δ_1 en δ_2 slechts niet-negatieve waarden kunnen aannemen.

Problemen als de drie hier uitgewerkte voorbeelden, waarin een lineaire functie geminimaliseerd of gemaximaliseerd moet worden, onder de voorwaarde, dat de variabelen moeten voldoen aan één of meer lineaire vergelijkingen en bovendien $\geqq 0$ moeten zijn, worden lineaire programmeringsproblemen genoemd. De uitwerking van het tweede voorbeeld laat het duidelijkst de methode zien, waarmee deze problemen kunnen worden opgelost. Men zoekt eerst een oplossing, die aan de eisen voldoet en wijzigt deze dan net zolang tot geen verbetering van de oplossing meer mogelijk is.

Behalve bij het opstellen van optimale schema's voor industriële productieproblemen kan men ook voor een groot aantal andere problemen modellen opstellen welke tot lineaire programmeringsproblemen leiden. Zo bevat het tijdschrift "Journal of Farm Economics" vanaf 1951 regelmatig bijdragen met toepassingen op agrarisch terrein.

Ook op administratief gebied kan men zich toepassingen voorstellen. Heeft men bijv. op de type-afdeling van een kantoor niet voldoende krachten om alle werkzaamheden binnen de normale kantooruren te verrichten, dan kan men het werk laten afmaken door alle typisten eenzelfde aantal uren te laten overwerken. Men zal dit aantal overuren uiteraard zo klein mogelijk willen houden; dit kan men bereiken door de werkzaamheden zo gunstig mogelijk over de typistes te verdelen. Hiertoe moet men uit tijdstudies in het verleden voor iedere typiste en ieder type werk weten hoeveel tijd er gebruikt wordt om de norm voor één uur werken te voltooien. De wiskundige formulering van dit vraagstuk komt neer op een lineair programmeringsprobleem.

Voor verdere voorbeelden van toepassingen verwijzen wij naar de uittreksels in "Overzicht van een aantal artikelen over Operations Research", rapport S 167 (Ov 5) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

2. Theorie van lineaire programmeringsproblemen en de simplexmethode

In deze paragraaf zullen wij de algemene formulering van lineaire programmeringsproblemen geven. Het is niet mogelijk om de theorie in kort bestek volledig te behandelen. Daarom zullen wij ons hier beperken tot het geven van een rekenschema, waarmee de problemen kunnen worden opgelost en het zonder bewijs noemen van de eigenschappen van dit schema.

2.1. Algemene probleemstelling

In de vorige paragraaf beschouwden wij drie eenvoudige problemen, waarin wij het extreem van een lineaire functie wilden bepalen, onder de voorwaarde, dat de variabelen die in deze functie voorkwamen voldeden aan enige lineaire ongelijkheden of lineaire vergelijkingen. Of de lineaire functie zo klein, dan wel zo groot mogelijk moet worden gemaakt, hangt af van het probleem, maar is voor de methode van geen belang. In aansluiting bij de meeste literatuur over dit onderwerp, zullen wij in het vervolg aannemen, dat de functie gemaximaliseerd moet worden. Wanneer men een functie wil minimaliseren, kan men ook het tegengestelde maximaliseren; het bovenstaande houdt dus geen beperking in.

Laat een functie z_0 gegeven zijn, welke lineair afhangt van de variabelen $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$:

$$z_0 = c_1\lambda_1 + \ldots + c_p\lambda_p = \sum_{i=1}^{p} c_i\lambda_i, \qquad (1)$$

waarin $c_1,\ldots,c_p$ bekende constanten zijn. Gevraagd wordt voor welke waarden van $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ deze functie maximaal is als de λ's bovendien moeten voldoen aan de ongelijkheden

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1p}\lambda_p &\leqq b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2p}\lambda_p &\leqq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mp}\lambda_p &\leqq b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

en ook alle groter of gelijk aan 0 moeten zijn; de a's en b's zijn gegeven constanten; de a's kunnen zowel positief, 0, als negatief zijn, de b's echter $\geqq 0$. Omdat wij z_0 willen maximaliseren, zal z_0 meestal een opbrengst voorstellen. De λ's zijn

hetzij hoeveelheden grondstoffen, die men bij de productie gebruikt, in welk geval de bijbehorende c's negatief zullen zijn, hetzij gemaakte producten, in welk geval de bijbehorende c's (verkoopsprijzen) positief zullen zijn.

Zijn er niet meer dan twee λ's en bijv. drie vergelijkingen, dan vormen de waarden van λ_1 en λ_2, die aan (2) voldoen, een gebied, zoals aangegeven is in fig. 1. (vgl. ook fig. 1 in 1.3).

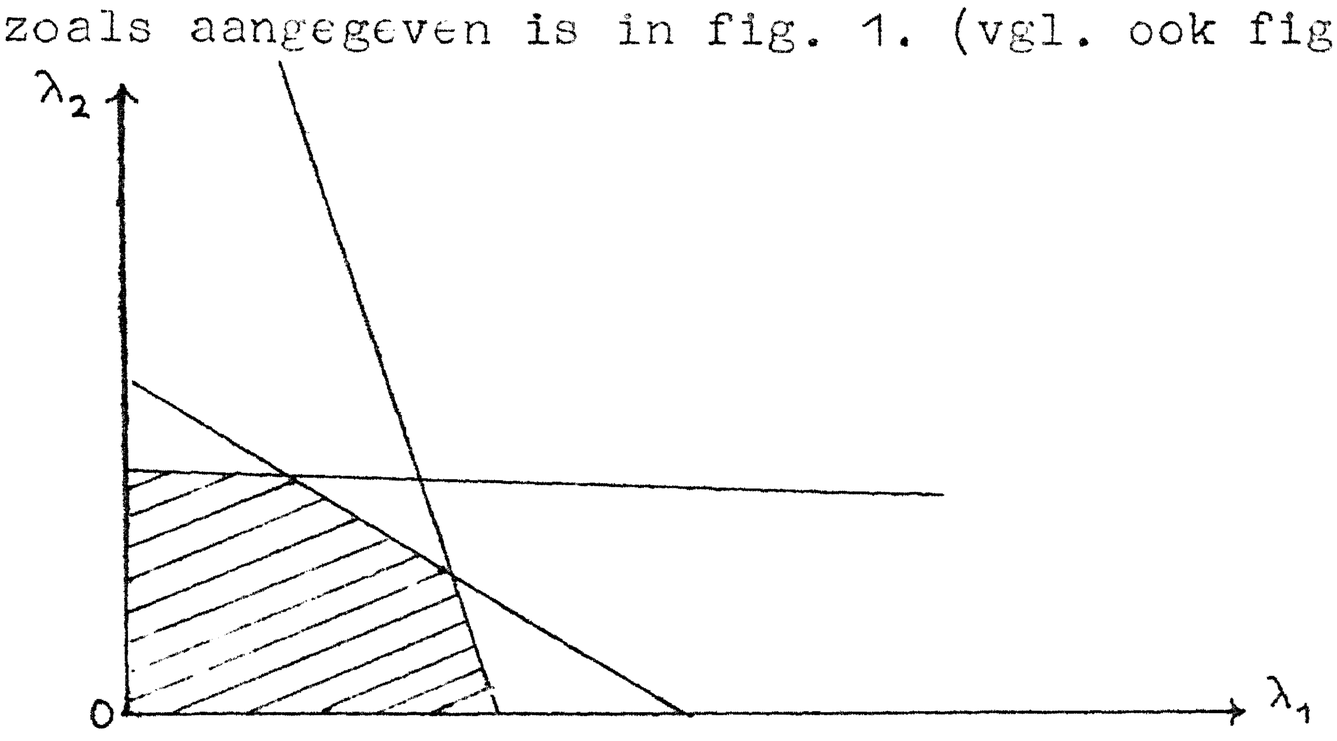


fig. 1

Toegelaten λ's voor p = 2 en m = 3

Omdat de b's $\geqq$ 0 zijn, voldoet het punt 0 altijd. Het is zelfs mogelijk, dat dit het enige punt is en dan is de maximale opbrengst, wegens $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gelijk aan nul. Wanneer er meer dan één greep (λ_1, λ_2) aan de gestelde eisen voldoet, dan voldoen er direct oneindig veel aan.

Ook als er meer dan twee variabelen zijn en meer dan drie vergelijkingen, kan men bewijzen, dat er één combinatie van λ's voldoet aan (2), of oneindig veel combinaties. In het eerste geval blijft de maximaal bereikbare opbrengst nul. Alleen het tweede geval is voor ons van belang; onder de combinaties van waarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, welke voldoen aan (2), willen wij dan diegene zoeken, welke

$$z_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i\lambda_i \quad \text{maximaliseert.}$$

Evenals in het tweede voorbeeld van paragraaf 1 veranderen wij het stelsel ongelijkheden (2) in een stelsel gelijkheden door het invoeren van nieuwe variabelen $\delta_1,\ldots,\delta_m$, die het verschil voorstellen tussen de linker leden van (2) en de rechter leden. Wij noemen deze variabelen, die dus altijd groter of gelijk aan 0 moeten zijn, <u>verschilvariabelen</u>. Het stelsel (2) gaat nu over in

$$
\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1p}\lambda_p + \delta_1 &= b_1 \\
a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2p}\lambda_p + \delta_2 &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mp}\lambda_p + \delta_m &= b_m \ .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Er bestaan verschillende methoden om een lineaire functie te maximaliseren onder de voorwaarde dat de variabelen ≥ 0 moeten zijn en moeten voldoen aan een stelsel vergelijkingen. Zij zijn echter niet alle onder alle omstandigheden te gebruiken. Wij zullen een methode geven, die steeds toegepast kan worden en welke dan ook in de meeste artikelen wordt aangetroffen. Deze methode is afkomstig van G.B. DANTZIG en later aangevuld door A. CHARNES; zij draagt de naam simplexmethode.

2.2. De simplexmethode

2.2.1. Het principe waarop de methode berust

De in 2.1 ingevoerde veranderlijken $\delta_1,\ldots,\delta_m$ komen in de vergelijkingen (3) op dezelfde manier voor als $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. Daarom is het niet nodig verschillende symbolen te gebruiken en dus zullen wij in het vervolg in plaats van $\delta_1,\ldots,\delta_m$ schrijven $\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_n$, waarin $n = p + m$.

De vergelijkingen (3) zien er dan als volgt uit:

$$
\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1k}\lambda_k + \ldots + a_{1p}\lambda_p + \lambda_{p+1} &= b_1 \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
a_{r1}\lambda_1 + \ldots + a_{rk}\lambda_k + \ldots + a_{rp}\lambda_p + \lambda_{p+r} &= b_r \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
a_{m1}\lambda_1 + \ldots + a_{mk}\lambda_k + \ldots + a_{mp}\lambda_p + \lambda_{p+m} &= b_m
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Ook de te maximaliseren functie (1) zullen wij iets anders schrijven. In (4) staan $p+m = n$ variabelen λ, in (1) echter slechts p. De overige n-p variabelen nemen wij in (1) op met coëfficiënt 0:

$$
z_0 = \sum_{h=1}^{n} c_h\lambda_h \ . \tag{5}
$$

De waarde van z_0 verandert hierdoor niet; c_{p+1} tot en met c_n zijn alle gelijk aan 0.

De vergelijkingen (4) en (5) behelzen dus het probleem in de nieuwe vorm: maximaliseer (5) onder de voorwaarden, dat $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ voldoen aan de vergelijkingen (4) en bovendien alle $\geqq 0$ zijn. Bij het verderop te bespreken rekenschema komen wij steeds hierop terug.

Het is niet moeilijk een stelsel λ's te vinden, die voldoen aan (4). Wij kunnen bijv. kiezen

$$\lambda_i = 0 \qquad (i = 1,\ldots,p)$$

en (6)

$$\lambda_{p+j} = b_j \quad (j = 1,\ldots,m) \ .$$

Omdat wij aangenomen hebben dat alle $b_i \geqq 0$ zijn, vormen de door (6) gegeven waarden wiskundig gezien een uitvoerbare oplossing van het probleem. Practisch gezien betekent het dat er niets gebeurt en de opbrengst is volgens (5) dan ook 0. Wij noemen deze oplossing de "triviale oplossing".

Wij onderstellen nu dat er een $k \leqq p$ bestaat waarvoor één of meer van de coëfficiënten van de variabele λ_k positief zijn. Het is dan eenvoudig om nog een andere oplossing van (4) te geven. Kiezen wij $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$, $\lambda_k = \Theta$, $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_p = 0$, dan gaan de vergelijkingen (4) over in

$$a_{jk}.\Theta + \lambda_{p+j} = b_j, \qquad (7)$$

waaruit blijkt dat voor de overige λ's moet gelden

$$\lambda_{p+j} = b_j - a_{jk}.\Theta \ . \qquad (8)$$

Deze oplossing is alleen dan toelaatbaar, wanneer $\lambda_k = \Theta \geqq 0$ is en ook de $\lambda_{p+j} \geqq 0$ zijn. Aan de laatste eis is voldaan wanneer

$$b_j - a_{jk}.\Theta \geqq 0 \qquad (9)$$

is. Voor $a_{jk} \leqq 0$ is dit zeker in orde; voor iedere $a_{jk} > 0$ moet gelden:

$$\Theta \leqq \frac{b_j}{a_{jk}} \ .$$

Wij kunnen dus Θ niet groter kiezen dan het kleinste van de positieve quotiënten $\frac{b_j}{a_{jk}}$.

Wij nemen aan dat dit minimum bereikt wordt voor precies één waarde van j [1]; is dit $j = r$, dan geven wij λ_k de waarde

$$\lambda_k = \Theta = \frac{b_r}{a_{rk}} \ . \qquad (10)$$

---

1) Wanneer dit niet het geval is, spreken wij van ontaarding; hoe men dan te werk moet gaan wordt besproken in 2.2.5.

De bijbehorende oplossing

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-1} = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_p = 0,\ \lambda_k = \frac{b_r}{a_{rk}}, \qquad (11)$$

$$\lambda_{p+j} = b_j - a_{jk}\,\frac{b_r}{a_{rk}}$$

voldoet dan aan de gestelde eisen.

Dit is duidelijk af te lezen uit de vergelijkingen (4), wanneer wij deze schrijven in een iets andere vorm. Daartoe delen wij de r^e vergelijking door a_{rk}; de j^e vergelijking ($j \neq r$) verminderen wij met a_{jk}/a_{rk} maal de r^e vergelijking. Het stelsel (4) krijgt dan de vorm (12) (zie blz. 116).

Alle oplossingen, die voldoen aan (4) voldoen ook aan (12) en andersom. Wij kunnen het probleem (4), (5) dus vervangen door het aequivalente probleem (12), (5). De variabelen λ_k en λ_{p+j} ($j = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m$) komen alle in slechts één vergelijking voor en wij vinden dus een oplossing van (12), wanneer wij deze variabelen gelijkstellen aan de rechter leden van de vergelijkingen waarin ze voorkomen en de overige variabelen 0 kiezen:

$$\lambda_k = \frac{b_r}{a_{rk}},$$

$$\lambda_{p+j} = b_j - \frac{a_{jk}}{a_{rk}} b_r, \quad (j = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m) \qquad (11)$$

$$\lambda_i = 0, \qquad (i = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,p,p+r).$$

Dit is juist de oplossing, die wij hierboven hadden verkregen.

Wij vergelijken nu de opbrengst z_0', behorende bij deze oplossing met de vorige opbrengst z_0. Om de redenering algemeen te houden maken wij er geen gebruik van, dat sommige c's 0 zijn. De opbrengsten z_0 en z_0' zijn respectievelijk (vgl. (5),(6) en (11))

$$z_0 = c_{p+1}b_1 + \ldots + c_{p+r}b_r + \ldots + c_n b_m \qquad (13)$$

en

$$z_0' = c_k\frac{b_r}{a_{rk}} + c_{p+1}\left(b_1 - \frac{b_{1k}}{a_{rk}}b_r\right) + \ldots + c_{p+r}\cdot 0 + \ldots + c_n\left(b_m - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}b_r\right) \qquad (14)$$

of

$$z_0' = z_0 + \frac{b_r}{a_{rk}}\left(c_k - \sum_{j=1}^{m} c_{p+j}a_{jk}\right). \qquad (15)$$

$$(a_{11} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{r1})\,\lambda_1 + \ldots + (a_{1k} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{rk})\,\lambda_k + \ldots + (a_{1p} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} a_{rp})\,\lambda_p + \lambda_{p+1} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} \lambda_{p+r} = b_1 - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} b_r$$

$$(a_{21} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{r1})\,\lambda_1 + \ldots + (a_{2k} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{rk})\,\lambda_k + \ldots + (a_{2p} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} a_{rp})\,\lambda_p + \lambda_{p+2} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} \lambda_{p+r} = b_2 - \frac{a_{2k}}{a_{rk}} b_r$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{a_{r1}}{a_{rk}} \lambda_1 + \ldots + \lambda_k + \ldots + \frac{a_{rp}}{a_{rk}} \lambda_p + \ldots + \frac{1}{a_{rk}} \lambda_{p+r} = \frac{b_r}{a_{rk}} \qquad (12)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(a_{m1} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{r1})\,\lambda_1 + \ldots + (a_{mk} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{rk})\,\lambda_k + \ldots + (a_{mp} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} a_{rp})\,\lambda_p + \lambda_{p+m} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} \lambda_{p+r} = b_m - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} b_r \,.$$

Voeren wij de afkorting

$$z_k = \sum_{j=1}^{m} c_{p+j}\ a_{jk} \qquad (16)$$

in en schrijven wij weer Θ voor $\frac{b_r}{a_{rk}}$, dan gaat (15) over in

$$z_0' = z_0 + \Theta(c_k - z_k)\ . \qquad (17)$$

De opbrengst kan dus alleen dan groter worden, wanneer $c_k - z_k > 0$ is (Θ was $\geqq 0$). Om z_0 te vergroten zal men dus een variabele zoeken waarvoor $c_k - z_k > 0$ is. Wanneer dit voor meer dan één variabele het geval is, dan kan men het beste met die variabele werken waarvoor $c_k - z_k$ maximaal is, noodzakelijk is dit echter niet.[2)]

Vervolgens wordt onderzocht hoe groot men deze variabele kan kiezen. De grens hiervoor wordt bepaald door het kleinste van de quotiënten b_j/a_{jk}, waarin $a_{jk} > 0$ is. Door een geschikte omvorming van de vergelijkingen kunnen wij de waarden van de variabelen, die in de nieuwe oplossing niet 0 zijn, direct aflezen uit de rechter leden van de vergelijkingen. Het resultaat is dan, dat er weer m λ's een waarde ongelijk 0 aannemen, doch dat nu $\lambda_k \neq 0$ is in de plaats van λ_{p+r}, die in de oude oplossing een positieve waarde had.

Als het nieuwe schema dezelfde eigenschappen bezit als het oude, kunnen deze berekeningen uiteraard ook daar weer op worden toegepast.

De <u>simplexmethode</u> is een methode die deze gedachtengang systematisch toepast. Het is niet nodig voortdurend alle vergelijkingen op te schrijven; men kan volstaan met tabellen, waarin de coëfficiënten uit deze vergelijkingen opgenomen zijn en waaruit men bovendien kan aflezen hoe groot $c_h - z_h$ is voor alle waarden van h. Wij laten nu zien hoe men deze tabellen maakt en of en zo ja, hoe men uit een bekende oplossing een nieuwe, betere oplossing kan construeren.

2.2.2. <u>Het rekenschema</u>.

In tabel I zijn de coëfficiënten van (4) opgegeven; boven de kolommen schreven wij de variabelen, waarvoor deze coëfficiënten staan. In vergelijking met (4) is de volgorde van de kolommen iets

---

2) Is het verschil voor meer dan één index maximaal, dan kan men willekeurig één van deze nemen.

gewijzigd; boven de kolom, waarin de elementen uit de rechter leden van (4) zich bevinden, hebben wij het symbool λ_0 geplaatst. Deze tabel bevat dus, op de c's van (5) na, de gegevens van het probleem.

Tabel I

Oorspronkelijke coëfficiënten

$(n = p + m)$

λ_0	λ_{p+1}	....	λ_{p+r}	....	λ_n	λ_1	....	λ_k	....	λ_p
b_1	1		0		0	a_{11}		a_{1k}		a_{1p}
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
b_r	0		1		0	a_{r1}		a_{rk}		a_{rp}
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
b_m	0	....	0	....	1	a_{m1}	....	a_{mk}	....	a_{mp}

Deze tabel breiden wij uit met twee kolommen. Links van de kolom met het hoofd λ_c schrijven wij een kolom met het hoofd B, die van boven naar beneden de variabelen $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+m}$ $(= \lambda_n)$ bevat (zie tabel II). Links daarvan komt een kolom, waarin wij de c-waarden uit (5) invullen, die dezelfde indices hebben als de λ's uit de B-kolom; hier dus allemaal nullen.

Aan de onderkant van tabel I wordt een rij toegevoegd, waarin de getallen $z_h - c_h$ komen te staan; z_h is gedefinieerd door (16) en hieruit blijkt, dat z_h de som is van de producten der elementen uit de c-kolom en de λ_h-kolom. In de λ_0-kolom komt te staan $z_0 - c_0$; c_0 komt in (5) niet voor en wordt daarom gelijk aan nul gesteld; het betreffende vakje bevat dus het getal z_0. Volgens (13) is dit getal gelijk aan de som van de

producten der elementen uit de c- en de λ_0-kolom (de berekening van z_0 is dus analoog aan die van z_h voor $h \neq 0$). Omdat in de c-kolom alleen nullen staan, zijn alle $z_h = 0$ en dus is $z_h - c_h = - c_h$.

Aangezien de elementen in de kolommen λ_1 tot en met λ_p alle worden aangegeven door a_{ij} zullen wij de b's vervangen door a_{iO}, waarin de nul slaat op de nul van λ_0 in het hoofd van de kolom.

Het resultaat van deze veranderingen is tabel II; voor alle constanten, waarvan wij de getalwaarde kennen, is deze ingevuld; blanco hokjes geven nullen aan.

Tabel II

Eerste stap: de triviale oplossing

c	B	λ_0	λ_{p+1}	...	λ_{p+r}	...	λ_{p+m}	λ_1	...	λ_k	..	λ_p
	λ_{p+1}	a_{10}	1					a_{11}	...	a_{1k}	..	a_{1p}
	.	.		.				.	...	.	..	.
	.	.		.				.	...	.	..	.
	.	.		.				.	...	.	..	.
	λ_{p+r}	a_{r0}			1			a_{r1}	...	a_{rk}	..	a_{rp}
	.	.				.		.	...	.	..	.
	.	.				.		.	...	.	..	.
	.	.				.		.	...	.	..	.
	.	.				.		.	...	.	..	.
	λ_{p+m}	a_{m0}					1	a_{m1}	...	a_{mk}	..	a_{mp}
$z_h - c_h$								$-c_1$	...	$-c_k$	..	$-c_p$

De eerste oplossing die wij gaven (de triviale) kan men uit deze tabel direct aflezen; de variabelen in de B-kolom bezitten de waarden die in de λ_0-kolom gegeven zijn, de andere zijn 0. De opbrengst z_0 (die voor de triviale oplossing gelijk aan 0 is) staat in het laatste vakje van de λ_0-kolom.

Uitgaande van deze eerste stap tot een oplossing willen wij nu een volgende stap construeren. Daartoe beschouwen wij eerst het geval, waarin aan de drie volgende voorwaarden is voldaan:

1) de laatste rij van tabel II bevat voor $h > 0$ één of meer negatieve elementen,
2) voor $h > 0$ bevat iedere kolom, die in de laatste regel een negatief getal heeft, één of meer positieve elementen,
3) als het minimum in de laatste rij bereikt wordt voor $h = k$, dan wordt het minimum van de quotiënten a_{j0}/a_{jk}, waarin $a_{jk} > 0$, voor precies één waarde van j bereikt. [3]

Volgens (17) was verbetering van de opbrengst mogelijk, indien voor een bepaalde waarde van h $c_h - z_h$ groter was dan nul.[4] In tabel II betekent dit dat $z_h - c_h < 0$ moet zijn en volgens 1) is verbetering dus inderdaad mogelijk.

De tabel waaruit de nieuwe oplossing kan worden afgelezen, wordt als volgt geconstrueerd. Bepaal eerst de waarde k, waarvoor $z_h - c_h$ minimaal is; zoek vervolgens het kleinste van de quotiënten a_{j0}/a_{jk} met $a_{jk} > 0$ op. In tabel III zijn deze twee bewerkingen schematisch aangegeven. Tabel IV laat zien hoe uit tabel II de nieuwe tabel ontstaat; hiertoe moet men het volgende doen:

1) vervang in de c- en de B-kolom c_{p+r} en λ_{p+r} door c_k resp. λ_k,
2) deel alle elementen uit  door a_{rk},
3) verminder alle andere elementen uit de kolommen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ met de aangegeven producten (in de kolom λ_k komen hierdoor, behalve de in het schema aangegeven 1, slechts nullen te staan),
4) laat de vakjes  ongewijzigd.

Op dezelfde wijze, waarop wij uit tabel II de oude oplossing konden aflezen, kunnen wij de nieuwe bepalen uit tabel IV. De variabelen in de B-kolom bezitten de, in de λ_0-kolom gegeven waarden, de andere λ's zijn nul. De nieuwe opbrengst is te vinden in het laatste vakje van de λ_0-kolom. Het is niet moeilijk na te gaan dat de getallen in tabel IV de coëfficiënten zijn uit het vergelijkingenstelsel (12).

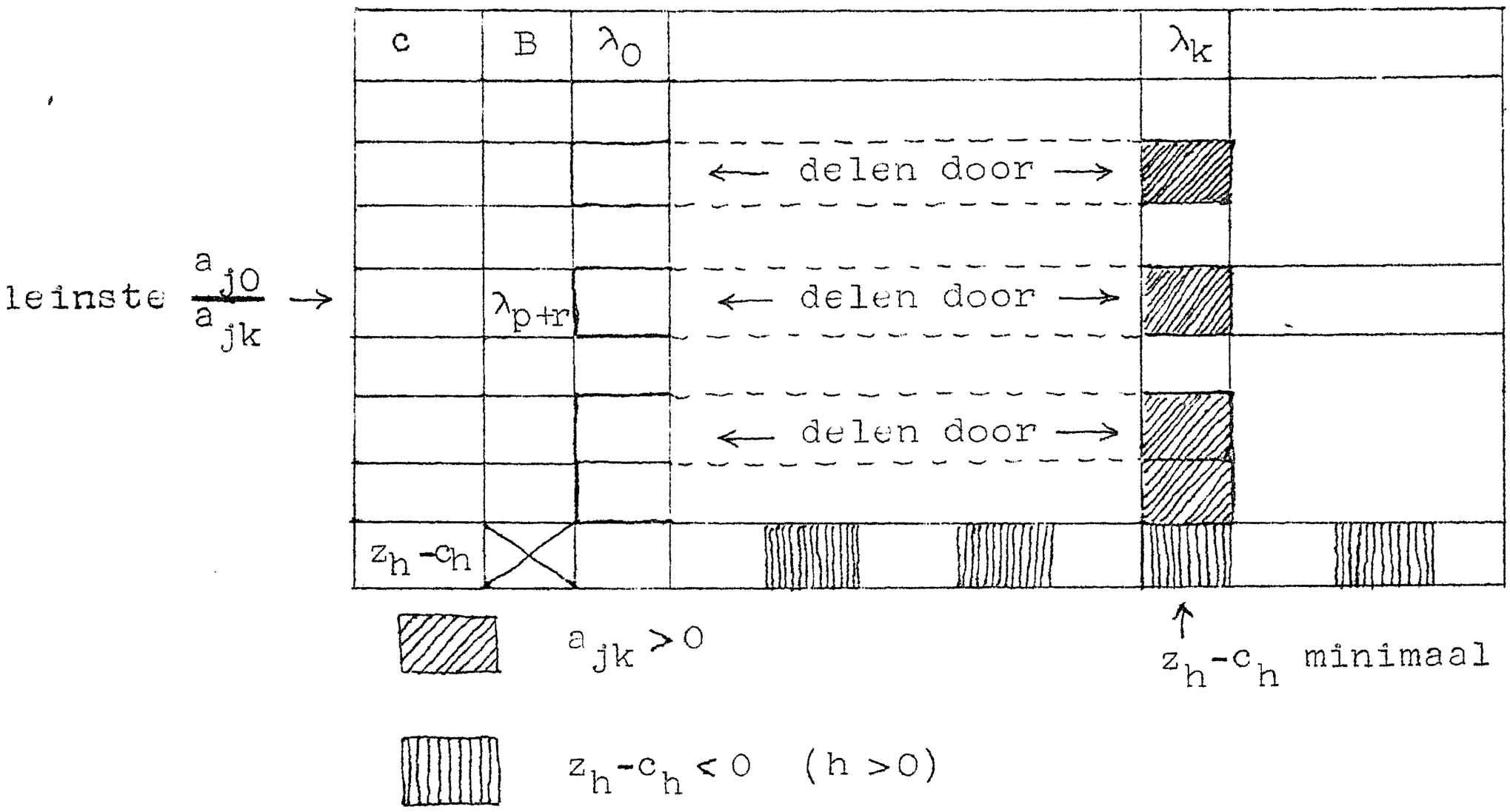
---

3) Het is natuurlijk mogelijk dat het minimum in de laatste regel bereikt wordt voor twee waarden van h en dat in het ene geval is voldaan aan deze voorwaarde en in het andere geval niet. Wij zullen hierop terugkomen in 2.2.5.

4) Hiervoor is ook nog noodzakelijk dat $\theta > 0$ is; strikt genomen kan men dan ook alleen zeggen dat verbetering niet uitgesloten is. Voor de eenvoud van de formulering zullen wij in dit geval toch steeds van verbetering spreken.

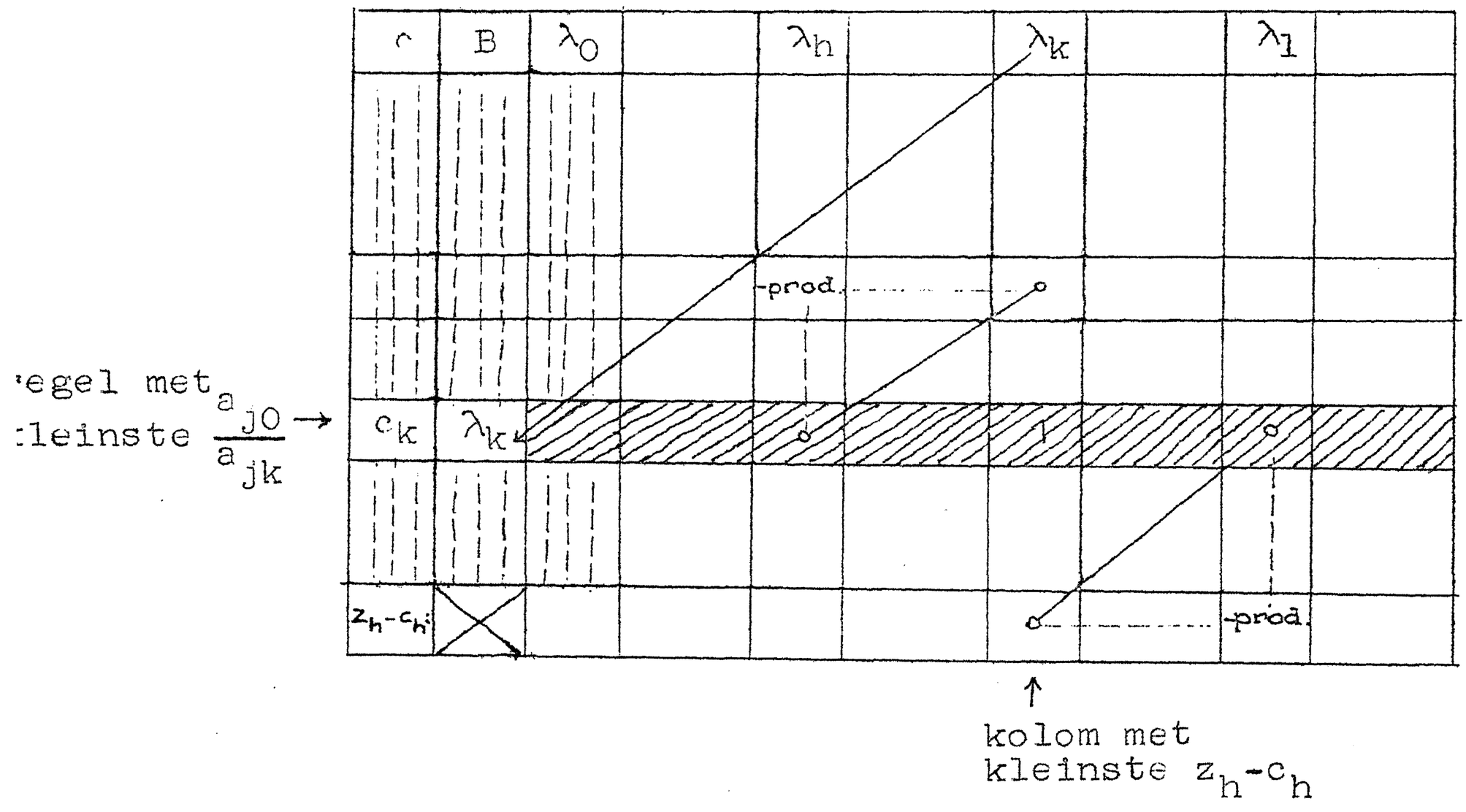
Tabel III

Berekeningen uit te voeren met de constanten van tabel II



Tabel IV

Tweede stap: eerste verbeterde oplossing



Wanneer de nieuwe tabel ook aan de drie op blz. 120 genoemde voorwaarden voldoet, kan hetzelfde procédé opnieuw worden toegepast. In welke situatie wij verkeren als de tabel niet meer aan één of meer van deze eisen voldoet, zullen wij bespreken in 2.2.4 en 2.2.5.3.

2.2.3. Numeriek voorbeeld

Ter illustratie van het voorgaande voeren wij de aangegeven bewerkingen uit voor het derde voorbeeld van de vorige paragraaf, hoewel voor dit eenvoudige geval de vroeger gegeven oplossingsmethode sneller is.

Vergelijking (1) heeft de vorm

$$z_0 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \,. \tag{18}$$

Er zijn dus twee variabelen ($p = 2$); de constanten in (1) zijn $c_1 = 3$ en $c_2 = 4$. Verder zijn er twee ongelijkheden:

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leqq 3600 \tag{19}$$

en

$$5\lambda_1 + 2\lambda_2 \leqq 3600 \,, \tag{20}$$

waaruit wij voor de constanten van het stelsel (4) aflezen:
$a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $b_1 = 3600$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 2$ en $b_2 = 3600$.
Omgezet in gelijkheden luiden (19) en (20):

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \delta_1 = 3600$$

en

$$5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta_2 = 3600 \,,$$

of

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 3600 \tag{21}$$

en

$$5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 3600 \tag{22}$$

De veranderlijken δ_1 en δ_2 zijn de verschilvariabelen, welke wij in 2.1 invoerden. Zij geven in dit voorbeeld bij bepaalde waarden van λ_1 en λ_2 aan, hoe lang de machines tijdens het productieproces stilstaan.

Tabel I heeft hier dus de vorm:

Tabel V

Oorspronkelijke coëfficiënten

λ_0	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2
3600	1	0	2	3
3600	0	1	5	2

Aan de linker kant van deze tabel voegen wij nu de B- en de c-kolom toe. De B-kolom bevat de symbolen λ_3 en λ_4, de c-kolom dus c_3 en c_4, die beide nul zijn. Uit formule (16) volgt voor de waarden z_h:

$$z_h = c_3 \cdot a_{1h} + c_4 \cdot a_{2h} = 0 \cdot a_{1h} + 0 \cdot a_{2h} = 0 \ ,$$

zoals bij deze eerste stap steeds het geval is, en dus is $z_h - c_h = - c_h$. Tabel II gaat dus over in Tabel VI; lege hokjes geven weer nullen aan.

Tabel VI

Eerste stap: de triviale oplossing

c	B	λ_0	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2
	λ_3	3600	1		2	3
	λ_4	3600		1	5	2
$z_h - c_h$					-3	-4

Uit deze tabel lezen wij af, dat een stelsel λ-waarden, die voldoen aan (21) en (22) wordt gevormd door $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ en $\lambda_3 = \lambda_4 = 3600$.
Dit is inderdaad een oplossing, die aan de eisen tegemoet komt, want het betekent: produceer geen schroeven van type I, geen schroeven van type II en laat de machines voortdurend stilstaan. Het proces correspondeert met het punt O uit fig. 1 in 1.3.

De volgende stap is het contrueren van een oplossing, die ook aan de eisen voldoet, doch een grotere winst oplevert. Omdat VI aan de drie voorwaarden, vermeld op blz. 120, voldoet, kunnen wij op de in 2.2.2 beschreven wijze te werk gaan. Wij vormen eerst de schema's VII en VIII, die overeenkomen met III en IV.

Tabel VII

Opsporing van k en r

kleinste $\frac{a_{j0}}{a_{jk}}$ $(r=1)$ →

c	B	λ_0	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2
	λ_3	3600	1		2	3
	λ_4	3600		1	5	2
z_h-c_h:	⊠				-3	-4

↑ kleinste z_h-c_h (→ k=2)

▨ $a_{jk} > 0$

Uit deze tabel blijkt: k = 2 en r = 1.

Tabel VIII

Verdere bewerking (oude cijfers tussen haakjes)

	c	B	λ_0	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2	
1) →	4	λ_2	1200	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	← 2)
		λ_4	(3600)	(0)-$\frac{2}{3}$ (prod)	(1)	(5)	(2)	3)
	z_h-c_h	⊠				(-3)	(-4)	

1) 4 en λ_2 in de plaats van 0 en λ_3.
2) de overeenkomstige elementen uit VI, gedeeld door $a_{12} = 3$
3) elementen verminderen met producten, zoals aangegeven.

In tabel VIII zijn de onder tabel IV vermelde punten 1) en 2) volledig uitgevoerd en punt 3) voor één geval; tabel IX bevat het uiteindelijke resultaat.

De gewijzigde vorm van de vergelijkingen (21) en (22), die bij tabel IX past is (vgl. (12) en (4)):

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3} \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + \tfrac{1}{3} \cdot \lambda_3 &= 1200 \\ \tfrac{11}{3} \cdot \lambda_1 - \tfrac{2}{3} \cdot \lambda_3 + \lambda_4 &= 1200 \end{aligned} \qquad (23)$$

Tabel IX

Tweede stap: eerste verbeterde oplossing

c	B	λ_0	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2
4	λ_2	1200	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1
	λ_4	1200	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	0
z_h-c_h		4800	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0

Met de vergelijkingen (23) kan men gemakkelijk controleren, dat de oplossing, die wij verkrijgen door de variabelen opgegeven in de B-kolom de in de λ_0-kolom vermelde waarden te geven en de andere variabelen nul te kiezen, inderdaad voldoet. De bijbehorende opbrengst is 4800, wat weer geverifieerd kan worden met formule (18). Het productieschema luidt nu: 1200 schroeven maken van type II en geen enkele van type I; de eerste machine is voortdurend in bedrijf ($\lambda_3 = \delta_1 = 0$), de tweede staat $\lambda_4 = \delta_2 = 1200$ seconden stil. In figuur 1 van 1.3 komt dit programma overeen met het punt E.

Evenals tabel VI voldoet ook tabel IX aan de drie voorwaarden van blz. 120. De laatste rij bevat één negatief element, nl. $-\frac{1}{3}$, behorende bij h = 1 (dus k = 1); de elementen uit de λ_1-kolom zijn beide positief en het minimum van de quotiënten $1200 : \frac{2}{3}$ en $1200 : \frac{11}{3}$ wordt alleen bereikt in de rij, waarin λ_4 staat (dus r = 4). Op de wijze waarop wij IX afleidden uit VI, kunnen wij IX nu omvormen tot tabel X.

Het bijbehorende productieproces bestaat uit het fabriceren van 327 schroeven van type I en 982 schroeven van type II; λ_3 en λ_4 zijn beide nul, wat inhoudt dat beide machines volledig in bedrijf zijn. De winst bedraagt 4909.

In 1.3 vonden wij dat dit proces (punt C van fig. 1) het beste was, dat kon worden bereikt. Ook tabel X doet dit reeds vermoeden. Bij iedere stap, waarbij de variabele λ_k in kolom B voor λ_r in de plaats gesteld wordt, neemt de opbrengst volgens (17) toe met $\theta(c_k-z_k)$. In tabel X zijn alle $z_h-c_h \geqq 0$ en omdat $\theta \geqq 0$ is, zal op de tot nu toe geschetste wijze geen verhoging van de opbrengst meer verkregen kunnen worden. Wij keren nu terug naar de theorie om na te gaan, wanneer de tabel een optimale oplossing bevat.

Tabel X

Derde stap: tweede verbeterde oplossing

c	B	λ_0	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2
4	λ_2	982	$\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	1
3	λ_1	327	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1	0
z_h-c_h		4909	$\frac{42}{33}$	$\frac{1}{11}$	0	0

2.2.4. Het bereiken van een optimale oplossing; restricties der methode

Van de drie voorwaarden genoemd op blz. 120 houden de eerste en de tweede verband met de vraag of het beste schema reeds bereikt is. Wanneer aan de derde voorwaarde niet is voldaan, noemen wij het probleem ontaard; voorlopig wordt dit geval uitgesloten. Wij beantwoorden nu de vraag: onder welke omstandigheden bevat de tabel een optimale oplossing?

Er doen zich voor een tabel, zoals II drie mogelijkheden voor, die elkaar uitsluiten:

a) voor één of meer waarden van h ($h>0$) geldt: $z_h - c_h < 0$ en in minstens één van de bijbehorende kolommen bevinden zich geen positieve getallen,
b) voor één of meer waarden van h ($h>0$) geldt: $z_h - c_h < 0$ en in alle bijbehorende kolommen bevinden zich één of meer positieve getallen,
c) voor alle waarden van h ($h>0$) geldt: $z_h - c_h \geqq 0$.

Verkeert men in situatie a), dan kan z_0 onder de geldende beperkingen willekeurig groot gemaakt worden. De keuze van θ wordt beperkt door voorwaarden van de vorm (9) en $\theta \geqq 0$. Zijn nu alle a's kleiner of gelijk aan nul, dan is aan de ongelijkheden (9) steeds voldaan en voor θ kan dus ieder getal $\geqq 0$ gekozen worden. Hieruit en uit het bestaan van een h waarvoor $z_h - c_h < 0$ is, volgt met (17), dat het maximum van z_0 oneindig is. In practijkproblemen zal dit geval zich niet voordoen; mocht men er wel op stuiten, dan betekent dit ofwel dat het gebruikte model niet realistisch is, ofwel dat de berekeningen fout zijn.

In situatie b) is aan de voorwaarden 1) en 2) van blz. 120 voldaan. Wij kunnen dus op de in 2.2.2 aangegeven wijze een nieuwe tabel construeren, die tot een minstens even goede oplossing leidt. Het is dus niet noodzakelijk, dat de nieuwe tabel zelf al een betere oplossing bevat; het geval kan zich voordoen dat eerst na een paar stappen een toeneming van de opbrengst verkregen wordt. Ook kan men na een paar stappen alsnog in situatie a) terecht komen. Terloops kunnen wij reeds opmerken, dat steeds na een eindig aantal stappen het maximum bereikt is, respectievelijk bekend is dat het maximum oneindig groot is.

Als voor alle h ($h > 0$) geldt $z_h - c_h \geqq 0$, is de optimale oplossing bereikt. Het is dus niet alleen zo, dat op de aangegeven wijze geen verbetering meer mogelijk is, maar op geen enkele andere manier kan men een oplossing vinden, waarbij de opbrengst groter is. Wij zullen deze eigenschap hier niet bewijzen.

Bij tabel X verkeren wij in dit laatste geval; de hierdoor gegeven oplossing is dus optimaal.

Op de in 2.2.1 en 2.2.2 beschreven wijze is het altijd mogelijk lineaire programmeringsproblemen op te lossen. Alleen zijn er verschillende restricties gemaakt. In de eerste plaats hebben de voorwaarden (2) in drieërlei opzicht een bijzondere vorm: het zijn alle ongelijkheden, de b's zijn alle $\geqq 0$ ondersteld en bovendien moeten de linkerleden alle kleiner of gelijk aan de rechterleden zijn. Bij de constructie van de oplossing is van deze drie eigenschappen gebruik gemaakt.

In de tweede plaats hebben wij aangenomen, dat geval 3) van blz. 120 (ontaarding) zich niet voordoet.

De constructie van de oplossing, als niet aan de vier genoemde voorwaarden is voldaan, wordt in 2.2.5 besproken.

2.2.5. Gevallen waarin het rekenschema niet zonder meer toepasbaar is

2.2.5.1. De onderstellingen gemaakt over de ongelijkheden en over het teken van de b's zijn niet vervuld

Wij zullen in de paragrafen 2.2.5.1 en 2.2.5.2 aannemen, dat er geen ontaarding optreedt; voor iedere kolom k, waarvoor $z_k - c_k$ gelijk is aan het minimum van de waarden $z_h - c_h$ wordt het minimum van de quotiënten $\frac{a_{jO}}{a_{jk}}$ dus bereikt voor precies één waarde van j.

Wanneer de ongelijkheden, waaraan de variabelen moeten voldoen niet alle van de vorm zijn, zoals gegeven in het stelsel (2), dan is het soms mogelijk door eenvoudige wijzigingen de ongelijkheden in de vorm (2) te brengen. Wij illustreren dit aan de hand van het in 1.2 gegeven voorbeeld.

De opdracht was daar het maken van een koperlegering, die minstens 18% koper moest bevatten en de bijbehorende ongelijkheid luidde (zie blz. 105):

$$51\lambda_A + 11\lambda_B + 14\lambda_D + 36\lambda_E \geqq 18 \ . \qquad (24)$$

Men kan dit omzetten in een ongelijkheid van de vorm (2) door te bedenken, dat de legering hoogstens 82% aan andere stoffen dan koper mag bevatten. Het percentage aan andere stoffen dan koper is bij de grondstoffen resp. 49, 89, 86 en 64. Bij een legering, welke λ_A ton A, λ_B ton B, λ_D ton D en λ_E ton E bevat, moet dus voldaan zijn aan

$$49\lambda_A + 89\lambda_B + 86\lambda_D + 64\lambda_E \leqq 82 \ , \qquad (25)$$

een ongelijkheid, die wel de vereiste vorm heeft.

In vele gevallen zal het echter niet gelukken de vorm (2) te verkrijgen. Men kan er wel altijd voor zorgen, dat de tekens alle $\leqq$ tekens zijn, doch vaak zullen dan één of meer b's negatief worden, in tegenstelling tot de op blz. 111 gemaakte onderstelling dat alle b's $\geqq 0$ zijn. Zo kan men bijv. de ongelijkheid

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geqq 2$$

vervangen door

$$-\lambda_1 - \lambda_2 \leqq -2 \ .$$

Ook in een dergelijk geval, waarin de ongelijkheden niet in de vorm (2) geschreven kunnen worden, is het mogelijk, dat er waarden van de variabelen bestaan, zodanig dat aan alle ongelijkheden is voldaan. Bekijkt men bijv. het stelsel

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\geqq 6 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 &\leqq 20 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &\geqq -3 \ , \end{aligned} \qquad (26)$$

dan blijkt dat men dit niet in de vorm (2) kan gieten, terwijl figuur 2 duidelijk aantoont dat er oneindig veel grepen (λ_1, λ_2) zijn die aan (26) voldoen.

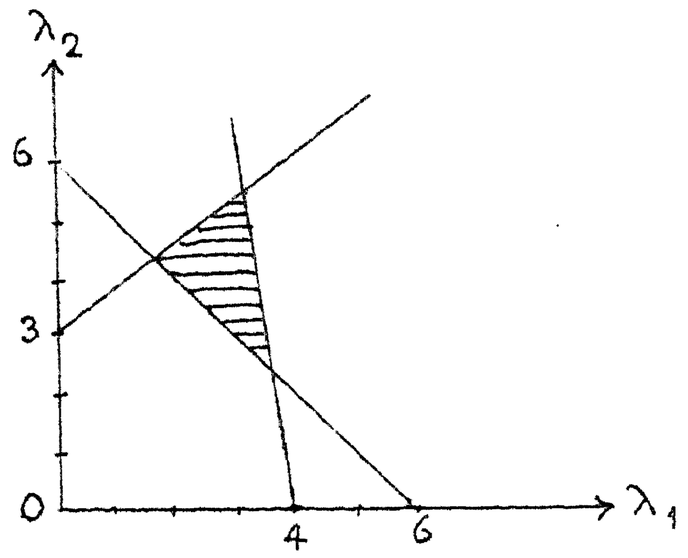


Fig. 2

Het gearceerde gebied voldoet aan de ongelijkheden (26)

Het is dus voor stelsels ongelijkheden, zoals (26) niet altijd mogelijk direct te zeggen of er oplossingen bestaan of niet.

Er bestaat wel een methode om te onderzoeken of een willekeurig stelsel ongelijkheden een oplossing heeft. Het voert ons echter te ver hierop in te gaan; belangstellenden verwijzen wij naar een artikel van G.B. DANTZIG. [5)]

Voor die gevallen, waarin aan alle ongelijkheden tegelijk voldaan kan worden, hoewel men de vorm (2) niet kan bereiken, is de simplexmethode, zoals deze door ons is gegeven, niet direct toepasbaar.

2.2.5.2. <u>De bijvoorwaarden zijn niet alle ongelijkheden</u>

De ongelijkheden (2) houden in, dat ook aan de gestelde eisen tegemoet wordt gekomen, wanneer de linkerleden kleiner zijn dan de rechterleden. De verschilvariabelen $\delta_1,\ldots,\delta_m$ later genoemd $\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{p+m}$, maakten van (2) de gelijkheden (3). Bij de constructie van de oplossing is gebruik gemaakt van de eigenschap dat deze verschilvariabelen ieder in slechts één vergelijking voorkwamen. Wanneer nu sommige voorwaarden in (2) gelijkheden zijn, is het niet meer mogelijk verschilvariabelen aan de betreffende vergelijkingen toe te voegen.

Men kan van de gegeven vergelijkingen gebruik maken om één of meer van de variabelen te elimineren, doch men moet hiermee zeer voorzichtig zijn, omdat ook de geëlimineerde variabelen in de uiteindelijke oplossing waarden $\geqq 0$ moeten bezitten. Soms zal dit automatisch in orde zijn, in andere gevallen echter niet.

---

5) G.B. DANTZIG, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, hoofdstuk XXI in Activity analysis of production and allocation, onder redactie van Tj.C. Koopmans, John Wiley and Sons (1951).

Een methode welke altijd kan worden toegepast, is de volgende. Laten de m voorwaarden uit l gelijkheden en m-l ongelijkheden:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1p}\lambda_p = b_1 \\
&\quad\vdots \\
&a_{l1}\lambda_1 + a_{l2}\lambda_2 + \ldots + a_{lp}\lambda_p = b_l \\
&a_{l+1,1}\lambda_1 + a_{l+1,2}\lambda_2 \cdots a_{l+1,p}\lambda_p \leqq b_{l+1} \\
&\quad\vdots \\
&a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mp}\lambda_p \leqq b_m \ ,
\end{aligned} \tag{27}$$

waarin de b's alle $\geqq 0$ zijn.

In de gelijkheden voeren wij nu toch nieuwe variabelen μ_j in, maar wij doen dit in de vorm van denkbeeldige grondstoffen of iets dergelijks, die zeer kostbaar zijn. Dit kan door niet

$$z_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i\lambda_i \tag{1}$$

te maximaliseren, maar

$$y_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i\lambda_i - M \sum_{j=1}^{l} \mu_j \ , \tag{28}$$

waarin M een zeer groot positief getal is. De optimale oplossing zal dan steeds zo weinig mogelijk van de variabelen $\mu_1,\ldots,\mu_l$ bevatten, omdat deze de opbrengst of winst sterk drukken. Maken wij nu van de m-l ongelijkheden op de gebruikelijke wijze gelijkheden door δ's toe te voegen, dan luidt het nieuwe probleem:

Maximaliseer (28) onder de voorwaarde dat de variabelen $\lambda_1,\ldots,\lambda_p, \mu_1,\ldots,\mu_l, \delta_1,\ldots,\delta_{m-l}$ voldoen aan

$$\begin{aligned}
&a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1p}\lambda_p + \mu_1 = b_1 \\
&\quad\vdots \\
&a_{l1}\lambda_1 + a_{l2}\lambda_2 + \ldots + a_{lp}\lambda_p + \mu_l = b_l \\
&a_{l+1,1}\lambda_1 + a_{l+1,2}\lambda_2 + \ldots + a_{l+1,p}\lambda_p + \delta_1 = b_{l+1} \\
&\quad\vdots \\
&a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mp}\lambda_p + \delta_{m-l} = b_m
\end{aligned} \tag{29}$$

en alle bovendien $\geqq 0$ zijn.

Wij voegen aan (28) weer de variabelen $\delta_1,\ldots,\delta_{m-1}$ toe met coëfficiënt nul en dan heeft het probleem dezelfde vorm als die, gegeven in (4) en (5). Het is dus ook op de in 2.2.1 en 2.2.2 beschreven wijze oplosbaar.

Wanneer de optimale oplossing geen μ's bevat, die ongelijk nul zijn, dan kan men bewijzen, dat deze oplossing ook de beste oplossing is van het probleem: (1) maximaliseren onder de bijvoorwaarden (27). Bevat de optimale oplossing (bij voldoende groot gekozen M) wel μ's die positief zijn, dan betekent dit, dat het oorspronkelijke probleem geen oplossing bezit, omdat aan de gestelde voorwaarden (27) niet is te voldoen. Het geval, waarin niet alle voorwaarden ongelijkheden zijn, kan op deze wijze dus volledig worden opgelost, althans indien men de voorwaarden in de vorm (27) kan brengen. Bevatten de ongelijkheden negatieve b's, dan komt de situatie overeen met de in 2.2.5.1 geschetste.

Wij illustreren één en ander aan de hand van het voorbeeld gegeven in 1.2.

In de vorm van formules luidde dit probleem (zie blz. 105): Minimaliseer

$$z_0 = 40\lambda_A + 20\lambda_B + 24\lambda_D + 30\lambda_E \qquad (30)$$

onder de voorwaarden

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_D + \lambda_E = 1 \qquad (31)$$

$$51\lambda_A + 11\lambda_B + 14\lambda_D + 36\lambda_E \geqq 18 \qquad (32)$$

$$100\lambda_B + 100\lambda_D \leqq 20 \ . \qquad (33)$$

In 2.1 merkten wij reeds op, dat het minimaliseren van een functie op hetzelfde neerkomt als het maximaliseren van het tegengestelde van die functie. Daarom zullen wij hier in plaats van z_0 te minimaliseren,

$$-z_0 = -40\lambda_A - 20\lambda_B - 24\lambda_D - 30\lambda_E \qquad (34)$$

maximaliseren, daar dan de beschreven methoden zonder wijziging toegepast kunnen worden.

Van de drie voorwaarden voldoet alleen de laatste aan de oorspronkelijk gestelde eis, dat het linker lid kleiner of gelijk aan het rechter lid moest zijn en dat het rechter lid positief was. In 2.2.5.1 hebben wij gezien hoe de tweede voorwaarde in deze vorm gebracht kan worden; wij vonden hiervoor

$$49\lambda_A + 89\lambda_B + 86\lambda_D + 64\lambda_E \leqq 82 \ . \qquad (25)$$

De voorwaarden (25) en (33) worden op de gebruikelijke wijze in gelijkheden omgezet; aan (31) voegen wij een variabele μ toe, terwijl wij (34) vervangen door

$$y_0 = -40\lambda_A - 20\lambda_B - 24\lambda_D - 30\lambda_E - M\mu, \qquad (35)$$

waarin M een groot positief getal is (vgl. (28)). De voorwaarden luiden dan

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_D + \lambda_E + \mu = 1 \qquad (36)$$

$$49\lambda_A + 89\lambda_B + 86\lambda_D + 64\lambda_E + \lambda_5 = 82 \qquad (37)$$

$$100\lambda_B + 100\lambda_D + \lambda_6 = 20\ . \qquad (38)$$

Het probleem is hiermee gebracht in de vorm (4), (5).

Hieronder volgen de tabellen die horen bij de achtereenvolgende stappen om de optimale oplossing te bereiken.

Tabel XI

Oorspronkelijke coëfficiënten

λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
1	1	0	0	1	1	1	1
82	0	1	0	49	89	86	64
20	0	0	1	0	100	100	0

Tabel XII

Eerste stap: de triviale oplossing

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
- M	μ	1	1	0	0	1	1	1	1
0	λ_5	82	0	1	0	49	89	86	64
0	λ_6	20	0	0	1	0	100	100	0
$z_h - c_h$		- M	0	0	0	40 -M	20 -M	24 -M	30 -M

kleinste $\frac{a_{j0}}{a_{jk}} \rightarrow$

↑ kleinste $z_h - c_h$

Tabel XIII

Tweede stap: eerste verbeterde oplossing

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-M	μ	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
0	λ_5	64,2	0	1	-0,89	49	0	-3	64
-20	λ_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
z_h-c_h:		-4 -0,8M	0	0	-0,2 +0,01M	40 -M	0	4	30 -M

kleinste a_{jk} → (kolom)

$\frac{\text{kleinste } a_{j0}}{a_{jk}}$ →

↑ kleinste z_h-c_h

Tabel XIV

Derde stap: tweede verbeterde oplossing

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-30	λ_E	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
0	λ_5	13	-64	1	-0,25	-15	0	-3	0
-20	λ_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
z_h-c_h		-28	-30 +M	0	0,1	10	0	4	0

Tabel XIV bevat volgens paragraaf 2.2.4 de optimale oplossing van het probleem, omdat vanaf de μ-kolom geen van de waarden z_h-c_h kleiner dan nul zijn; immers ook -30 + M is >0, daar M een zeer groot positief getal is. De optimale oplossing luidt dus

$$\mu = \lambda_6 = \lambda_A = \lambda_D = 0$$
$$\lambda_E = 0,80 \quad \lambda_5 = 13 \quad \lambda_B = 0,20 \quad y_0 = -28 \; . \tag{39}$$

Wij merken op, dat in deze oplossing $\mu = 0$ is, waaruit volgt, dat (39) ook de optimale oplossing is van het door (31) t/m (34) gegeven probleem. Het minimum van (30) onder de gestelde voorwaarden is 28. De goedkoopste methode om 1 ton koperlegering te fabriceren is dus het mengen van 0,20 ton B en 0,80 ton E; het kopergehalte bedraagt dan 18 + 13 = 31% en de kosten zijn 28.

Het optreden van de gelijkheid (31) is in dit probleem uiteraard essentieel. Wanneer het ook toegestaan was minder dan 1 ton te produceren en men wilde de kosten minimaliseren, dan zou de optimale oplossing luiden: produceer niets.

Via een weg die in principe dezelfde is als de hierboven geschetste hebben wij in 1.2 hetzelfde resultaat gevonden. In dit eenvoudige voorbeeld was de methode van 1.2 korter, doch voor meer gecompliceerde vraagstukken is men aangewezen op een algemene methode.

2.2.5.3. Ontaarding

Wij zeggen dat een lineair programmeringsprobleem ontaard (gedegenereerd) is, wanneer bij één van de stappen niet voldaan is aan de op blz. 120 genoemde voorwaarde 3). Voorlopig nemen wij aan, dat er één getal k is, waarvoor $z_k - c_k$ de kleinste van de waarden $z_h - c_h$ is. In geval van ontaarding wordt dan het minimum van de quotiënten $\frac{a_{j0}}{a_{jk}}$ $(a_{jk} > 0)$ bereikt voor meer dan één waarde van j. De in 2.2.2 gegeven regel geeft dus niet ondubbelzinnig aan welke variabele men uit de B-kolom moet schrappen. Nu kan men bewijzen, dat de simplexmethode toch tot de juiste oplossing voert, wanneer men als volgt te werk gaat.

Laat $z_k - c_k$ de kleinste waarde zijn uit de onderste regel van tabel III en laat het minimum van de quotiënten $\frac{a_{j0}}{a_{jk}}$ $(a_{jk} > 0)$ worden bereikt voor $j = r$ en $j = r + 1$. Om te beslissen of λ_r dan wel λ_{r+1} uit de B-kolom verwijderd moet worden, delen wij nu de elementen in de r^e en de $(r+1)^e$ rij uit de λ_{p+1}-kolom (zie tabel II op blz. 119) door a_{rk}, resp. door $a_{r+1,k}$. Zijn deze quotiënten ongelijk, dan bepaalt het kleinste welke λ uit de B-kolom moet worden vervangen.[6] Wanneer ook deze quotiënten geen uitsluitsel geven, probeert men het met de elementen uit de λ_{p+2}-kolom; enz. Men kan voor alle reële situaties[7] bewijzen, dat men zo voortgaande altijd op een tweetal quotiënten stuit, die ongelijk zijn, zodat de gegeven regel steeds tot een oplossing leidt.

Bereiken de quotiënten in meer dan twee rijen het minimum, dan betrekt men ze alle op deze wijze in het procédé.

---

6) In tegenstelling tot de quotiënten $\frac{a_{j0}}{a_{jk}}$ kunnen deze quotiënten wel negatief worden.

7) Voldoende voorwaarde hiervoor is dat het stelsel vergelijkingen (4) niet lineair afhankelijk is.

In het <u>voorbeeld</u> uit 1.2 treedt ontaarding op, wanneer wij eisen, dat het kopergehalte minstens 31% moet zijn in plaats van minstens 18%. Van de formules (35) t/m (38) die het probleem beschreven, verandert er dan slechts één en wel gaat (37) over in

$$49\lambda_A + 89\lambda_B + 86\lambda_D + 64\lambda_E + \lambda_5 = 100 - 31 = 69 \ . \quad (40)$$

Wij beginnen op de gebruikelijke wijze met het zoeken van de oplossing. Tabel XV geeft de eerste stap naar de oplossing en tabel XVI de tweede.

Tabel XV

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-M	μ	1	1	0	0	1	1	1	1
0	λ_5	69	0	1	0	49	89	86	64
0	λ_6	20	0	0	1	0	100	100	0
$z_h - c_h$:		-M	0	0	0	40 -M	20 -M	24 -M	30 -M

Tabel XVI

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-M	μ	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
0	λ_5	51,2	0	1	-0,89	49	0	-3	64
-20	λ_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
$z_h - c_h$:		-0,8M -4	0	0	-0,2 +0,01M	40 -M	0	4	30 -M

Het minimum in de laatste rij van tabel XVI is 30 - M. De quotiënten, welke wij moeten vergelijken zijn dus $\frac{0,80}{1}$ en $\frac{51,2}{64}$, die beide gelijk zijn aan 0,80. Wij vergelijken daarom de quotiënten $\frac{1}{1}$ en $\frac{0}{64}$; hiervan is de laatste de kleinste en dus moet volgens de boven gegeven regel λ_5 vervangen worden door λ_E. De verdere stappen van het rekenschema verlopen dan zonder moeilijkheden. De tabellen XVII t/m XIX geven de resultaten.

Tabel XVII

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
→ -M	μ	0	1	-0,016	0,004	0,234	0	0,047	0
-30	λ_E	0,80	0	0,016	-0,014	0,766	0	-0,047	1
-20	λ_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
z_h-c_h:		-28	0	0,48 +0,016M	0,22 -0,004M	17,02 -0,234M	0	5,41 -0,047M	0

↑

De oplossing, die wij uit tabelXIX aflezen, blijkt dezelfde te zijn, als de in 2.2.5.2 gevonden oplossing. Dit is niet verwonderlijk, want daar bedroeg de verschilvariabele λ_5 juist 13 in de eindoplossing, terwijl wij hier eisten dat het koper-gehalte van de legering 13% hoger moest zijn. Wij hadden de oplossing dus direct kunnen geven; bij meer ingewikkelde problemen is dit uiteraard niet het geval.

Tabel XVIII

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
→ -40	λ_A	0	4,274	-0,068	0,017	1	0	0,201	0
-30	λ_E	0,80	-3,274	0,068	-0,027	0	0	-0,201	1
-20	λ_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
z_h-c_h:		-28	-72,743 +M	0,677	-0,069	0	0	1,989	0

↑

Tabel XIX

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
0	λ_6	0	251,41	-4	1	58,824	0	11,824	0
-30	λ_E	0,80	3,514	-0,04	0	1,588	0	0,118	1
-20	λ_B	0,20	-2,514	0,04	0	-0,588	1	0,882	0
z_h-c_h:		-28	-55,396 +M	0,4	0	4,059	0	2,805	0

Op blz. 120 noemden wij de mogelijkheid, dat het minimum in de laatste regel bereikt wordt voor twee waarden van h en dat in het ene geval wel en in het andere geen ontaarding optreedt. Wanneer men op een dergelijke situatie stuit, kan men vrij kiezen welke variabele men in de B-kolom zal opnemen. Er is geen methode beschikbaar om bij voorbaat te zeggen, welke weg naar het optimum de kortste zal zijn. Men kan daarom het beste die variabele kiezen, waarvoor het rekenen bij de komende stap het eenvoudigste is.

Ook als voor meer dan twee waarden van h het minimum in de laatste regel bereikt wordt en er in één of meer kolommen ontaarding optreedt, kan men op de beschreven wijze te werk gaan met een willekeurige van deze kolommen.

Hiermee hebben wij alle gevallen waarin niet aan de in 2.2.4 genoemde restricties voldaan is, besproken.

2.2.6. Enige opmerkingen over de simplexmethode

In 2.1 hebben wij reeds gezien dat aan een stelsel ongelijkheden van de vorm (2) steeds voldaan wordt door één combinatie van waarden van de λ's of door oneindig veel. Men kan bewijzen, dat de grepen van λ's, die aan (2) voldoen een convexe verzameling vormen; dit betekent dat ieder punt van de verbindingslijn van twee punten, die in het toelaatbare gebied liggen, ook tot dit gebied behoort. Bovendien bevat deze verzameling slechts eindig veel punten, die niet op een verbindingslijn liggen van twee punten uit de verzameling; dit zijn de hoekpunten van de verzameling (vergelijk fig.1 op blz.107 en fig.1 op blz. 112).

Ook kan men bewijzen, dat de lineaire functie, waarvan wij het maximum willen bepalen, dit maximum bereikt in één van de hoekpunten. De oplossing, die men bij iedere stap uit de simplextabel kan aflezen, correspondeert nu steeds met één van de hoekpunten van het convexe gebied. Bij iedere stap gaat men van één hoekpunt over naar één van de naburige hoekpunten en wel zodanig dat de waarde van de te maximaliseren functie nooit kleiner wordt. Omdat het aantal hoekpunten eindig is en men nooit terugkomt in een hoekpunt, bereikt men het maximum na eindig veel stappen.

De door ons gegeven methode, die voorgesteld is door A.CHARNES, berust erop, dat het punt $\mathcal{O}$ steeds voldoet aan de ongelijkheden (2). Men kan dus daar beginnen en dan verder gaan. Hoe dit in zijn werk gaat, wordt duidelijk geïllustreerd door het voorbeeld van paragraaf 1.3. De verzameling van toegelaten punten bestaat daar uit de convexe veelhoek $\mathcal{O}$ACE, die dus vier hoekpunten bezit. Bij de berekening in 2.2.3. begonnen wij in het hoekpunt $\mathcal{O}$. Voor de volgende stap moest gekozen worden tussen de hoekpunten A en E. Hiertoe werden de waarden z_1-c_1 en z_2-c_2 in tabel VIII met elkaar vergeleken. In figuur 2 (blz.108) stellen $-(z_1-c_1)$ en $-(z_2-c_2)$ de richtingscoëfficiënten voor van $\mathcal{O}$F en $\mathcal{O}$H. Men verplaatst zich dus langs die ribbe waarvan de richtingscoëfficiënt met het horizontale vlak maximaal is, dat wil zeggen in die richting waarin per eenheid de toeneming van de functie z_o het grootste is. Via het punt E werd tenslotte het in C gelegen maximum bereikt.

Het is echter niet noodzakelijk en, zoals wij op blz.128 gezien hebben ook niet steeds mogelijk om deze methode toe te passen. Wanneer men eenmaal een hoekpunt kent, dan kan men in principe daar de simplex-algorithme beginnen. Het is dan echter eerst noodzakelijk de coëfficiënten van de bijbehorende tabel te berekenen, hetgeen neerkomt op het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Wij gaan hier niet verder op in, mede omdat deze methode in het al-

gemeen niet tot in de praktijk bruikbare technieken leidt.

Vaak zal men in de situatie verkeren, waarin men reeds over een oplossing beschikt die aan de voorwaarden voldoet, doch waarvan niet bekend is of deze oplossing de optimale is. De vraag is dan of men, uitgaande van de reeds bekende oplossing sneller tot de optimale oplossing komt dan via de in 2.2.1 en 2.2.2 geschetste simplexmethode. Zo algemeen gesteld moet het antwoord ontkennend luiden. Men kan wel door een transformatie er voor zorgen dat de reeds bekende oplossing de rol van de triviale oplossing bij het gewone probleem gaat spelen, doch dit leidt niet tot een vermindering van het aantal stappen welke uitgevoerd moeten worden.

Een type problemen waarbij men wel vaak met vrucht uit kan gaan van een reeds bekende oplossing wordt gevormd door die problemen waarin men reeds volgens een bepaald recept een produkt vervaardigt en waarbij men zich dan afvraagt of het mogelijk is met de ter beschikking staande grondstoffen een goedkoper produkt te maken. De hieronder te beschrijven methode heeft dan twee voordelen: in de eerste plaats krijgen de ongelijkheden steeds de vorm (2) met b's die $\geqq 0$ zijn en in de tweede plaats zal in veel gevallen het aantal stappen, nodig om de optimale oplossing te bereiken minder zijn dan bij de gewone methode.

Laten wij aannemen, dat men in het voorbeeld van 1.2 tot dusverre een koperlegering M gefabriceerd heeft, welke voor 10% uit grondstof D en voor 90% uit grondstof E bestond. Er is dan aan de gestelde eisen voldaan, want de legering bevat

$$0,10.14 + 0,90.36 = 33,8\%$$

koper en bestaat voor niet meer dan 10% uit de grondstoffen B of D De kosten bedragen 29,4 per ton.

Wij behandelen dit mengsel M nu alsof dit één van de ter beschikking staande grondstoffen is en trachten een legering te vinden, samengesteld uit A,B,D,E, en M, die aan de eisen voldoet en die zo goedkoop mogelijk is.

Bestaat de legering uit λ_A ton A, λ_B ton B, λ_D ton D, λ_E ton en λ_M ton M, dan bedragen de kosten

$$z_o = 40\,\lambda_A + 20\,\lambda_B + 24\,\lambda_D + 30\,\lambda_E + 29,4\,\lambda_M \qquad (4$$

terwijl de voorwaarden (2), (3) en (4) van blz. 105 overgaan in

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_M = 1 . \qquad (42)$$

$$51\,\lambda_A + 11\,\lambda_B + 14\,\lambda_D + 36\,\lambda_E + 33,8\,\lambda_M \geqq 18 \qquad (43)$$

$$100\,\lambda_B + 100\,\lambda_D + 10\,\lambda_M \leqq 20. \qquad (44)$$

Met (42) elimineren wij λ_M uit (43) en (44); het resultaat is

$$-17,2\,\lambda_A + 22,8\,\lambda_B + 19,8\,\lambda_D - 2,2\,\lambda_E \leqq 15,8 \qquad (45)$$

$$-10\,\lambda_A + 90\,\lambda_B + 90\,\lambda_D - 10\,\lambda_E \leqq 10. \qquad (46)$$

Wij voegen aan de ongelijkheden (45) en (46) de verschilvariabelen λ_5 en λ_6 toe om ze te transformeren in gelijkheden. Omdat (42) reeds een variabele bevat, die alleen in deze vergelijking voor komt (nl. λ_M), is het niet nodig aan deze vergelijking nog een variabele toe te voegen. Wij kunnen volgens de in 2.2.1 gegeven theorie als eerste stap tot een oplossing nemen

$$\lambda_M = 1 \quad \lambda_5 = 15{,}8 \quad \lambda_6 = 10$$

en de overige λ's nul. Dit is dus ons uitgangspunt, de oude samenstelling van het product; de kosten zijn uiteraard

$$29{,}4.1 + 0.15{,}8 + 0.10 = 29{,}4.$$

Deze eerste stap kan men aflezen uit tabel XX; het minimaliseren van (41) is weer vervangen door het maximaliseren van het tegengestelde.

Tabel XX

Eerste stap tot een oplossing

c	B	λ_0	λ_M	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-29,4	λ_M	1	1	0	0	1	1	1	1
0	λ_5	15,8	0	1	0	-17,2	22,8	19,8	-2,2
0	λ_6	10	0	0	1	-10	90	90	-10
$Z_h - C_h$		-29,4	0	0	0	10,6	-9,4	-5,4	0,6

Op de bekende wijze kan men uitgaande van deze tabel de optimale oplossing bepalen; men vindt na twee stappen dezelfde oplossing als in 1.2 en in 2.2.5.2.

Het geval kan zich voordoen, dat de optimale oplossing het produkt M bevat; men kan dan door M in de samenstellende stoffen te ontleden, berekenen hoeveel van de grondstoffen de optimale oplossing bevat.

Wiskundig komt de methode op het volgende neer. De variabelen $\lambda_j (i = 1,\ldots,p)$ moeten in een probleem voldoen aan voorwaarden van de vorm

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji}\,\lambda_i \leqq b_j, \qquad (47)$$

waarin de b_j willekeurige waarden mogen bezitten en aan

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_i = 1. \qquad (48)$$

Wanneer bekend is dat er een oplossing bestaat waarbij het linker lid van de j^{de} ongelijkheid ($j=1,\ldots,m$) uit (47) de waarde b_j^* aanneemt, dan verminderen wij deze ongelijkheid met

$$b_j^*(\sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_i - 1).$$

Dit is nul (wegens (48)) en de voorwaarde verandert hierdoor dus niet; de vorm wordt

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji}\lambda_i - b_j^*(\sum_{i=1}^{p} a_i\lambda_i - 1) \leqq b_j,$$

of

$$\sum_{i=1}^{p} (a_{ji} - b_j^* a_i)\lambda_i \leqq b_j - b_j^*,$$

waarin het rechterlid wegens $b_j^* \leqq b_j$ niet negatief is. De nieuwe ongelijkheden zijn dus gelijkwaardig met de oude en voldoen aan de eisen, die wij aan het stelsel (2) hebben opgelegd.

Hoewel de simplex methode de indruk wekt zonder moeilijkheden te verlopen, zijn er toch enige <u>bezwaren</u> aan verbonden. Reeds bij niet al te grote modellen kan het zoeken naar de oplossing veel rekenwerk vergen, waarbij komt, dat bij een groot aantal stappen het effect van afrondingsfouten het eindresultaat storend kan beïnvloeden. S. VADJA [8]) heeft een variatie op de berekeningsmethode, zoals deze door ons behandeld is gegeven, waarbij de invloed van afrondingsfouten minder groot is, doordat men steeds teruggrijpt op de matrix van de oorspronkelijke coëfficiënten. Een nadeel van deze methode, de "inverse matrix method", is, dat men in totaal meer berekeningen moet maken dan bij de simplexmethode in de klassieke vorm.

Een ander onbevredigend facet wordt geïllustreerd door het voorbeeld besproken in 2.2.5.3. Hier bevatte tabel XVII reeds de optimale oplossing, maar desondanks moesten nog twee extra stappen uitgevoerd worden, alvorens alle termen $z_h - c_h$ ($h>0$) groter of gelijk aan nul waren. In een dergelijk geval heeft men dus het extreem bereikt vóór dat alle elementen $z_h - c_h$ ($h>0$) $\geqq 0$ zijn. Er is geen algemene methode bekend, waarmee men direct kan zien, of het optimum reeds bereikt is. Bij het eenvoudige in 2.2.5.3. gegeven voorbeeld was dit uiteraard wel mogelijk.

Men ziet dus, dat het van het grootste belang is, het probleem van het begin af aan zo klein mogelijk te houden door variabelen, die

---

[8]) S.VAJDA, The Theory of Games and Linear Programming, Methuen and Co., Ltd (1956), 52-57.

in alle opzichten ongunstiger zijn dan de andere en niet ter zake dienende beperkende voorwaarden bij voorbaat te schrappen. Naast bekortingen van de methode die men door ervaring leert, wordt ook gezocht naar bekortingen door gebruik te maken van speciale eigenschappen van de voorwaarden, waaraan de variabelen moeten voldoen. Een vereenvoudigde methode, waarvan men vaak gebruik kan maken bespreken wij nog in paragraaf 3. Verder verwijzen wij voor een grafische methode, die men kan gebruiken bij problemen, waarin de optimale oplossing niet meer dan 4 of 5 processen of componenten bevat, naar een instructief artikel van F.V. WAUGH en GLENN L.BURROWS. [9])

Anderzijds kan het voorkomen dat men zich na de berekening van de optimale oplossing realiseert dat een bepaalde voorwaarde ten onrechte niet in het model was opgenomen. Het is dan niet noodzakelijk de berekening van het begin af aan opnieuw uit te voeren. Men kan namelijk uitgaan van de verkregen λ-waarden en dan op de hieronder aangegeven wijze, welke gebaseerd is op de van E.M.L.BEALE [10]) afkomstige oplossingsmethode voor lineaire programmeringsproblemen, een optimale oplossing berekenen. Wij zullen van deze methode niet de bijbehorende formules geven, doch ons beperken tot een illustratie. Hiertoe gebruiken wij wederom het in 1.1 gegeven voorbeeld waaraan later de in 1.2 vermelde extra-voorwaarde wordt toegevoegd.

Volgens de simplexmethode berekenen wij de goedkoopste legering van de gronstoffen A,B,D en E die minstens 18% koper bevat. De tabel, welke bij de optimale oplossing past is opgegeven in tabel XXI.

Tabel XXI

Eindoplossing bij twee voorwaarden

c	B	λ_0	μ	λ_S	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-30	λ_E	0,28	3,56	-0,04	1,6	0	0,12	1
-20	λ_B	0,72	-2,56	0,04	-0,6	1	0,88	0
$z_h - c_h$		22,8	M -55,6	0,4	4	0	2,8	0

Hieruit kunnen wij de volgende vergelijkingen aflezen:

$$0,28 = 3,56\mu - 0,04\lambda_S + 1,6\lambda_A + 0,12\lambda_D + \lambda_E \qquad (49)$$

$$0,72 = -2,56\mu + 0,04\lambda_S - 0,6\lambda_B + \lambda_B + 0,88\lambda_D \; . \qquad (50)$$

---

9) F.V. WAUGH and GLENN L. BURROWS, A short cut to linear programming, Econometrica 23 (1955) p. 18-29.

10) E.M.L. BEALE, An alternative Method for Linear Programming, Proc.Cambridge Phil.Soc. 50 (1954) 513-523.

De in de B-kolom opgenomen variabelen komen zoals steeds slechts in één vergelijking voor. De nieuwe voorwaarde waaraan moet zijn voldaan, luidt nu (vlg. blz. 105)

$$100\lambda_B + 100\lambda_D \leqq 20, \qquad (33)$$

of, na het toevoegen van de verschilvariabele λ_6

$$100\lambda_B + 100\lambda_D + \lambda_6 = 20. \qquad (38)$$

Wanneer de oude oplossing aan (33) zou voldoen, dan zou deze ook de optimale oplossing van het nieuwe probleem zijn. Bij het onderhavige voorbeeld is dit niet het geval. Met behulp van de uit tabel XXI af te lezen vergelijkingen elimineren wij daarom uit (38) de variabelen uit de B-kolom, hier dus alleen λ_B. Wij vinden

$$-52 = 256\mu - 4\lambda_5 + \lambda_6 + 60\lambda_A + 12\lambda_D. \qquad (51)$$

Ook uit deze vergelijking blijkt dat de oude oplossing niet meer voldoet; immers $\mu, \lambda_5, \lambda_A$ en λ_D zijn alle nul en dus is $\lambda_6 = -52$. Aan tabel XXI wordt nu een nieuwe rij en een nieuwe kolom toegevoegd. De nieuwe rij bevat in de B-kolom de variabele λ_6, in de c_B-kolom het getal -52 en in de overige kolommen de coëfficiënten welke in (51) staanvoor de variabelen, vermeld boven de kolommen. De nieuwe kolom bevat alleen nullen, behalve in het vakje, dat deze kolom met de nieuwe rij gemeen heeft; zie tabel XXII.

Tabel XXII

Het toevoegen van een nieuwe voorwaarde

c	B	λ_0	μ	λ_5	λ_b	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-30	λ_E	0,28	3,56	-0,04	0	1,6	0	0,12	1
-20	λ_B	0,72	-2,56	0,04	0	-0,6	1	0,88	0
0	λ_6	-52	256	-4	1	60	0	12	0
$z_h - c_h$		-22,8	M -55,6	0,4	0	4	0	2,8	0

Uitgaande van deze tabel trachten wij nu een nieuwe oplossing te berekenen, die wel aan alle voorwaarden voldoet. Men dient daartoe als volgt te werk te gaan:

1) bepaal in de toegevoegde rij de elementen welke <0 zijn; indien ze alle waarden $\geqq 0$ bezitten, is aan de voorwaarden van het nieuwe probleem niet te voldoen,

2) bereken voor welke waarde(n) van h het quotiënt $\dfrac{z_h - c_h}{a_{m+1,h}}$

($a_{m+1,\,h} < 0$) maximaal is; hierin is $a_{m+1,\,h}$ het element in de toegevoegde rij en de h^{de} kolom; laat dit maximum bereikt worden voor $\frac{h}{11} = \frac{1}{11}$ [11])

[11]) wanneer dit maximum voor meer dan één waarde van h bereikt wordt, dan kan men willekeurig één van deze kiezen.

3) voer de op blz. 120-121 aangegeven bewerkingen uit, waarbij de nieuwe rij de rol van de daar met r aangegeven rij vervult en de l^{de} kolom, die van de k^{de} kolom aldaar.

Wanneer wij deze bewerkingen toepassen op tabel XXII, dan vinden wij tabel XXIII. De nieuwe waarden van de variabelen kunnen

Tabel XXIII

Eindoplossing bij drie voorwaarden

c	B	λ_o	μ	λ_5	λ_6	λ_A	λ_B	λ_D	λ_E
-30	λ_E	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
-20	λ_B	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
0	λ_5	13	-64	1	-0,25	-15	0	-3	0
$z_h - c_h$	X	28	M -30	0	0,10	10	0	4	0

op de gebruikelijke wijze uit de tabel worden afgelezen. Wij zien, dat alle variabelen hier waarden $\geqq 0$ bezitten en dat de oplossing dus aan de gestelde voorwaarden voldoet. Indien één of meer van de getallen uit de λ_o-kolom wederom negatief zijn, dan moet of op één van de betrokken rijen (bij voorkeur de rij, waarin het kleinste getal staat) het procédé worden toegepast dat hierboven voor de toegevoegde rij is aangegeven. Hierin gaat men door tot alle getallen in de λ_o-kolom $\geqq 0$ zijn. Men kan bewijzen, dat zodra dit het geval is, ook werkelijk de optimale oplossing onder de gestelde voorwaarden is bereikt. Bij tabel XXIII verkeren wij dus in die situatie; de tabel is dan ook identiek aan tabel XIV in 2.2.5.2.

Het zojuist gegeven rekenschema kan men o.a. gebruiken, wanneer men na wil gaan hoe groot de extra onkosten aan grondstoffen zijn, wanneer men een produkt een nieuwe voorwaarde, bijvoorbeeld een nieuwe kwaliteitseis oplegt.

Tot slot geven wij nog een controlemiddel, dat door mevrouw R. ZONNEVELD van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum werd gebruikt. Men kan hiermee stapsgewijze nagaan of bij de berekeningen fouten zijn gemaakt.

Aan de simplextabel (vgl.b.v. tabel II op blz.119) voegen wij nog een rij toe, waarin wij de som van de elementen van iedere kolom opnemen. Deze somrij wordt bij de berekening van het nieuwe schema op dezelfde wijze behandeld als de andere rijen, maar doet niet mee bij de bepaling van de λ die uit de B-kolom moet worden verwijderd. Deze rij bestaat in de nieuwe tabel uit getallen, die gelijk zijn aan

de sommen van de elementen uit de overeenkomstige kolommen van de nieuwe tabel, verminderd met de getallen uit de rij, waarin de nieuwe variabele is ingevoerd.

In het voorbeeld van 2.2.3 bedragen de sommen van de elementen uit de kolommen van tabel IX respectievelijk

$$7200,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1.$$

Passen wij hierop de in tabel IV aangegeven bewerkingen toe, dan vinden wij

$$\begin{aligned} 7200 - 4.327 &= 5892, \\ 1 - 4(-\tfrac{2}{11}) &= \tfrac{19}{11}, \\ 1 - 4.\tfrac{3}{11}) &= \tfrac{\ }{1}, \\ 4 - 4.1 &= 0, \\ 1 - 4.0 &= 1, \end{aligned}$$

terwijl de sommen van de elementen uit de eerste en derde rij van tabel X respectievelijk zijn

$$5891,\ \tfrac{19}{11},\ -\tfrac{1}{11},\ 0,1.$$

Het verschil tussen 5892 en 5891 is ontstaan door het afronden van de getallen $327\tfrac{3}{11}$ en $981\tfrac{9}{11}$ tot de gehele getallen 327 en 982.

Bij de volgende stap moet deze controle toegepast worden op de werkelijke som en <u>niet</u> op de getallen, welke men op de hier aangegeven wijze in de somrij heeft gevonden.

Hiermee beëindigen wij de algemene bespreking van de theorie van de lineaire programmering en van de simplexmethode. De geboden stof kan alleen gezien worden als inleiding en omvat zeker geen volledige behandeling. Een belangrijk punt dat bijvoorbeeld niet ter sprake is gekomen betreft situaties, waarin de variabelen alleen discrete waarden aan kunnen nemen. De simplexmethode kan dan in veel gevallen niet zonder meer worden toegepast; een recent artikel hierover is verschenen in Econometrica [12]). Ook de economische achtergrond van de theorie is niet behandeld; belangstellenden verwijzen wij naar het boek Mathematical Economics van R.G.D.ALLEN [13]).

Een goed geschreven, inleidend artikel is verschenen van de hand van A.HENDERSON en R.SCHLAIFER [14]); er wordt duidelijk uiteengezet wat lineaire programmering is en hoe men de problemen aan moet pakken; een volledige beschrijving van de simplexmethode wordt echter niet gegeven. Deze treft men wel aan in de door A.CHARNES, W.W. COOPER en A. HENDERSON geschreven inleiding [15]). Een ander inleidend werkje is The Theory of Games and Linear Programming van S.VAJDA [16]); hierin wordt onder andere duidelijk beschreven hoe de samenhang is tussen de theorie van de lineaire programmering en de in hoofdstuk IV van deze

voetnoten: zie blz 146.

cursus te behandelen speltheorie.

---

12) H.M.MARKOWITZ and A.S. MANNE, On the solution of discrete programming problems,
Econometrica 25 (1957) 84-110.

13) R.G.D. ALLEN, Mathematical Economics,
Mac Millan and Co., London 1956; de hoofdstukken XVI,XVII en XVIII.

14) A.HENDERSON and R.SCHLAIFER, Mathematical Programming; better Information for better Decision making,
Harvard Business Review 32 (1954) p. 76-100.

15) A.CHARNES,W.W.COOPER and A.HENDERSON, An Introduction to Linear Programming,
John Wiley and Sons (1953), 74 blz.$ 2,50.

16) S.VAJDA, The Theory of Games and Linear Programming,
Methuen and Co.,Ltd (1956).

3. Een eenvoudige oplossingsmethode [1]

In paragraaf 2.2.6 merkten wij op, dat het niet steeds nodig is om de in 2.2.1 en 2.2.2 beschreven simplexmethode toe te passen, wanneer men een lineair programmerinsgsprobleem moet oplossen. Een eenvoudige methode, die men in bepaalde gevallen gebruiken kan, zullen wij in deze paragraaf behandelen.

Men kan deze methode o.a. toepassen op het volgende probleem. Laat een homogeen product aanwezig zijn in m havens en verscheept moeten worden naar n bestemmingen. In de havens zijn resp. aanwezig de hoeveelheden $a_1, \ldots, a_m$, terwijl op de plaatsen van bestemming de hoeveelheden $b_1, \ldots, b_n$ gebracht moeten worden. Bedragen de vervoerskosten per eenheid van haven i naar bestemming j, c_{ij} en geven wij de langs deze route verscheepte hoeveelheid aan met x_{ij}, dan wordt gevraagd, binnen het raam der mogelijkheden, de totale kosten te minimaliseren. Men moet dan het minimum bepalen van de functie

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (1)$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (3)$$

en

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots m\,;\, j = 1, \ldots n),$$

waarin de a's en b's getallen > 0 zijn en bovendien voldoen aan de betrekking

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4)$$

Dit is een lineair programmeringsprobleem, dat met de gegeven simplexmethode kan worden opgelost. Het is echter mogelijk de oplossing op een eenvoudigere manier te bepalen.

Bij de behandeling van de simplexmethode hebben wij gezien, dat in de optimale oplossing het aantal variabelen $\neq 0$ hoogstens gelijk

---

1) De in deze paragraaf behandelde stof is gebaseerd op een artikel van W.W. COOPER en A. CHARNES, Transportation scheduling by linear programming, Proc. of the Conf. on Op.Res. in Marketing (1953) blz. 62-71. Dezelfde stof is door de auteurs eveneens behandeld in : The stepping stone method of explaining linear programming calculations in transportation problems, Management Science 1 (1954) 49-69.

is aan het aantal voorwaarden (afgezien van de voorwaarden, welke impliceren dat de variabelen $\geqq 0$ moeten zijn). In het onderhavige geval bestaan er m+n voorwaarden, die echter lineair afhankelijk zijn. Dit heeft ten gevolge, dat de optimale oplossing, die wij construeren, hoogstens m+n-1 variabelen $x_{ij} \neq 0$ zal bevatten. Evenals bij de gewone simplexmethode beginnen wij nu met de constructie van een beginoplossing, die hier overigens niet de triviale is en gaan dan na of wij een verbeterde oplossing kunnen vinden. De optimale oplossing wordt dus ook hier stapsgewijze bereikt. Wij zorgen ervoor dat de beginoplossing m+n-1 variabelen $x_{ij} \neq 0$ bevat. Tijdens het proces wordt dit aantal nooit groter; indien het aantal kleiner mocht worden, spreken wij van ontaarding, een geval dat apart zal worden behandeld.

Wij beschrijven nu de methode aan de hand van een numeriek voorbeeld.

Voorbeeld

In de havens I,II en III liggen respectievelijk 4,6 en 3 ton ijzererts opgeslagen, welke verscheept moeten worden naar de havens A,B,C en D en wel moet A 5, B 2, C 3, en D eveneens 3 ton ontvangen. De kosten van vervoer per ton zijn opgegeven in tabel I; hoewel deze in het algemeen positief zullen zijn, hebben wij ook nul en een negatieve waarde opgenomen, om te demonstreren dat het voor de methode niet noodzakelijk is dat deze coëfficiënten alle positief zijn (overigens kan men bij een nul denken aan het geval dat II en B dezelfde haven voorstellen en bij een negatief getal aan een premie). Men vraagt zich nu af hoe men het verzendpatroon moet maken, opdat de totale kosten minimaal zijn.

Tabel I

Vervoerskosten per ton

\	A	B	C	D
I	2	3	1	1
II	4	0	-1	1
III	1	5	2	0

Geven wij de havens I, II en III aan met de indices 1,2,3 en A,B,C,D met 1,2,3,4, dan hebben de vergelijkingen (2) en (3) hier de volgende vorm:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 4 \quad , \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 6 \quad , \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 3 \qquad (4)$$

en

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 5 \,,\; \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 2 \,,\; \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 3 \,,\; \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 3 \,. \qquad (5)$$

De berekeningen geschieden in een tabel van de vorm II. Daar de randen steeds dezelfde zijn, kan men deze ook weglaten, doch de onderste regel en de laatste kolom vereenvoudigen de uit te voeren controles.

Tabel II

De verschepingstabel

\	A	B	C	D	totaal
I					4
II					6
III					3
totaal	5	2	3	3	13

Constructie van een beginoplossing: [2]

1) Bepaal welke haven van bestemming vanuit I het goedkoopst kan worden bevoorraad en verzend op deze wijze zoveel mogelijk (b.v. 3 ton van I naar C);

2) Aangezien I nog goederen beschikbaar heeft, zendt men zoveel mogelijk naar de bestemming, welke op één na het voordeligst, voorzien kan worden (hier: 1 ton van I naar D);

3) D is hiermee niet volledig voorzien en daarom moet men bepalen, welke haven dit verder het goedkoopste kan doen en van deze route zoveel mogelijk gebruik maken (hier 2 ton van III naar D);

4) De nog niet gebruikte capaciteit van III wordt weer naar de goedkoopst bereikbare bestemming gezonden, die nog niet is voorzien (hier: 1 ton van III naar A);

5) De verdere behoeften van A kunnen slechts vanuit haven II voorzien worden (dus: 4 ton van II naar A);

6) De nog beschikbare voorraad in II moet men verschepen naar B.

---

2) Meestal wordt een ander recept gegeven om een beginoplossing te berekenen; men kan dit o.a. vinden in het genoemde artikel van W.W. COOPER en A. CHARNES en in een artikel van G.B. DANTZIG, Application of the simplex method to a transportation problem, hfdst XXIII in Activity Analysis of Production and Allocation (1951). Bij de door ons beschreven constructie zal men in het algemeen minder stappen nodig hebben om de optimale oplossing te bereiken.

Het resultaat is aangegeven in tabel III, blanco hokjes geven nullen aan.

Tabel III

De beginoplossing

	A	B	C	D	totaal
I			3	1	4
II	4	2			6
III	1			2	3
totaal	5	2	3	3	13

In dit voorbeeld is m=3 en n=4, dus m+n-1=6, zodat tabel III een oplossing voorstelt waarin het vereiste aantal variabelen een waarde > 0 bezit. Dit is verkregen door steeds met die haven of die bestemming verder te gaan, waarvan de voorraad nog niet was uitgeput, respectievelijk de behoefte nog niet volledig gedekt. Zolang het probleem niet is ontaard, stuit men nooit op de situatie, waarin een aantal opslagplaatsen $< m$ een aantal bestemmingen $< n$ kan voorzien; men kan dus steeds op de aangegeven wijze verder gaan tot een volledig patroon is verkregen.

De kosten van dit verschepingsprogramma bedragen, zoals met (1) kan worden nagegaan, 21.

Wij vragen ons nu af of er een programma bestaat, waarvan de totale kosten lager zijn dan dit bedrag. In figuur 1 is schematisch aangegeven welke routes in gebruik zijn en hoeveel er langs wordt vervoerd. Zolang men zich beperkt tot deze routes, is het niet mogelijk het programma te wijzigen.

Wij nemen daarom in het programma een nieuwe route op, b.v. door 1 ton te verzenden van II naar D.

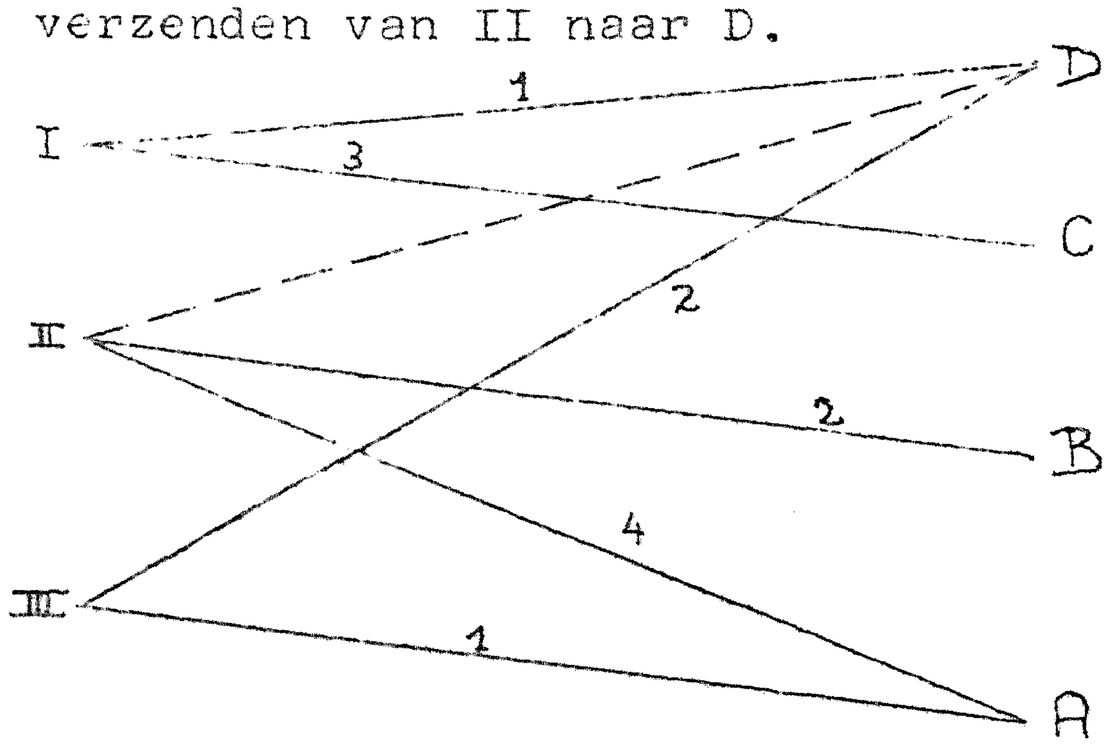


fig. 1

Gebruikte routes bij de beginoplossing

Daardoor moet ook de verscheping op andere routes worden gewijzigd om aan de gestelde eisen te blijven voldoen. Dit kan in ons geval door 1 ton minder te sturen van II naar A, 1 ton meer van III naar A en 1 ton minder van III naar D. De verandering in de kosten bedraagt hierbij

$$-c_{21} + c_{31} - c_{34} + c_{24} = -2,$$

en het is dus voordelig deze verandering aan te brengen. Wij noemen c_{24} de directe kosten van vervoer van II naar D en de gezamelijke kosten van de routes, die II - D kunnen vervangen, aangegeven door z_{24}, de indirecte. Deze indirecte kosten bezitten dezelfde betekenis als de in 2.2 gebruikte getallen z_h. Men kan dit onder andere zien aan de wijze waarop in 1.1 onderzocht is of een goedkopere legering gefabriceerd kan worden (vlg. tabel II op blz. 103). Ook het inlassen van een andere nog niet gebruikte route kan de totale kosten lager doen worden. Wij berekenen daarom voor alle niet gebruikte routes het verschil tussen de directe kosten c_{ij} en de kosten z_{ij}. Zolang men niet meer dan één nieuwe route in het programma wil opnemen, kan iedere route slechts op één manier vervangen worden door een combinatie van in gebruik zijnde routes, waardoor de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ dus ondubbelzinnig zijn bepaald.

Teneinde deze verschillen systematisch te kunnen berekenen, omcirkelen wij de in tabel III vermelde verschepingen. In de lege vakjes worden de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ opgenomen, welke volgens de boven aangegeven methode worden berekend. Deze methode bestaat uit de volgende stappen:

1) Kies een vakje dat geen omcirkeld getal bevat (b.v. II-D);
2) Bepaal in de rij van dit vakje een omcirkeld vakje met de eigenschap dat er nog een ander omcirkeld vakje in dezelfde kolom staat (hier dus II-A);
3) Bepaal in de kolom van A een omcirkeld vakje met de eigenschap dat er nog een omcirkeld vakje in dezelfde rij is opgenomen;
4) Ga met het successievelijk toepassen van de stappen 2) en 3) voort tot het uitgangsvakje is bereikt; hierbij behandelen wij dit vakje, alsof het eveneens een omcirkeld getal bevatte;
5) Wanneer men bij één van de stappen op meer dan één wijze verder kan gaan, dan kan men willekeurig kiezen; loopt men met de gekozen weg vast, omdat geen omcirkeld getal meer in de betreffende rij of kolom aanwezig is, dan moet het gegeven procédé herhaald worden, uitgaande van een andere weg, welke men ook had kunnen volgen.

Het pad dat men op deze wijze vindt, is voor het vakje II-D: II-A, III-A, III-D, II-D; inderdaad is dit identiek met het reeds eerder aangegeven pad. Uit de constructie volgt dat het verschil $c_{24} - z_{24}$ tussen de directe en de indirecte kosten gevonden wordt door de c's in het 2^{de} en 4^{de} element van het pad op te tellen en de verkregen som te verminderen met de som van de c's, behorende bij het 1^{ste} en 3^{de} element. Algemeen geldt dat het verschil $c_{ij} - z_{ij}$ gevonden kan worden door de som van de c's van de elementen op de even plaatsen te verminderen met die van de elementen op de oneven plaatsen. Ter illustratie is in tabel IV het pad, behorende bij II-C gestippeld; het getal dat men in dit hokje moet plaatsen is dus: -4+1-0+1-1-1 = -4.

De gegeven berekening toegepast op alle in tabel III lege hokjes leidt tot het in tabel V vermelde resultaat.

Tabel IV

Bepaling van het verschil tussen directe en indirecte kosten

	A	B	C	D	totaal
I			(3)	(1)	4
II	(4)	(2)	×		6
III	(1)			(2)	3
totaal	5	2	3	3	13

Tabel V

Verschillen tussen de directe en de indirecte kosten voor de niet gebruikte routes

	A	B	C	D	totaal
I	0	5	(3)	(1)	4
II	(4)	(2)	-4	-2	6
III	(1)	8	2	(2)	3
totaal	5	2	3	3	13

Er kunnen zich na deze berekening twee gevallen voordoen:

a) alle gevonden verschillen zijn $\geqq 0$;

b) één of meer van de gevonden getallen zijn negatief.

In geval a) heeft men een optimale oplossing bereikt, terwijl in geval b) verbetering mogelijk is.

Wij gaan nu na langs welke, nog niet gebruikte route de verla-

ging van de kosten per ton maximaal is [3] en vervolgens hoeveel langs deze route verzonden kan worden. Op de eerste vraag luidt het antwoord: langs II-C (aangegeven met □). Om de tweede vraag te beantwoorden gaan wij na langs welk pad het verschil $c_{ij} - z_{ij}$ voor II-C is verkregen; op dit pad correspondeerden de oneven hokjes met vermindering van vervoer en de hoeveelheid, welke langs II-C verzonden kan worden is dus gelijk aan het minimum van de in deze hokjes omcirkelde getallen. Volgens tabel IV is dit gelijk aan min (4,2,3) = 2. Het nieuwe programma volgt nu uit het oude door de getallen in de oneven hokjes van het betreffende pad te verminderen met 2 en die in de even hokjes 2 groter te maken. De omcirkelde getallen in tabel VI vormen dit nieuwe programma; de kosten zijn met 2x4 = 8 verlaagd en bedragen dus 21-8 = 13.

Tabel VI

Eerste verbeterde oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	[-4]	1	(1)	(3)	4
II	(2)	(2)	(2)	2	6
III	(3)	8	6	4	3
totaal	5	2	3	3	13

De verschillen tussen de directe en de indirecte kosten voor de bij deze oplossing niet gebruikte routes zijn weer berekend met behulp van de punten 1) t/m 5). De route, die nu bij inschakeling per ton het grootste voordeel levert is I-A en de hoeveelheid, welke maximaal langs deze weg verzonden kan worden is 1 (wegens (1) in vakje I-C). De getallen behorende bij deze en de volgende stap zijn vermeld in de tabellen VII en VIII.

In tabel VIII zijn alle verschillen $c_{ij} - z_{ij} \geqslant 0$ en er is dus geen verdere verbetering meer mogelijk. De kosten van het optimale programma bedragen 7, dus 14 minder dan die van de beginoplossing.

---

3) Is dit voor meer dan één route het geval, dan kan men de volgende berekening op één van deze routes toepassen.

Tabel VII

Tweede verbeterde oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	(1)	5	4	(3)	4
II	(1)	(2)	(3)	[-2]	6
III	(3)	8	6	0	3
totaal	5	2	3	3	13

Tabel VIII

Een optimale oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	(2)	3	2	(2)	4
II	a	(2)	(3)	(1)	6
III	(3)	6	4	0	3
totaal	5	2	3	3	13

Alternatieve optima

Tabel VIII leert ons niet alleen dat er geen betere oplossing bestaat, doch ook dat er wel een andere, eveneens optimale oplossing is. Immers de nul in het vakje III-D geeft aan, dat voor deze route directe en indirecte kosten gelijk zijn, zodat het inschakelen van deze route geen wijziging in de totale kosten zal brengen. Dit alternatieve optimale programma is vermeld in tabel IX; de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ blijven dezelfde.[4)]

Tabel IX

Een andere optimale oplossing

	A	B	C	D.	totaal
I	(4)	3	2	0	4
II	2	(2)	(3)	(1)	6
III	(1)	6	4	(2)	3
totaal	5	2	3	3	13

---

4) Bij de algemene simplexmethode zou hetzelfde gebeuren, wanneer men een variabele l waarvoor $z_l - c_l = 0$ is, in de basis zou brengen; dit volgt reeds uit de regel waarmee de nieuwe waarden $z_h - c_h$ berekend moeten worden.

Daar tabel VIII alleen een nul bevat in het vakje III-D bestaan er verder geen optimale oplossingen, die niet verkregen kunnen worden als lineaire combinatie van de in de tabellen VIII en IX vermelde oplossingen. Geven wij deze aan met x'_{ij} , resp. x''_{ij}, dan kan men alle optimale oplossingen van dit probleem voorstellen door

$$x_{ij} = \lambda x'_{ij} + (1-\lambda) x''_{ij} \quad , \qquad (6)$$

waarin

$$0 \leqq \lambda \leqq 1 \, . \qquad (7)$$

Voor $\lambda = \frac{1}{3}$ is de bijbehorende optimale oplossing opgenomen in tabel X.

Tabel X

Nog een optimale oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	10/3			2/3	4
II		2	3	1	6
III	5/3			4/3	3
totaal	5	2	3	3	13

Had men door het nul worden van niet omcirkelde getallen uit de tabellen drie verschillende optimale oplossingen (x'_{ij} , x''_{ij} en x'''_{ij}) kunnen aflezen, dan zouden alle optimale oplossingen voorgesteld kunnen worden door

$$x_{ij} = \lambda x'_{ij} + \mu x''_{ij} + \nu x'''_{ij} \qquad (8)$$

met λ , μ en ν alle $\geqq 0$ en $\lambda + \mu + \nu = 1$.

Opmerking

Uit de berekening van de optimale oplossing is gebleken, dat hierin alleen gehele eenheden worden vervoerd. Het is niet zo, dat men door het toelaten van oplossingen, waarin gedeelten van tonnen vervoerd worden, een goedkoper verschepinsprogramma kan bereiken. Dat er steeds een optimale oplossing bestaat, die alleen gehele eenheden bevat, wordt veroorzaakt door het feit dat de variabelen in de vergelijkingen (4) en (5) slechts met coëfficiënt 1 voorkomen.

Een controlemiddel

Door het programma te vergelijken met de randtotalen, is het niet moeilijk bij iedere stap te controleren of men een oplossing heeft die aan de eisen voldoet. De berekeningen van de verschillen tussen directe en indirecte kosten worden op deze wijze niet gecon-

troleerd. Eventuele hierin gemaakte fouten beïnvloeden de uiteindelijke oplossing echter niet, omdat deze verschillen bij een volgende stap niet meer worden gebruikt. Bij de algemene simplexmethode was dit wel het geval.

Ontaardingen

Ontaardingen kunnen ontstaan wanneer een aantal ($<m$) havens precies kan voorzien in de gezamenlijke behoeften van een aantal ($<n$) bestemmingen.

Bij de constructie van de beginoplossing kan dit tengevolge hebben dat in een bepaalde phase de betreffende haven is uitgeput en bovendien de betreffende bestemming volledig voorzien. Men kan dan voor de nog niet behandelde havens en bestemmingen op de op blz. 149 aangegeven wijze een beginoplossing construeren.

Verder is het mogelijk, dat het aantal variabelen met waarden groter dan nul, bij een bepaalde stap kleiner is dan m+n-1 en in een dergelijk geval slaagt men er niet in, de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ te berekenen.

Er bestaan twee nauw verwante methoden om de moeilijkheden op te lossen. Beide methoden zijn exact. De eerste geven wij echter in een vereenvoudigde vorm, waarbij het theoretisch denkbaar is dat de optimale oplossing niet wordt bereikt. Wij illustreren deze methode door een voorbeeld. Van het reeds doorgerekende probleem is een ontaarde oplossing gegeven in tabel XI.

Tabel XI

Een ontaarde oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	4				4
II			3	3	6
III	1	2			3
totaal	5	2	3	3	13

Het aantal gebruikte routes is hier 5 in plaats van de vereiste 6. De berekening van de waarde $c_{ij} - z_{ij}$ gaat goed voor het vakje I-B, doch bij de andere mislukt het. Wij plaatsen daarom in één van de vakjes, waarvoor wij $c_{ij} - z_{ij}$ niet kunnen uitrekenen, b.v. I-C, een omcirkeld klein getal ε, dat niet nader wordt gespecificeerd. Wij behandelen nu I-C als een gewone gebruikte route en berekenen vervolgens alle waarden $c_{ij} - z_{ij}$ (vergelijk tabel XII).

Tabel XII

Berekening van de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ bij een ontaarde oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	(4)	-3	(ε)	-2	4
II	4	-4	(3)	(3)	6
III	(1)	(2)	2	-2	3
totaal	5	2	3	3	13

De route welke wij bij het nieuwe programma zullen inlassen, is II-B; hoeveel hier langs kan worden verscheept wordt op de gewone wijze berekend, waarbij men er aan moet denken, dat ε een positief getal is, kleiner dan alle andere omcirkelde getallen. De nieuwe oplossing kan men aflezen uit tabel XIII.

Tabel XIII

Verbeterde oplossing, uitgaande van de ontaarde oplossing

	A	B	C	D	totaal
I	2		2		4
II		2	1	3	6
III	3				3
totaal	5	2	3	3	13

Deze oplossing is niet meer ontaard en men kan de ε dus weer weglaten. Had de ε b.v. bepaald, dat over de route II-B slechts een hoeveelheid ε vervoerd kon worden, dan had ε ook nog in deze stap meegespeeld. Bevat een oplossing twee omcirkelde elementen minder dan het vereiste aantal, dan moet men twee ε's toevoegen.

Een elegantere methode is aangegeven door G.B. DANTZIG [5] en en onder andere beschreven door A. HENDERSON en R. SCHLAIFER.[6]

---

5) G.B.DANTZIG, Application of the simplex method to a transportation problem, hfdst XXIII in Activity Analysis of Production and Allocation (1951).

6) A. HENDERSON and R. SCHLAIFER, Mathematical Programming; better Information fot better Decision making, Harvard Business Review 32 (1954), 73-100.

Wanneer men grote problemen heeft, die op machines berekend moeten worden, verdient zij de voorkeur. Zij komt hierop neer, dat door een kleine transformatie van het probleem een nieuw probleem ontstaat, waarin nooit ontaarding op kan treden.

Hiertoe bepaalt men het minimum van m en n, vermenigvuldigt dit met twee en deelt de eenheid, waarin de getallen in de verschepingstabel zijn uitgedrukt door dit getal (wanneer in de tabel 3,25 voorkomt, moet men 0,01 als eenheid nemen). Vervolgens kiest men een geschikt positief getal δ dat kleiner is dan het gevonden quotiënt en verhoogt de totalen, die corresponderen met het minimum van m en n hiermee; één van de andere randtotalen wordt verhoogd met δ keer het minimum. In ons geval is het minimum m=3, het quotiënt dus $\frac{1}{2x3}$ = 0,16; voor δ kiezen wij 0,1 en de gewijzigde eisen worden dan de in tabel XIV vermelde.

Tabel XIV

Gewijzigde verschepingseisen

	A	B	C	D	totaal
I					4,1
II					6,1
III					3,1
totaal	5	2	3	3,3	13,3

Wij passen op het nieuwe probleem de in deze paragraaf beschreven oplossingsmethode toe en ronden de uitkomsten af tot gehele eenheden (0,0 t/m 0,4 tot 0 en 0,5 t/m 0,9 tot 1). De zo verkregen oplossing is de exacte oplossing van het oorspronkelijke probleem.

Andere toepassingen

De beschreven methode kan worden toegepast, indien men de bijvoorwaarden in de vorm (2), (3) en (4) kan gieten. Zoals in het voorbeeld is aangegeven kan dit het geval zijn bij transportproblemen. Behalve bij het verschepen van een homogeen product treft men deze o.a. aan bij het voorzien van grossiers door een aantal fabrieken, die dezelfde producten vervaardigen.

Een geheel ander toepassingsgebied is dat van de personeelsclassificatie. Een bedrijf heeft voor N functies N sollicitanten opgeroepen. De laatsten kan men verdelen in m elkaar uitsluitende groepen, waarvan de i^e groep a_i leden telt. Er zijn n verschillende functies en b_j vacatures van de j^e functie. Heeft men door middel van testen gevonden dat de verwachte geschiktheid van iemand uit de

i^e groep voor de j^e functie door het getal (score) c_{ij} wordt weergegeven en geeft men het aantal personen uit de i^e groep, die worden geplaatst in de j^e functie aan met x_{ij}, dan komt de opdracht, de N personen zó over de vacatures te verdelen, dat de totale productiviteit maximaal is, hierop neer, dat men (1) moet maximaleseren onder de voorwaarden (2), (3) en (4). Voor de toepassingsmogelijkheden is behalve de moeilijkheid de c_{ij} goed vast te stellen, een ernstig bezwaar, dat men aanneemt, dat zowel de personen als de functies in een bepaalde groep identiek zijn. Indien alle groepen slechts één element bevatten, behoeft men deze onderstelling natuurlijk niet te maken. Een verdere uitwerking van dit probleem kan men o.a. vinden in een artikel van D.F. VOTAW. [7)]

Eveneens uit de personeelssfeer is de volgende toepassing. De chef van een typekamer moet op een bepaalde dag het werk, bestaande uit 14 uur typen, 5 uur syllabi opleggen en 2 uur administratie verrichten, verdelen over de drie aanwezige typisten, die ieder een werkdag van 7 uur maken. De getallen 14,5 en 2 zijn afgeleid uit een prestatietabel, waarin men af kan lezen hoeveel werk per uur moet worden verzet. Tijdstudies in het verleden hebben echter geleerd, dat niet iedere typiste de standaardprestaties bereikt, doch over het werk van een uur in sommige gevallen langer doet; het aantal minuten, dat de i^e typiste meer nodig heeft voor "een uur van het j^e werk", dan een uur, geven wij aan met c_{ij}. De regel op het kantoor is nu zo, dat het in de voorgeschreven tijden niet voltooide werk na kantoortijd moet worden afgemaakt. Aangezien het vooruitzicht, pas na de officiële sluitingstijd weg te kunnen gaan, het humeur van de typisten bijzonder slecht beïnvloed, zal de chef zich afvragen hoe hij het werk over de drie typisten moet verdelen, opdat de totale hoeveelheid tijd, die zij extra moeten werken, zo klein mogelijk is. De variabelen x_{ij} is hier het aantal uren dat de i^e typiste op krijgt om het werk j te verzetten.

Men kan ook problemen, die in eerste instantie niet de vereiste vorm bezitten, vaak door eenvoudige kunstgrepen transformeren in problemen, waarin de bijvoorwaarden wel zijn van de vorm (2), (3), (4). Zo kan men de gegeven methode ook toepassen wanneer de hoeveelheid beschikbare goederen groter is dan de vraag, wanneer dus $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ is. Hiertoe moet men een gefingeerde $(n+1)^{ste}$ bestemming invoeren, welke $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ ton goederen dient te ontvangen en waarheen de transportkosten vanaf alle opslagplaatsen nul bedragen.

---

7) D.F. VOTAW , Methods of solving some personnel-classification problems, Psychometrika 17 (1952), 255-266.

Bevat de optimale oplossing b.v. de uitkomst $x_{i,n+1} = 6$, dan betekent dit dat van de goederen in de i^{de} opslagplaats 6 ton niet gebruikt wordt. Een overeenkomstige weg kan men volgen wanneer geldt $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. In het geval, waarin een bepaalde verbinding niet gebruikt kan worden, kan men het model redden door voor de transportkosten langs deze route een zeer hoog bedrag M per vervoerde eenheid in rekening te brengen.

Aan de andere kant bestaan er ook generalisaties van de hier beschreven methode, waarmee meer algemene transportproblemen opgelost kunnen worden. Zo heeft E.D. SCHELL een methode uitgewerkt, waarmee de volgende vraag beantwoord kan worden [8]: waar moet een fabrikant die verschillende artikelen fabriceert in een aantal fabrieken bepaalde artikelen produceren en naar welke afnemers moet hij ze zenden opdat de totale som van fabricage - en transportkosten zo laag mogelijk zij. Het is dan ook nog mogelijk rekening te houden met de capaciteiten van de fabrieken en de transportroutes en met de uiteenlopende fabricagekosten van de artikelen in de verschillende fabrieken. Wij zullen hier echter niet verder op ingaan.

E.D. SCHELL, Distribution of a product by several properties, Proceedings of the second Symposium in Linear Programming, (1956), 615-642.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 166 (C 9)

"Operations Research"

Hoofdstuk III: Voorraad-problemen

door

G. de Lève

1958

1. Inleiding

In dit hoofdstuk zullen wij enige problemen bespreken, die gebruikt kunnen worden bij het oplossen van voorraad-problemen.

Gelijk bij vele andere onderwerpen uit de Operations Research, wordt men ook hier geconfronteerd met het probleem om in een concrete situatie op grond van gegevens uit het verleden en verwachtingen voor de toekomst op een verantwoorde wijze een beslissing te nemen.

De wiskundige oplossing van deze vraagstukken bestaat hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op een ondubbelzinnige wijze kan geschieden. Bij het opstellen van dit criterium zullen enige veronderstellingen gemaakt dienen te worden, waaraan, naar wij zullen aannemen, in voldoende benadering is voldaan. Verder zullen wij ons niet laverleiden tot een discussie over het al of niet aanvaardbaar zijn van deze veronderstellingen, omdat het slechts de bedoeling van dit hoofdstuk is inzicht te verschaffen in de wijze waarop men voorraadsproblemen kan oplossen. Aan de hand van voorbeelden zullen wij enige methoden bespreken.

2. Eerste voorbeeld [1)]

Laten wij eerst aannemen, dat wij belast zijn met de bepaling van de voorraad-politiek van een groothandel in grondstoffen. Voor de eenvoud zullen wij in onze beschouwingen ons beperken tot een soort grondstof, die in willekeurig grote hoeveelheden op vastgestelde tijdstippen kan worden ingekocht. De behoefte aan deze grondstoffen is niet constant en vormt dan ook een onzekere factor in onze beschouwingen.

Wanneer er op een gegeven ogenblik geen voldoende voorraad aanwezig is, treedt er in de verkoop stagnatie op, hetgeen zeer nadelig is, omdat wij dan met de aflevering van de bestellingen moeten wachten totdat er weer grondstoffen worden ontvangen. Wij zullen bij de behandeling van dit voorbeeld aannemen, dat deze achterstand bij voldoende aanvoer direct kan worden opgeheven. Er zijn derhalve twee soorten kosten aan voorraad-vorming verbonden en wel is het bedrag C_1 nodig om één eenheid grondstof in voorraad te hebben per

---

1) Zie o.a. Eliezer Naddor: Lead time considerations in a simplified mathematical model of inventory. Operations Research Group of the Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio.

tijdseenheid, terwijl de schade veroorzaakt door het feit, dat men op een gegeven moment één eenheid te weinig in voorraad heeft per tijdseenheid C_2 bedraagt. Men kan C_2 beschouwen als een boete, welke de klant ons oplegt, wanneer wij één eenheid grondstof één tijdseenheid te laat afleveren.

Enerzijds zullen wij trachten een eventuele achterstand op te heffen, terwijl wij aan de andere kant ervoor willen waken, dat onze voorraden niet te groot worden. In onze voorraadpolitiek moeten wij aan deze elkander tegengestelde verlangens op een zodanige wijze tegemoet komen, dat de totale kosten aan de voorraad-vorming verbonden minimaal zijn.

Doordat het steeds slechts mogelijk is op van te voren vastgestelde tijdstippen Θ_n $(n=1,2,...)$ bestellingen te ontvangen, ontstaan er tijdsintervallen tussen deze tijdstippen. Voor de eenvoud kiezen wij de tijdsduur van deze intervallen gelijk aan de tijdseenheid. Wij geven met V_n de voorraad (evt. tekort) aan in het begin van het $\underline{n}^{de}$ tijdsinterval en met R_n de voorraad aan het eind van dat interval. Onder q_n verstaan wij de hoeveelheid, die bij de aanvang van de $\underline{n}^{de}$ periode werd ontvangen, terwijl met d_n wordt bedoeld het aantal eenheden hetwelk in deze periode verbruikt wordt of zou worden als er voldoende begin-voorraad aanwezig was.

Wij verkrijgen nu de volgende betrekkingen:

$$V_n = R_{n-1} + q_n \,, \tag{1}$$

$$R_n = V_n - d_n \,, \tag{2}$$

en derhalve ook

$$V_n = V_{n-1} + q_n - d_{n+1} \,, \tag{3}$$

$$R_n = V_{n-1} + q_n - d_{n-1} - d_n \,. \tag{4}$$

De voorraad is dus de som van de restant-voorraad van de vorige periode, welke bij een eventuele achterstand in die periode negatief zal zijn en de afgeleverde bestelling q_n.

Wanneer een op tijdstip Θ_n gedane bestelling onmiddellijk wordt uitgevoerd kunnen wij ervoor zorgen, dat er bij de aanvang van de n^{de} periode geen tekort aan grondstoffen bestaat. Allereerst zullen wij nu dit speciale geval gaan bekijken. Later zullen wij dan een vaste leveringsduur in onze beschouwing opnemen.

Ons probleem luidt nu: Hoeveel grondstoffen moeten wij op het tijdstip Θ_n inslaan, opdat de totale kosten voor de n^{de} periode zo klein mogelijk zijn. In deze paragraaf zullen wij steeds aannemen, dat de vraag tijdens een periode constant is.

Om deze kosten te berekenen zullen wij twee gevallen onderscheiden:

1. Als de behoefte door de voorraad kan worden gedekt, m.a.w. $d_n \leqq V_n$ en $R_n \geqq 0$, dan wordt de gemiddelde voorraad gegeven door:

$$\tfrac{1}{2}(R_n + V_n) = V_n - \tfrac{1}{2} d_n \ , \qquad (5)$$

en de daaruit voortkomende kosten bedragen:

$$(V_n - \tfrac{1}{2} d_n)\, C_1 \ . \qquad (6)$$

De waarde van $V_n - \frac{1}{2} d_n$ is gelijk aan het oppervlak A in fig. 1.

Constant verbruik gedurende één periode

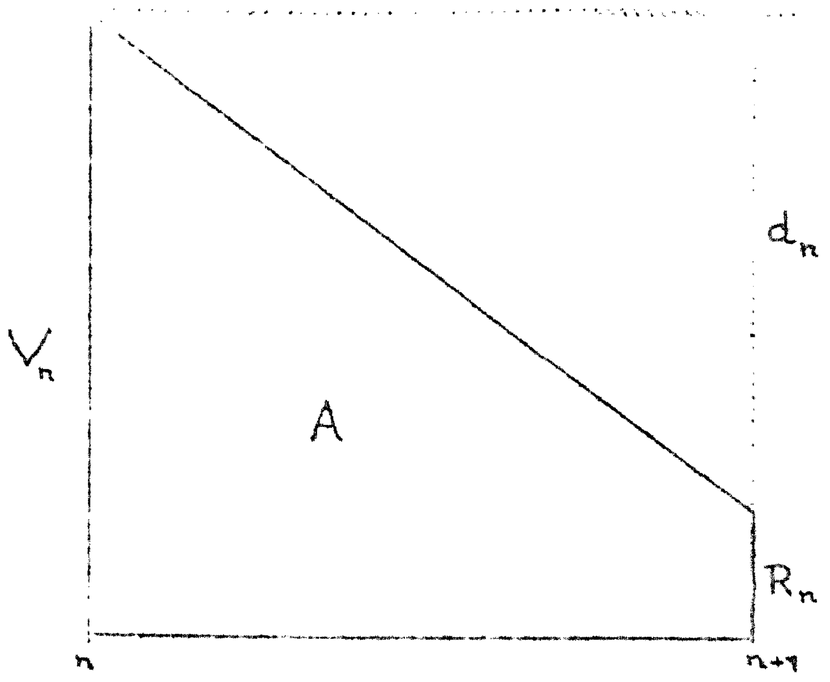


fig. 1
Voldoende voorraad

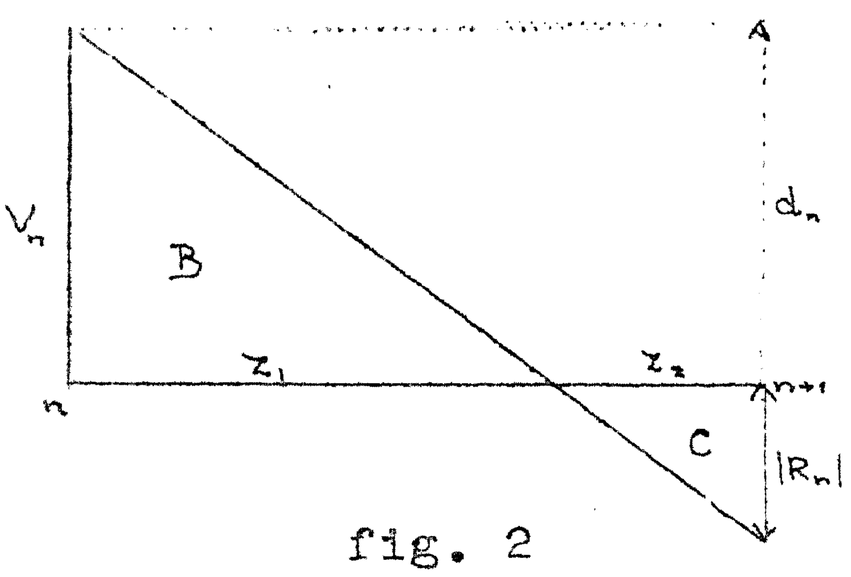


fig. 2
Te kleine voorraad

2. De behoefte kan niet geheel door de voorraad gedekt worden, m.a.w. $d_n > V_n$ en $R_n < 0$. Er is gedurende een periode τ_1 een positieve voorraad en vervolgens een tekort. Als wij wederom aannemen, dat de vraag gedurende deze periode constant is, dan is de gemiddelde voorraad gedurende τ_1 gelijk aan $\frac{1}{2} V_n$ en het gemiddelde tekort tijdens τ_2 $\frac{1}{2}|R_n|$ en de daaruit voortkomende kosten bedragen:

$$\tfrac{1}{2} V_n \tau_1 C_1 + \tfrac{1}{2} |R_n| \tau_2 C_2 \ . \qquad (7)$$

De oppervlakken B en C van fig. 2 zijn resp. gelijk aan $\frac{1}{2} V_n \tau_1$ en $\frac{1}{2}|R_n|\tau_2$. Bovendien gelden voor τ_1 en τ_2 de volgende betrekkingen:

$$\tau_1 = \frac{S_n}{S_n + |R_n|} = \frac{V_n}{d_n} \qquad (8)$$

en

$$\tau_2 = \frac{|R_n|}{S_n + |R_n|} = \frac{d_n - V_n}{d_n} \qquad (9)$$

De betrekking (7), welke de totale kosten aangaf, gaat dan over in:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{V_n^2 C_1 + (V_n - d_n)^2 C_2}{d_n}\right] \qquad (10)$$

Wanneer d_n een gegeven getal is, m.a.w. de behoefte aan de grondstof in de n^{de} periode bekend is, dan bereikt (10) zijn minimale waarde voor:

$$V_n = d_n \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad (11)$$

Hieruit blijkt dat een voorraad kleiner dan de behoefte optimaal kan zijn. Zoals wij weten is V_n de voorraad, die overblijft na opheffing van de eventuele achterstand. De te bestellen hoeveelheid wordt gegeven door:

$$q_n = V_n - R_{n-1} \qquad (1)$$

met

$$R_{n-1} = V_{n-1} - d_{n-1} = d_{n-1} \frac{C_2}{C_1 + C_2} - d_{n-1} = -d_{n-1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad (12)$$

en bedraagt dan:

$$q_n = \frac{d_n C_2 + d_{n-1} C_1}{C_1 + C_2} \qquad (13)$$

Voor het geval, dat de vraag in elke periode gelijk is, gaat (11a) over in:

$$q_1 = d_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad (14)$$

$$q_2 = d_n = d_1 \qquad \text{voor} \quad n \geqslant 2 \qquad (15)$$

Onze voorraadpolitiek is optimaal, wanneer wij er voor zorgen, dat er aan het eind van iedere periode i een tekort is van:

$$-R_i = d_{i-1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad (16)$$

Veelal echter is d_n geen gegeven getal, maar een stochastische grootheid, die dus een kansverdeling bezit.

Ons probleem luidt dan: Hoeveel grondstoffen moeten wij op het tijdstip Θ_n inslaan, opdat de verwachting van de totale kosten voor de n^{de} periode zo klein mogelijk is. Immers deze verwachting zal afhankelijk zijn van de nog te kiezen beginvoorraad V_n.

Voor het geval dat de verdelingsfunctie $F(d_n)$ een kans-dichtheid $f(d_n)$ bezit, kan de verwachting van de kosten als volgt worden uitgedrukt:

$$C(V_n) = \int_0^{V_n} (V_n - \tfrac{1}{2}x)\, C_1 f(x)\, dx + \int_{V_n}^{\infty} (\tfrac{1}{2} V_n C_1 + \tfrac{1}{2}(V_n - x)^2 C_2)\, \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad (17)$$

Deze betrekking wordt gevonden met behulp van de uitdrukkingen (6) en (10).

Wij zullen nu onze beginvoorraad zo kiezen, dat de verwachting van de te maken onkosten, $C(V_n)$, minimaal wordt, m.a.w. voor de gezochte optimale waarde V_n^* van V_n moet gelden:

$$\left(\frac{dC(V_n)}{dV_n} \right)_{V_n = V_n^*} = 0 \qquad (18)$$

Na een weinig rekenen blijkt betrekking (18) gelijkwaardig te zijn met:

$$F(V_n^*) + V_n^* \int_{V_n^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad (19)$$

Aangezien men kan bewijzen, dat:

$$M(V_n) \overset{def}{=\!=} F(V_n) + V_n \int_{V_n}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad (20)$$

een monotoom stijgende functie is van V_n, is V_n^* ondubbelzinnig bepaald. De functie $C(V_n)$ heeft dus maar één extremum en aangezien $C(\infty) = \infty$, moet dit een minimum zijn. De optimale te bestellen hoeveelheid q_n wordt dan gegeven door:

$$q_n^* = V_n^* - R_{n-1}\,. \qquad (1)$$

waarbij R_{n-1} op het tijdstip Θ_n bekend is.

In de inleiding hebben wij nogal vaag gezegd:"De wiskundige oplossing van het vraagstuk bestaat hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op ondubbelzinnige wijze kan geschieden. Bij het opstellen van dit criterium zullen enige veronderstellingen gemaakt dienen te worden, waaraan, naar wij zullen aannemen in voldoende benadering is voldaan".

Het criterium ziet er dan als volgt uit:

$$M(V_n^*) = F(V_n^*) + V_n^* \int_{V_n^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad , \tag{21}$$

een vergelijking, die V_n^* impliciet bevat en waaruit V_n^* bepaald moet worden.

De hierbij gemaakte veronderstellingen luidden:

1. De bestellingen worden direct afgeleverd en een tekort wordt na ontvangst van een nieuwe zending direct opgeheven.
2. De behoefte per tijdseenheid is gedurende een periode constant.
3. De variabele d_n bezit een nog nader te specificeren continue verdeling.
4. De waarden van de constanten C_1 en C_2 zijn bekend.

Ook is het mogelijk een criterium op te stellen, waarbij de variabele d_n een discrete verdeling volgt. Wij komen hierop later terug.

Thans zullen wij aannemen, dat de bestellingen niet direct worden afgeleverd, maar dat de leveringstijd k perioden duurt. Men moet dus op het tijdstip Θ_{n-k} een bestelling doen voor de n^{de} periode en men kan slechts op langere termijn invloed uitoefenen op de voorraad. Op het tijdstip Θ_{n-k} weet men niet hoe groot de behoefte zal zijn in de periode Θ_{n-k} en Θ_n. Het is dan ook niet uitgesloten, dat op het tijdstip Θ_n blijkt, dat een op Θ_{n-k} gedane bestelling te klein was om het tekort op te heffen, waardoor V_n negatieve waarden aan kan nemen.

Uit (1), (2), (3) en (4) volgt onmiddellijk:

$$V_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} d_i \quad , \tag{22}$$

en

$$R_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} d_i - d_n \quad . \tag{23}$$

Wij schrijven nu voor.

$$\left.\begin{aligned} V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i &\stackrel{\text{def}}{=} X_{n-k} \quad , \\ \sum_{i=n-k}^{n-1} d_i &= y \quad , \\ d_n &= x \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

De grootheid X_{n-k} geeft dus op het tijdstip Θ_{n-k} de som aan van de voorraad en de hoeveelheid reeds in bestelling.
De betrekkingen (22) en (23) gaan dan over in:

$$V_n = X_{n-k} + q_n - y = z_n - y \tag{25}$$

en

$$R_n = X_{n-k} + q_n - x - y = z_n - x - y \tag{26}$$

waarbij

$$z_n \overset{\text{def}}{=} X_{n-k} + q_n \tag{27}$$

De variabelen y en x stellen resp. de behoeften aan grondstoffen voor in de k tussen-liggende perioden en in de n^{de} periode. Vervolgens veronderstellen wij dat deze variabelen resp. de verdelingsfuncties $G(y)$ en $F(x)$ bezitten. Het probleem luidt nu weer: Kies q_n zodanig dat de verwachting van de te maken onkosten minimaal wordt.

Er kunnen zich in de n^{de} periode drie gevallen voordoen:

1. De behoefte kan uit de voorraad worden gedekt, m.a.w.
   $V_n = z_n - y \geq 0$ en $d_n = x \leq z_n - y$
2. Er is weliswaar aan het begin van de n^{de} periode een voorraad, maar aan het eind een tekort, m.a.w.
   $V_n = z_n - y \geq 0$ en $x > V_n = z_n - y$
3. De afgeleverde bestelling op het tijdstip Θ_n was niet voldoende om de op dat moment al bestaande tekort op te heffen, zodat er gedurende de gehele periode een tekort is, m.a.w.
   $z_n - y \leq 0$ en $x > z_n - y = V_n$

In de figuren 3, 4 en 5 zijn deze 3 mogelijkheden aangegeven:

Het verloop bij positieve begin- en eindvoorraden

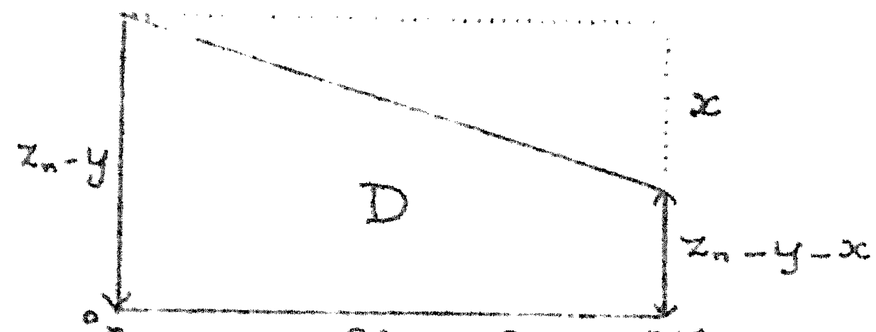


fig. 3

Het verloop bij positieve begin- en negatieve eindvoorraden

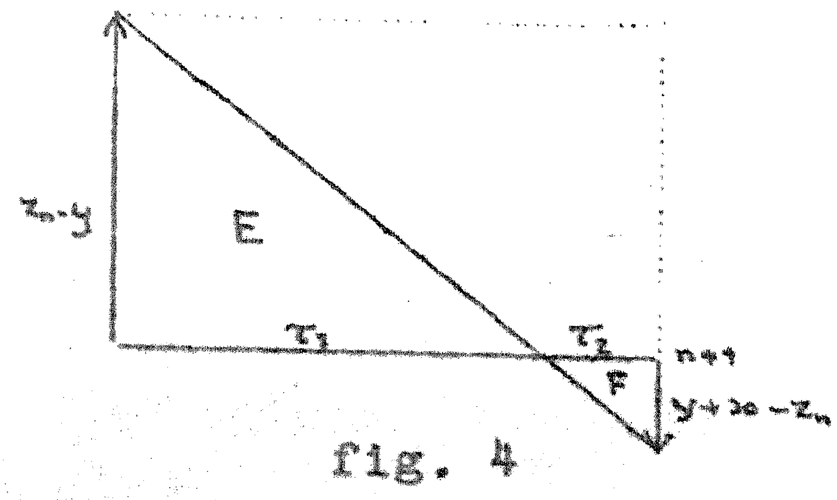


fig. 4

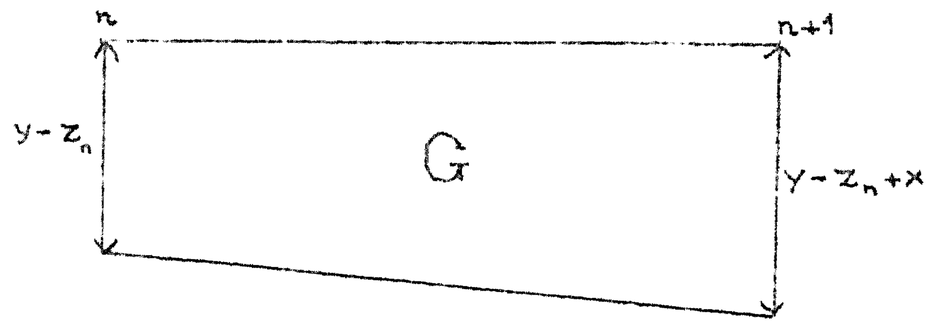


fig. 5

Ook nu berekenen wij eerst voor deze gevallen afzonderlijk de kosten-functie, alsof de behoefte in de n^{de} periode een gegeven waarde bezit.

In het eerste geval is de gemiddelde voorraad gelijk aan $(z_n - y - \frac{1}{2}x)$ en de daaruit voortvloeiende kosten bedragen:

$$(z_n - y - \tfrac{1}{2}x)C_1 . \qquad (28)$$

Ook hier is $(z_n - y - \frac{1}{2}x)$ gelijk aan het oppervlak D van fig. 3.

In het tweede geval is er gedurende een periode τ_1 een positieve voorraad en wel gemiddeld $\frac{1}{2}(z_n - y)$ en tijdens de periode τ_2 een gemiddeldetekort van $\frac{1}{2}(y + x - z_n)$.

De totale kosten bedragen dan:

$$\tfrac{1}{2}(z_n - y)\tau_1 C_1 + \tfrac{1}{2}(y + x - z_n)\tau_2 C_2 . \qquad (29)$$

Wederom geldt:

$$\tau_1 = \frac{z_n - y}{x} \qquad (30)$$

$$\tau_2 = \frac{y + x + z_n}{x} \qquad (31)$$

De betrekking (29) gaat dan over in:

$$\frac{1}{2}\,\frac{(z_n - y)^2}{x} C_1 + \frac{1}{2}\,\frac{(y + x - z_n)^2}{x} C_2 \qquad (32)$$

hierin zijn

$$\frac{1}{2}\,\frac{(z_n - y)^2}{x} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2}\,\frac{(y + x - z_n)^2}{x} \qquad (33)$$

resp. gelijk aan de oppervlakken E en F van fig. 4.

In het derde geval is het gemiddelde tekort gelijk aan $(\frac{1}{2}x - z_n + y)$ en de daarbij behorende kosten bedragen:

$$(\tfrac{1}{2}x - z_n + y)\,C_2 \qquad (34)$$

De grootheden x en y, die in deze drie gevallen voorkomen, zijn echter geen bekende getallen, maar variabelen met een kansverdeling.

Stel nu dat de variabelen x en y een kansverdeling bezitten met dichtheden resp. f(x) en g(y). De verwachting van de te maken kosten wordt dan gegeven door:

$$C(z_n) = C_1 \int_0^{z_n} g(y)\,dy \int_0^{z_n-y} (z_n - y - \tfrac{1}{2}x) f(x)\,dx +$$

$$+ \tfrac{1}{2} C_1 \int_0^{z_n} g(y)\,dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{(z_n-y)^2}{x} f(x)\,dx +$$

$$+ \tfrac{1}{2} C_2 \int_0^{z_n} g(y)\,dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{(y+x-z_n)^2}{x} f(x)\,dx +$$

$$+ C_2 \int_{z_n}^{\infty} f(y)\,dy \int_0^{z_n-y} (\tfrac{1}{2}x - z_n + y) f(x)\,dx . \qquad (35)$$

Deze betrekking is opgesteld met behulp van de uitdrukkingen (28), (32) en (34).

Wij kiezen z_n (vgl. (25)) nu zodanig dat $C(z_n)$ minimaal wordt; z_n moet dus voldoen aan:

$$\left(\frac{dC(z)}{dz}\right)_{z=z_n^*} = 0 \qquad (36)$$

Deze vergelijking blijkt na enige berekeningen gelijkwaardig te zijn met:

$$\int_0^{z_n^*} g(y)\,dy \left[\int_0^{z_n^*-y} f(x)\,dx + (z_n^* - y) \int_{z_n^*-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx \right] = \frac{C_2}{C_1 + C_2} . \qquad (37)$$

De functie

$$M(z_n) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_0^{z_n} g(y)\,dy \left[\int_0^{z_n-y} f(x)\,dx + (z_n - y) \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx \right] \qquad (38)$$

is monotoon stijgende, omdat geldt:

$$M'(z_n) = \int_0^{z_n} g(y)\,dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx > 0 . \qquad (39)$$

Hieruit volgt, dat de optimale waarde van z_n door de betrekking (37) ondubbelzinnig is vastgesteld.

Aangezien de waarde $\sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i$ op het tijdstip Θ_{n-k} bekend is, kan q_n uit

$$z_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n \qquad (40)$$

worden berekend.

Het criterium wordt nu gegeven door:

$$M(z_n) = \int_0^{z_n} g(y)\,dy \left[F(z_n - y) + (z_n - y) \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx \right] = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad (41)$$

Het is ook mogelijk om na te gaan hoe groot de verwachting is van de lengte van de periode τ_1, waarin geen tekort is aan grondstoffen.

In het eerste geval zal τ_1 gelijk zijn aan één, omdat de voorraad voldoende groot is om in de behoefte te voorzien. In het tweede geval hebben wij gezien dat τ_1 wordt gegeven door $z_n - y/x$ en in het derde geval is τ_1 gelijk aan nul, omdat de n^{de} periode wordt begonnen met een tekort.

Voor de verwachting van τ_1 geldt dus de volgende betrekking:

$$\mathcal{E}\{\tau_1\} = \int_0^{z_n} F(z_n - y)\, g(y)\, dy + \int_0^{z_n} (z_n - y)\, g(y)\, dy \int_{z_n - y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx \,. \tag{42}$$

Uit (41) en (42) volgt:

$$\mathcal{E}\{\tau_1\} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{43}$$

en

$$\frac{\mathcal{E}\{\tau_1\}}{\mathcal{E}\{\tau_2\}} = \frac{C_2}{C_1} \tag{44}$$

Vervolgens zullen wij een toepassing geven van de bovenstaande methode. Hierin veronderstellen wij, dat de leveringsduur twee perioden bedraagt en de verdelingsdichtheid gegeven worden door:

$$g(y) = \tfrac{1}{6}\, y^3\, e^{-y} \tag{45}$$

$$f(x) = x\, e^{-x} \tag{46}$$

De kansverdeling $g(y) = \frac{1}{6} y^3 e^{-y}$

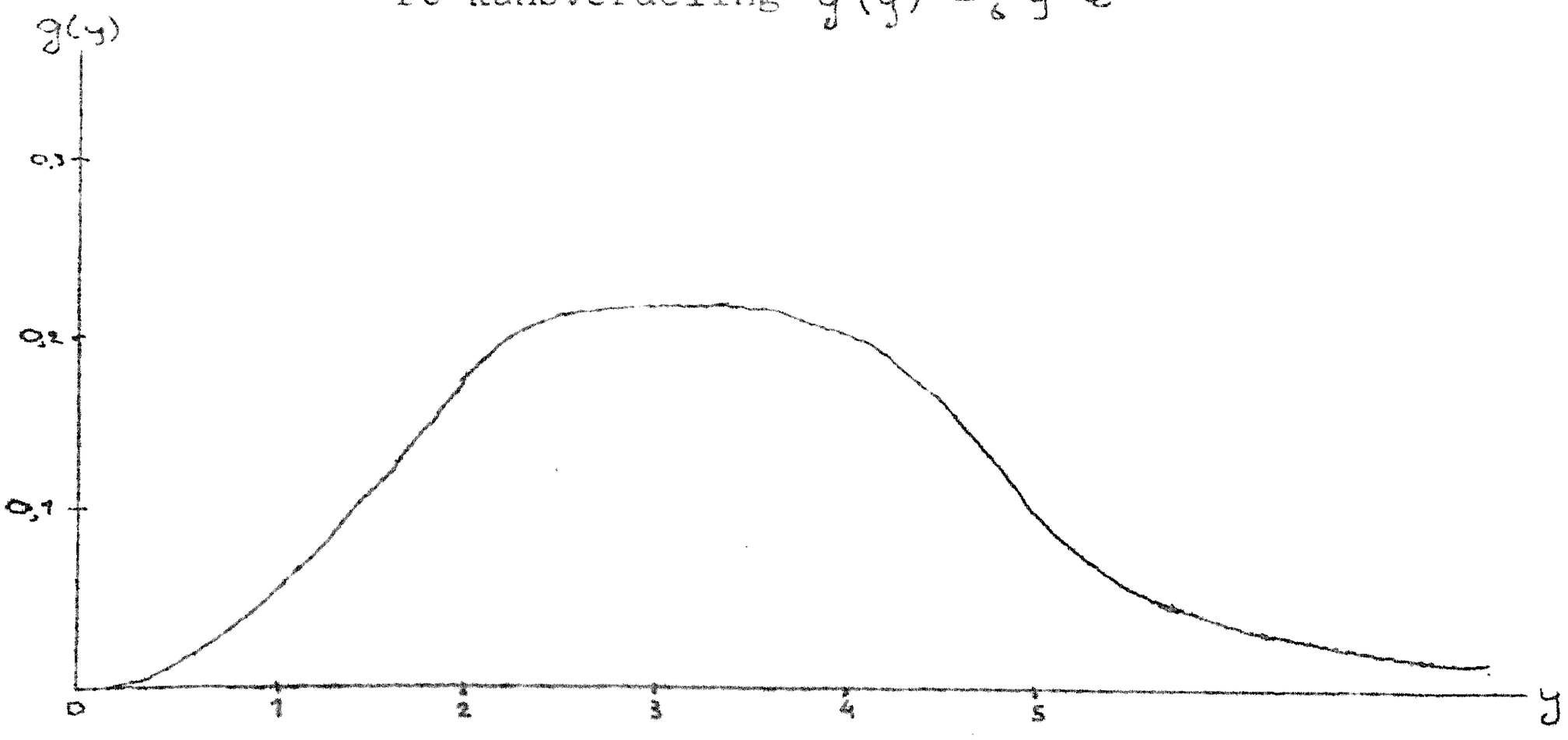


fig. 6

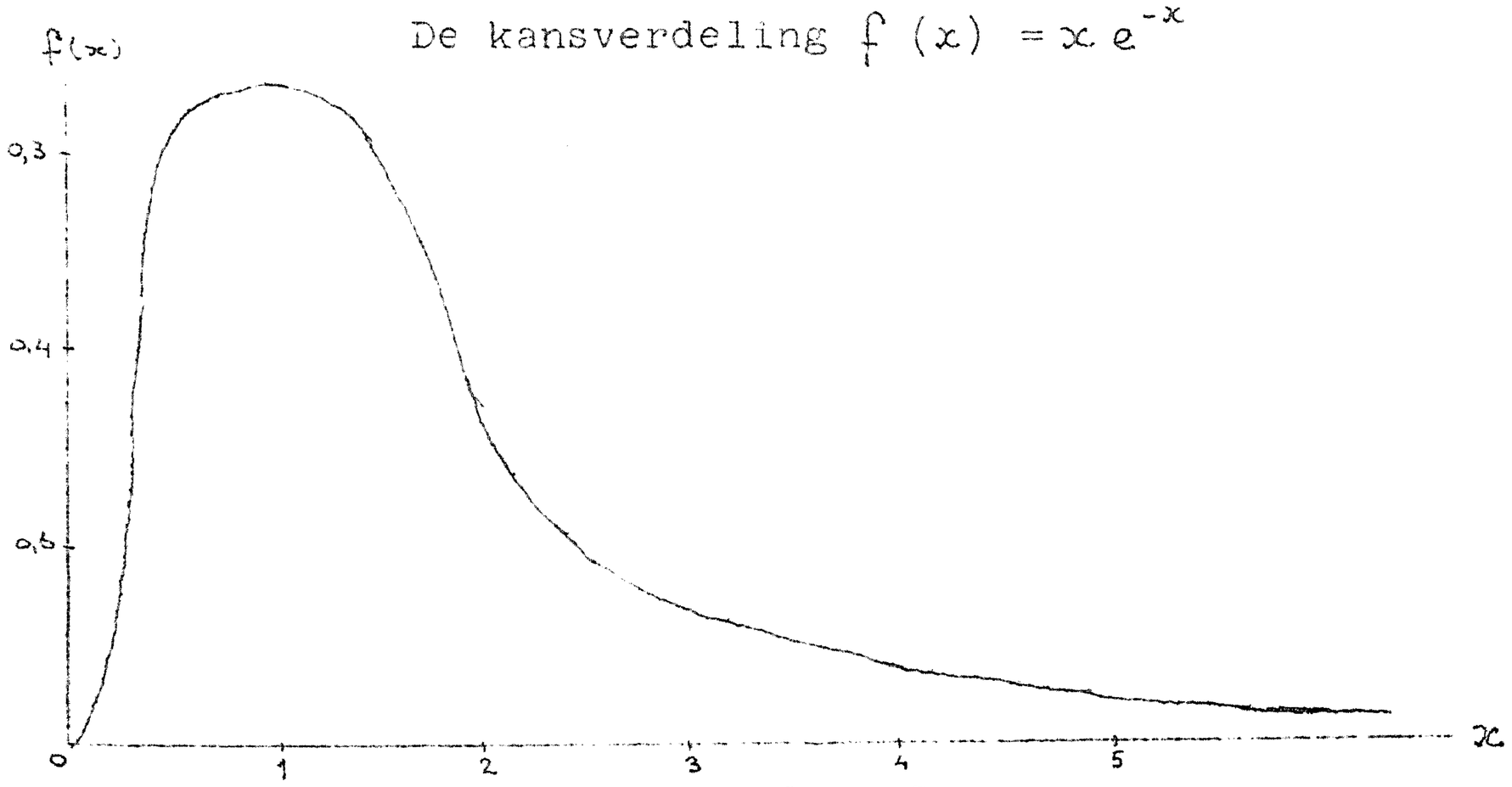


fig. 7

De verdeling van y wordt verkregen door te onderstellen, dat $\underline{d}_{n-1}$ en $\underline{d}_{n-2}$ onafhankelijk verdeeld zijn met dichtheden:

$$h(d_{n-1}) = d_{n-1}\; e^{-d_{n-1}} \tag{47}$$

$$h(d_{n-2}) = d_{n-2}\; e^{-d_{n-2}} \tag{48}$$

Uit $g(y) = g(d_{n-1} + d_{n-2})$ volgt dan de gegeven verdeling.

De vraag luidt nu wederom: Hoe groot moeten wij op het tijdstip Θ_{n-2} onze bestelling q_n kiezen, als gegeven is

$$C_2 = 19\, C_1 \tag{49}$$

$$V_{n-2} = 3,10 \tag{50}$$

$$q_{n-1} = 2,70 \quad . \tag{51}$$

Uit (41), (45), (46), (49), (50) en (51) volgt:

$$M(z_n^*) = \int_0^{z_n^*} \tfrac{1}{6} y^3 e^{-y}\, dy \left[\int_0^{z_n^* - y} x\, e^{-x}\, dx + (z_n^* - y) \int_{z_n^* - y}^{\infty} e^{-x}\, dx \right] = 0,95 \tag{52}$$

en ook:

$$M(z_n^*) = 1 - e^{-z_n^*} \left[1 + z_n^* + \frac{z_n^{*2}}{2} + \frac{z_n^{*3}}{6} + \frac{z_n^{*4}}{24} \right] = 0,95 \tag{53}$$

Voor (53) kunnen wij ook schrijven:

$$\int_0^{2z_n^*} \frac{u^4}{4!\,2^5}\, e^{-\frac{u}{2}}\, du = 0,95 \tag{54}$$

Daar $\frac{u^4}{4!\,2^5}\, e^{-\frac{u}{4}}$ de verdelingsdichtheid is van een χ^2-verdeling met $u = \chi^2$ en 10 vrijheidsgraden, is de waarde van $2z_n^*$ uit de tabel van deze verdeling af te lezen. Wij vinden dan voor z_n:

$$z_n = 9,15 \tag{55}$$

De te bestellen hoeveelheid wordt dan gegeven door:

$$q_n^* = 9,15 - (3,10 + 2,70) = 3,35 \qquad (56)$$

Wij zullen nu eens nagaan of wij een gelijksoortige methode kunnen ontwikkelen voor het geval, dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geen continue, maar discrete verdelingen bezitten met kansen resp. $p(x)$ en $r(y)$. Wij vinden dan met behulp van de betrekkingen (28), (32) en (34) voor de verwachting van de te maken kosten:

$$C(z_n) = C_1 \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=0}^{z_n-y} \left(z_n - y - \frac{x}{2}\right) p(x) + \frac{1}{2} C_1 \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x:\, z_n-y+1}^{\infty} \frac{1}{x} (z_n - y)^2 p(x) +$$

$$+ \frac{1}{2} C_2 \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=z_n-y+1}^{\infty} \frac{1}{x} \left[x - (z_n - y)\right]^2 p(x) + C_2 \sum_{y=z_n+1}^{\infty} r(y) \sum_{x=0}^{\infty} \left(y - z_n + \frac{x}{2}\right) p(x) \qquad (57)$$

De betrekking (57) kunnen wij ook anders schrijven en wel:

$$C(z_n) = (C_1 + C_2) \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=0}^{z_n-y} \left(z_n - y - \frac{x}{2}\right) p(x) + (C_1 + C_2) \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x:\, z_n-y+1}^{\infty} \frac{1}{2x} (z_n - y)^2 p(x) +$$

$$+ C_2 \sum_{y=0}^{\infty} r(y) \sum_{x=0}^{\infty} \left(y - z_n + \frac{x}{2}\right) p(x) \; . \qquad (58)$$

Wanneer z_n optimaal is, moet gelden:

$$C(z_n - 1) \geqq C(z_n), \qquad (59)$$

$$C(z_n + 1) \geqq C(z_n) \; . \qquad (60)$$

Men kan aantonen, na uitvoerig cijferen, dat beide ongelijkheden vervangen kunnen worden door:

$$M(z_n - 1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < M(z_n) \qquad (61)$$

waarbij

$$M(z_n) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \left[\sum_{x=0}^{z_n-y} p(x) + \left(z_n - y + \frac{1}{2}\right) \sum_{x=z_n-y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x} \right] \qquad (62)$$

een monotoon stijgende functie van z_n is.

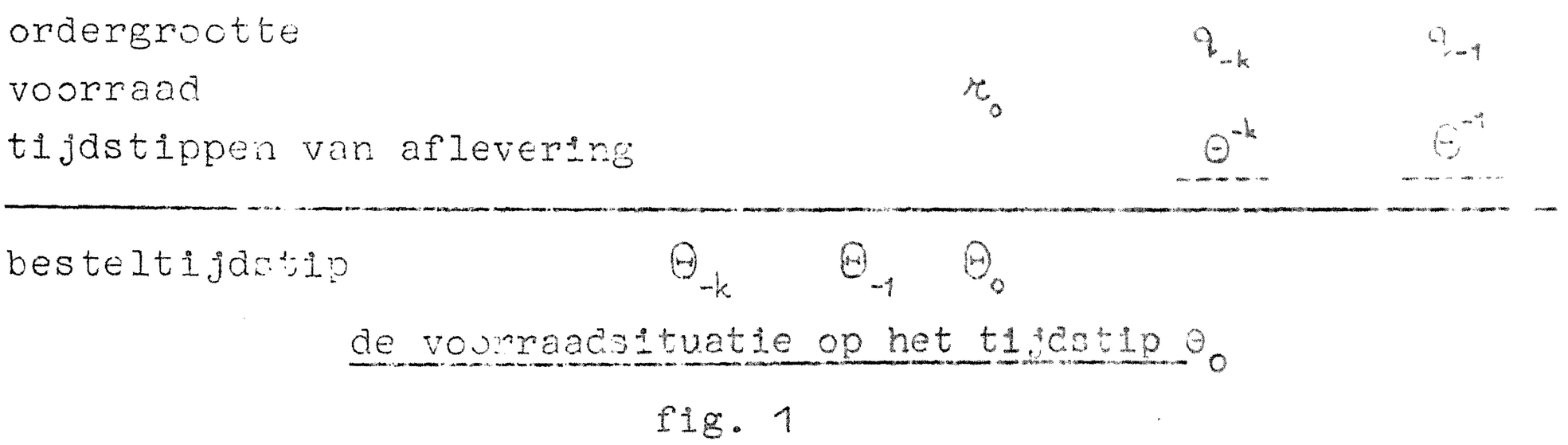
In verband met de plaatsruimte zullen wij deze afleidingen niet geven.

Het tweede voorbeeld [1]

2.1 Inleiding

In ons tweede voorbeeld zullen wij een paar voorraadproblemen bespreken, waarvan de oplossingsmethoden geheel overeenstemmen. De te beschouwen situatie kan als volgt worden weergegeven.

Op het tijdstip Θ_0 vraagt een voorraadbeheerder zich af wanneer voor een bepaald artikel het eerstvolgende besteltijdstip Θ_1 moet plaatsvinden en hoe groot de omvang q_1 van deze order moet zijn. Hij weet, dat de voorraad thans x_0 bedraagt en dat op de tijdstippen $\Theta_{-j}(j=1,\ldots,k)$ orders zijn afgegeven van de omvang q_{-j}, waarvan de tijdstippen van aflevering Θ^{-j}, in verband met het stochastisch karakter van de levertijd nog onbekend zijn[2]. Aangezien de orders bestemd waren voor de zelfde fabriek, zullen de afleveringen in de zelfde volgorde geschieden als de afgiften.



de voorraadsituatie op het tijdstip Θ_0

fig. 1

Verder is gegeven, dat de verdeling van de vraag in een periode van gegeven lengte onafhankelijk is van de ligging van het beginpunt van deze periode en zich slechts onderscheidt van die in andere perioden, door de waarde van één parameter uit de verdeling, welke de lengte van het desbetreffende tijdsinterval aangeeft.

Gedurende het beheren van de voorraad zal hij de volgende kosten maken:

1e) Inkoopkosten: Deze kosten zullen wij aangeven met $\varphi(q)$ en omvatten alle kosten, welke verband houden met het bestaan en de omvang q van de order.

2e) Voorraadkosten: De voorraadkosten worden wederom berekend met behulp van een constante C_1. C_1 geeft de kosten aan, welke worden gemaakt als één eenheid één tijdseenheid in voorraad is.

---

1) G. de Leve: "Een optimale (Θ,q) voorraadpolitiek" (in voorbereiding)

2) Besteltijdstippen worden aangegeven met de index beneden bv. Θ_{-1}. Het moment van aflevering van deze order wordt aangeduid met Θ^{-1}, dus index boven.

3e) a) Kosten van "neen"verkoop: Voor de bepaling van de kosten van "neen"verkoop wordt gebruik gemaakt van de constante C_2. C_2 is de grootte van de boete welke men moet betalen voor iedere eenheid, die één tijdseenheid te laat wordt afgeleverd.

b) Kosten van "nood"inkoop: Indien de voorraad ontoereikend is om aan de vraag te kunnen voldoen en geen uitstel van aflevering kan worden gevraagd, zullen noodinkopen moeten worden verricht. Deze goederen worden direct ontvangen en kosten C_3 per eenheid.

Wij zullen alleen situaties beschouwen, waarin òf kosten van "neen"verkoop òf kosten van noodinkopen gemaakt kunnen worden.

2.2 De bepaling van de optimale waarden van Θ_1 en q_1

Indien wij aannemen, dat de periode, waarin de voorraad moet worden beheerd, onbegrens is, dan zal de voorraadbeheerder Θ_1 en q_1 zodanig willen kiezen, dat de beginvoorwaarde van dit voorraadproces zo gunstig mogelijk is. De keuze van Θ_1 en q_1 wordt uiteraard ook bepaald door de wijze waarop in de toekomst ordergrootten en besteltijdstippen worden berekend.

Uitgaande van de veronderstelling, dat ook in de toekomst ordergrootten en besteltijdstippen optimaal worden gekozen, zullen wij de keuzen (Θ_1, q_1) optimaal noemen, als op grond van de aanwezige informatie de verwachting van de totale kosten vanaf het tijdstip Θ_0 voor deze keuze minimaal is.

Uit bovenstaande beschouwing volgt dus, dat het noodzakelijk is om de totale kosten vanaf het tijdstip Θ_0 te berekenen. Het behoeft geen betoog, dat de verwachting van deze kosten onbegrensd is. Immers ook de periode, waarvoor de kosten worden berekend is onbegrensd.

Aangezien het echter gebruikelijk is om aan de kosten in het verre verschiet minder waarde toe te kennen,dan aan die van gelijke grootte in de nabije toekomst, zullen de kosten steeds met een passende verdisconteringsfactor worden vermenigvuldigd. Om de berekening van de totale kosten te vereenvoudigen, zullen wij als volgt te werk gaan.

In ieder tijdsinterval zijn de gemaakte kosten het gevolg van de aan- of afwezigheid van een bestelling. Beschouwen wij nu een willekeurig tijdsinterval van de lengte τ (zie bv. fig. 2a).



fig. 2a

Met het tijdstip ${}^{i-1}\Theta$ geven wij het moment aan, waarop de laatste eenheid van de $(i-1)^{ste}$ bestelling wordt afgeleverd aan de consument. Zoals bekend stelt Θ^i het tijdstip voor, waarop de i^{de} bestelling wordt afgeleverd. Op dit tijdstip dienen wij de inkoopkosten $\varphi(x_i)$ van de i^{de} order te betalen. Deze kosten komen uiteraard op rekening van de i^{de} order. Indien zoals in fig. 2a aangegeven is het tijdstip Θ^i plaats vindt voor ${}^{i-1}\Theta$, dan zal gedurende de periode $({}^{i-1}\Theta, \Theta^i)$ de gehele order in voorraad zijn. De daaraan verbonden voorraad-kosten komen ook op rekening van de i^{de} bestelling, gelijk de voorraadkosten na ${}^{i-1}\Theta$ over het resterende gedeelte van de i^{de} bestelling.



fig. 2b

Geldt daarentegen de situatie gegeven in fig. 2b, waarin het tijdstip ${}^{i-1}\Theta$ eerder plaats vindt dan Θ^i, dan komt de i^{de} bestelling te laat. Ook de kosten van "neen"verkoop of van "noód"inkoop komen op rekening van de i^{de} bestelling.

Indien wij op deze wijze te werk gaan, dan kunnen wij de totale kosten splitsen in kosten, welke voortvloeien uit één of andere bestelling. De kosten van de i^{de} bestelling zullen wij aangeven met $\underline{C}_i\ (\Theta_i,\ q_i/\Theta_{i-1}, q_{i-1}, \ldots)$. Deze kosten zijn stochastisch, omdat o.a. de ligging van de tijdstippen ${}^{i-1}\Theta$ en Θ^i van te voren niet bekend zijn. Aangezien de ligging van het tijdstip ${}^{i-1}\Theta$ op de tijdas, hetwelk een belangrijke rol speelt bij de berekening van de kosten van de i^{de} bestelling, afhangt van de keuzen van Θ_{i-1}, q_{i-1}; Θ_{i-2}, q_{i-2}; etc. zullen ook de kosten van de i^{de} bestelling mede bepaald worden door de keuzen van Θ_{i-1}, q_{i-1}; Θ_{i-2}, q_{i-2}; etc.

In het hierna volgende zullen wij de lengte van de periode $({}^{i-1}\Theta, {}^{i}\Theta)$ aangeven door de grootheid $\underline{\tau}_i(\Theta_i, q_i/\Theta_{i-1}, q_{i-1}; \ldots)$. Deze periode begint dus met het moment, waarop de laatste eenheid van de $(i-1)^{ste}$ order het magazijn verlaat en eindigt op het tijdstip, waarop de laatste eenheid van de i^{de} bestelling aan de consument wordt afgeleverd. De lengte van deze periode noemt men dan ook de verwerkingstijd van de i^{de} order.

Ten slotte voeren wij de functie $V(\Theta_i, q_i/\Theta_{i-1}, q_{i-1}, \ldots)$ in die gegeven wordt door:

$$V(\Theta_i, q_i/\Theta_{i-1}, q_{i-1}; \ldots) = \frac{E\underline{C}_i(\Theta_i, q_i/\Theta_{i-1}, q_{i-1}; \ldots)}{E\underline{\tau}_i(\Theta_i, q_i/\Theta_{i-1}, q_{i-1}; \ldots)} \qquad (1)$$

Zowel van $\underline{C}_i$ als van $\underline{\tau}_i$ wordt de verwachting berekend op een tijdstip, dat plaats vindt na Θ_{i-1} en waarop dus de waarden van

Θ_{i-1}, q_{i-1}; Θ_{i-2},q_{i-2} etc. bekend zijn. Uit de definitie van $V(\Theta_i,q_i/\Theta_{i-1},q_{i-1};\ldots)$ volgt, dat ook deze functie afhangt van de keuzen van Θ_{i-1}, q_{i-1}; Θ_{i-2},q_{i-2} etc. De waarden van Θ_i en q_i, waarvoor $V(\Theta_i,q_i\ \Theta_{i-1},q_{i-1};\ldots)$ haar absoluut minimum bereikt zijn eveneens afhankelijk van deze keuzen. Men kan echter bewijzen dat het absolute minimum zelf voor iedere waarde van i gelijk is en bovendien onafhankelijk van de keuze van Θ_{i-1},q_{i-1}; etc.

Indien men de uitgaven, welke op rekening komen van de i^{de} bestelling, gelijk waardeert, d.w.z. vermenigvuldigt met dezelfde verdisconteringsfactor, dan kan worden aangetoond, dat voor die waarden van Θ_i en q_i, waarvoor (1) minimaal is, ook geldt, dat de verwachting van de totale kosten het tijdstip Θ_o minimaal is.

De optimale besteltijdstippen en ordergrootte kunnen dus met behulp van (1) worden gevonden. Men behoeft dus geen rekening te houden met optimale besteltijdstippen en ordergrootte van toekomstige bestellingen.

Men kan het beheren van een voorraad beschouwen als een spel. De voorraadbeheerder laat de deelnemers ieder afzonderlijk een bestelling afgeven. Met behulp van (1) berekent hij het aantal verliespunten voor iedere speler. Ongeacht het spel van de overige spelers kan iedere speler het minimale aantal verliespunten behalen. Als iedere speler goed speelt, dan zal voor de voorraadbeheerder de verwachting van de totale kosten minimaal zijn.

2.3 Enige toepassingen

Zoals reeds in 2.1 is vastgesteld, zullen wij aannemen, dat de verdeling van de vraag in een tijdsinterval van gegeven lengte onafhankelijk is van het begintijdstip van dat interval. Tevens gaan wij uit van de veronderstelling, dat één parameter van de kansverdeling de lengte van het beschouwde interval aangeeft. De cumulatieve verdeling van de vraag voor de som van twee tijdsintervallen dient een verdeling te zijn van het zelfde type, als die van de vraag voor de beide intervallen afzonderlijk en slechts verschillend in de waarde van de parameter, welke de lengte van het interval aangeeft. Als de gemiddelde vraag per tijdseenheid α bedraagt, dan zal de verwachting van de vraag voor een periode van de lengte L gegeven worden door αL. Uit de verdeling van de vraag volgt de kansverdeling van de lengten van de intervallen, waarin een tevoren gegeven hoeveelheid wordt gevraagd. De stochastische variabele, die de lengte van het interval aangeeft, waarin een hoeveelheid wordt gevraagd zullen wij aangeven het $\underline{t}_y$ of met $\underline{t}$ alleen als de verdelingsfunctie van deze variabele $F(t|Y)$ in dezelfde uitdruk-

king voorkomt en verwarring is uitgesloten. Men kan bewijzen, dat voor kansverdelingen met bovenstaande eigenschappen de volgende betrekkingen gelden:

$$\sum_{i=X+1}^{\infty}(i-X)\,p(i/T) = \int_{0}^{T}\alpha(T-t)\,dF(t/X) \qquad (2)$$

en

$$\int_{0}^{\infty} t\,dF(t/X) = \frac{X}{\alpha}\ . \qquad (3)$$

Van de betrekkingen (2) en (3) zullen wij veelvuldig gebruik maken.

In onze eerste toepassing beschouwen wij het volgende voorraadprobleem: Een voorraadbeheerder bestelt op het moment, dat de voorraad vermeerderd met de hoeveelheden in bestelling X bedraagt, een kwantiteit q, welke na een tijd $\underline{T}$ wordt afgeleverd. Indien de voorraad is uitgeput, voor het tijdstip van aflevering, zal hij om uitstel van aflevering vragen en een boete betalen van C_2 voor iedere eenheid, welke een tijdseenheid te laat wordt afgeleverd. De voorraadkosten bedragen, zoals in de inleiding is vastgesteld, C_1 per eenheid en per tijdseenheid in voorraad. Wederom worden de voorraadkosten berekend vanaf het tijdstip, dat de bestelling in het magazijn arriveert en de boeten worden geheven vanaf het moment, dat met behulp van de goederen van de vorige bestelling niet meer aan de vraag kan worden voldaan. Indien de voorraad vermeerderd met de hoeveelheden in bestelling op het tijdstip van bestelling X bedraagt, dan zal na $\underline{t}_x$ tijdseenheden, de laatste eenheid van de vorige bestelling het magazijn verlaten. Gerekend vanaf het besteltijdstip zal na $\underline{t}_{x+\ell}$ tijdseenheden de ℓ^{de} eenheid van de bestelling aan de consument moeten worden afgeleverd. Men kan eenvoudig nagaan, dat de voorraadkosten gegeven worden door:

$$C_1 \sum_{\ell=1}^{q}(\underline{t}_{x+\ell} - T)\,\underline{\delta}_\ell \qquad (4)$$

waarbij q de grootte van de bestelling aangeeft

$$\text{en } \underline{\delta}_\ell = \begin{cases} 1 & \text{voor } \underline{t}_{x+\ell} \geq \underline{T} \\ 0 & \text{voor } \underline{t}_{x+\ell} < \underline{T} \end{cases} \qquad (5)$$

De opgelegde boeten zijn dan gelijk aan:

$$C_2 \sum_{\ell=1}^{q}(\underline{T} - \underline{t}_{x+\ell})(1-\underline{\delta}_\ell) \qquad (6)$$

De sommatie in betrekking (6) beperkt zich tot q, omdat bij een

grotere achterstand de extra onkosten komen op rekening van de volgende bestelling. De totale onkosten worden dus gegeven door:

$$(C_1+C_2)\sum_{\ell=1}^{q}(\underline{T}-\underline{t}_{X+\ell})(1-\underline{\delta}_\ell)+C_1\sum_{\ell=1}^{q}(\underline{t}_{X+\ell}-\underline{T})+Q(q) \qquad (7)$$

Wij zien dus dat de kosten verbonden aan een bestelling behalve van de vraag en de levertijd slechts afhangen van de grootheden X en q. Men kan eenvoudig nagaan, dat de verwachting van de verwerkingstijd gelijk is aan $E\underline{t}_q$. Immers in deze periode wordt een hoeveelheid van de omvang q gevraagd. Wij vinden dan tenslotte voor de verliesfunctie:

$$V(\Theta,q)=\frac{(C_1+C_2)\int_0^\infty dG(T)\sum_{\ell=1}^{q}\int_0^T(T-\tau)\,dF(t/X+\ell)+C_1\sum_{\ell=1}^{q}(E\underline{t}_{X+\ell}-Et)+Q(q)}{E\underline{t}_q} \qquad (8)$$

In (8) geeft de functie G(T) de verdelingsfunctie aan van de variabele $\underline{T}$. In plaats van $V(\Theta,q)$ mogen wij ook schrijven $V(X,q)$ omdat door de grootheid X het tijdstip van bestellen volledig wordt vastgelegd. Met behulp van de betrekkingen (2) en (3) gaat (8) over in:

$$V(X,q)=\frac{(C_1+C_2)\int_0^\infty dG(T)\sum_{\ell=1}^{q}\sum_{i=X+\ell+1}^{\infty}(i-X-\ell)\,p(i/T)+C_1\left\{\frac{q}{\alpha}(X+\frac{1}{2}(q+1)-qEI_1\right\}+Q(q)}{\frac{q}{\alpha}} \qquad (9)$$

De functie (X,q) is slechts dan minimaal voor X_o en q_o als geldt:

$$V(X_o+1,q_o)-V(X_o,q_o)\geq 0 \qquad (10)$$

$$V(X_o-1,q_o)-V(X_o,q_o)\geq 0 \qquad (11)$$

$$V(X_o,q_o+1)-V(X_o,q_o)\geq 0 \qquad (12)$$

$$V(X_o,q_o-1)-V(X_o,q_o)\geq 0 \qquad (13)$$

Uit (9) en (10) volgt:

$$\int_0^\infty dG(T)\sum_{\ell=1}^{q_o}\sum_{i=X_o+\ell+1}^{\infty}p(i/T)\leq\frac{C_1q_o}{C_1+C_2} \qquad (14)$$

Uit (9) en (11) volgt:

$$\int_0^\infty dG(T)\sum_{\ell=1}^{q_o}\sum_{i=X_o+\ell}^{\infty}p(i/T)\geq\frac{C_1q_o}{C_1+C_2} \qquad (15)$$

Uit (9) en (12) volgt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q_o+1) - b(q_o) - \frac{C_1+C_2}{q_o(q_o+1)\alpha}\int_o^\infty dG(T) \sum_{j=1}^{q_o} j \sum_{l=x_o+j+1}^{\infty} p(l/T) \geqslant 0 \qquad (16)$$

waarbij

$$b(q_o) = \frac{\varphi(q_o)}{q} \qquad (17)$$

en tenslotte uit (9) en (13)

$$\tfrac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q_o) - b(q_o-1) + \frac{C_1+C_2}{q_o(q_o-1)\alpha}\int_o^\infty dG(T) \sum_{j=1}^{q_o-1} j \sum_{l=x_o+j+1}^{\infty} p(l/T) \leqslant 0 \qquad (18)$$

In plaats van (14), (15), en (18) mogen wij ook schrijven:

$$\sum_{l=1}^{q_o} \sum_{x_o+l+1}^{\infty} p_o(i) \leqslant \frac{C_1 q_o}{C_1+C_2} \qquad (19)$$

$$\sum_{l=1}^{q_o} \sum_{x_o+l}^{\infty} p_o(i) \geqslant \frac{C_1 q_o}{C_1+C_2} \qquad (20)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q_o+1) - b(q_o) + \frac{C_1+C_2}{q_o(q_o+1)\alpha} \sum_{j=1}^{q_o} j \sum_{l=x_o+j+1}^{\infty} p_o(l) \geqslant 0 \qquad (21)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q_o) - b(q_o+1) - \frac{C_1+C_2}{q_o(q_o-1)\alpha} \sum_{j=1}^{q_o-1} j \sum_{l=x_o+j+1}^{\infty} p_o(l) \leqslant 0 \qquad (22)$$

waarbij $p_o(k)$ de kans is op een vraag k gedurende de levertijd. Met behulp van (19) t/m (22) kan de optimale bestelgrootte q_o en het optimale besteltijdstip Θ_o worden bepaald. Het besteltijdstip Θ_o zal n.l. optimaal zijn, als de grootheid X op dat tijdstip de waarde X_o aanneemt. In verre weg de meeste praktijksituaties zullen de ongelijkheden (19) en (22) een unieke oplossing geven, niettegenstaande het feit, dat deze ongelijkheden, slechts noodzakelijk zijn voor een absoluut minimum. Indien meerdere oplossingen worden gevonden, zal men de resultaten met elkander dienen te vergelijken (evt. met behulp van (9)).

Thans zullen wij een voorraadprobleem beschouwen, waarbij noodinkopen worden verricht als de voorraad op een gegeven moment ontoereikend is. Wij zullen voor de eenvoud aannemen, dat op het besteltijdstip alle vorige bestellingen zijn afgeleverd 3).

De grootheid X geeft nu dus de werkelijke voorraad aan. Na t_x

---

3) Ook zonder deze beperking kunnen optimale besteltijdstippen en ordergrootte worden bepaald, zie hiervoor 1).

tijdseenheden in deze voorraad uitgeput. Als $\underline{t}_x > \underline{T}$ is, dan zal gedurende een tijdsinterval $\underline{t}_x - \underline{T}$ over de gehele nieuwe order voorraadkosten dienen te worden betaald. Vervolgens zal voor de ℓ^{de} eenheid van de bestelling $\underline{t}_\ell$ tijdseenheden lang voorraadkosten moeten worden betaald. De totale voorraadkosten worden dan ook gegeven door:

$$C_1 q(\underline{t}_x - \underline{T})\underline{\gamma} + C_1 \sum_{\ell=1}^{q} \underline{t}_\ell \qquad (23)$$

waarbij $\underline{\gamma} = 1$ als $\underline{t}_x \geq \underline{T}$
$\underline{\gamma} = 0$ als $\underline{t}_x < \underline{T}$ (24)

Als $\underline{d}$ de vraag voorstelt in de levertijd van de bestelling, dan worden de "neen-verkoop"kosten gegeven door:

$$C_3(\underline{d} - X)\underline{\mathcal{E}} \qquad (25)$$

waarbij C_3 de inkoopsprijs per eenheid bij noodinkoop aangeeft en voor $\mathcal{E}$ geldt:

$$\underline{\mathcal{E}} = \begin{cases} 1 & \text{voor } \underline{d} \geq X \\ 0 & \text{voor } \underline{d} < X \end{cases} \qquad (26)$$

De kosten, welke aan een bestelling zijn verbonden worden dus nu gegeven door:

$$C_1 \sum_{\ell=1}^{q} \underline{t}_\ell + C_1 q(\underline{t}_x - \underline{T})\underline{\gamma} + C_3(\underline{d} - X)\underline{\mathcal{E}} + Q(q) \qquad (27)$$

Ook nu kan men gemakkelijk inzien, dat de totale kosten behalve van de vraag en de levertijd slechts afhangen van de grootheden X en q. De verwachting van de verwerkingstijd is gelijk aan de som van de verwachting van de periode van neen-verkoop en de verwachting van het tijdsinterval, waarin q eenheden worden gevraagd, m.e.w.

$$E\underline{\tau}(\Theta, q) = E\underline{t}_q + \int_0^\infty dG(T) \int_0^T (T - t_x)\, dF(t/X) \qquad (28)$$

De verliesfunctie $V(\Theta,q)$ wordt dus gegeven door:

$$V(\Theta,q) = \frac{\frac{1}{2}C_1 q \frac{(q+1)}{\alpha} + C_1 q_0 \int_0^\infty dG(T) + \int_T^\infty (\tau - T)\, dF(\tau/X) + C_3 \sum_{X+1}^{\infty} (i - X) P_0(i) + Q(q)}{\frac{q}{\alpha} + \int_0^\infty dG(T) \int_0^T (T - t)\, dF(t/X)} \qquad (29)$$

Aangezien ook nu het besteltijdstip Θ volledig wordt vastgelegd door de grootheid X, zullen wij de verliesfunctie $V(\Theta,q)$ voortaan aangeven met $V(X,q)$. Gebruik makende van de bestrekking (2) verkrijgen wij tenslotte voor de verliesfunctie $V(X,q)$:

$$V(X,q)=\frac{\frac{1}{2}C_1\frac{q}{\alpha}(q+1+2X)-C_1qET+Q(q)+(C_3+C_1\frac{q}{\alpha})\sum_{X+1}^{\infty}(i-X)P_o(i)}{\frac{q}{\alpha}+\sum_{X+1}^{\infty}\left(\frac{i-X}{\alpha}\right)P_o(i)} \tag{30}$$

waarbij $p_o(k)$ wederom de kans aangeeft op een vraag van de grootte k tijdens de levertijd.

De functie $V(X,q)$ is slechts dan minimaal voor X_o en q_o als voldaan is aan de volgende ongelijkheden:

$$V(X_o+1,\ q_o)-V(X_o,q_o)\geq 0 \tag{31}$$

$$V(X_o-1,\ q_o)-V(X_o,q_o)\geq 0 \tag{32}$$

$$V(X_o,q_o+1)-V(X_o,q_o)\geq 0 \tag{33}$$

$$V(X_o,q_o-1)-V(X_o,q_o)\geq 0\ . \tag{34}$$

Uit (30) en (31) volgt:

$$V(X_o,q_o)\geq \alpha C_3+C_1q_o-\frac{C_1q_o}{\sum_{X+1}^{\infty}P_o(i)} \tag{35}$$

hetgeen overeenkomt met:

$$\sum_{X_o+1}^{\infty}P_o(i)\leq\frac{C_1q_o}{\alpha C_3+C_1q_o-V(X_o,q_o)} \tag{36}$$

Uit (30) en (32) volgt:

$$V(X_o,q_o)\leq \alpha C_3+C_1q_o-\frac{C_1q_o}{\sum_{X}^{\infty}P_o(i)} \tag{37}$$

hetgeen overeenkomt met:

$$\sum_{X_o}^{\infty}P_o(i)\geq\frac{C_1q_o}{\alpha C_3+C_1q_o-V(X_o,q_o)} \tag{38}$$

Een nadere beschouwing van (36) en (38) leert ons dat de optimale kans op neen-verkoop ongeveer gelijk moet zijn aan:

$$\frac{C_1\frac{q_o}{\alpha}}{C_3-\frac{V(X_o,q_o)}{\alpha}+C_1\frac{q_o}{\alpha}} \tag{39}$$

waarbij men aan $\frac{V(X_o,q_o)}{\alpha}$ de betekenis kan hechten van de verwachting van de gemiddelde onkosten per éénheid.

Zoals te verwachten was, nadert de optimale kans op neen-ver-

koop tot 1, als C_3 nadert tot $\frac{V(X_o, q_o)}{\alpha}$.

Uit (30) en (33) volgt:

$$V(X_o, q_o) \leqslant C_1(q_o+1) + C_1 \sum_{o}^{X_o} (X_o - i)\, p_o(i) + \alpha\left[\varphi(q_o+1) - \varphi(q_o\right] \qquad (40)$$

Uit (30) en (34) tenslotte:

$$V(X_o, q_o) \geqslant C_1 q_o + C_1 \sum_{o}^{X_o} (X_o - i) p_o(i) + \alpha\left[\varphi(q_o) - \varphi(q_o - 1\right] \qquad (41)$$

Uit (36), (38), (40) en (41) volgt tenslotte na enig rekenen:

$$\tfrac{1}{2} C_1 + \alpha b(q_o+1) - \alpha b(q_o) - \frac{C_1 \sum_{o}^{X_o-1} p_o(i)}{\sum_{x}^{\infty} p_o(i)} \sum_{X_o+1}^{\infty} \frac{(i - X_o)}{q_o+1} p_o(i) \geqslant 0 \qquad (42)$$

$$\tfrac{1}{2} C + \alpha b(q_o) - \alpha b(q_o - 1) - \frac{C_1 \sum_{o}^{X_o} p_o(i)}{\sum_{X_o+1}^{\infty} p_o(i)} \sum \frac{(i - X_o)}{q_o} p_o(i) \leqslant 0 \qquad (43)$$

Door gebruik te maken van iteratiemethoden kan men met behulp van (42), (43), (40), (41) en (36), (38) de optimale waarden van q en X bepalen.

Het derde voorbeeld [1]

3.1. Inleiding

In het derde voorbeeld wordt uitgegaan van de veronderstelling dat wij belast zijn met de inkoop van papier voor een dagbladbedrijf. Ook nu kan slechts op van te voren vastgestelde en onderling op gelijke afstand liggende tijdstippen Θ_i (i=1,2,3..) inkopen doen, die direct worden afgeleverd. Vervolgens zullen wij aannemen, dat de behoefte aan papier in de perioden tussen de besteltijdstippen constant is. De inkoper dient er steeds voor te zorgen, dat voldoende papier aanwezig is, hetgeen bij een constante vraag altijd mogelijk is. De prijs C per eenheid is nu echter geen constante grootheid, maar zal naar wij aannemen een kansverdeling volgen van een bekend type.

De vraag, waarmee wij nu worden geconfronteerd is van de volgende gedaante: "Hoeveel papier moeten wij op een besteltijdstip inslaan, als zowel de geldende prijs als de resterende voorraad op dat moment bekend zijn".

Indien de prijs relatief hoog is, dan wordt slechts het hoogst nodige ingekocht. Is daarentegen de prijs laag, dan zullen wij veelal grotere hoeveelheden inslaan, waarbij dan rekening gehouden dient te worden met de maximale opslagcapaciteit M. De oplossingsmethoden gegeven in de vorige voorbeelden stelden ons in staat de optimale bestelgrootten op een ondubbelzinnige wijze te bepalen. Deze grootheden werden steeds zo gekozen, dat de verwachting van de onkosten minimaal was. Met de in dit voorbeeld af te leiden methode kunnen wij slechts nagaan welke van twee alternatieve inkooppolitieken de beste is.

Om het gestelde probleem te kunnen oplossen, zullen wij in het hierna volgende gebruik maken van de volgende veronderstellingen:

1e. de kansverdeling van de papierprijs bezit voor ieder besteltijdstip een bekende en gelijke kansdichtheid p(c)

2e. deze kansverdeling is voor ieder besteltijdstip onafhankelijk van de papierprijs op de voorafgaande besteltijdstippen

3e. indien de voorraad aan het eind van een periode S bedraagt, dan worden de opslagkosten in die periode gegeven door een bekende functie h(S).

---

1) Dit voorbeeld is gebaseerd op G. KREWERAS, La mise en équations du problème des stocks,
Revue de Statistique Appliquée, 3 (1955) 83-89

Het behoeft geen betoog, dat de te bestellen hoeveelheid q_i op het tijdstip Θ_i een functie zal zijn van de aanwezige voorraad S_{i-1} en de op het tijdstip Θ_i geldende prijs C_i, m.a.w.:

$$q_i = f(S_{i-1}, C_i) \qquad (1)$$

Verder zal ieder reëel inkoopvoorschrift $f(S_{i-1}, C_i)$ moeten voldoen aan de volgende voorwaarden:

1e. $f(S_{i-1}, C_i)$ is een monotoon niet stijgende functie van S_{i-1} en C_i,

2e. $f(S_{i-1}, C_i) + S_{i-1} \leqslant M$, als M de maximale opslagcapaciteit aangeeft.

Als de behoefte aan papier per periode a bedraagt dan geldt:

$$S_i = S_{i-1} + f(S_{i-1}, C_i) - a \qquad (2)$$

Immers de voorraad aan het eind van de i^{de} periode is gelijk aan de restantvoorraad S_{i-1} vermeerderd met de bestelgrootte q_i en verminderd met het verbruik a.

Voor een gegeven waarde van S_{i-1} is de grootheid S_i een stochastische variabele, omdat het een functie is van de stochastische variabele $\underline{C}_i$.

Gezien vanuit het tijdstip Θ_1 is ook de grootheid S_{i-1} stochastisch. De eindvoorraad S_i bezit dus ook een onvoorwaardelijke kansverdeling, welke slechts afhangt van de situatie op het tijdstip Θ_1. Indien wij met ingang van het tijdstip Θ_1 onze bestelgrootte q_i steeds zullen bepalen met behulp van het inkoopvoorschrift $f(S_{i-1}, C_i)$, dan zal de waarde van S_i naarmate i groter gekozen wordt, steeds minder afhankelijk zijn van de beginsituatie op Θ_1. Immers als de voorraad op het tijdstip Θ_1 gering was, zal men op de tussengelegen besteltijdstippen meer besteld hebben, dan bij een grotere beginvoorraad, waardoor het effect van een kleine voorraad op Θ_1 succesievelijk wordt opgeheven.

Uit deze redenering volgt, dat als i maar voldoende groot gekozen is, de onvoorwaardelijke kansverdeling van $\underline{S}_{i-1}$ en $\underline{S}_i$ beschouwd vanuit Θ_1 slechts weinig van elkander zullen verschillen. In het hierna volgende zullen wij beide kansverdelingen, dan ook geli gelijk veronderstellen.

Voor de eenvoud wordt in het vervolg voor S_{1-1} en S_1 geschreven S resp S_1.

De verwachting van de opslagkosten en de verwachting van de inkoopkosten worden dan voor een voldoend ver afgelegen periode gegeven door:

$$D_1 = \int_0^{M-a} h(S_1)\ W(S_1)\, \delta S_1 \qquad (3)$$

en

$$D_2 = \int_0^{M-a} W(S)\delta s \int_0^{\infty} C\, f(S,C)\, p(C)\, \delta C \qquad (4)$$

waarbij W(S) de kansdichtheid voorstelt van de variabele S.

De voorraad S wordt bepaald door de grondstoffenprijs van de vorige periode en bezit dus volgens de tweede veronderstelling een van C onafhankelijke kansverdeling.

Met behulp van (3) en van (4) zijn wij in staat na te gaan, welke van twee alternatieve inkoopvoorschriften de beste is. Het inkoopvoorschrift, waarvoor de som van D_1 en D_2 de laagste waarde aanneemt, zullen wij het beste noemen.

3.2. De bepaling van de kansdichtheid W(S)

Wij zijn tot op zekere hoogte vrij in onze keuze van het inkoopvoorschrift f(S,C). Wij dienen er alleen voor te zorgen, dat als $f(S,C) \neq 0$, het inkoopvoorschrift, een continue monotoon dalende functie is van S en C en dat bovendien voor f(S,C) geldt:

$$0 \leqslant f(S,C) \leqslant M-S \qquad (5)$$

$$S_1 = S + f(S,C) - a \geqslant 0 \qquad (6)$$

De ongelijkheid (5) geeft aan dat de voorraad niet groter mag worden dan de opslagcapiciteit M, terwijl volgens de ongelijkheid (6) in de komende periode geen tekort aan papier mag ontstaan.

Uit

$$S_1 = S + f(S,C) - a \qquad (2)$$

volgt, dat voor iedere waarde van C en bij vaste waarde van S één en slechts één waarde van S behoort. Omgekeerd behoort bij iedere waarde van S_1 en S, waarvoor geldt $S_1 > S-a$ één en slechts één waarde van C.

Uit $S=S-a$ volgt $f(S,C)=0$ en dit betekent dat bij een vaste waarde van S voor elke waarde van C, waarvoor geldt $f(S,C)=0$, de zelfde waarden van S_1 behoren. Als $S_1=S-a$ kan dus C niet ondubbelzinnig door S_1 en S worden vastgelegd.

Voor $S_1 > S-a$ is C een monotoon dalende functie van S_1 en S en wel:

$$C = \varphi(S_1,S) \qquad (7)$$

Als S_1^o, C_o en S voldoen aan:

$$S_1^o = S + r(S,C_o) - a \qquad (8)$$

$$S_1^o > S-a \qquad (9)$$

dan geldt bovendien:

$$P\left[S_1 \leqslant S_1^o / S\right] = P\left[C \geqslant C_o / S\right] = \int_{\varphi(S_1^o, S)}^{\infty} p(C)\delta C \qquad (10)$$

Uit (10) volgt, dat de kans op een nieuwe eindvoorraad tussen C_1 en S_1+dS_1 onder de voorwaarde dat de oude voorraad gelijk is aan S gegeven wordt door:

$$K(S_1/S)\,\delta S_1 = -p\left[\varphi(S_1,S)\right] \frac{\delta f(S_1,S)}{\delta S_1}\,\delta S_1 \qquad (11)$$

waarbij $K(S_1/S)$ de voorwaardelijke kansdichtheid aangeeft.

In plaats van (11) kunnen wij ook schrijven:

$$K(S_1/S)\delta S_1 = \frac{-p(C)}{\frac{\delta f(S,C)}{\delta C}}\,\delta S_1 \qquad (12)$$

Met behulp van de tactiek f(S,C) en de kansdichtheid p(C) is dus voor $S_1 > S-a$ de voorwaardelijke kansdichtheid $K(S_1/S)$ te bepalen.

Verder geldt:

$$P\left[S_1 = S-a\right] = \int_{\varphi(S-a,S)}^{\infty} p(C)\,\delta C \qquad (13)$$

Immers voor iedere waarde van $C > \varphi(S-a,S)$ geldt $f(S,C)=0$ en dus ook $S_1 = S-a$.

Aangezien de kansverdeling van S gelijk wordt verondersteld aan die van S_1 moet de onvoorwaardelijke verdeling W(S) van de voorraad S voldoen aan de volgende betrekkingen:

$$W(S_1) = \int_0^{S_1+a} K(S_1/S)\; W(S)\;\delta S + W(S_1+a).P\left[\underline{C} > \varphi(S_1, S_1+a)\right] \qquad (14)$$

$$\int_0^{\infty} W(S_1)\;\delta S_1 = 1 \qquad (15)$$

3.3. Het opstellen en vergelijken van twee inkoopvoorschriften f(S,C) en de bepaling van de bijbehorende W(S)

Voor de eenvoud zullen wij de behoefte aan papier a gelijk stellen aan 1. Het eerste voor te stellen inkoopvoorschrift wordt gegeven door:

$$f(S,C) \begin{cases} = (M-1)e^{-C}+1-S & \text{als } e^{-C} \geqslant \frac{S-1}{M-1} \\ = 0 & \text{als } e^{-C} < \frac{S-1}{M-1} \end{cases} \qquad (16)$$

Hieruit volgt [2]:

$$\begin{aligned} &= (M-1)\ e^{-C} && \text{voor } e^{-C} \geq \frac{S-1}{M-1} \\ S_1 &= S-1 && \text{voor } e^{-C} < \frac{S-1}{M-1} \end{aligned} \qquad (17)$$

Het is eenvoudig in te zien, dat zowel de eindvoorraad S_1 als f(S,C) altijd groter of gelijk is aan nul.

Verder zullen wij aannemen, dat de kansverdeling van de prijs per eenheid C gegeven wordt door:

$$p(C) = 2e^{-2C} \qquad (18)$$

Aangezien uit (16) volgt voor $e^{-C} \geq \frac{S-1}{M-1}$

$$\frac{\delta f(S,C)}{\delta C} = -(M-1)\ e^{-C} \qquad (19)$$

geldt volgens (12) en (17):

$$K(S_1/S) = \frac{2e^{-2C}}{(M-1)e^{-C}} = \frac{2e^{-C}}{M-1} = \frac{2S_1}{(M-1)^2} \qquad (20)$$

Uit (17) volgt bovendien:

$$P\left[S_1=S-1\right] = P\left[e^{-C} < \frac{S-1}{M-1}\right] = 2\int_{\ln\frac{M-1}{S-1}}^{\infty} e^{-2C}\,\delta C = \left(\frac{S-1}{M-1}\right)^2 \qquad (21)$$

De bijbehorende onvoorwaardelijke kansdichtheid $W(S_1)$ moet dus voldoen aan (zie (14)):

$$W(S_1) = \frac{2S_1}{(M-1)^2}\,\Omega\,(S_1+1) + \frac{S_1^2}{(M-1)^2}\,W(S_1+1) \qquad (22)$$

waarbij

$$\Omega(S_1+1) = \int_0^{S_1+1} W(t)\,dt \qquad (23)$$

Aangezien steeds voldaan moet zijn aan $S_1 \leq M-1$, geldt: $W(S_1)=0$ voor $S_1 \geq M-1$. Voor $M-2 < S_1 \leq M-1$ gelden de betrekkingen:

$$W(S_1+1)=0 \qquad (24)$$

$$\Omega(S_1+1)=1 \qquad (25)$$

en vinden wij dus voor $W(S_1)$:

---

2) Men kan in plaats van e^{-C} ook een andere monotoon dalende functie van C gebruiken. Bij voorbeeld de staartintegralen van getabelleerde verdelingen.

$$W(S_1) = \frac{2\,S_1}{(M-1)^2} \qquad (26)$$

Voor $M-3 < S_1 \leqslant M-2$ geldt dan:

$$W(S_1) = \frac{2S_1}{(M-1)^2}\left(1 - \int_{S_1+1}^{M-1} \frac{2t\,dt}{(M-1)^2}\right) + \frac{S_1^{\,2}}{(M-1)^2}\,\frac{2(S_1+1)}{(M-1)^2} = \frac{2S_1(S_1+1)(2S_1+1)}{(M-1)^4} \qquad (27)$$

Indien wij op deze wijze voortgaan kunnen wij de kansdichtheid $W(S_1)$ bepalen voor het gehele interval $(0 \leqslant S_1 \leqslant M-1)$.

Voor M=3 vinden wij dus voor $W(S_1)$:

$$W(S_1) = \frac{S_1(S_1+1)(2S_1+1)}{8} \qquad \text{voor } 0 \leqslant S_1 \leqslant 1 \qquad (28)$$

$$W(S_1) = \tfrac{1}{2}S_1 \qquad \text{voor } 1 < S_1 \leqslant 2 \qquad (29)$$

$$W(S_1) = 0 \qquad \text{voor } 2 < S_1$$

Men kan eenvoudig nagaan, dat geldt:

$$\Omega(2) = \int_0^2 W(S_1)\delta S_1 = \int_0^1 \frac{S_1(S_1+1)(2S_1+1)}{8} + \tfrac{1}{2}\int_1^2 S_1 \delta S_1 = 1 \qquad (30)$$

Indien wij de opslagkosten per eenheid en tijdseenheid aangeven met h en $h(S_1)$ vastleggen door:

$$h(S_1) = h(S_1 - \tfrac{1}{2}) \qquad (31)$$

dan vinden wij met behulp van (3) en (4) voor D_1 resp. D_2:

$$D_1 = 0{,}852\ k \qquad (32)$$

$$D_2 = 0{,}297 \qquad (33)$$

en dus voor D_1+D_2:

$$D_1 + D_2 = 0{,}852\ k + 0{,}297 \qquad (34)$$

Het tweede inkoopvoorschrift zullen wij vastleggen door:

$$f(S,C) \begin{cases} = (M-1)\,e^{-2C}+1-S & \text{voor } e^{-2C} \geqslant \dfrac{S-1}{M-1} \\ = 0 & \text{voor } e^{-2C} < \dfrac{S-1}{M-1} \end{cases} \qquad (35)$$

Hieruit volgt:

$$S_1 \begin{cases} = (M-1)\,e^{-2C} & \text{voor } e^{-2C} \geqslant \dfrac{S-1}{M-1} \\ = S-1 & \text{voor } e^{-2C} < \dfrac{S-1}{M-1} \end{cases} \qquad (36)$$

terwijl bovendien geldt volgens (35):

$$\frac{\delta f(S,C)}{\delta C} = -2(M-1)\ e^{-2C} \qquad \text{voor } e^{-2C} \geq \frac{S-1}{M-1} \qquad (37)$$

Daar de kansverdeling van de prijs de zelfde is als bij het eerste inkoopvoorschrift, vinden wij voor de voorwaardelijke kansdichtheid $K(S_1/S)$:

$$K(S_1/S) = \frac{2e^{-2C}}{+2(M-1)\ e^{-2C}} = \frac{1}{M-1} \qquad \text{voor } S_1 \geq S-1 \qquad (38)$$

en voor de kans $P[\underline{S}_1=S-1]$:

$$P\left[S_1=S-1\right] = P\left[\underline{C} > \ln\sqrt{\frac{M-1}{S-1}}\right] = 2\int_{\ln\frac{M-1}{S-1}}^{\infty} e^{-2C}\delta C = \frac{S-1}{M-1} \qquad (39)$$

De bijbehorende $W(S_1)$ moet dan voldoen aan:

$$W(S_1) = \frac{1}{M-1}\,\Omega\,(S_1+1) + \frac{S_1}{M-1}\,W(S_1+1) \qquad (40)$$

Daar wederom geldt:

$$\begin{aligned} \Omega(S_1+1) &= 1 && \text{voor } S_1 > M-2 \\ W(S_1+1) &= 0 && \text{voor } S_1 > M-2 \end{aligned} \qquad (41)$$

vinden wij voor $M-2 < S_1 \leq M-1$:

$$W(S_1) = \frac{1}{M-1} \cdot 1 + \frac{S_1}{M-1} \cdot 0 = \frac{1}{M-1} \qquad (42)$$

Met behulp van het hier verkregen resultaat geldt voor $m-3 < S_1 \leq m-2$:

$$W(S_1) = \frac{1}{M-1}\left(1 - \int_{S_1+1}^{M-1} \frac{dt}{M-1}\right) + \frac{S_1}{(M-1)^2} = \frac{2S_1+1}{(M-1)^2} \qquad (43)$$

Voor M=3 vinden wij dus:

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 \\ W(S_1) &= \frac{2S_1+1}{4} && \text{voor } 0 < S_1 \leq 1 \\ W(S_1) &= \tfrac{1}{2} && \text{voor } 1 < S_1 \leq 2 \end{aligned} \qquad (44)$$

Wederom kan eenvoudig worden nagegaan:

$$\Omega(2) = \int_0^2 W(S_1) = \int_0^1 \frac{2S_1+1}{4}\,\delta S_1 + \tfrac{1}{2}\int_1^2 \delta S_1 = 1 \qquad (45)$$

Wij vinden ten slotte voor D_1 resp. D_2 met behulp van (3) en (4):

$$D_1 = 0{,}542\ k \qquad (48)$$

$$D_2 = 0{,}334 \qquad (49)$$

en dus voor D_1+D_2:

$$D_1+D_2 = 0{,}542\ k + 0{,}334 \qquad (50)$$

Hieruit blijkt dat als $k < 0{,}12$ is het eerste inkoopvoorschrift een beter resultaat oplevert dan het tweede.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 166 (09)

Cursus "Operations Research"

Hoofdstuk IV: Over de speltheorie

door

J.Kriens

2de druk

1958

Het is niet mogelijk de theorie van de strategische spelen in kort bestek volledig te behandelen. Wij zullen ons daarom beperken tot het invoeren van de voornaamste begrippen en het geven van enkele belangrijke stellingen en aanwijzingen van de gebieden waar deze wellicht toegepast kunnen worden.

Literatuur

Twee goede elementaire artikelen, waarin de grondgedachten van deze theorie uiteengezet worden, zijn besprekingen van het boek van A. WALD: Statistical Decision Functions, nl.:

J.L. SAVAGE, The theory of Statistical Decisions, J.A.S.A. 46 (1951) 55-67, [1)]

en D. VAN DANTZIG, De natuur als tegenspeler, Statistica 5 (1951) 149-159.

Over de speltheorie zijn na het boek van J. VON NEUMANN en O. MORGENSTERN (1944), Theory of Games and Economic Behavior (2e druk 1947) nog verschillende andere werken verschenen. Een zeer goede inleiding is van J.C.C. Mc KINSEY (1952), Introduction to the Theory of Games. Verder zijn er twee boeken, waarin met eenvoudige voorbeeldjes duidelijk wordt gemaakt in welke situaties men de speltheorie kan gebruiken. Het zijn:

J. Mc DONALD (1950), Strategy in Poker, Business and War,

J.D. WILLIAMS (1954), The Compleat Strategyst.

Verder noemen wij nog: R.D. LUCE and H. RAIFFA (1957), Games and Decisions, introduction and critical survey. In dit boek worden de grondbegrippen van de speltheorie en de toepasbaarheid van de speltheorie in de sociale wetenschappen zorgvuldig onderzocht. Het gebruik van wiskunde is zoveel mogelijk beperkt.

Tenslotte herinneren wij aan het in Hoofdstuk II reeds genoemde boekje van S. VAJDA (1956), Theory of Games and Linear Programming, dat eveneens in wiskundig opzicht geen hoge eisen stelt.

1. Enkele begrippen uit de speltheorie

Naast de zuivere kansspelen, bestaan er spelen, waarin de spelers zelf invloed uit kunnen oefenen op het resultaat, zoals bridge en het schaakspel. Dit type spelen noemt men strategische spelen. Zij bezitten een grote overeenkomst met allerlei situaties uit het dagelijks leven, waarin twee of meer partijen met elkaar in conflict zijn.

Een zeer eenvoudig strategisch spel is het spel, waarin twee

---

1) De door SAVAGE genoemde minimaxregret methode kan zeer ernstig worden becritiseerd.

personen onafhankelijk van elkaar een getal aangeven en waarin het van de combinatie van deze getallen afhangt hoeveel de één de ander moet betalen. Bij iedere combinatie van getallen is de som van de bedragen die beide spelers ontvangen dus nul; een spel waarvoor deze eigenschap geldt en waaraan, zoals in dit geval twee personen deelnemen is een twee personen nulspel. Laten wij aannemen dat de ene speler (I) kan kiezen uit de getallen 1, 2 en 3 en de andere (II) uit de getallen 1, 2, 3 en 4. Tabel I geeft aan hoeveel guldens II na afloop aan I moet betalen. Wijst I dus het getal 2 aan en II het getal 3, dan ontvangt I na afloop ƒ 1.--; wijst I echter eveneens het getal 3 aan, dan ontvangt hij -ƒ 1.--, m.a.w. hij moet II ƒ 1.-- betalen; enz.

Tabel I

De winstfunctie

I \ II	1	2	3	4
1	3	5	0	-5
2	4	2	1	2
3	2	0	-1	3

Iedere speelwijze die I of II kan kiezen, noemen wij een strategie. Wij geven de strategieën aan met x voor I en met y voor II; in het voorbeeld kan x dus de waarden 1, 2 en 3 aannemen en y de waarden 1, 2 ,3 en 4. De functie die aangeeft hoeveel II na afloop aan I moet betalen noemen wij de winstfunctie; de notatie is M(x,y), zo is M(1,4)=-5. Een spel, waarin beide spelers slechts uit eindig veel strategieën kunnen kiezen, is een eindig of rechthoekig spel.

De vraag rijst nu of het mogelijk is redelijke strategieën te vinden voor de deelnemers.

Wanneer I strategie 1 speelt, zal hij, afhangend van de keuze welke II doet 3, 5, 0 of -5 ontvangen. De slechtste uitkomst is dan voor I: -5. Als hij het getal 2 kiest, is de slechtste uitkomst +1 en als hij het getal 3 kiest -2. Nu zal I besluiten die strategie te nemen, waarbij het bedrag dat hij minimaal ontvangt zo groot mogelijk is; hij moet dan het getal 2 aanwijzen. In het algemeen kan men deze strategie vinden door eerst voor iedere waarde van x het minimum van M(x,y) te berekenen en vervolgens

te bepalen voor welke waarde van x de functie $\min_y M(x,y)$ maximaal is.

Daarentegen zal II zich wellicht op het standpunt stellen, dat hij het bedrag dat hij hoogstens moet betalen, zo klein mogelijk moet trachten te maken. Hij berekent dan voor ieder van de getallen 1, 2, 3 en 4 de maxima van de eventueel te betalen bedragen en kiest dan die strategie, waarvoor dit maximum minimaal is, met andere woorden hij kiest die strategie, waarvoor $\max_x M(x,y)$ minimaal is. In ons geval is $\max_x M(x,1) = 4$, $\max_x M(x,2) = 5$, $\max_x M(x,3) = 1$ en $\max_x M(x,4) = 3$; het minimum over y is dus 1 en het wordt bereikt voor y=3. Men noemt deze methode, waarbij men het maximaal mogelijke verlies minimaliseert de minimaxmethode.

In het voorbeeld is $\max_x \min_y M(x,y)=1$ en $\min_y \max_x M(x,y)=1$. Speler I kan er dus voor zorgen, dat hij minstens ƒ 1.-- ontvangt en speler II kan er voor zorgen, dat I niet meer dan ƒ 1.-- krijgt. Er kan dus geen strategie voor I bestaan, die hem een hogere winst garandeert dan ƒ 1.--, zodat dus iedere strategie die de mogelijkheid geeft op een winst groter dan ƒ 1.-- ook de mogelijkheid van een kleinere winst inhoudt. Voor II gelden soortgelijke overwegingen en men kan daarom zeggen dat de strategieën 2 voor I en 3 voor II in dit opzicht optimaal zijn.

Voor spelen, waarvan de winstfunctie M(x,y) de eigenschap bezit, dat

$$\max_x \min_y M(x,y) = \min_y \max_x M(x,y) \qquad (1)$$

is, kan men op de aangegeven wijze dus redelijke strategieën voor de spelers construeren. Wij noemen de corresponderende strategieën de optimale strategieën van I en II.

2. Het kruis of munt-spel

Dat niet alle winstfuncties aan de relatie (1) voldoen kunnen wij illustreren aan de hand van het kruis of munt-spel. De spelers leggen hierin onafhankelijk van elkaar een munt op tafel. Blijken beide munten met dezelfde kant boven te liggen, dan ontvangt I ƒ1.- van II, terwijl in het andere geval II ƒ 1.-- van I ontvangt. Beide spelers kunnen in dit spel uit twee strategieën kiezen, nl. kruis of munt bovenleggen. De winstfunctie is vermeld in tabel II.

Tabel II

Winstfunctie in het kruis of munt-spel

I \ II	K	M
K	1	-1
M	-1	1

In dit spel is $\max_x \min_y M(x,y) = -1$ en $\min_y \max_x M(x,y) = +1$ en er geldt dus: $\max_x \min_y M(x,y) < \min_y \max_x M(x,y)$.

Wij bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling 1:

Zijn X en Y twee gegeven verzamelingen, zij f(x,y) gedefinieerd voor $x \in X$ en $y \in Y$ en bestaan $\max_x \min_y f(x,y)$ en $\min_y \max_x f(x,y)$, dan is

$$\max_x \min_y f(x,y) \leqslant \min_y \max_x f(x,y) \tag{2}$$

Bewijs:

Voor iedere x uit X en iedere y uit Y geldt

$$\min_y f(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant \max_x f(x,y) \tag{3}$$

Vergelijken wij nu $\min_y f(x,y)$ en $\max_x f(x,y)$, dan zien wij, dat in

$$\min_y f(x,y) \leqslant \max_x f(x,y) \tag{4}$$

het linkerlid onafhankelijk is van y en het rechterlid onafhankelijk van x. Bovendien geldt (4) voor iedere waarde van x en iedere waarde van y. De ongelijkheid blijft daarom juist als wij het maximum over x en het minimum over y nemen en dus is

$$\max_x \min_y f(x,y) \leqslant \min_y \max_x f(x,y) \tag{2}$$

Wij passen deze stelling toe op de winstfunctie M(x,y). Wanneer wij $\max_x \min_y M(x,y)$ aangeven met λ_G en $\min_y \max_x (x,y)$ met ν_G, dan geldt dus voor ieder spel dat aan de in stelling 1 genoemde eisen voldoet

$$\lambda_G \leqslant \nu_G \tag{5}$$

Dit wordt geïllustreerd in figuur 1; I kan er voor zorgen dat hij minstens λ_G ontvangt, II kan zijn strategie zo kiezen dat de winst van I in ieder geval kleiner is dan ν_G.

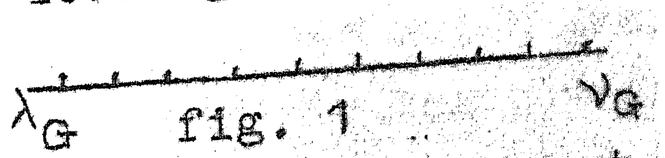


fig. 1

Bedrag dat I ontvangt

In een geval zoals het voorbeeld in paragraaf 1, waarin $\lambda_G = \nu_G$ is, noemen wij dit bedrag de <u>waarde</u> van het spel. Wanneer inderdaad $\lambda_G < \nu_G$ is en het voor I dus niet vaststaat dat II hem kan beletten meer dan λ_G te winnen, is nog niet in te zien, dat de max min strategie voor I een redelijke strategie is. Hetzelfde geldt voor de min max strategie voor II. Voor dit type spelen hebben wij dus nog geen goede oplossing gevonden.

Een variatie op het kruis of munt-spel is het spel, waarin I eerst zijn munt moet neerleggen en II pas, nadat hij gezien heeft welke strategie I heeft gekozen. I kan weer kiezen uit twee strategieën, doch II heeft meer mogelijkheden gekregen, omdat hij zijn strategie kan laten afhangen van hetgeen I heeft gedaan. Geven wij kruis aan met K, munt met M en stelt (i,j) de strategie voor van II, waarbij hij i kiest als I kruis boven legt en j als I munt boven legt, dan kan II kiezen uit de strategieën: (K,K) , (K,M) , (M,K) en (M,M). Als er gelijke zijden boven komen te liggen ontvangt I ƒ 1.-- van II en anders II ƒ 1.-- van I. Tabel III bevat de winstfunctie van dit spel. Hier geldt wel $\max_x \min_y M(x,y) = \min_y \max_x M(x,y)$; de waarde van het spel is -1.

Tabel III

<u>Winstfunctie in het kruis of munt-spel met spionneren</u>

I \ II	(K,K)	(K,M)	(M,K)	(M,M)
K	1	1	-1	-1
M	-1	1	-1	1

In vergelijking met het gewone kruis of munt-spel is de situatie voor I slechter geworden, want II kan zó spelen, dat I steeds ƒ 1.-- aan II moet betalen. Dit komt uiteraard doordat II volledig is ingelicht over hetgeen I heeft gedaan. Doch ook in het kruis of munt-spel zonder spionneren loopt I het risico, dat II in een reeks van spelen de speelwijze, die I toepast, doorziet en dan kan II steeds zijn winst maximaal maken door het tegenovergestelde te doen van wat I speelt. Hetzelfde risico loopt ook de tweede speler. Het is daarom voor beide spelers van belang hun strategie voor de ander te verbergen. Zij kunnen dit doen door in achtereenvolgende spelen op <u>niet systematische wijze</u> K of M boven te leggen. Een hulpmiddel hiertoe is een kansmechanisme, dat voor ieder afzonderlijk spel met een bepaalde kans aangeeft of K, dan wel M gespeeld moet worden. De spelers kiezen dan niet meer een strategie voor ieder afzonderlijk spel, doch zij kiezen de kansverdeling, volgens welke de strategie

in een bepaald spel wordt aangewezen.

Alvorens hier dieper op in te gaan, zullen wij dit principe uitwerken voor het kruis of munt-spel. Stel dat I een zodanig kansmechanisme kiest, dat de strategie K met kans α optreedt, de strategie M dus met kans $1-\alpha$ en dat II een kansmechanisme kiest, zodanig dat de strategie K met kans β en de strategie M dus met kans $1-\beta$ optreedt. Aangezien I en II de strategieën onafhankelijk van elkaar kiezen bedraagt de kans dat beide K kiezen $\alpha\beta$, de kans dat I K en II M kiest $\alpha(1-\beta)$, de kans dat I M en II K kiest $(1-\alpha)\beta$ en de kans dat beide M kiezen $(1-\alpha)(1-\beta)$. Als de winstfunctie per spel de in tabel II vermelde is, dan is de winstverwachting voor I dus

$$\mathcal{H}(\alpha,\beta) = \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) - \alpha(1-\beta) - \beta(1-\alpha) \qquad (6)$$

Ook in dit spel kan I nagaan hoe groot de winstverwachting is, die hij minimaal heeft voor een bepaalde α en dan α zodanig kiezen dat deze minimale winstverwachting maximaal is. Hij moet dan berekenen voor welke waarde van α de functie $\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ het maximum bereikt. Nu is

$$\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta) = \min_{\beta}\left[1-2\alpha+2\beta(2\alpha-1)\right] = \begin{cases} 2\alpha-1 \text{ voor } 2\alpha-1\leq 0 \\ 1-2\alpha \text{ voor } 2\alpha-1\geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

en dus is

$$\max_{\alpha}\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta) = 0 \qquad (8)$$

een maximum dat bereikt wordt voor $\alpha = \frac{1}{2}$ (vgl. fig. 2a).

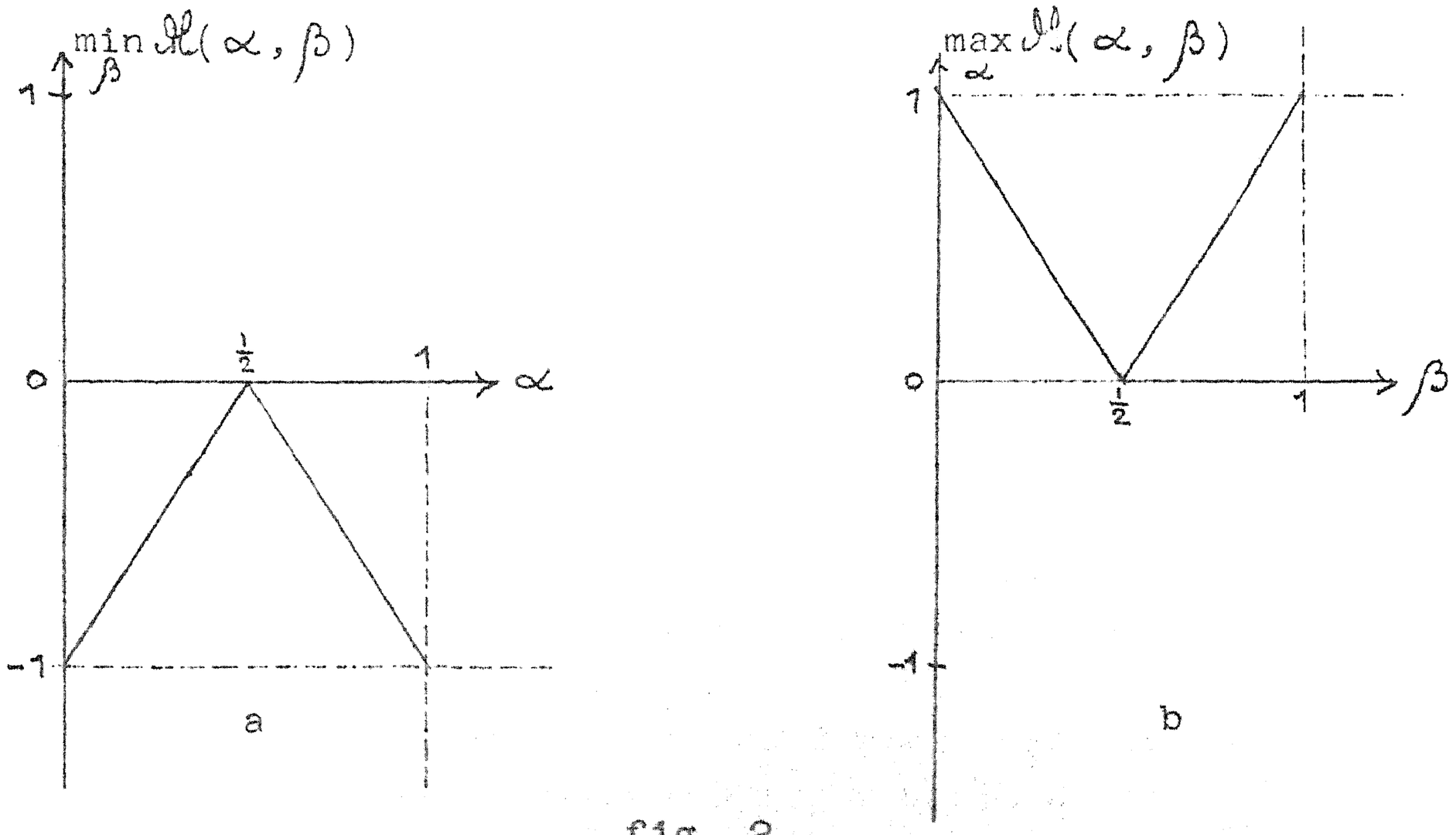


fig. 2

De functies $\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ en $\max_{\alpha}\mathcal{H}(\alpha,\beta)$

Evenzo zal II eerst $\max_{\alpha} \mathcal{K}(\alpha, \beta)$ bepalen en vervolgens β zodanig kiezen dat deze functie maximaal is. Uit

$$\max_{\alpha} \mathcal{K}(\alpha,\beta) = \max_{\alpha}\left[1-2\beta+2\alpha(2\beta-1)\right] = \begin{matrix} 1-2\beta \text{ voor } 2\beta-1\leqslant 0 \\ 2\beta-1 \text{ voor } 2\beta-1\geqslant 0 \end{matrix} \quad (9)$$

volgt $\min_{\beta} \max_{\alpha} \mathcal{K}(\alpha,\beta)=0$ (vgl. fig. 2b). Voor dit nieuwe spel waarin de spelers via een kansmechanisme bepalen welke van de strategieën K of M zij in een bepaald spel spelen, geldt dus dat $\max_{\alpha} \min_{\beta} \mathcal{K}(\alpha,\beta) = \min \max \mathcal{K}(\alpha,\beta)$ is.

De strategieën β en α van dit nieuwe spel worden <u>gemengde strategieën</u> genoemd van het oude kruis of munt-spel, omdat zij, tenzij α en β nul of één zijn, ertoe leiden dat de spelers soms K, soms M spelen. Door zo'n gemengde strategie toe te passen kan I de winstverwachting die hij in ieder geval kan bereiken, verhogen van -1 tot 0; II kan door het toepassen van een gemengde strategie beletten dat de winstverwachting van I groter is dan nul. Hieruit volgt dat iedere gemengde strategie van I, die de mogelijkheid opent tot een winst, die gemiddeld groter is dan 0, ook de mogelijkheid inhoudt van een winst die gemiddeld lager is dan nul. Zo kan de winstverwachting van I positief zijn als I in gemiddeld een derde deel van het aantal spelen K speelt ($\alpha=1/3$), doch ook negatief; dit zal afhangen van de waarde van β die II kiest. Wij kunnen daarom zeggen dat de gemengde strategie $\alpha=\frac{1}{2}$ voor I optimaal is. Op geheel analoge gronden kunnen wij de strategie $\beta=\frac{1}{2}$ optimaal noemen voor II.

3. <u>De hoofdstelling van de speltheorie</u>

Wij zullen in deze paragraaf voor willekeurige twee personen nulspelen onderzoeken wat de consequenties zijn van het invoeren van gemengde strategieën.

Daartoe nemen wij aan dat X de verzameling van strategieën is waaruit I kan kiezen. Een element hieruit geven wij aan met x. Een gemengde strategie ξ voor I is een kansverdeling op de verzameling X. Evenzo is een gemengde strategie voor II een kansverdeling η op op de ruimte Y van strategieën, waaruit II kan kiezen. Voorlopig nemen wij aan dat X en Y slechts eindig veel elementen bevatten. De kans waarmee het element x gekozen wordt kunnen wij dan aangeven met $\xi(x)$ en de kans waarmee het element y gekozen wordt met $\eta(y)$. Moet II, wanneer I x en II y kiest het bedrag M(x,y) aan I betalen, dan is de winstverwachting voor I, wanneer I de gemengde strategie ξ en II de gemengde strategie η speelt, gelijk aan

$$\mathcal{H}(\xi,\eta) = \sum_x \sum_y M(x,y)\,\xi(x)\,\eta(y) \qquad (10)$$

De spelers kunnen nu de te kiezen gemengde strategie bepalen op dezelfde wijze als in de voorafgaande voorbeelden. De eerste speler zal dan voor iedere gemengde strategie ξ bepalen hoe groot het minimum van de winstverwachting is en dan die ξ kiezen, waarvoor $\min \mathcal{H}(\xi,\eta)$ het maximum bereikt. Hij berekent dus de grootheid

$$\lambda_\Gamma = \max_\xi \min_\eta \mathcal{H}(\xi,\eta) \qquad (11)$$

en kiest die ξ, waarvoor λ_Γ wordt bereikt [2].
Evenzo kan II die η kiezen, waarvoor het maximum over ξ minimaal is; de bijbehorende winstverwachting van I is dan

$$\nu_\Gamma = \min_\eta \max_\xi \mathcal{H}(\xi,\eta) \qquad (12)$$

Wij gaan nu na wat het verband is tussen $\lambda_G, \nu_G, \lambda_\Gamma$ en ν_Γ. Daartoe voeren wij nog een nieuwe notatie in. Speler I kan voor ξ de kansverdeling kiezen, die met kans één de strategie x_o aanwijst en de andere strategieën dus met kans nul. De winstverwachting bedraagt dan $\sum_x \sum_y M(x,y)\,\xi(x)\,\eta(y) = \sum_y M(x_o,y)\,\eta(y)$, waarvoor wij schrijven $\mathcal{H}(x_o,\eta)$. Voor de winstverwachting die correspondeert met een willekeurige kansverdeling ξ voor I en de kansverdeling, die met kans één strategie y_o aanwijst voor II, schrijven wij $\mathcal{H}(\xi,y_o) = \sum_x M(x,y_o)\,\xi(x)$.

Wij bewijzen de volgende stelling:

<u>Stelling 2</u>:

Bevatten de verzamelingen X en Y van mogelijke strategieën voor I, respectievelijk II eindig veel elementen, dan is

$$\min_\eta \mathcal{H}(\xi,\eta) = \min_y \mathcal{H}(\xi,y) \quad \text{en} \quad \lambda_G \leqslant \lambda_\Gamma \qquad (13)$$

en

$$\max_\xi \mathcal{H}(\xi,\eta) = \max_x \mathcal{H}(x,\eta) \quad \text{en} \quad \nu_G \geqslant \nu_\Gamma \qquad (14)$$

<u>Bewijs</u>:

Voor iedere ξ en η is

$$\mathcal{H}(\xi,\eta) = \sum_y \mathcal{H}(\xi,y)\,\eta(y) \geqslant \min_y \mathcal{H}(\xi,y) .$$

Omdat deze betrekking voor iedere η geldt, is zij ook juist voor het minimum van $\mathcal{H}(\xi,\eta)$ over η en dus is

---

2) Omdat ξ en η kansverdelingen zijn op eindige verzamelingen worden alle extremen ook werkelijk bereikt.

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) \geq \min_{y} \mathcal{H}(\xi, y) \qquad (15)$$

Onder de verzameling van alle mogelijke η's vallen ook die η's, die met kans 1 een bepaalde strategie y aanwijzen, waaruit voor iedere y volgt

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) \leq \mathcal{H}(\xi, y)$$

en dus

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) \leq \min_{y} \mathcal{H}(\xi, y) \; . \qquad (16)$$

Uit de combinatie van (15) en (16) volgt

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) = \min_{y} \mathcal{H}(\xi, y) \; ,$$

waarmee het eerste gedeelte van (13) is bewezen. Wanneer wij voor ξ de kansverdeling substitueren, die met kans 1 de strategie x aanwijst, dan vinden wij

$$\min_{y} M(x,y) = \min_{\eta} \mathcal{H}(x, \eta) \; .$$

Deze betrekking geldt voor iedere x en dus ook voor het maximum over x, zodat geldt

$$\max_{x} \min_{y} M(x,y) = \max_{x} \min_{\eta} \mathcal{H}(x, \eta) \; .$$

Het linker lid hierin is gelijk aan λ_G. Het rechter lid vergelijken wij met $\lambda_\Gamma = \max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta)$; λ_Γ is het maximum van $\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta)$ over alle verdelingsfuncties ξ op de verzameling X. Hieronder komen de verdelingen voor die met kans één een bepaalde x aanwijzen. Dit betekent dat voor λ_Γ de functie $\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta)$ gemaximaliseerd wordt over een grotere klasse van verdelingsfuncties dan in $\max_{x} \min_{\eta} \mathcal{H}(x, \eta)$ en dus is $\lambda_G \leq \lambda_\Gamma$.

Het tweede deel van de stelling wordt op dezelfde manier bewezen.

Deze stelling zullen wij niet alleen nodig hebben voor het berekenen van optimale oplossingen, maar wij kunnen er ook het gezochte verband tussen λ_G, ν_G, λ_Γ en ν_Γ uit afleiden. De functie $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ voldoet aan de voorwaarden genoemd in stelling 1 en dus is

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) \leq \min_{\eta} \max_{\xi} \mathcal{H}(\xi, \eta)$$

of

$$\lambda_\Gamma \leq \nu_\Gamma$$

Samen met stelling 2 volgt hieruit de betrekking

$$\lambda_G \leq \lambda_\Gamma \leq \nu_\Gamma \leq \nu_G \; . \qquad (17)$$

Hieruit blijkt dat de verwachting van de winst die I in ieder geval kan bereiken door het toepassen van gemengde strategieën wel hoger, maar nooit lager kan worden. Evenzo kan II met behulp van gemengde strategieën beletten, dat de verwachting van de winst die I kan bereiken groter is dan ν_Γ, een bedrag dat kleiner of gelijk is aan ν_G. Dat beide spelers hun situatie inderdaad kunnen verbeteren door gemengde strategieën toe te passen is reeds gebleken in het kruis of munt-spel in paragraaf 2. Ongelijkheid (17) leert ons

bovendien dat voor gevallen, waarin $\lambda_G = \nu_G$ is, ook $\lambda_\Gamma = \nu_\Gamma$ is.

Het introduceren van gemengde strategieën is nu daarom van veel belang omdat men de volgende stelling kan bewijzen.

Stelling 3:

In ieder eindig twee personen nulspel is

$$\lambda_\Gamma = \nu_\Gamma \qquad (18)$$

en bezitten de spelers optimale strategieën.

Men noemt deze stelling de hoofdstelling van de speltheorie. Zij betekent dat de winstverwachting, waarvan I zich in ieder geval kan verzekeren gelijk is aan de verliesverwachting, die II hoogstens behoeft te accepteren. Op grond van deze stelling kunnen wij dus ook optimale oplossingen vinden voor eindige spelen, waarin $\lambda_G < \nu_G$ is. Het kruis of munt-spel van de vorige paragraaf is er een voorbeeld van.

Het bewijs van deze stelling vergt nogal wat voorbereiding en zal daarom achterwege worden gelaten. Duidelijke bewijzen zijn onder andere te vinden in de reeds genoemde boeken van Mc KINSEY en VAJDA.

Tot nu toe hebben wij ons beperkt tot spelen waarin X en Y beide slechts eindig veel elementen bevatten. Men kan echter ook spelen bedenken, waarin X en/of Y oneindig veel elementen bevatten. Zo zullen wij bij de toepassingen een voorbeeld geven waarin de strategieën van I en II de punten uit het interval $[0 - 1]$ zijn.

Onder bepaalde voorwaarden, die in praktijkproblemen vrijwel steeds vervuld zijn, gelden de stellingen 2 en 3 ook voor strategische spelen, waarin X en Y niet beide eindig veel elementen bevatten. Wij zullen dit niet nader onderzoeken; op de voorbeelden, die wij geven zullen beide stellingen van toepassing zijn.

4. Voorbeelden

1) Als eerste voorbeeld zullen wij ter illustratie van de theorie, behandeld in de vorige paragrafen de optimale strategieën berekenen van het spel, waarvan de winstfunctie opgegeven is in tabel IV. De keuze van een gemengde strategie ξ is voor de eerste speler de keuze van de kans α, waarmee in ieder spel strategie 1 wordt gekozen.

Tabel IV

De winstfunctie

I \ II	1	2	3	4
1	2	-2	-1	3
2	-2	4	0	-2

Voor de tweede speler is een gemengde strategie een kansverdeling η die voor ieder spel aangeeft met welke kans de strategieën 1, 2, 3 en 4 worden gekozen. Zij $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ weer de winstverwachting voor de eerste speler wanneer de strategieën ξ, respectievelijk η worden gebruikt, dan bestaat er volgens stelling 3 een waarde v, waarvoor geldt $v = \max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) = \min_{\eta} \max_{\xi} \mathcal{H}(\xi, \eta)$. Doordat I uit slechts twee zuivere strategieën kan kiezen, kunnen wij $\max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta)$ grafisch bepalen. Volgens stelling 2 is

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi, \eta) = \min_{y} \mathcal{H}(\xi, y) = \min_{y} \left[M(1,y)\,\xi(1) + M(2,y)\,\xi(2) \right] =$$

$$= \min_{y} \left[M(1,y)\,\alpha + M(2,y)(1-\alpha) \right] . \qquad (19)$$

De functie $M(1,y)\alpha + M(2,y)(1-\alpha)$ is voor

$y = 1$: $2\alpha - 2(1-\alpha) = 4\alpha - 2$

$y = 2$: $-2\alpha + 4(1-\alpha) = -6\alpha + 4$

$y = 3$: $-1\alpha + 0(1-\alpha) = -\alpha$

$y = 4$: $3\alpha - 2(1-\alpha) = 5\alpha - 2$.

In figuur 3 zijn deze rechten geschetst voor het relevante gebied: $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. De dik getrokken, gebroken lijn geeft voor iedere waarde van α het minimum over y aan. Het maximum over α hiervan wordt bereikt in het snijpunt van de rechten $\mathcal{H}(\alpha, 1) = 4\alpha - 2$ en $\mathcal{H}(\alpha, 3) = -\alpha$. De bijbehorende waarde van α volgt dus uit

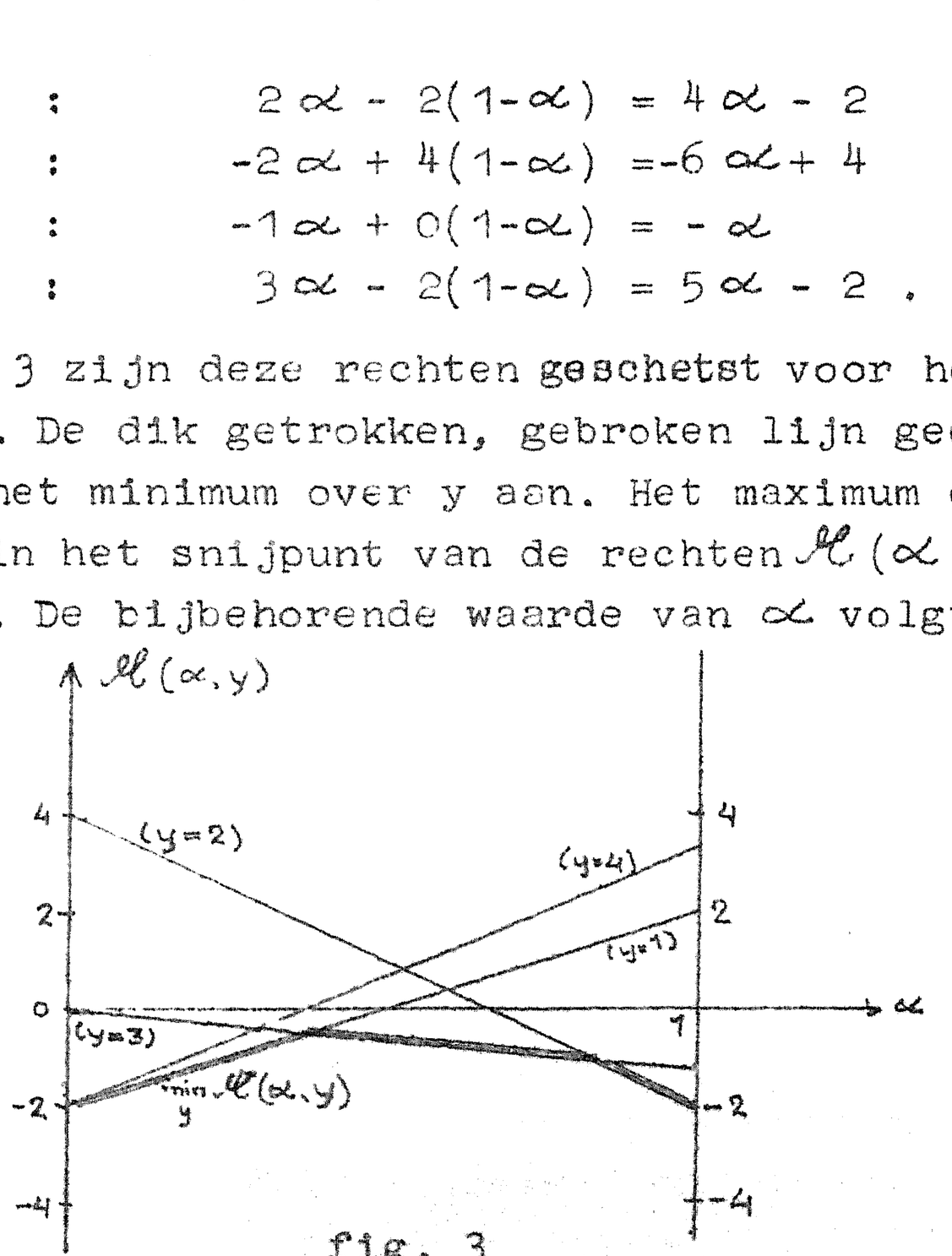


fig. 3

$\mathcal{H}(\alpha, y)$ voor y= 1,2,3,4.

(op de assen zijn verschillende schalen gebruikt)

$$4\alpha - 2 = -\alpha$$

en is dus

$$\alpha = \frac{2}{5} ;$$

voor $v = \max_{\alpha} \min_{\eta} \mathcal{K}(\alpha, \eta)$ vinden wij $v = -\frac{2}{5}$.

Ook de optimale strategie voor II is zonder moeite op te sporen. Immers voor iedere waarde van y is $\mathcal{K}(\frac{2}{5}, y) \geq -\frac{2}{5} (=v)$ en dus geldt voor de optimale strategie η^* van II

$$\mathcal{K}(\frac{2}{5}, \eta^*) = \sum_y \mathcal{K}(\frac{2}{5}, y) \cdot \eta^*(y) \geq -\frac{2}{5} .$$

Anderzijds is de waarde van het spel $-\frac{2}{5}$, d.w.z. $\mathcal{K}(\frac{2}{5}, \eta^*) = -\frac{2}{5}$, een bedrag dat slechts bereikt kan worden wanneer $\eta^*(y) = 0$ is voor iedere waarde van y, waarvoor $\mathcal{K}(\frac{2}{5}, y) > -\frac{2}{5}$ is. De optimale gemengde strategie voor II zal dus positieve waarschijnlijkheden toekennen aan de strategieën y=1 en y=3 en het oorspronkelijke spel kan daarom voor de berekening van η^* vervangen worden door het in tabel V aangegeven spel. Dit is een spel waarvoor de optimale strategie voor II op dezelfde wijze gevonden

Tabel V

Vereenvoudigde winstfunctie

I \ II	1	3
1	2	-1
2	-2	0

kan worden als in het kruis of munt-spel. Het resultaat is dan $\eta^*(1) = \frac{1}{5}$ en $\eta^*(3) = \frac{4}{5}$, zodat de optimale strategie van II in het in tabel IV vermelde spel is $\eta^*(1) = \frac{1}{5}$, $\eta^*(2) = 0$, $\eta^*(3) = \frac{4}{5}$ en $\eta^*(4) = 0$.

Deze grafische methode vormt alleen een eenvoudige oplossingsmethode wanneer één van de twee spelers uit twee zuivere strategieën kan kiezen. Uit de berekening blijkt ook nog dat in dergelijke spelen voor beide spelers een optimale strategie bestaat, die niet meer dan hoogstens twee strategieën met positieve kans aanwijst. Het is een bijzonder geval van de volgende algemene stelling, welke wij overigens niet bewijzen:

Stelling 4:

In ieder eindig spel, waarin I uit m en II uit n zuivere strategieën kan kiezen, bezit iedere speler een optimale gemengde strategie, die hoogstens min(m,n) zuivere strategieën met positieve kans aanwijst.

2) Situaties, waarin twee mensen of maatschappijen tegenover elkaar staan op analoge wijze als in een twee personen nulspel, doen zich voor bij reclamecampagnes. Deze situaties zijn o.a. bestudeerd door

L. GILLMAN, Operations Analysis and the Theory of Games: an advertising Example, J.A.S.A. 45 (1950) 541-545,

en E. BURGER, Spieltheoretische Behandlung eines Reklameproblems, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik 6 (1954) 39-52.

Beide schrijvers beschouwen het geval, waarin twee concurrenten zich bevinden, wanneer er op een bepaald ogenblik een nieuwe potentiële klant verschijnt. De één, Mr Big heeft een goed renderende zaak, de ander, Mr Little verkeert in een slechte financiële positie en moet, wil hij het hoofd boven water kunnen houden binnen een bepaalde tijd beslist een order van de nieuwe klant ontvangen. Mr Little zal dus zijn reclamecampagne zo inrichten dat zijn kans de nieuwe klant binnen die tijd te verwerven zo groot mogelijk is. Mr Big daarentegen overweegt, dat een faillissement van zijn concurrent de alleenheerschappij voor hem zal betekenen en dus zal hij de kans dat Mr Little succes heeft trachten te minimaliseren. Zij zijn dus beide geïnteresseerd in dezelfde gebeurtenis: het al of niet kopen van de klant bij Mr Little terwijl de belangen tegengesteld zijn. Hierbij is ondersteld dat het Mr Big niet interesseert of zijn reclamepolitiek tengevolge heeft dat de klant helemaal niet koopt.

Men kan deze situatie goed interpreteren als een strategisch spel en wel een twee personen nulspel. Voor het betreffende tijdsbestek kiezen de schrijvers het interval $[0\text{-}1]$. Verder nemen zij aan dat de weerstand tot kopen bij de klant, onafhankelijk van de aard van de reclamecampagnes, op bekende wijze afneemt in de tijd en dat de wederzijdse activiteit de kansen op succes van de ander niet beïnvloedt. Laat de kans op succes voor beide concurrenten gelijk zijn en gegeven worden door de functie $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Wanneer nu beide verkopers besluiten de klant binnen de periode $[0\text{-}1]$ één keer een bezoek te brengen om hun waar aan te prijzen, dan zullen zij trachten de tijdstippen van bezoek, t_1 voor Mr Little en t_2 voor Mr Big, zo gunstig mogelijk te kiezen. Zo zal Mr Little aan de ene kant zijn bezoek zo laat mogelijk willen kiezen, daar dan $A(t)$ groter is, maar aan de andere kant weer niet zo laat, dat het risico dat Mr Big hem voor is geweest te groot wordt. De winstfunctie, die de kans aangeeft dat Little (speler I) de klant verwerft, hangt af van t_1 en t_2 en luidt:

$$M(t_1,t_2) = A(t_1) \quad \text{voor} \quad t_1 \leqslant t_2 \ ,$$

$$M(t_1,t_2) = (1-A(t_2)).A(t_1) \text{ voor } t_1 > t_2$$

Gemengde strategieën zijn voor beide spelers kansverdelingen op het interval [0-1] en men kan bewijzen dat er ook in dit voorbeeld strategieën ξ en η bestaan zodanig dat

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) = \min_{\eta} \max_{\xi} \mathcal{H}(\xi,\eta) \ .$$

Voor de berekening van deze strategieën verwijzen wij naar het artikel van E. BURGER.

GILLMAN bestudeerde dit probleem voor het geval dat Mr Little zijn reclame wel beperkt tot één enkel tijdstip, doch Mr Big zijn campagne uitstrekt over het gehele interval. Wanneer hij eerst vaststelt hoeveel hij zal besteden, moet hij beslissen op welke wijze dit bedrag over het interval [0-1] verdeeld moet worden. Ook betreffende de andere voorwaarden kan men andere, wellicht beter bij de praktijk aansluitende onderstellingen maken.

Opmerking: Indien men het probleem op de bovenstaande wijze formuleert, neemt de klant niet deel aan het spel. Deze benadering van het probleem is vaak gerechtvaardigd in gevallen waarin de klant uiteindelijk toch moet kopen. Als deze benadering niet gerechtvaardigd is, ontstaat een drie personenspel. Een uitvoerige discussie van een marktsituatie, verwant aan de bovenstaande, namelijk een markt waarop een verkoper een artikel bezit waarvoor twee kopers belangstelling hebben, kan men vinden in het boek "Games and Decisions" van R.D. LUCE en H. RAIFFA, blz. 206 e.v.

3) Hoewel de speltheorie vooral ontwikkeld is met de bedoeling economische conflictsituaties te onderzoeken, zijn de meeste toepassingen te vinden in de krijgswetenschappen. Een reeks artikelen hierover is gepubliceerd in Operations Research, het tijdschrift van de Operations Research Society of America. Zeer instructief is een artikel van O.G. HAYWOOD Jr, Military Decision and Game Theory, J.O.R.S.A. 2 (1954) 365-385.

De auteur vergelijkt hierin de wijze van beslissingen nemen bij militaire operaties, zoals deze is goedgekeurd door de (Amerikaanse) Gezamelijke Chefs van Staven met de oplossingsmethoden van de strategische speltheorie. In principe kan een bevelhebber de situatie analyseren en zijn beslissing nemen op grond van hetgeen de tegenstander in staat is te doen, of op grond van hetgeen hij vermoedt dat de tegenstander zal gaan doen. De eerste is de officiëel goedgekeurde methode, aangezien de bevelhebber volgens de instructies die acties moet uitvoeren, welke gezien de mogelijkheden waarover de vijand beschikt de grootste beloften tot succes geven. De geïnstrueerde analyse-methode bestaat uit vijf stappen

en staat bekend onder de naam "Estimate of the Situation". Aan de hand van twee voorbeelden, ontleend aan de Tweede Wereldoorlog laat de schrijver zien dat bij de "Estimate of the Situation" en bij de speltheorie dezelfde overwegingen gebruikt worden. De speltheorie leidt in deze gevallen dan ook tot dezelfde beslissingen als de door de bevelhebbers genomen besluiten. In situaties waarin beide methoden inderdaad dezelfde overwegingen gebruiken is de speltheorie superieur, aangezien deze in tegenstelling tot de andere methode een procédé aangeeft om de optimale oplossing te berekenen.

Ter illustratie zullen wij het eenvoudigste voorbeeld hier in het kort behandelen. Het betreft de slag in de Bismarckzee. Een Japanse transportvloot moest in februari 1943 varen van Rabaul op New Britain naar Lae op Nieuw Guinea en kon hiervoor gebruik maken van de route ten Noorden van New Britain en de route ten Zuiden van het eiland. Beide zeewegen namen drie dagen varen in beslag. De bevelhebber van de Geallieerde luchtmacht in het Zuid-Westen van de Grote Oceaan had de opdracht zoveel mogelijk schepen te vernietigen. Hiertoe moest uiteraard de transportvloot eerst worden opgespoord. Verder was bekend dat het zicht op de noordelijke route slecht was wegens regen. De Geallieerde bevelhebber beschouwde nu twee mogelijkheden: concentratie van het grootste gedeelte van zijn verkenningsvliegtuigen op de noordelijke route en slechts weinig op de zuidelijke, en juist andersom. Afhankelijk van de tijd, nodig om de vijandelijke vloot te ontdekken kon men bepalen hoeveel dagen er beschikbaar waren om de transportvloot te bombarderen. Dit aantal is voor de verschillende gevallen opgegeven in tabel VI. Wij beschouwen deze tabel als de winstfunctie van een twee personen nulspel,

Tabel VI

Winstfunctie bij de slag op de Bismarckzee

Japanners / Amerikanen	noordelijke route	zuidelijke route
noordelijke route	2	2
zuidelijke route	1	3

waarin beide spelers twee strategieën ter beschikking hebben. Men ziet direct dat de waarde van het spel twee is en dat beide partijen een zuivere optimale strategie bezitten, namelijk de noordelijke route, die ook in werkelijkheid door beide is gekozen.

Naar aanleiding van het tweede voorbeeld, de slag bij Avranches in Frankrijk, behandelt HAYWOOD de betekenis van gemengde strategie-

en. Ook de verhouding van het nemen van beslissingen op grond van de "Estimate of the Situation" tot het handelen op grond van de vermoede plannen van de tegenstander komt ter sprake.

4) Als laatste vorm van toepassing noemen wij de zogenaamde statistische spelen ("statistical games"), dat zijn spelen waarin de natuur optreedt als "tegenspeler" van de statisticus. Weliswaar kan de natuur niet beschouwd worden als een tegenspeler die de statisticus zoveel mogelijk afbreuk tracht te doen, maar toch verkrijgt men een beter inzicht in allerlei problemen wanneer men de situatie vergelijkt met die in een twee personen nulspel. Hierin laten wij de natuur de rol van de eerste en de statisticus die van de tweede speler vervullen.

De statisticus behoeft niet zonder enige informatie omtrent de toestand van zijn tegenspeler een beslissing te nemen. Als hij weet dat een bepaald kenmerk normaal verdeeld is, maar het gemiddelde en de spreiding van die verdeling niet kent, dan kan hij hierover informatie krijgen door het nemen van een steekproef. Wij beschouwen nu de mogelijke waarden van de onbekende parameters als de zuivere strategieën van de natuur. Deze verzameling wordt aangegeven met Ω en een bepaald element eruit met ω. In het zojuist genoemde geval van een normale verdeling met onbekend gemiddelde μ en onbekende spreiding σ, vormen alle grepen (μ,σ) de elementen van Ω. Is wel de spreiding bekend, maar niet μ, dan bestaat Ω uit alle reële getallen.

Het resultaat van de steekproef geven wij aan met de letter z en de verzameling van alle denkbare resultaten met Z. Met ieder element ω uit Ω correspondeert een bepaalde kansverdeling $p_\omega(z)$ op Z; zolang Z eindig of aftelbaar veel elementen bevat, geeft $p_\omega(z)$ dus de kans aan dat het resultaat z optreedt, wanneer de natuur de strategie ω speelt.

Laat de statisticus kunnen kiezen uit de beslissingen a_1, a_2, ...; samen vormen deze de verzameling A. Bijvoorbeeld kan A bestaan uit twee elementen, nämelijk a_1, goedkeuren van een partij goederen en a_2, afkeuren van die partij. Naar aanleiding van het steekproefresultaat z kiest de statisticus een element uit A, m.a.w. aan ieder steekproefresultaat wordt een a_i toegevoegd en de statisticus kan nu bepalen hoe deze toevoeging zal geschieden. Hij kiest dus een functie d, welke bij ieder element z uit Z een bepaald element d(z) uit A aanwijst. Het is heel goed mogelijk dat de functie d voor verschillende elementen uit Z hetzelfde element uit A aanwijst. Een dergelijke functie noemt men een beslissingsfunctie. De verzameling van functies d waaruit de statisticus kan kiezen geven wij aan met D. In figuur 4 zijn de betrekkingen die tussen

de ingevoerde grootheden bestaan, schematisch aangegeven.

$$\begin{array}{ccc} \omega \in \Omega & \xrightarrow[d \in D]{} & \text{kansverdeling } p_\omega(z) \text{ op } Z \\ z \in Z & \rightarrow & a \in A \end{array}$$

figuur 4

Het verband tussen Ω, Z, D en A

Het verlies dat men lijdt indien ω juist is en de beslissing a wordt genomen, noemen wij $L(\omega,a)$, de verliesfunctie. In de plaats van $L(\omega,a)$ schrijft men ook wel $L(\omega,d(z))$ om het verband tussen het verlies en de gekozen beslissingsfunctie d tot uitdrukking te brengen. De verliesverwachting voor de statisticus bij de strategie ω van de natuur en de beslissingsfunctie d noemt men de risicofunctie $\rho(\omega,d)$; hiervoor geldt

$$\rho(\omega,d) = \sum_z L(\omega,d(z)) \cdot p_\omega(z) \quad . \qquad (20)$$

Vergelijken wij nu dit spel tegen de natuur met het gewone strategische spel, dan zien wij dat de ruimte X vervangen is door de ruimte Ω van de onbekende parameterwaarden en de ruimte Y door de ruimte D van beslissingsfuncties, waaruit de statisticus kan kiezen. De functie M(x,y) die de winst voor de eerste en dus het verlies voor de tweede speler aangeeft is overgegaan in de functie $\rho(\omega,d)$. Zowel Ω als D zijn dus ruimten van zuivere strategieën. Dat de functie $\rho(\omega,d)$ hier in tegenstelling tot M(x,y) toch de vorm van een verwachting aanneemt, komt doordat een zuivere strategie van de natuur een kansverdeling voor het steekproefresultaat z vastlegt.

Ter illustratie van de ingevoerde begrippen geven wij het volgende voorbeeld. Men heeft een partij goederen, waarvan men door middel van een steekproef van de grootte N wil schatten, hoe groot de fractie defectieven is.

In dit voorbeeld bestaat Ω uit alle getallen tussen 0 en 1, de waarden die de onbekende fractie defectieven in de partij kan bezitten. Het aantal defectieven in de steekproef kan 0, 1,...,N zijn en deze getallen vormen dus de verzameling Z. De kansverdeling $p_\omega(z)$ is

$$p_\omega(z) = \binom{N}{z} \omega^z (1-\omega)^{N-z} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leq \omega \leq 1 \\ z=0,1,\ldots,N \end{pmatrix} \qquad (21)$$

De ruimte A bestaat uit het interval $0 \leq a \leq 1$, waarin a een schatting is voor de onbekende fractie ω. Een beslissingsfunctie die men kan kiezen is b.v.

$$d(z) = \frac{z}{N} \; ; \qquad (22)$$

men neemt dan als schatting van de fractie defectieven in de partij de fractie, die men in de steekproef heeft gevonden. Een andere beslissingsfunctie, die men zou kunnen kiezen is

$$d_1(z) = \frac{z-1}{N} \qquad \text{voor } 1 \leq z \leq N \ ,$$

$$d_1(z) = 0 \qquad \text{voor } z = 0 \ .$$

Is bovendien gegeven dat het verlies, dat men lijdt evenredig is met het kwadraat van het verschil tussen de geschatte en de werkelijke fractie defectieven in de partij, dan is

$$L(\omega, a) = k(\omega - a)^2 \tag{23}$$

en de risicofunctie dus

$$\rho(\omega, d) = \sum_{z=0}^{N} L(\omega, d(z))\, p_\omega(z) = \sum_{z=0}^{N} k(\omega - \frac{z}{N})^2 . \binom{N}{z} \omega^z (1-\omega)^{N-z} =$$

$$= \sum_{z=0}^{N} \frac{k}{N^2} (z - \omega N)^2 \binom{N}{z} \omega^z (1-\omega)^{N-z} = \frac{k}{N^2} N\omega(1-\omega) = \frac{k\omega}{N}(1-\omega) .$$

Opmerking

Wij hebben hier bij het opstellen van de risicofunctie geen rekening gehouden met de kosten, die verbonden zijn aan het doen van experimenten. Dit is juist, wanneer de omvang van de steekproef van te voren vaststaat en de kosten onafhankelijk zijn van de uitkomsten der experimenten. In de meeste gevallen is aan deze voorwaarden echter niet voldaan en dan moeten ook deze kosten in de risicofunctie worden opgenomen.

Een gemengde strategie van de natuur is een kansverdeling op Ω; men noemt deze wel de a proori verdeling op de ruimte van mogelijke parameterwaarden. Een gemengde strategie voor de statisticus is een kansverdeling op de ruimte D van beslissingsfuncties, waaruit hij kan kiezen. Bij deze gemengde strategieën gaat de verliesverwachting van de statisticus over in

$$\rho(\xi, \eta) = \sum_{\omega} \sum_{d} \rho(\omega, d)\, \xi(\omega)\, \eta(d) \ , \tag{25}$$

waarin $\xi(\omega)$ de kans is, waarmee de natuur de strategie ω aanwijst en $\eta(d)$ de kans waarmee de statisticus de beslissingsfunctie d kiest.

Zodra de statisticus de functie $\rho(\xi, \eta)$ kent, zal hij zich afvragen, welke strategie η voor hem de beste is. Om dit te onderzoeken heeft hij een maatstaf nodig, d.w.z. een criterium, ten opzichte waarvan hij een optimale strategie kan kiezen.

Aangezien het gelukt is het probleem te gieten in de vorm van een strategisch spel, ligt het voor de hand eerst na te gaan of het minimaxcriterium een bevredigende oplossing geeft. In tegenstel-

ling tot spelen waarin de belangen van de spelers diametraal tegenover elkaar staan, is dit criterium hier niet zo goed en kan het tot zeer merkwaardige consequenties leiden. Dit komt doordat men niet kan aannemen dat de natuur tracht de statisticus zoveel mogelijk afbreuk te doen, terwijl bij de minimaxstrategie de beslissing gebaseerd wordt op de meest ongunstige strategie van de natuur.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Stel dat een partij goederen aan de kwaliteitseisen voldoet wanneer de fractie defectieven $\leqslant \omega_0$ is en anders niet. De fabrikant keurt de partijen voordat ze worden afgeleverd. Hierbij zal hij weinig onjuiste beslissingen nemen bij zeer goede en zeer slechte partijen. De natuur kan het nu de fabrikant "moeilijk maken" door veel partijen te fabriceren, die een fractie defectieven bezitten, dicht bij ω_0 . Bij de minimaxstrategie gaat de statisticus nu uit van een a priori verdeling ξ van de natuur waarbij vrijwel uitsluitend partijen met een fractie ω_0 aan defectieven worden gemaakt. In werkelijkheid beschikt men door ervaringen uit het verleden wel over enige voorkennis omtrent de a priori verdeling op Ω en doordat hiervan bij het minimaxcriterium geen gebruik wordt gemaakt, faalt dit criterium.

Een beslisssingscriterium, waarbij dit wel gebeurt is het criterium van Bayes. Hierbij gaat men er van uit dat de statisticus de kansverdeling ξ op Ω , die de natuur gebruikt volledig kent. Het risico van de statisticus, wanneer hij als strategie de kansverdeling η op D kiest is dan de verwachting van $\rho(\omega,\eta)$ ten opzichte van de kansverdeling ξ , dus

$$\rho(\xi,\eta) = \sum_{\omega} \rho(\omega,\eta)\,\xi(\omega) \qquad (26)$$

Hij zal dan die zuivere of gemengde strategie η_0 kiezen, waarvoor de verwachting van $\rho(\xi,\eta)$ minimaal is. Men noemt η_0 de Bayes-oplossing met betrekking tot de a priori verdeling ξ .

Deze methode geeft een bevredigende oplossing wanneer de a priori verdeling inderdaad bekend is, zoals b.v. vaak het geval zal zijn in problemen van kwaliteitsbeheersing. Op welke wijze men uit waarnemingsmateriaal de momenten van een a priori verdeling kan schatten, wordt aangegeven in een artikel van Prof. Hemelrijk dat in Statistica Neerlandica zal verschijnen.

In gevallen waarin de a priori verdeling alleen het subjectieve oordeel van de statisticus beschrijft, hebben Bayes-oplossingen het bezwaar dat zij in dezelfde situatie tot geheel verschillende resultaten kunnen leiden, wanneer verschillende mensen deze situatie verschillend beoordelen. Men kan dan als statisticus alleen een uitspraak doen van de vorm: indien Uw beoordeling omtrent de a priori verdeling juist is, dan is deze η_0 de optimale beslissingsprocedure.

Behalve het minimax- en het Bayes-criterium zijn er nog andere beslissingscriteria voorgesteld. Een criterium dat in alle opzichten bevredigend is werd tot nu toe niet gevonden. Voor een verdere bespreking van dit probleem verwijzen wij naar het boek Games and Decision door R.D. LUCE and H. RAIFFA (1957), speciaal hoofdstuk XIII.

Het onderzoek naar de toepassingsmogelijkheden van de speltheorie is nog allerminst afgesloten. Voor het verband met en de toepassingen bij de statistische theorie en de statistische methoden verwijzen wij naar Theory of Games and Statistical Decisions door D. BLACKWELL en M.A. GIRSHICK (1954). Voor de toepassingsmogelijkheden in de sociale en economische wetenschappen zij nogmaals verwezen naar het boek van LUCE en RAIFFA.