

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 216 (C 10)

Hoofdst. I.

Voorraadproblemen

door

J. Kriens

Mei 1957

1. Optimal Inventory Policy, K.J. ARROW, Th. HARRIS and J. MARSCHAK, Econometrica 19 (1951), 250-272.

1.1. Inleiding

In dit artikel worden optimale strategieën behandeld voor een voorraadbeheerder. Van de niet beheerste factoren wordt er hoogstens één stochastisch ondersteld, nl. de vraag per periode. De voorraadbeheerder kan de omvang van een bestelling bij inkoop vrij kiezen, doch verkoopprijs, vraag en dergelijke worden niet beïnvloedbaar ondersteld. Met eventuele beperkingen ten gevolge van de omvang der beschikbare opslagcapaciteit wordt geen rekening gehouden, terwijl verder wordt aangenomen dat zowel inkoop- als verkooporders direct worden uitgevoerd.

1.2. De vraag per tijdseenheid is een bekende constante

De constante vraag per tijdseenheid geven wij aan met D . De voorraadbeheerder kan op willekeurige tijdstippen orders verrichten om zijn voorraad aan te vullen. Wij gebruiken nu de volgende notaties:

q_i	omvang van de i^{de} order,
θ_i	tijdsinterval tussen de i^{de} en de $(i+1)^{\text{ste}}$ order,
x_i	omvang van de voorraad voor de binnenkomst van de i^{de} order,
y_i	omvang van de voorraad na de binnenkomst van de i^{de} order.

Een voorraad zonder meer wordt aangegeven met z .

De kostenfuncties die hier een rol spelen zijn:

inkoopkosten K_1 voor de voorraadbeheerder; wij nemen aan dat de inkoopkosten $b(q)$ per eenheid product een functie zijn van q en laten dus bijv. toe dat deze kosten verminderen bij een grotere omvang van de order. Het verrichten van een order brengt vaste orderkosten k_{10} met zich mee, zodat de totale kosten bij een order van de omvang q bedragen: $K_1(q) = k_{10} + q b(q)$;

kosten in voorraad houden; de kosten per tijdseenheid, K_2 , worden ondersteld evenredig te zijn met de aanwezige voorraad z , dus $K_2 = k_{21} z$;

opbrengst bij verkoop K_3 ; ook de opbrengst onderstellen wij evenredig met de omvang van de verkoop, zodat de opbrengst per tijdseenheid $k_{31} D$ bedraagt.

Wij laten niet toe dat er een achterstand ontstaat in het voldoen aan de vraag; de voorraad x kan dus niet negatief worden en zal derhalve een verloop in de tijd hebben, zoals geschetst is in figuur 1.

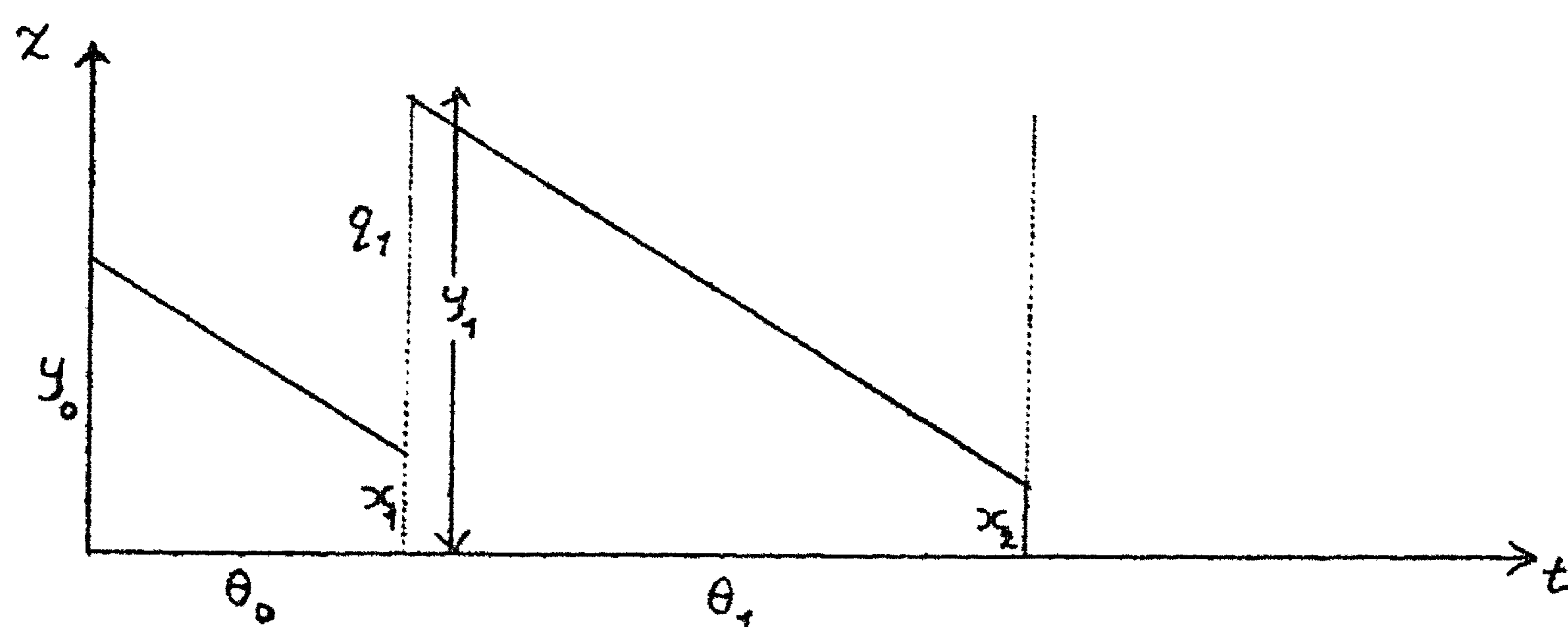


fig. 1

Het verloop van de voorraad in de tijd

Uit de gegeven definities volgen de onderstaande betrekkingen:

$$y_i = x_i + q_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$x_{i+1} = y_i - D\theta_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$x_i + q_i = D\theta_i + x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

De gemiddelde voorraad $\bar{x}_i$ in de i de periode bedraagt

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2} (y_i + x_{i+1}) = \frac{1}{2} (D\theta_i + 2x_{i+1}) \quad (4)$$

en de netto opbrengst $\mathcal{U}(\theta_i)$ in dit interval is dus

$$\mathcal{U}(\theta_i) = k_{31} D\theta_i - k_{10} - q_i b(q_i) - \frac{1}{2} k_{21} (D\theta_i + 2x_{i+1}) \theta_i. \quad (5)$$

Wij gaan nu na op welke wijze er een optimale voorraadpolitiek ontstaat. In de eerste plaats is het voordeliger steeds pas dan bij te bestellen wanneer de aanwezige voorraad geheel is uitgeput. Om dit in te zien vergelijken wij voor een interval van twee achtereenvolgende perioden de twee voorraadpolitieken die geschetst zijn in figuur 2. Inkomsten en inkoopkosten zijn in beide gevallen dezelfde, evenals de voorraad in het begin en aan het einde van het beschouwde interval. Gedurende het interval $(t+1) - (t+1)'$ is de voorraad bij de ene politiek echter q_{t+1} groter dan bij de andere en de voorraadkosten bedragen dan dus $k_{21} q_{t+1}$ meer. Hieruit volgt dat men de kosten dus verlaagt door alle x_i 's ($i = 1, 2, \dots$) gelijk aan nul te kiezen en dat men, wanneer er op het tijdstip nul reeds een voorraad aanwezig is, deze eerst moet opmaken alvorens de eerste bestelling te verrichten. Wij gaan er daarom in het vervolg van uit dat de beginvoorraad y_0 gelijk is aan nul.

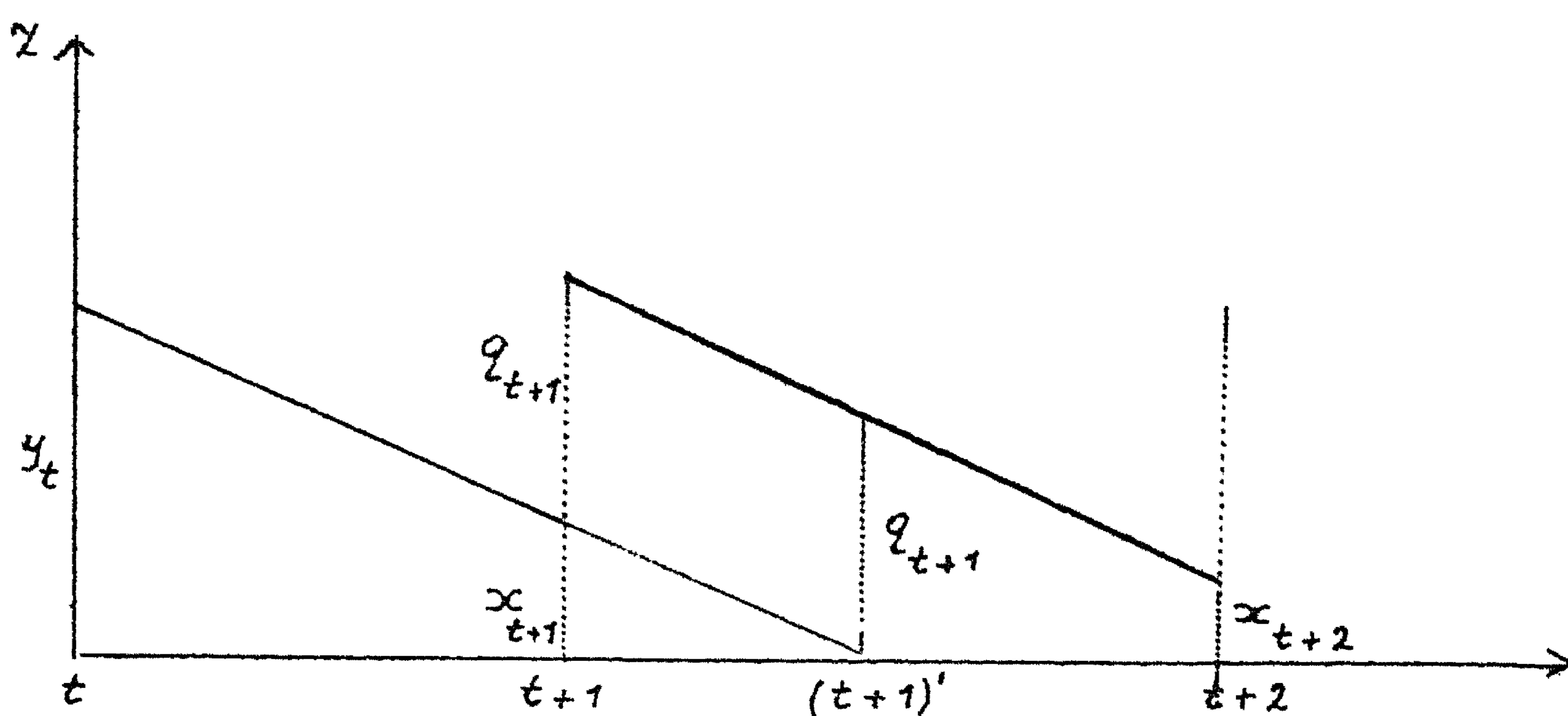


fig. 2

Twee alternatieve voorraadpolitieken voor een interval van twee perioden

Formule (5) kan voor het onderzoek naar optimale voorraadpolitieken nu vervangen worden door

$$U(q_i) = k_{31} D \theta_i - k_{10} - q_i b(q_i) - \frac{1}{2} k_{21} D \theta_i^2. \quad (6)$$

Voor wij nu nauwkeurig omschrijven, wat wij verstaan onder een optimale voorraadpolitiek, splitsen wij ons probleem in twee gevallen: een oneindig lange periode en een eindige periode van de lengte T .¹⁾

Optimale voorraadpolitiek voor een oneindig lange periode

Definitie

Een voorraadpolitiek is optimaal wanneer de netto opbrengst per tijdseenheid zo groot mogelijk is.²⁾

De netto opbrengst $U(\theta)$ per tijdseenheid is

$$U(\theta) = \frac{U(\theta)}{\theta} = k_{31} D - \frac{k_{10}}{\theta} - \frac{D \theta b(D \theta)}{\theta} - \frac{1}{2} k_{21} D \theta. \quad (7)$$

In plaats van de gemiddelde opbrengst te maximaliseren kunnen wij hier ook de gemiddelde onkosten

$$C(\theta) = \frac{k_{10}}{\theta} + D b(D \theta) + \frac{1}{2} k_{21} D \theta \quad (8)$$

1) In het oorspronkelijke artikel wordt dit niet gedaan. De daar gegeven redenering is echter niet geheel correct; zie appendix II, punt 2.

2) Men kan een voorraadpolitiek ook optimaal noemen, wanneer de contante waarde van alle toekomstige opbrengsten maximaal is. Dit leidt tot dezelfde uitkomsten als het hier gekozen criterium; de grootte van de disconteringsfactor heeft dus geen invloed op de aard van de optimale strategie.

minimaliseren. Een intervallengte $\theta = \theta^*$ levert een minimum van $\mathcal{L}(\theta)$ op, wanneer er voldaan is aan

$$-\frac{k_{10}}{(\theta^*)^2} + D^2 b'(D\theta^*) + \frac{1}{2} k_{21} D = 0 \quad (9)$$

en aan

$$\frac{2k_{10}}{(\theta^*)^3} + D^3 b''(D\theta^*) > 0 \quad (10)$$

$\mathcal{L}(\theta)$ heeft altijd een minimum omdat de functie zowel voor zeer kleine als voor zeer grote waarden van θ willekeurig toeneemt. Er is dus altijd een waarde van θ , die aan (9) en (10) voldoet. Voor functies $b(q)$, waarvoor $b''(q)$ overal > 0 is ³⁾ past bij θ^* het enige, dus het absolute minimum van $\mathcal{L}(\theta)$, omdat er in het geval van meer dan één (relatief) minimum ook (relatieve) maxima zouden zijn en dat is dan, wegens (10) overal positief, uitgesloten. Aan $b''(q) > 0$ voor iedere q is bijv. voldaan wanneer de prijs per eenheid steeds lager wordt naarmate de omvang van de order groter is, doch de mate van afnemen steeds minder bedraagt. Een gehele klasse van krommen die hieraan voldoet, wordt voorgesteld door

$$b(q) = c_1 e^{-c_2 q} + c_3 \quad (11)$$

waarin de c 's positieve constanten zijn (zie figuur 3).

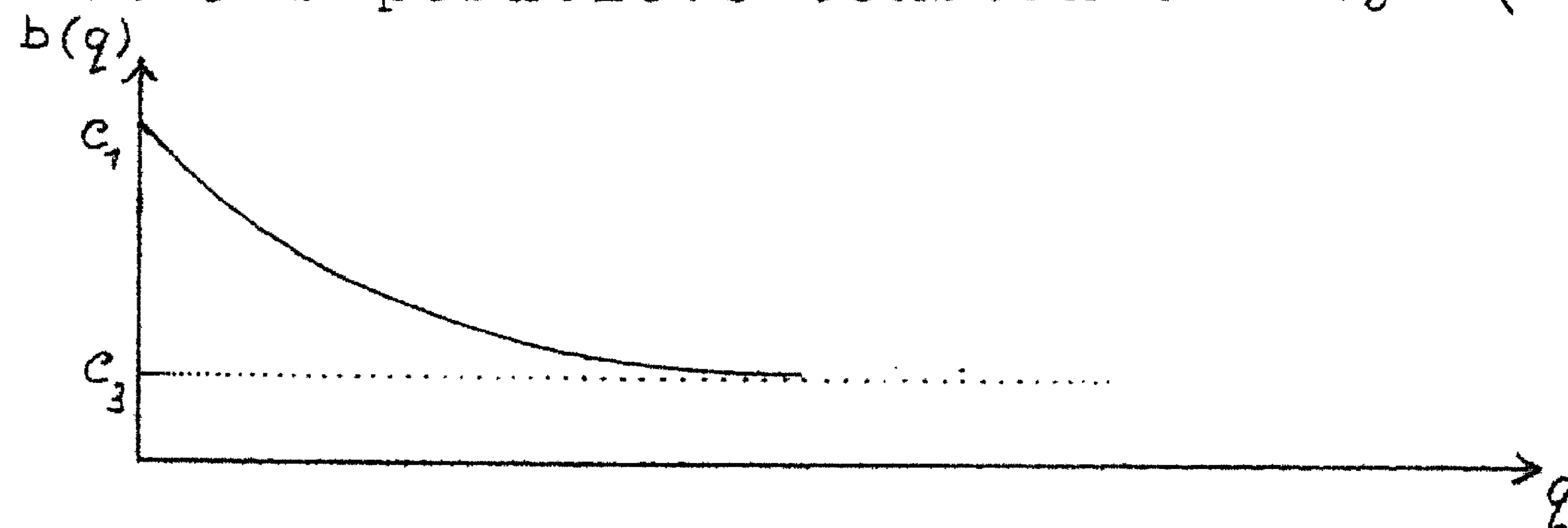


fig. 3

Krommen van het type $b(q) = c_1 e^{-c_2 q} + c_3$.

Wanneer men dus een kromme van het type (11) kan aanpassen, vindt men de optimale lengte θ^* van een periode tussen twee opeenvolgende bestellingen door (9) op te lossen. De optimale ordergrootte is dan

$$q^* = D\theta^* \quad (12)$$

terwijl het optimale verloop van de voorraad de in figuur 4 gegeven vorm bezit.

3) Deze voorwaarde is equivalent met $b(q)$ convex en voor iedere q tweemaal differentieerbaar.

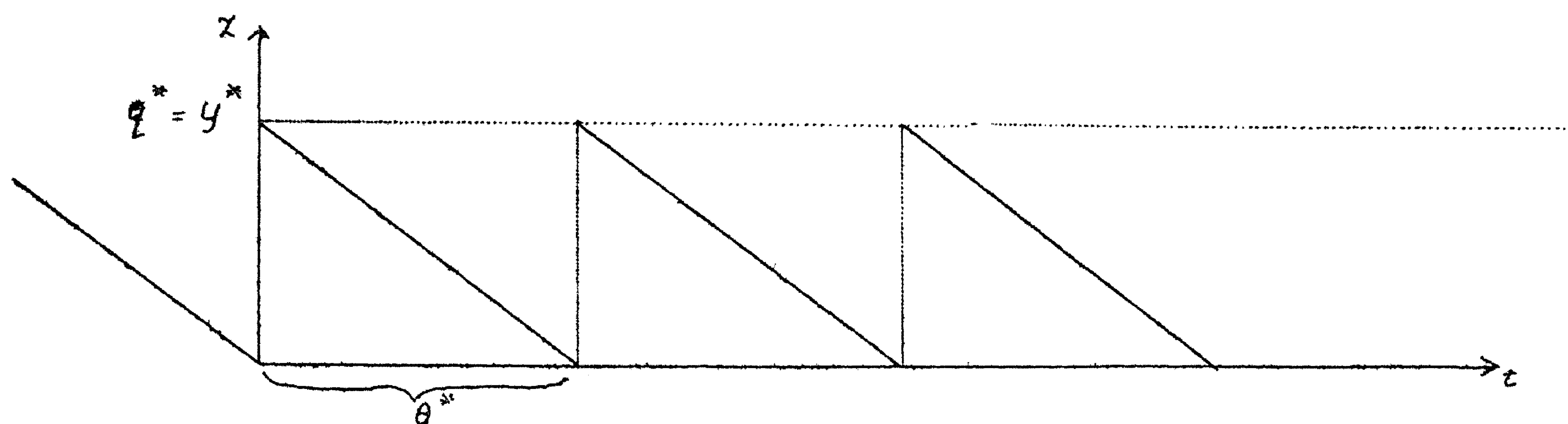


fig. 4

Verloop van de voorraad bij een optimale voorraadpolitiek voor een oneindig lange periode.

Hoewel nog een groot aantal functies voldoet aan de voorwaarde $b''(q) > 0$ voor iedere q , zijn er reële functies $b(q)$, die dit niet doen. Een voorbeeld hiervan is geschetst in fig. 5, de tweede afgeleide van $b(q)$ is hier hetzij niet gedefinieerd, hetzij nul. De functie $\mathcal{L}(\theta)$ is hier

$$\begin{aligned} \text{voor } 0 \leq D\theta < q_1 & \quad \text{gelijk aan: } \frac{k_{10}}{\theta} + D b_0 + \frac{1}{2} k_{21} D\theta, \\ \text{" } q_1 \leq D\theta < q_2 & \quad \text{" } \quad \frac{k_{10}}{\theta} + D b'_0 + \frac{1}{2} k_{21} D\theta, \\ \text{" } q_2 \leq D\theta < \infty & \quad \text{" } \quad \frac{k_{10}}{\theta} + D b''_0 + \frac{1}{2} k_{21} D\theta \end{aligned} \quad (13)$$

en bestaat dus uit de drie volgende termen:

$\frac{k_{10}}{\theta}$, een monotoon dalende functie,

een constante, die in de verschillende intervallen, een andere waarde bezit,

$\frac{1}{2} k_{21} D\theta$, een rechte door de oorsprong met positieve richtingscoëfficiënt.

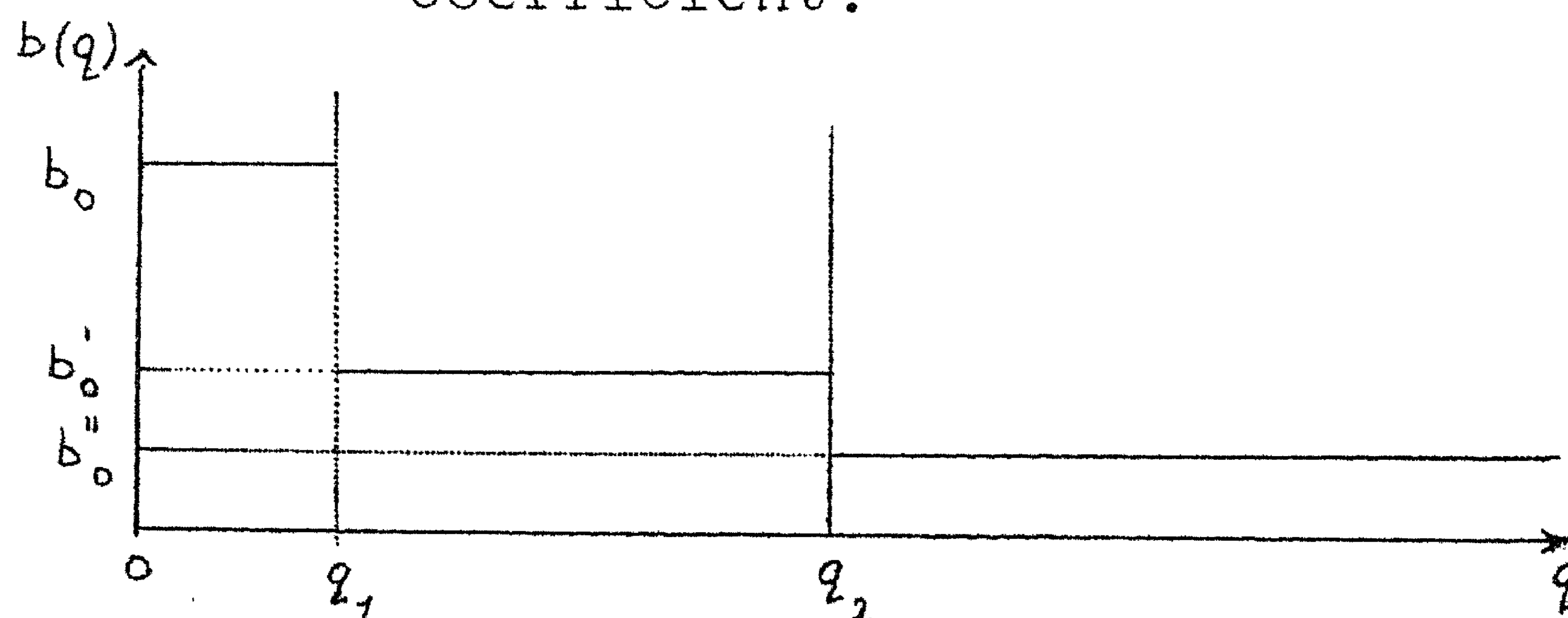


fig. 5

Een functie $b(q)$, waar de tweede afgeleide nergens groter is dan nul.

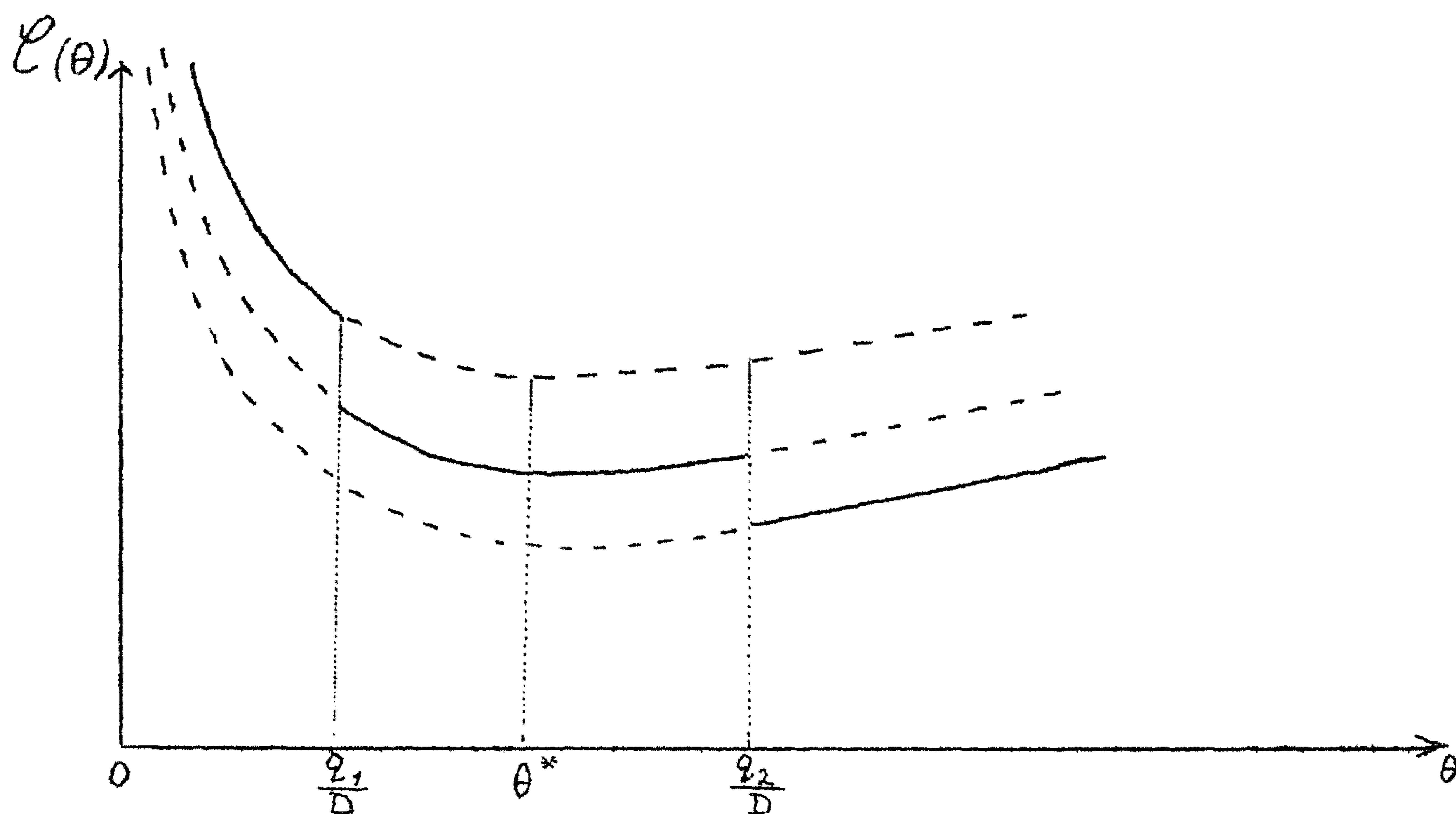


fig. 6

De functie $\mathcal{C}(\theta)$ behorende bij de functie $b(q)$ van fig. 5

In figuur 6 is $\mathcal{C}(\theta)$ de getrokken kromme met discontinuïteiten in de punten $\theta = \frac{q_1}{D}$ en $\theta = \frac{q_2}{D}$. De gestippelde lijnen geven de functies $\mathcal{C}(\theta)$ weer, die men zou vinden wanneer de constanten b_0 , b_0' en b_0'' voor iedere θ van kracht zouden zijn. De functie $\mathcal{C}(\theta)$ bezit één gewoon minimum, waarvan de plaats onafhankelijk is van de b_0 -waarden en bepaald wordt door

$$\mathcal{C}'(\theta^*) = - \frac{k_{10}}{(\theta^*)^2} + \frac{1}{2} k_{21} D = 0. \quad (14)$$

Het minimum wordt dus bereikt voor

$$\theta^* = \sqrt{\frac{2 k_{10}}{k_{21} D}}. \quad (15)$$

Stel dat voor θ^* geldt (zoals getekend is in fig. 6) $q_1 \leq D \theta^* < q_2$; de waarde van dit minimum moet dan worden vergeleken met de kosten wanneer men een bestelling verricht, waarvan de omvang juist in het volgende interval ligt. Hier moeten dus

$$\mathcal{C}(\theta^*) = \frac{k_{10}}{\sqrt{\frac{2 k_{10}}{k_{21} D}}} + D b_0' + \frac{1}{2} k_{21} D \sqrt{\frac{2 k_{10}}{k_{21} D}} = D b_0' + \sqrt{2 k_{10} k_{21} D}$$

en

$$\frac{k_{10}}{\frac{q_2}{D}} + D b_0'' + \frac{1}{2} k_{21} D \frac{q_2}{D} = \frac{k_{10} D}{q_2} + D b_0'' + \frac{k_{21} q_2}{2}$$

worden vergeleken; de kleinste van deze waarden bepaalt of θ^* dan wel $\frac{q_2}{D}$ de optimale periode is tussen twee bestellingen.

Wanneer het minimum van $\mathcal{C}(\theta)$ in het eerste interval ligt, moet dit vergeleken worden met de waarden van $\mathcal{C}(\theta)$ in de punten $\theta = \frac{q_1}{D}$ en $\theta = \frac{q_2}{D}$. Ligt het minimum van $\mathcal{C}(\theta)$ in het laatste interval, dan is $\theta = \theta^*$ de optimale waarde van θ .

Tenslotte willen wij nog wijzen op een formule welke soms wordt gegeven. Voor $b(q)$ kan men substitueren

$$b(q) = b_0 - b_1 q, \quad (16)$$

waarin b_0 en b_1 positieve constanten zijn. Differentiatie van $\mathcal{C}(\theta)$ leidt dan tot

$$\theta^* = \sqrt{\frac{k_{10}}{D(\frac{1}{2}k_{21} - b_1 D)}}, \quad (17)$$

een waarde van θ , die voor $\frac{1}{2}k_{21} > b_1 D$ inderdaad het minimum van $\mathcal{C}(\theta)$ oplevert. Men moet met deze formule zeer voorzichtig zijn aangezien (16) nooit op een groot interval geldig kan zijn ($b(q)$ nooit negatief!). Bovendien leidt (15) voor $\frac{1}{2}k_{21} \leq b_1 D$ tot de "optimale" politiek oneindig veel bestellen; in de praktijk betekent dit dat de aanwezige opslagcapaciteit de grens van de orderomvang bepaalt.

Optimale voorraadpolitiek voor een eindige periode

Definitie

Een voorraadpolitiek voor een eindig interval $[0 - T]$ noemen wij optimaal, wanneer de netto-opbrengst in dat interval zo groot mogelijk is.

Evenals bij een oneindig lange periode moeten ook hier voor een optimale voorraadpolitiek alle x_i 's nul zijn; er wordt dus pas bijbesteld als de aanwezige voorraad is uitgeput. Wanneer er in het interval $[0 - T]$ n bestellingen worden verricht, valt dit interval in n perioden uiteen, die achtereenvolgens $\theta_1, \dots, \theta_n$ tijdseenheden lang zijn. De totale netto-opbrengst $\mathcal{U}$ is dus met behulp van (6):

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \mathcal{U}(\theta_i) = k_{31} D \sum_{i=1}^n \theta_i - n k_{10} - \sum_{i=1}^n q_i b(q_i) - \frac{1}{2} k_{21} D \sum_{i=1}^n \theta_i^2. \quad (18)$$

De nu volgende methode om de optimale bestelpolitiek te bepalen is afgeleid door G. DE LEVE.⁴⁾ Het probleem wordt hierbij in twee delen gesplitst. Eerst wordt aangenomen dat het optimale aantal bestellingen gelijk is aan n . Het ligt dan voor de hand de periode $[0, T]$ te verdelen in n gelijke intervallen en iedere keer evenveel te bestellen. In appendix I wordt bewezen dat deze methode inderdaad optimaal is, wanneer de tweede afgeleide van $b(q)$ monotoon dalend is. Dit is bijv. het geval bij de reeds eerder genoemde klasse van krommen

$$b(q) = c_1 e^{-c_2 q} + c_3, \quad (11)$$

waarin c_1, c_2 en c_3 alle positief zijn. De tweede afgeleide is

$$b''(q) = c_1 c_2^2 e^{-c_2 q} \quad (19)$$

en deze functie is inderdaad monotoon dalend.

Het is niet moeilijk om een voorbeeld te geven waarbij het niet optimaal is om het interval $[0, T]$ in gelijke delen te verdelen. Laten wij eens aannemen dat er in die periode twee keer moet worden besteld, dat $b(q)$ voor $q < q_1$ gelijk is aan b_0 en voor $q \geq q_1$ gelijk aan $b'_0 < b_0$ (vergelijk fig. 5) en dat geldt $DT < 2q_1$. Bestelt men nu één keer een hoeveelheid $q > q_1$, dan moet men de tweede keer $DT - q < q_1$ bestellen zodat de totale kosten, afgezien van de bestelkosten bedragen:

$$q b'_0 + (DT - q) b_0 + \frac{1}{2} k_{21} \frac{q^2}{D} + \frac{1}{2} k_{21} \frac{(DT - q)^2}{D} =$$

$$DT b_0 + \frac{1}{4} k_{21} DT^2 - (b_0 - b'_0) q + \frac{k_{21}}{D} (q - \frac{1}{2} DT)^2.$$

Het minimum hiervan wordt bereikt voor de waarde q^* die voldoet aan

$$-(b_0 - b'_0) + \frac{2 k_{21}}{D} (q^* - \frac{1}{2} DT) = 0,$$

dus voor

$$q^* = \frac{D}{2} \left[T + \frac{b_0 - b'_0}{k_{21}} \right].$$

Achteraf moet men uiteraard controleren of q^* inderdaad $\geq q_1$ is. Kiest men voor de verschillende constanten: $T = 14$ weken, $D = 50$ eenheden per week, $q'_1 = 500$, $b_0 = 1$, $b'_0 = 0,90$, $k_{21} = 0,01$, dan is de optimale oplossing $q^* = 600$. Het interval van 14 weken moet dan in één van 12 en in één van 2 weken worden verdeeld. De totale kosten zijn nu 677, terwijl deze bij een verdeling in tweemaal 7 weken 724,5 zouden hebben bedragen.

4) De door de auteurs gegeven oplossingsmethode is voor eindige intervallen niet correct; zie appendix II, punt 2.

Wij beperken ons nu verder tot functies $b(q)$, waarvoor $\lim_{q \rightarrow \infty} b'(q) = 0$ is en $b''(q)$ positief en monotoon dalend. Hoe vaak moet er nu een bestelling worden verricht?

De totale vraag in de periode $[0 - T]$ bedraagt DT ; de θ 's zijn alle gelijk aan $\frac{T}{n}$, terwijl de omvang van alle n orders $\frac{DT}{n}$ is. Substitueren wij dit in (18), dan vinden wij

$$\mathcal{U}(n) = k_{31} DT - n k_{10} - \sum_{i=1}^n \frac{DT}{n} b\left(\frac{DT}{n}\right) - \frac{1}{2} k_{21} \sum_{i=1}^n D\left(\frac{T}{n}\right)^2. \quad (20)$$

Evenals bij de oneindig lange periode kunnen wij ook hier de onkosten

$$\mathcal{L}(n) = n k_{10} + DT b\left(\frac{DT}{n}\right) + \frac{1}{2} k_{21} D \frac{T^2}{n^2} \quad (21)$$

minimaliseren. Wij kunnen deze functie echter niet differentiëren om het minimum te vinden, daar n alleen gehele positieve waarden kan aannemen. Daarom onderzoeken wij de functie

$$\mathcal{V}(v) = v k_{10} + DT b\left(\frac{DT}{v}\right) + \frac{1}{2} k_{21} D \frac{T^2}{v^2}, \quad (22)$$

waarin v wel een variabele is die alle waarden kan aannemen.

$\mathcal{V}(v)$ is, omdat $b(q)$ een minstens tweemaal differentiëerbare functie is eveneens minstens tweemaal differentiëerbaar en neemt voor $v = n$ dezelfde waarden aan als $\mathcal{L}(n)$. De extremen van $\mathcal{V}(v)$ worden bereikt voor waarden van v die voldoen aan

$$\mathcal{V}'(v) = k_{10} - \frac{D^2 T^2}{v^2} b'\left(\frac{DT}{v}\right) - \frac{1}{2} k_{21} D \frac{T^2}{v^2} = 0 \quad (23)$$

of

$$\frac{k_{10} v^2}{D T^2} - \frac{1}{2} k_{21} = D b'\left(\frac{DT}{v}\right). \quad (24)$$

Het linker lid van deze vergelijking is een monotoon stijgende functie van v , het rechter lid ten gevolge van de gemaakte onderstellingen een monotoon dalende; zie ook figuur 7. De functie $\mathcal{V}(v)$ heeft dus maar één werkelijk extreem; het wordt bereikt voor $v = v^*$ en is een minimum omdat $\mathcal{V}(v)$ zowel voor $v \rightarrow 0$ als voor $v \rightarrow \infty$ willekeurig groot wordt. In figuur 8 is de functie geschetst. De waarden van $\mathcal{V}(v)$ waarvoor $\mathcal{L}(n)$ gedefinieerd is zijn met kruisjes aangegeven. Uit deze figuur leest men direct af dat voor v^* geheel $\mathcal{L}(n)$ minimaal is voor $n = v^*$ en voor v^* niet geheel voor één van de twee gehele waarden waar v^* tussen in ligt.

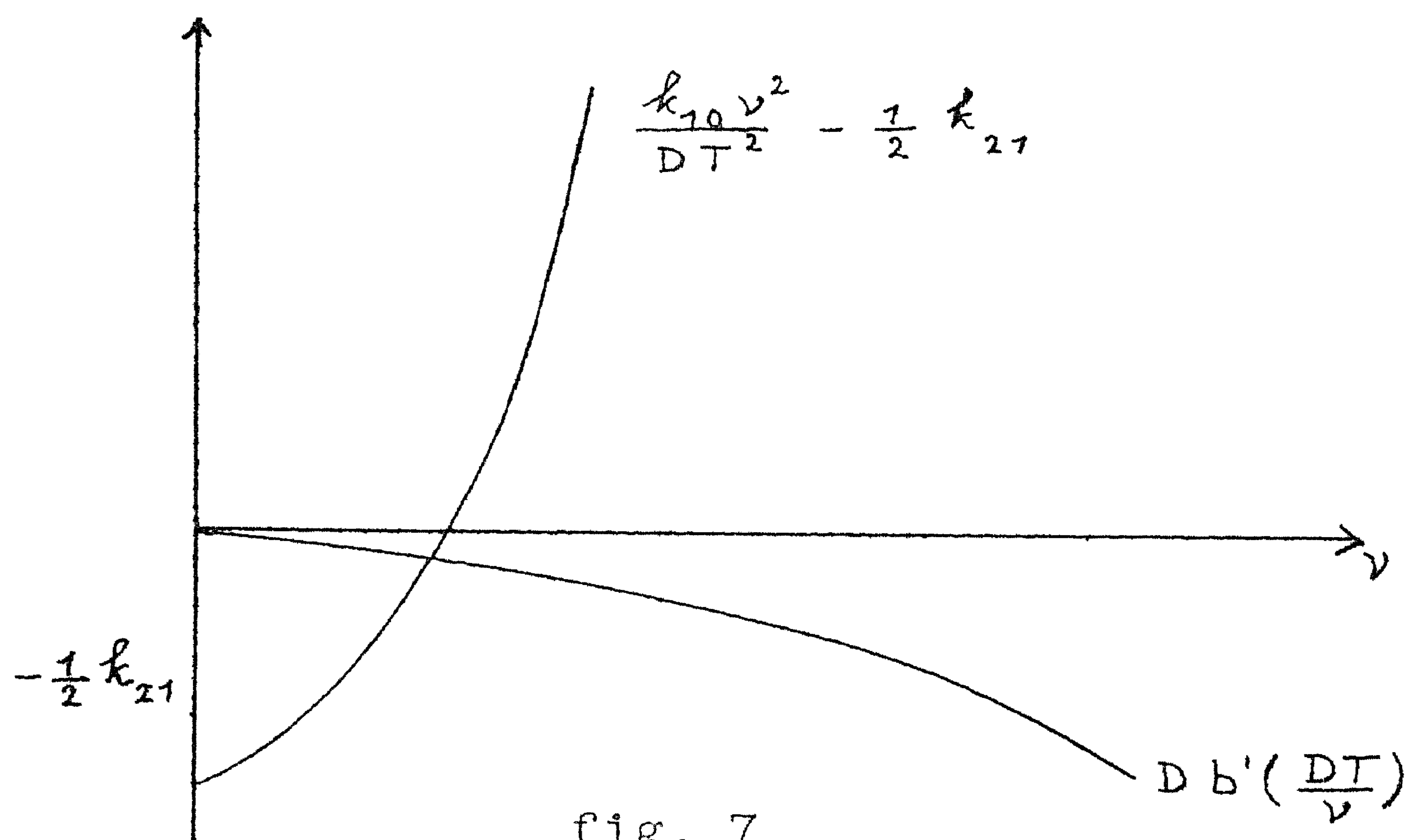


fig. 7

Linker en rechter lid van (24) zijn voor slechts één waarde van v aan elkaar gelijk

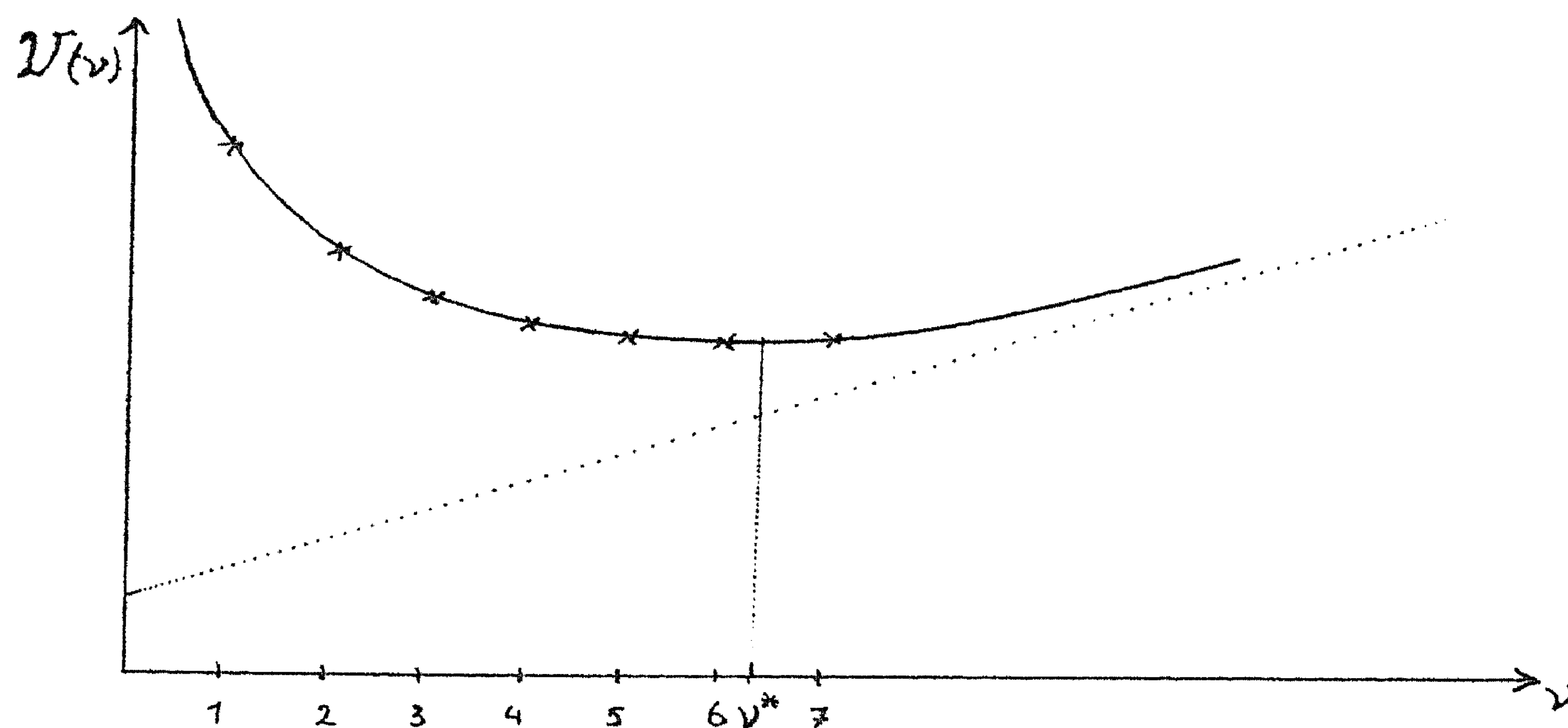


fig. 8

De functie $V(v)$

Het probleem is hiermee voor een uitgebreide klasse van functies $b(q)$ opgelost.

Wanneer men in een bepaalde situatie wil vergelijken of het in de gegeven periode $[0, T]$ bijv. voordeliger is om twee keer te bestellen in plaats van één keer, dan kan men dit ook doen zonder te differentiëren. Er moet dan voldaan zijn aan de ongelijkheid

$$2 \left[k_{10} + \frac{DT}{2} b\left(\frac{DT}{2}\right) + \frac{1}{2} k_{21} D \frac{T^2}{4} \right] < k_{10} + DT b(DT) + \frac{1}{2} k_{21} DT^2 \quad (25)$$

of

$$k_{10} + DT \left[b\left(\frac{DT}{2}\right) - b(DT) \right] < \frac{1}{4} k_{21} DT^2. \quad (26)$$

In woorden betekent deze voorwaarde: de kosten van een keer extra bestellen en het verlies aan korting door de kleinere omvang van de orders, moeten lager zijn dan de vermindering van de voorraadkosten. Willekeurig andere verdelingen in gelijke stukken van het interval $[0 - T]$ kunnen op analoge wijze met elkaar worden vergeleken.

Opmerking

Wanneer er voldaan is aan de genoemde voorwaarden, dan worden de optimale θ , dus θ^* in het oneindige geval en het optimale aantal bestellingen n^* in het eindige geval afgeleid met behulp van dezelfde vergelijking (zie (9) en (23)). Dit rechtvaardigt dus voor veel situaties hetgeen men intuïtief zou doen, nl. de gemiddelde opbrengst per tijdseenheid maximaliseren en vervolgens n^* kiezen uit $[v^*]$ en $[v^*] + 1$.⁵⁾

Generalisaties

De tot nu toe gegeven afleidingen kunnen worden uitgebreid tot verschillende meer algemene situaties. Zo ontstaan er geen moeilijkheden wanneer men de voorraadkosten $K_2 = k_{21} x$ vervangt door $K_2 = k_{20} + k_{21} x$, of wanneer men er van uitgaat dat een gedane order pas over T tijdseenheden binnenkomt. Ook in de situatie, waarin alleen besteld kan worden met perioden die een veelvoud zijn van een bepaalde periode θ^0 (bijv. een week) leiden eenvoudige wijzigingen in de oplossing tot voorraadpolitieken, die in ieder geval weinig van de optimale zullen verschillen.

1.3. Statisch model, waarin de vraag een bekende kansverdeling bezit

In 1.2 onderzochten wij het probleem van de voorraadbeheerder, die kan rekenen op een constante vraag per tijdseenheid. In de meeste gevallen zal de vraag echter niet constant zijn. Wij gaan daarom nu over tot de situatie waarin de vraag per periode niet een bekende constante is, doch anderzijds ook niet geheel onbekend is en nemen aan dat de vraag $\underline{D}$ ⁶⁾ per periode een bekende kansverdeling $F(D)$ bezit.

5) $[v^*]$ betekent het grootste gehele getal $\leq v^*$.

6) Stochastische grootheden worden in dit rapport onderstreept om duidelijk onderscheid te maken tussen deze grootheden en de waarden die ze aannemen.

In deze paragraaf bestuderen wij de situatie van de voorraad-beheerder die zich in het begin van een periode, gedurende welke hij verder niet kan bijbestellen, afvraagt hoe groot hij zijn beginvoorraad y moet kiezen. Wij onderstellen verder dat eventuele aan het eind van die periode overgebleven voorraden geen waarde meer voor hem bezitten (bijv. tengevolge van veroudering of bederf). De verschillende grootheden worden met dezelfde letters aangegeven als in 1.2. Verder beperken wij ons tot continue kansverdelingen, dat zijn kansverdelingen met een verdelingsdichtheid; voor andere kansverdelingen moeten de formules op voor de hand liggende wijze worden veranderd.

Voor de kostenfuncties maken wij de volgende onderstellingen: inkoopkosten; $K_1(q) = k_{10} + q b(q)$, waarin $b(q)$ weer de kosten per eenheid voorstellen bij een omvang q van de order, kosten in voorraad houden; wij nemen aan dat deze bij een beginvoorraad y voor het gehele interval gelijk zijn aan $K_2(y) = k_{20} + k_{21} y$; het verloop van de verkoop in de betreffende periode heeft dus geen invloed op deze kosten, opbrengst bij verkoop; $K_3(D) = k_{30} + k_{31} D$ bij een vraag D gedurende de periode.

Het is mogelijk dat de vraag D naar het product groter is dan de beginvoorraad y . Wij nemen nu aan dat men er een bedrag K_4 voor over heeft om het tekort $D - y$ aan te vullen; laat K_4 gegeven worden door

$$K_4 = \begin{cases} 0 & \text{voor } D \leq y \\ k_{40} + k_{41} (D - y) & \text{" } D > y \end{cases} \quad (27)$$

waarin k_{40} en k_{41} constanten ≥ 0 zijn.

De verwachting van de bruto-opbrengst $K_3(D)$ is

$$E K_3(D) = k_{30} + k_{31} \int_0^y D f(D) dD + k_{31} y [1 - F(y)] \quad (28)$$

en de verwachting van de verliezen wegens niet kunnen leveren

$$E K_4(D - y) = k_{41} \int_y^\infty D f(D) dD + (k_{40} - k_{41} y) [1 - F(y)]. \quad (29)$$

Uit (28), (29) en de andere gegevens volgt dat de verwachting van het netto-verlies op een constante na gelijk is aan

$$V = k_{21} y + y b(y) + \{k_{40} - (k_{31} + k_{41}) y\} [1 - F(y)] - (k_{31} + k_{41}) \int_0^y D f(D) dD. \quad (30)$$

Wanneer $F(D)$ een differentieerbare verdelingsdichtheid $f(D)$ bezit kunnen wij de optimale beginvoorraad y^* vinden uit

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)_{y=y^*} = 0 \quad \text{en} \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_{y=y^*} > 0, \quad (31)$$

of

$$k_{21} + b(y^*) + y^* b'(y^*) - (k_{31} + k_{41})[1 - F(y^*)] - k_{40} f(y^*) = 0 \quad (32)$$

en

$$2b'(y^*) + y^* b''(y^*) + (k_{31} + k_{41})f(y^*) - k_{40} f'(y^*) > 0. \quad (33)$$

In het bijzondere geval waarin de benaderingen $b(q) = b_0$, $k_{31} = 0$ en $k_{41} = 0$ geoorloofd zijn, gaan (32) en (33) over in

$$f(y^*) = \frac{k_{21} + b_0}{k_{40}} \quad \text{en} \quad f'(y^*) < 0.$$

De oplossing kan dan worden afgelezen uit de grafiek van de verdelingsdichtheid $f(D)$; zie fig. 9. Deze methode kan dus worden gebruikt wanneer de inkoopprijs per eenheid constant is en de winst respectievelijk het verlies van wel resp. niet kunnen verkopen beide onafhankelijk zijn van de betrokken hoeveelheden.

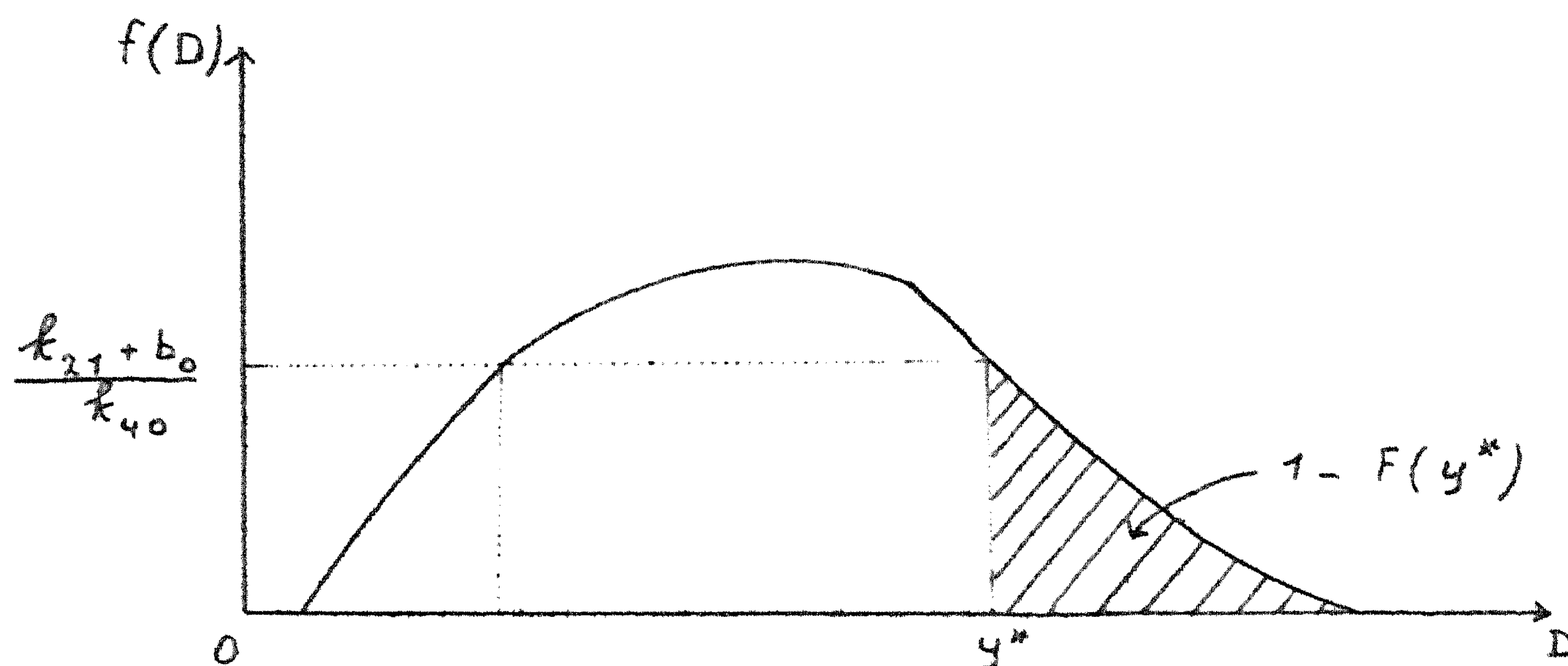


fig. 9

Bepaling van de optimale y^* uit de verdelingsdichtheid $f(D)$ van de vraag.

Ook bij het betrekkelijk grote aantal onderstellingen, gemaakt in deze paragraaf, blijven er nog verschillende constanten over, die geschat moeten worden. Aangezien dit niet steeds nauwkeurig zal kunnen geschieden is het van belang na te gaan hoe groot bij de optimale beginvoorraad de kans is dat men aan de vraag niet kan voldoen. Door na te gaan hoe deze kans $1 - F(y^*)$ verloopt voor verschillende waardencombinaties van de constanten, kan men zich een redelijk beeld vormen van de situatie. Soms wordt de optimale y alleen bepaald via een bij voorbaat vastgestelde waarde van de kans $1 - F(y^*)$. Het nadeel van deze methode is dat de kosten die een rol spelen niet expliciet worden geformuleerd, terwijl ze bij het vaststellen van de toelaatbare kans om "neen" te moeten verkopen toch impliciet in overweging zijn genomen.

Het hier gegeven model kan bijv. worden gebruikt voor het bekende probleem van de krantenjongen die zich afvraagt hoeveel kranten hij iedere dag in voorraad moet nemen en door de inkoper van een restaurant voor zover het aan bederf onderhevige waren betreft. Men kan het eveneens gebruiken om de vraag te beantwoorden hoeveel reserve-onderdelen men moet kopen voor een bepaald type werktuigen wanneer deze onderdelen alleen geschikt zijn voor deze werktuigen en men er zeker van is later dit type niet meer aan te schaffen. Deze toepassingen zijn nader uitgewerkt door J. LADERMAN, S.B. LITTAUER en L. WEISS in: The Inventory Problem, J.A.S.A. 48 (1953) 717-732.

1.4. Dynamisch model waarin de vraag een bekende kansverdeling bezit.

Terwijl de probleemstelling in 1.3 zich beperkte tot het bepalen van de optimale omvang van één bestelling, beschouwen wij nu het probleem waarbij besteld kan worden op de tijdstippen $0, \theta_0, 2\theta_0, \dots, t\theta_0, \dots$, waarin θ_0 een gegeven constante voorstelt welke wij in het vervolg als tijdseenheid kiezen. De bestellingen kunnen dan verricht worden op de tijdstippen $0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots$. De vraag D_t in het interval $[t, t+1]$ bezit een bekende continue kansverdeling $F(D)$, welke onafhankelijk is van t . Inkoop- en verkooporders worden direct uitgevoerd. De order op het tijdstip t geven wij aan met q_t , de voorraad voor het binnenkomen van deze order met x_t en de voorraad na het binnenkomen van de order met y_t . Er is dus steeds voldaan aan de relatie

$$y_t = x_t + q_t \quad (34)$$

Wij zoeken nu naar een orderpolitiek die voor ieder tijdstip aangeeft of er besteld moet worden en zo ja, hoeveel. Ter vereenvoudiging van het probleem beperken wij ons tot zogenaamde (r, S) orderpolitieken.

Definitie. Een voorraadpolitiek is van het type (r, S) waarin $S \geq r \geq 0$ is, wanneer de bestelling q_t op het tijdstip t voldoet aan

$$\begin{aligned} q_t &= 0 & \text{voor} & \quad x_t > r \\ q_t &= S - x_t & \text{"} & \quad x_t \leq r. \end{aligned} \quad (35)$$

Men noemt S de maximale voorraad en r het bestelpunt. Wanneer wij bovendien aannemen dat de vraag in iedere periode gelijkmatig over die periode is verdeeld, dan zal het verloop van de voorraad bij een (r, S) -politiek een vorm bezitten, zoals aangegeven is in figuur 10.

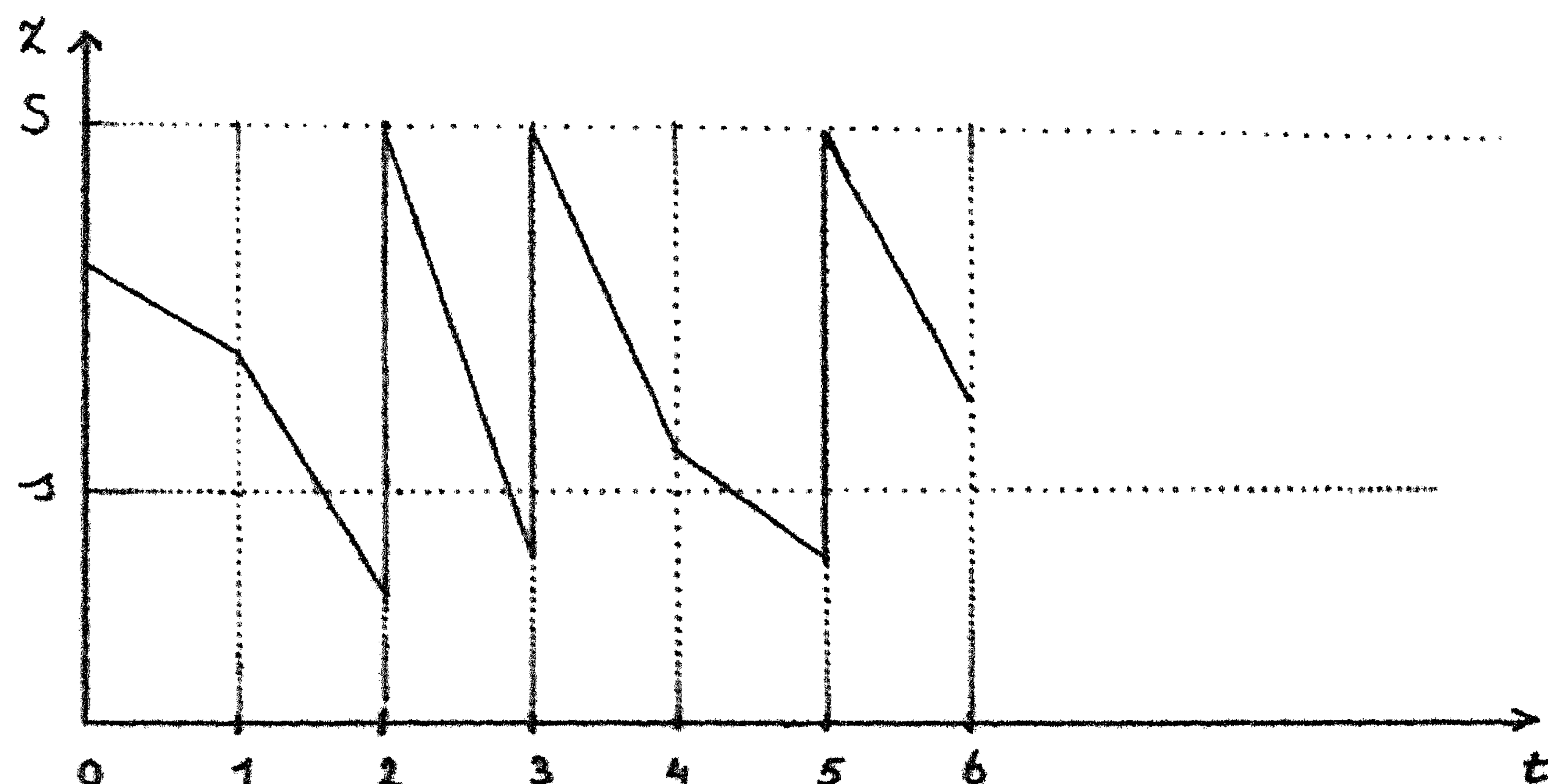


fig. 10

Verloop van de voorraad bij een (r, S) -politiek

Over de kostenfuncties maken wij de volgende onderstellingen:

inkoopkosten; deze bedragen bij een inkooporder van de omvang q :

$$K_1(q) = k_{10} + k_{11} q,$$

kosten in voorraad houden; per tijdseenheid zijn deze evenredig met de in het begin aanwezige voorraad, zodat ze voor de periode $[t, t+1]$ bedragen $K_2(y_t) = k_{21} y_t$,

opbrengst bij verkoop; deze onderstellen wij evenredig met de verkoop, dus $K_3(D) = k_{31} D$,

kosten wegens niet kunnen leveren; wij nemen aan dat deze constant zijn en niet afhangen van de omvang der niet vervulde vraag, dus

$$K_4 = \begin{cases} 0 & \text{voor } D_t \leq y_t \\ k_{40} & \text{" } D_t > y_t \end{cases}.$$

Verder nemen wij aan dat $k_{11} = k_{31}$ is, met andere woorden, dat bruto-opbrengst en inkoopprijs per eenheid aan elkaar gelijk zijn. Als nu alle ingekochte goederen ook verkocht worden, hetzij in dezelfde, hetzij in een latere periode, dan kunnen wij de bedragen k_{11} en k_{31} verder buiten beschouwing laten. De enige kosten die nog een rol spelen en die voor de verschillende orderpolitieken uiteen kunnen lopen, zijn dan: de kosten ten gevolge van ongelijke aantallen orders, de opslagkosten en de kosten wegens het niet kunnen voldoen aan de vraag. Uit alle mogelijke (τ, S) -politieken willen wij nu die politiek opsporen waarbij, uitgaande van de huidige voorraad x_0 , de contante waarde van alle toekomstige verliesverwachtingen minimaal is. Daartoe moeten wij eerst deze contante waarde berekenen als functie van τ en S .

Wanneer x_0 gegeven is en er een bepaalde (τ, S) -politiek wordt toegepast, vormen de beginvoorraden $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$ een rij stochastische grootheden. De kansverdeling van x_t kan berekend worden uit de waarde die x_{t-1} heeft aangenomen en de kansverdeling $F(D)$ van de vraag D_{t-1} ; de waarden van de beginvoorraden in de perioden vóór de $(t-1)^{\text{ste}}$ behoeft men daarvoor niet te kennen. Een rij stochastische grootheden, waarbij de verdeling van x_t alleen afhangt van de juist voorafgaande variabele en niet van de andere variabelen noemt men een MARKOV-proces; $x_1, x_2, \dots$ vormen dus een dergelijk proces.

De verliesverwachting in de periode $[t, t+1]$ kan bij gegeven waarde x_t van x_t en een bepaalde (τ, S) -politiek worden berekend. Wij geven deze verwachting aan met $V_{t,t}(x_t)$, waarin

de eerste index de betreffende periode aangeeft, de tweede wat de laatste gegeven beginvoorraad is en het argument hoe groot deze beginvoorraad is. Bij de gemaakte onderstellingen vinden wij voor $V_{t,t}(x_t)$:

$$V_{t,t}(x_t) = \begin{cases} k_{21}x_t + k_{40}[1 - F(x_t)] & \text{voor } x_t > s \\ k_{10} + k_{21}s + k_{40}[1 - F(s)] & \text{" } x_t \leq s. \end{cases} \quad (36)$$

Voor $x_t \leq s$ is de functie $V_{t,t}(x_t)$ een constante, die wij kunnen aangeven met $V_{t,t}(0)$ en welke voldoet aan

$$V_{t,t}(0) = V_{t,t}(s) + k_{10}. \quad (37)$$

De functie $V_{t,t}(x_t)$ kan bv. de vorm bezitten, zoals geschetst is in figuur 11.

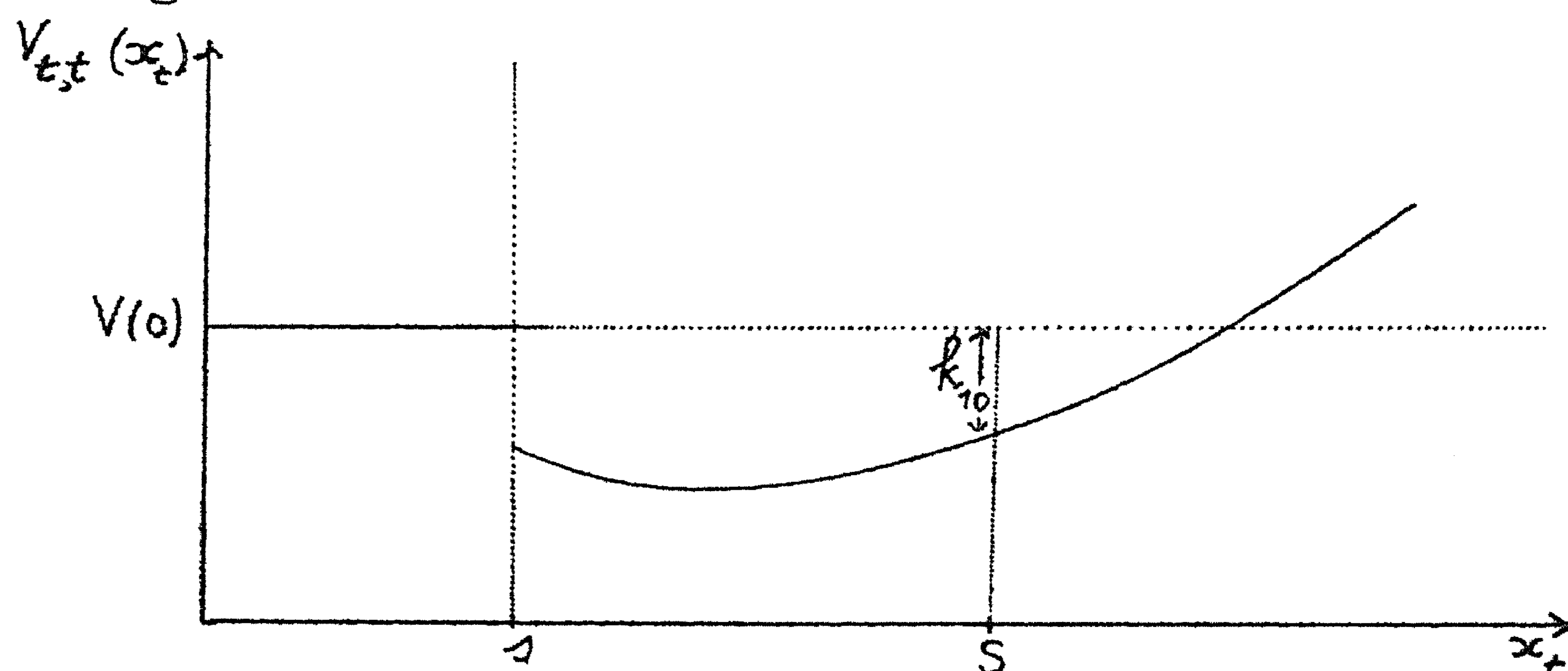


fig. 11

Schets van een mogelijke vorm van de functie $V_{t,t}(x_t)$.

Wij hebben echter niet deze voorwaardelijke verwachting in het interval $[t, t+1]$ nodig, doch de schadeverwachting uitgaande van de beginvoorraad x_0 . Deze vinden wij uit (36) door x_t weer als een stochastische variabele te beschouwen en dan de verwachting te nemen over de verdelingsfunctie van x_t . Aangezien het een schadeverwachting is die de t^{de} periode betreft, terwijl de laatste gegeven beginvoorraad x_0 is, gebruiken wij hiervoor de notatie $V_{t,0}(x_0)$; er geldt dus

$$V_{t,0}(x_0) = \mathcal{E} V_{t,t}(x_t). \quad (38)$$

Bovendien kent men aan een verlies in de toekomst niet dezelfde betekenis toe als aan een verlies nu direct. Wij voeren daarom een disconteringsfactor α_t in, waarmee de zogenaamde contante waarde van een verlies over t tijdseenheden wordt berekend. De contante waarde van de voorwaardelijke verliesverwachting $V_{t,t}(x_t)$ op het tijdstip nul wordt aangegeven met $A_{t,t}(x_t)$ en is gelijk aan

$$A_{t,t}(x_t) = \alpha_t V_{t,t}(x_t). \quad (39)$$

Wij nemen aan dat geldt $\alpha_t = \alpha^t$ met $0 \leq \alpha < 1$. Vaak wordt α gelijk aan $\frac{1}{1+\delta}$ gekozen, waarin δ de rentestand is; noodzakelijk is dit echter niet. De contante waarde van $V_{t,0}(x_0)$ wordt aangegeven met $A_{t,0}(x_0)$ en is gelijk aan $\alpha^t V_{t,0}(x_0)$.

Voor willekeurige x bedraagt de som $A(x)$ van alle contante waarden van toekomstige verliesverwachtingen nu

$$\begin{aligned} A(x) &= A_{0,0}(x) + A_{1,0}(x) + A_{2,0}(x) + \dots \\ &= V_{0,0}(x) + \alpha V_{1,0}(x) + \alpha^2 V_{2,0}(x) + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

$A(x)$ is een functie van de parameters γ en S . De voorraadbeheerder zal deze parameters bij gegeven x nu zodanig kiezen dat $A(x)$ minimaal is. Om dit probleem op te lossen schrijven wij $A(x)$ eerst in een beter hanteerbare vorm ⁷⁾.

Voor alle waarden van $x \leq \gamma$ wordt er bijbesteld tot S . Daar nu, afgezien van de orderkosten k_{10} , de inkoopkosten buiten beschouwing konden worden gelaten is $A(x)$ voor $x \leq \gamma$ een constante, welke wij aangeven met $A(0)$. Verder voldoet $A(0)$ aan de vergelijking

$$A(0) = A(S) + k_{10}. \quad (41)$$

Wij beschouwen nu $A(0)$ als een bekende constante en berekenen de functie $A(x)$ voor $x > \gamma$. Met behulp van (41) kan $A(0)$ dan gevonden worden.

Wij maken gebruik van het feit dat zodra voor een t geldt: $x_t \leq \gamma$, op dat tijdstip de som van alle contante waarden van toekomstige verliesverwachtingen gelijk is aan $A(0)$. Het gehele proces wordt daartoe gesplitst in een aantal stukken, waarvan wij afzonderlijk de contante waarde van de verliesverwachting bepalen. De splitsing is in figuur 12 schematisch weergegeven en bestaat uit de volgende delen:

- het interval $[0 - 1]$,
- de intervallen $[1-2], [2-3], \dots$ als $x_1 \leq \gamma$ is,
- het interval $[1-2]$ als $x_1 > \gamma$ is,
- de intervallen $[2-3], [3-4], \dots$ als $x_1 > \gamma$ maar $x_2 \leq \gamma$ is,
- het interval $[2-3]$ als x_1 en x_2 beide groter dan γ zijn,
- de intervallen $[3-4], [4-5], \dots$ als x_1 en $x_2 > \gamma$ zijn, maar $x_3 \leq \gamma$, enzovoorts. ⁸⁾

7) De hier volgende afleiding is niet dezelfde als de door de auteurs gegeven afleiding.

8) Wanneer geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} P[\sum_{i=1}^n D_i < x - \gamma] = 0$, nemen wij op deze wijze inderdaad alle bijdragen tot $A(x)$ mee. Bij alle in de praktijk voorkomende verdelingsfuncties van de vraag is aan deze voorwaarde voldaan.

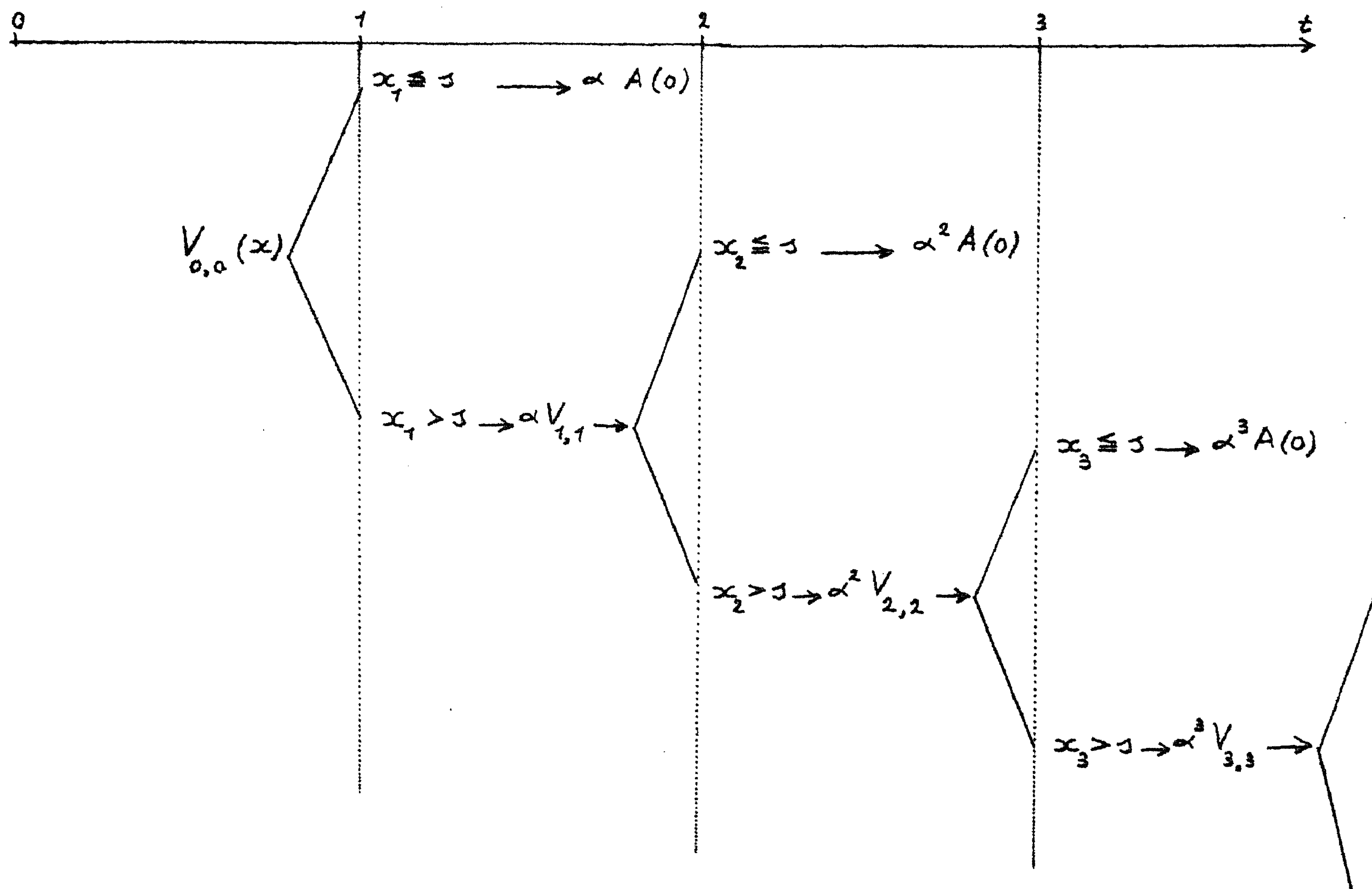


fig.12

Schema voor de berekeningswijze van $A(0)$.

De bijdragen tot $A(x)$ van deze stukken zijn achtereenvolgens van

a): $V_{1,1}(x)$,

b): op $t=1$ is de contante waarde van de toekomstige verliesverwachtingen $A(0)$; de kans op b) is gelijk aan de kans op een vraag D_0 in $[0,1]$ groter dan $x-1$, dus $P[D_0 \geq x-1] = 1 - F(x-1)$ en de bijdrage bedraagt dus $\alpha A(0) [1 - F(x-1)]$,

c): voor gegeven x_1 is de bijdrage $\alpha V_{1,1}(x_1)$; x_1 is echter een kansvariabele die waarden tussen 1 en x aanneemt, afhankelijk van de waarde van D_0 , zodat de bijdrage is $\mathcal{E} \alpha V_{1,1}(x_1) = \alpha \int_0^{x-1} V_{1,1}(x - D_0) f(D_0) dD_0$, of met een andere integratievariabele: $\alpha \int_0^{x-1} V_{1,1}(x - \lambda) f(\lambda) d\lambda$,

d): op $t=2$ is de contante waarde van de toekomstige verliesverwachtingen weer $A(0)$; bij gegeven $x_1 > 1$ is $P[x_2 \leq 1] = P[D_1 \geq x_1 - 1] = P[D_1 \geq x - 1 - D_0] = 1 - F(x - 1 - D_0)$; de onvoorwaardelijke kans op geval d) is $\int_0^{x-1} [1 - F(x - 1 - D_0)] f(D_0) dD_0$ en de bijdrage is dus met de integratievariabele λ in plaats van D_0 ,

$$\alpha^2 A(0) \int_0^{x-\tau} [1 - F(x-\tau-\lambda)] f(\lambda) d\lambda,$$

e): voor gegeven x_2 is de bijdrage $\alpha^2 V_{2,2}(x_2)$; wanneer zowel x_1 als x_2 groter is dan τ heeft de totale vraag in $[0-\tau]$ en $[\tau-2\tau]$ tezamen gelegen tussen 0 en $x-\tau$; geven wij nu de verdelingsdichtheid van $\underline{D}_0 + \underline{D}_1$ aan met f_2 , dan is, daar uit $\underline{D}_0 + \underline{D}_1 = \lambda$ volgt $x_2 = x - \lambda$, de bijdrage $\alpha^2 \int_0^{x-\tau} V_{2,2}(x-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda$,

f): hier moet $\alpha^3 A(0)$ vermenigvuldigd worden met de kans op $x_3 \leq \tau$ onder de voorwaarde dat x_1 en x_2 groter dan τ zijn, anders gezegd: met de kans op $x_3 \leq \tau$, wanneer $\underline{D}_0 + \underline{D}_1$ een waarde bezit tussen 0 en $x-\tau$; de bijdrage is dus

$$\alpha^3 A(0) \int_0^{x-\tau} [1 - F(x-\tau-\lambda)] f_2(\lambda) d\lambda.$$

Op deze wijze voortgaande vindt men, wanneer men voor de verdelingsdichtheid van $\underline{D}_0 + \underline{D}_1 + \dots + \underline{D}_{n-1}$ de notatie f_n gebruikt, voor $A(x)$ ($x > \tau$):

$$\begin{aligned} A(x) = & V_{0,0}(x) + \alpha A(0) [1 - F(x-\tau)] + \alpha \int_0^{x-\tau} V_{1,1}(x-\lambda) f(\lambda) d\lambda + \\ & + \alpha^2 A(0) \int_0^{x-\tau} [1 - F(x-\tau-\lambda)] f(\lambda) d\lambda + \dots \\ & + \alpha^n \int_0^{x-\tau} V_{n,n}(x-\lambda) f_n(\lambda) d\lambda + \alpha^{n+1} A(0) \int_0^{x-\tau} [1 - F(x-\tau-\lambda)] f_n(\lambda) d\lambda + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Hierin zijn de functies $V_{i,i}(x)$ voor alle waarden van i aan elkaar gelijk en dus te vervangen door $V(x)$ zonder meer, waardoor (42) overgaat in:

$$A(x) = V(x) + \alpha A(0) [1 - F(x-\tau)] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{x-\tau} \{V(x-\lambda) + \alpha A(0) [1 - F(x-\tau-\lambda)]\} f_n(\lambda) d\lambda. \quad (43)$$

De kansverdeling $F_2(\lambda)$ van $\underline{D}_0 + \underline{D}_1$ is eenvoudig af te leiden uit de kansverdelingen van $\underline{D}_0$ en $\underline{D}_1$, die beide gelijk zijn aan $F_1 = F$ en wel is

$$P[\underline{D}_0 + \underline{D}_1 \leq \lambda] = F_2(\lambda) = \int_0^\lambda F_1(\lambda-v) f_1(v) dv. \quad (44)$$

Met behulp van het principe van volledige inductie leidt men voor de verdelingsfunctie F_n van $\underline{D}_0 + \underline{D}_1 + \dots + \underline{D}_{n-1}$ af

$$P[\underline{D}_0 + \underline{D}_1 + \dots + \underline{D}_{n-1} \leq \lambda] = F_n(\lambda) = \int_0^\lambda F_{n-1}(\lambda-v) f_1(v) dv. \quad (45)$$

Als $f_1(D)$ begrensd is zijn ook alle $F_n(\lambda)$ continue verdelingsfuncties. Wij kunnen dus steeds schrijven $F_n(\lambda) = \int_0^\lambda f_n(v) dv$, waarmee onder de genoemde onderstelling de boven gebruikte notatie met f_n gerechtvaardigd is.

De onbekende parameter $A(0)$ in (43) wordt berekend met vergelijking (41). Substitutie van (43) met $x = S$ in (41) levert

$$A(0) = V(S) + \alpha A(0) [1 - F(S-1)] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{S-1} \{V(S-\lambda) + \alpha A(0) [1 - F(S-1-\lambda)]\} f_n(\lambda) d\lambda + k_{10} \quad (46)$$

en dus is

$$A(0) = \frac{k_{10} + V(S) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{S-1} V(S-\lambda) f_n(\lambda) d\lambda}{1 - \alpha [1 - F(S-1)] - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} \int_0^{S-1} [1 - F(S-1-\lambda)] f_n(\lambda) d\lambda} \quad (47)$$

Wegens

$$\begin{aligned} 1 - \alpha [1 - F(S-1)] - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} \int_0^{S-1} [1 - F(S-1-\lambda)] f_n(\lambda) d\lambda &= \\ = 1 - \alpha + \alpha F(S-1) - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} F_n(S-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} F_{n+1}(S-1) &= \\ = (1 - \alpha) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n F_n(S-1)\right) \end{aligned}$$

kan (47) nog worden vereenvoudigd tot

$$A(0) = \frac{k_{10} + V(S) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{S-1} V(S-\lambda) f_n(\lambda) d\lambda}{(1 - \alpha) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n F_n(S-1)\right)} \quad (48)$$

Voor $x \leq 1$ is $A(x)$ dus gelijk aan (48), terwijl voor $x > 1$ de functie gevonden wordt door (48) te substitueren in (43).

Opmerking

Bij de hier gegeven afleiding van $A(x)$ is geen gebruik gemaakt van de speciale vorm die de verliesverwachting $V(x)$ per interval bezit. De gegeven afleiding kan dan ook toegepast worden op iedere niet-negatieve functie $V(x)$ die constant is voor $x \leq 1$. De onderstelling dat $\underline{D}$ een continue verdelingsfunctie F bezit, waarvan $f(D)$ begrensd is, werd alleen gemaakt om de notatie te vereenvoudigen en speelt geen essentiële rol. Wel is er impliciet gebruik gemaakt van de onderstelling dat $A(x)$ een begrensde functie is, een onderstelling waaraan in praktijkproblemen steeds is voldaan.

Het minimaliseren van $A(x)$ voor een gegeven waarde van x als functie van 1 en S is een omvangrijk rekenwerk doch levert geen belangrijke moeilijkheden op.

Wij zullen alleen voor $A(0)$ aangeven op welke wijze het kan geschieden bij de aan het begin van deze paragraaf gemaakte onderstellingen en waarbij bovendien wordt aangenomen dat $f(D)$ continu differentiëerbaar is. Daartoe substitueren wij eerst (36) in (48):

$$A(0) = \frac{k_{10} + k_{21}S + k_{40}[1 - F(S)] + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{S-1} \{k_{21}(S-\lambda) + k_{40}[1 - F(S-\lambda)]\} f_n(\lambda) d\lambda}{(1 - \alpha) \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n F_n(S-1)\right\}} \quad (49)$$

Men zou het minimum van $A(o)$ kunnen vinden door te differentiëren naar γ en S , doch het is eenvoudiger de afgeleiden te bepalen naar S en $S-\gamma$. Wanneer het minimum van $A(o)$ geen rand-extreem is, voldoen de optimale waarden γ^* en S^* van γ en S aan de voorwaarden

$$\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{S=S^*} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial S^2}\right)_{S=S^*} > 0, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial(S-\gamma)}\right)_{S-\gamma=S^*-\gamma^*} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial(S-\gamma)^2}\right)_{S-\gamma=S^*-\gamma^*} > 0 \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 A}{\partial S \partial(S-\gamma)} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial S \partial(S-\gamma)} & \frac{\partial^2 A}{\partial(S-\gamma)^2} \end{vmatrix}_{\substack{S=S^* \\ \gamma=\gamma^*}} > 0.$$

Ook bij de hier gemaakte onderstellingen is het niet mogelijk een algemene theorie over de oplossing van het probleem te geven. De verdere uitwerking zullen wij dan ook achterwege laten.

In het algemeen vereist de in deze paragraaf behandelde methode zeer veel rekenwerk. De situatie is nog het gunstigst wanneer men voor de verdelingsfunctie $F(D)$ van de vraag D een Γ -verdeling aan kan nemen. Dit is een verdeling van het type

$$F(D) = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} \int_0^D u^{k-1} e^{-\beta u} du, \quad (50)$$

waarin k en β parameters groter dan nul zijn. Men kan dus twee momenten aan het waarnemingsmateriaal aanpassen en voor de zo gevonden verdeling de optimale waarden van γ en S berekenen.

Behalve de boven beschreven oplossingsmethode geven de schrijvers nog een methode aan, welke iets minder rekenwerk vergt en die onafhankelijk is van de beginvoorraad x_0 en de disconteringsfactor α . De voorraad x_t aan het begin van de periode $[t, t+1]$ bezit bij gegeven x_0 een kansverdeling; hetzelfde geldt voor $x_1, x_2, \dots$. Onder zeer algemeen geldende voorwaarden nadert de verdeling van x_t voor $t \rightarrow \infty$ tot een limietverdeling die onafhankelijk is van x_0 . Dit heeft tengevolge dat ook de onvoorwaardelijke verliesverwachting $V_{t,0}(x_0)$ voor het interval $[t, t+1]$ voor $t \rightarrow \infty$ tot een limiet V_∞ nadert. Men kan nu deze verwachting, waarin de parameters x_0 en α niet voorkomen minimaliseren als functie van γ en S . Bij deze methode wordt met "begineffecten" tengevolge van de aanwezige voorraad x_0 geen rekening gehouden. Voor ver weg gelegen perioden komt ze op hetzelfde neer als de eerder behandelde

methoden. Men kan bewijzen dat de verwachting V_{∞} gelijk is aan

$$V_{\infty} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} (1-\alpha) A(0) = \frac{k_{10} + V(S) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{S-1} V(S-1) f_n(\lambda) d\lambda}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(S-1)} \quad (51)$$

Het artikel wordt besloten met een overzicht van een aantal mogelijke generalisaties van de gegeven methoden en een uitvoerige literatuurlijst.

Appendix I

Een stelling omtrent optimale bestelschema's voor eindige perioden

door

G. de Leve

In deze appendix wordt een antwoord gegeven op de vraag: "Aan welke voorwaarden moet de functie $b(q)$ voldoen opdat altijd een optimaal bestelschema gevonden wordt, waarbij de bestelgrootten q_i steeds gelijk zijn?"

Wij stellen hiervoor een voldoende voorwaarde op. Men kan ook aantonen dat deze voorwaarde noodzakelijk is voor een uitgebreide klasse van functies $b(q)$.¹⁾

Uitgaande van de veronderstelling dat voor de eindige periode het optimale aantal bestellingen n bedraagt, zullen wij onderzoeken of een gegeven bestelschema bestaande uit n bestellingen verbeterd kan worden. Daartoe worden twee aan elkaar grenzende intervallen beschouwd, waarvan de gezamenlijke lengte t bedraagt. Bij een bestelling van de grootte q aan het begin van het eerste interval worden de totale onkosten voor deze beide intervallen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q) &= \frac{1}{2} q \cdot \frac{q}{D} \cdot k_{21} + \frac{1}{2} (Dt - q) \cdot \frac{Dt - q}{D} \cdot k_{21} + q b(q) + \\ &+ (Dt - q) b(Dt - q) + 2k_{10} = \frac{k_{21} q^2}{2D} + \frac{k_{21} (Dt - q)^2}{2D} + q b(q) + (Dt - q) b(Dt - q) + 2k_{10}. \end{aligned} \quad (1)$$

Geeft men in het vervolg $q b(q)$ aan door de functie $\varphi(q)$, dan zullen, wil $\mathcal{L}(q)$ een relatief minimum bezitten voor $q = q_0$, de volgende betrekkingen moeten gelden:

en $\left(\frac{d\mathcal{L}}{dq} \right)_{q=q_0} = \frac{k_{21} q_0}{D} - \frac{k_{21} (Dt - q_0)}{D} + \varphi'(q_0) - \varphi'(Dt - q_0) = 0 \quad (2)$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{L}}{dq^2} \right)_{q=q_0} = \frac{2k_{21}}{D} + \varphi''(q_0) + \varphi''(Dt - q_0) \geq 0. \quad (3)$$

1) Zie G. DE LEVE, Enige opmerkingen bij een bekend voorraad-probleem, een artikel dat zal worden aangeboden aan de redactie van Statistica Neerlandica.

Uit (2) volgt direct dat $q = \frac{1}{2} Dt$ een extreem oplevert van de functie $\mathcal{E}(q)$. Wanneer bovendien geldt dat

$$\frac{2 k_{21}}{D} + 2 \varphi''\left(\frac{1}{2} Dt\right) > 0 \quad (3a)$$

is, dan zal $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2} Dt\right)$ een relatief minimum zijn van de functie $\mathcal{E}(q)$.

Als aangetoond kan worden dat $q = \frac{1}{2} Dt$ een absoluut minimum oplevert voor de functie $\mathcal{E}(q)$, dan kan het desbetreffende bestelschema alleen optimaal zijn wanneer de bestelgrootten van de beschouwde intervallen gelijk zijn.

Stel nu dat het absolute minimum van (1) gevonden wordt voor $q = q_0$, waarbij $q_0 \neq \frac{1}{2} Dt$ en $q_0 \neq Dt$ is, dan kunnen wij zonder de algemeenheid te schaden ons beperken tot die waarden van q_0 , waarvoor geldt:

$$\frac{1}{2} Dt < q_0 < Dt.$$

Wij voeren nu in de functie:

$$g(q) = r q^3 + s q^2 + u q + v, \quad (4)$$

waarvan de coëfficiënten r, s, u en v vastgelegd worden door de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} b(q_0) &= g(q_0) \\ b(Dt - q_0) &= g(Dt - q_0) \\ b\left(\frac{1}{2} Dt\right) &= g\left(\frac{1}{2} Dt\right) \\ b(Dt) &= g(Dt). \end{aligned} \quad (5)$$

Tenslotte definiëren wij de volgende functie:

$$\mathcal{G}(q) = \frac{k_{21} q^2}{2 D} + \frac{k_{21} (Dt - q)^2}{2 D} + q g(q) + (Dt - q) g(Dt - q) + 2 k_{10}. \quad (6)$$

Uit (5) volgt dat deze functie moet voldoen aan de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(q_0) &= \mathcal{E}(q_0) \\ \mathcal{G}\left(\frac{1}{2} Dt\right) &= \mathcal{E}\left(\frac{1}{2} Dt\right) \\ \mathcal{G}(Dt) &= \mathcal{E}(Dt). \end{aligned} \quad (7)$$

Wij zullen nu nagaan wanneer het minimum van $G(q)$ gevonden wordt voor $q = \frac{1}{2} Dt$ of $q = Dt$. Indien $G(q)$ minimaal is voor één van deze waarden van q , kan $\mathcal{L}(q_0)$ geen absoluut minimum zijn van de functie $\mathcal{L}(q)$.

Indien voor $q = q'$ geschreven wordt $\psi(q')$, dan gelden voor het geval $q = q'$ een relatief minimum oplevert van de functie $G(q)$ de volgende betrekkingen:

$$\left(\frac{dG(q)}{dq} \right)_{q=q'} = \frac{k_{21} q'}{D} - \frac{k_{21} (Dt - q')}{D} + \psi'(q') - \psi'(Dt - q') = 0 \quad (8)$$

en

$$\left(\frac{d^2 G(q)}{dq^2} \right)_{q=q'} = \frac{2k_{21}}{D} + \psi''(q') + \psi''(Dt - q') \geq 0. \quad (9)$$

Uit (4) volgt na enig rekenen dat voor (9) ook geschreven mag worden:

$$\left(\frac{d^2 G(q)}{dq^2} \right)_{q=q'} = \frac{2k_{21}}{D} + 12r \left[2(q' - \frac{1}{2} Dt)^2 + \frac{1}{2} D^2 t^2 \right] + 6\gamma Dt + 4u \geq 0. \quad (10)$$

Uit (8) kan eenvoudig worden afgeleid dat $q = \frac{1}{2} Dt$ een extreem oplevert van de functie $G(q)$. Men kan nu twee gevallen onderscheiden en wel $r \leq 0$ of $r > 0$.

Indien $r \leq 0$ is, dan is voor $q \geq \frac{1}{2} Dt$ de functie

$\frac{d^2 G(q)}{dq^2}$ monotoon niet toenemend. Als de functiewaarde $\left(\frac{d^2 G(q)}{dq^2} \right)_{q=\frac{1}{2} Dt} \leq 0$ is, dan zal de functie $\frac{d^2 G(q)}{dq^2}$ negatief zijn in het interval $\frac{1}{2} Dt \leq q \leq Dt$. Hieruit volgt dat de functie $G(q)$ maximaal is voor $q = \frac{1}{2} Dt$ en minimaal voor $q = Dt$. Is daarentegen de functiewaarde $\left(\frac{d^2 G(q)}{dq^2} \right)_{q=\frac{1}{2} Dt} > 0$,

dan bezit de functie $G(q)$ een absoluut minimum voor $q = \frac{1}{2} Dt$. Immers voordat een tweede minimum kan optreden, moet er eerst een maximum geweest zijn. Voor de bij dit maximum behorende waarde van q is de functie $\frac{d^2 G(q)}{dq^2}$ negatief en behoudt dit teken voor de rest van het interval.

Conclusie

Als uit (5) volgt dat $r \leq 0$ is, dan kan $q = q'$ alleen een absoluut minimum opleveren van de functie $g(q)$ als $q' = \frac{1}{2} Dt$ of $q' = Dt$ is.

Volgt echter uit (5) dat $r > 0$ is, dan is de functie $\frac{d^2 g(q)}{dq^2}$ in het interval $\frac{1}{2} Dt \leq q \leq Dt$ monotoon stijgend. Als de functiewaarde $\left(\frac{d^2 g(q)}{dq^2}\right)_{q=\frac{1}{2} Dt} \geq 0$ is, dan geeft $q = \frac{1}{2} Dt$ een absoluut minimum van de functie $g(q)$. Immers er kunnen voor $q > \frac{1}{2} Dt$ geen maxima optreden. Uit $\left(\frac{d^2 g(q)}{dq^2}\right)_{q=\frac{1}{2} Dt} < 0$ volgt dat $q = \frac{1}{2} Dt$ een absoluut maximum oplevert. De mogelijkheid is niet uitgesloten dat er een waarde van q bestaat $\neq \frac{1}{2} Dt$ en $\neq Dt$, waarvoor $g(q)$ minimaal is.

Conclusie

Als uit (5) volgt dat $r > 0$ is, dan kan $q = q'$ met $q' \neq \frac{1}{2} Dt$ en $q' \neq Dt$ een absoluut minimum opleveren van de functie $g(q)$.

Wij zullen nu aantonen dat door het opleggen van een voorwaarde aan de functie $b(q)$ voorkomen kan worden dat uit (5) volgt $r > 0$.

Uit (5) volgt dat de vergelijking

$$b(q) = g(q) \quad (11)$$

minstens vier wortels heeft. Met behulp van de stelling van Rolle kan men dan gemakkelijk aantonen dat de vergelijkingen:

$$b'(q) = g'(q) \quad (12)$$

en

$$b''(q) = g''(q) \quad (13)$$

minstens drie resp. twee wortels moeten hebben. De functie

$g''(q) = brq + 2\tau$ is voor $r > 0$ een monotoon stijgende functie en als $b''(q)$ monotoon niet stijgend wordt verondersteld kan (13) geen twee wortels opleveren. Beperken wij ons nu tot die functies $b(q)$ waarvan de tweede afgeleiden monotoon niet stijgend zijn, dan zal uit (5) altijd volgen $r \leq 0$. Onder deze voorwaarde zal $g(q)$ steeds een absoluut minimum hebben voor $q = \frac{1}{2} Dt$ of $q = Dt$.

Hieruit volgt:

òf

$$\mathcal{L}(q_0) = \mathcal{G}(q_0) > \mathcal{G}(\tfrac{1}{2} Dt) = \mathcal{L}(\tfrac{1}{2} Dt) \quad (14)$$

òf

$$\mathcal{L}(q_0) = \mathcal{G}(q_0) > \mathcal{G}(Dt) = \mathcal{L}(Dt). \quad (15)$$

Met andere woorden q_0 kan onder de voorwaarde $b'''(q) \leq 0$ voor iedere waarde van q , nooit een absoluut minimum van de functie $\mathcal{L}(q)$ opleveren. Indien $q = Dt$ een absoluut minimum geeft van de functie $\mathcal{L}(q)$ kan het beschouwde bestelschema niet optimaal zijn omdat er dan eigenlijk maar $n-1$ bestel-tijdstippen zijn. Is daarentegen de functie $\mathcal{L}(q)$ minimaal voor $q = \tfrac{1}{2} Dt$, dan kan het desbetreffende schema alleen optimaal zijn als van de beschouwde intervallen de bijbehorende bestelgrootten gelijk zijn.

Wij komen nu tot de volgende stelling:

Wanneer de tweede afgeleide van de functie $b(q)$ monotoon niet stijgend is en het optimale aantal bestellingen n bedraagt dan geldt voor ieder optimaal bestelschema, dat de n bestellingen even groot zijn.

Hiermee is de in het begin van deze appendix gestelde vraag dus beantwoord. De gevonden voldoende voorwaarde $b'''(q)$ overal ≤ 0 kan niet verzwakt worden, zolang men voor $b(q)$ alle mogelijke functies toelaat. Men kan namelijk bewijzen dat voor functies $b(q)$ met de eigenschappen:

- 1) $b'(q) \leq 0$ voor iedere waarde van q ,
- 2) $b''(q) \geq 0$ " " " " q ,

deze eis ook noodzakelijk is. Dit geldt dus bijvoorbeeld voor de in 1.2 ingevoerde functies

$$b(q) = c_1 e^{-c_2 q} + c_3,$$

waarin c_1 , c_2 en c_3 positieve constanten zijn. Voor het bewijs van deze eigenschap verwijzen wij naar het in de voetnoot op blz. 24 genoemde artikel.

Appendix II 1)

Enige correcties op OPTIMAL INVENTORY POLICY, door K.J. ARROW, TH. HARRIS en J. MARSCHAK, Econometrica 19 (1951), 250-272.

- 1) In formule (2.3) moet aan het rechter lid worden toegevoegd:
 $-c_0 \theta_i$. Op het uiteindelijke resultaat heeft dit geen belangrijke invloed daar men ax kan vervangen door $ax - c_0$.
- 2) De afleiding van het extreem van $\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n u(\theta_i)$ is niet geheel correct. Voor waarden van θ , zodanig dat $\frac{T}{\theta}$ geen geheel getal is, heeft de som $\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n u(\theta_i)$ geen betekenis en de daarop gebaseerde afleiding derhalve evenmin. Verder wordt niet aangetoond dat θ^* werkelijk een minimum van $\mathcal{C}(\theta)$ oplevert. Onder de genoemde voorwaarde $b'(q) \leq 0$ en $q b(q)$ monotoon stijgend is dit ook niet noodzakelijk het geval. Voor een juiste afleiding wordt verwezen naar appendix I.
- 3) De kans $1 - F(s^*)$ die op blz. 259 wordt berekend voor een normale verdeling is een functie van de parameter σ uit deze verdeling. Bij de berekening is ondersteld dat geldt $\sigma = 1$. In 3: G moet het getal 13 vervangen worden door 18,5.
- 4) Bij de oplossingsmethode voor het dynamische model worden voor de verdelingsfunctie F van de vraag per periode ook niet continue verdelingsfuncties toegelaten. Voor verdelingsfuncties die niet continu zijn in het punt s zijn de formules alleen juist wanneer men $F(x)$ definiëert door $F(x) = P[\underline{x} < x]$. De coëfficiënt van $\alpha L(0)$ in bijv. (5.1) is $P[\underline{x} \geq s]$ en dat is dan uiteraard gelijk aan $1 - F(s)$. Laat men echter in paragraaf 3 ook discrete verdelingen toe, dan zijn de formules alleen juist uitgaande van de definitie $F(x) = P[\underline{x} \leq x]$.

 1) In deze appendix wordt de notatie van de auteurs gebruikt.

2. A linear decision rule for production and employment scheduling, C.C. Holt, F. Modigliani and H.A. Simon. Carnegie Institute of Technology. O.N.R. Research Memorandum no. 30. (1955), 1-54.

2.1. Inleiding

Zoals de titel aangeeft worden in dit rapport regels afgeleid voor productie en arbeidsbezetting. Alhoewel de te bespreken methode is ontwikkeld voor een verffabriek, wordt de toepasbaarheid van deze techniek hierdoor geenzins beperkt.

Bij de beschouwde verffabriek dient men n.l. aan het begin van iedere maand te beslissen, hoe hoog de productie zal zijn in die maand en bovendien hoeveel arbeidskrachten aan het productieproces zullen deelnemen.

Indien wij in het vervolg spreken van productie, dan bedoelen wij de totale productie van alle verfsoorten te samen.

In dit artikel wordt geen aandacht besteed aan de optimale productie van de verschillende verfsoorten afzonderlijk.

De juistheid van een beslissing wordt gemeten naar de kosten, die aan een dergelijk besluit zijn verbonden. Hiertoe dient men een kostenfunctie op te stellen, waarin behalve de genoemde grootheden, productie en arbeidsbezetting, ook de vraag naar verf in de eerstvolgende maanden voorkomt. Aangezien de vraag onbekend is en in het gunstigste geval slechts de verdeling van de vraag gegeven is, zal men niet de beschikking hebben over de exacte kostenfunctie. Wanneer de verdeling van de vraag bekend is, kan echter wel de verwachting van de totale kosten worden berekend. Wij zullen danook een beslissing optimaal noemen, als deze verwachting minimaal is. Het opstellen van de kostenfunctie was dan ook de moeilijkste opgave, waarvoor de auteurs zich gesteld zagen. Het behoeft geen betoog, dat de invloed van een genomen beslissing zich niet beperkt tot de desbetreffende maand. Men dient dus niet alleen aan het begin van iedere maand de optimale productie en arbeidsbezetting voor die maand te bepalen, maar ook de optimale waarden voor de volgende maanden. Deze "totale" beslissing zal optimaal moeten zijn, niettegenstaande voor de volgende maanden op nieuw een besluit zal worden genomen. In de kostenfunctie vinden wij dan ook niet alleen de grootheden zoals productie, arbeidsbezetting, voorraad en vraag voor de maand, waarop de beslissing betrekking heeft, maar ook die van de daarop volgende maanden. Is de kostenfunctie eenmaal opgesteld, dan rest slechts een taak voor wiskundigen om na te gaan voor welke waarden van de grootheden deze functie minimaal is.

Afgezien van het feit, dat het bepalen van een minimum van een functie niet altijd expliciet mogelijk is, zullen bovendien de hieruit te voorschijn komende beslisregels eenvoudig toepasbaar dienen te zijn. Holt c.s. stellen dan ook een kwadratische kostenfunctie voor, omdat dan de beslissingscriteria gegeven worden door lineaire functies. Bovendien blijkt, dat men dan niet de verdeling maar slechts de verwachting van de vraag behoeft te kennen. Charles C. Holt heeft aan deze belangrijke eigenschap van de kwadratische kostenfunctie een uitvoerige studie gewijd.¹⁾ De eigenschap betekent, dat de grootheden, die in de kostenfunctie de vraag van de eerstkomende maanden aangeven, vervangen mogen worden door hun verwachtingen. Om de voorgestelde technieken te kunnen toepassen, zal de verffabriek een instrument moeten bezitten, waarmee de omzetten voor de volgende maanden zuiver kunnen worden geschat. Het is duidelijk, dat de waarden van de grootheden, waarvoor de kwadratische functie minimaal is, moeten voldoen aan een stelsel lineaire betrekkingen. Deze lineaire betrekkingen leveren tenslotte na enige wiskundige handelingen de gevraagde beslisregels. Opgemerkt dient te worden, dat het aantal lineaire vergelijkingen onbegrensd is. Dit vloeit voort uit het feit, dat de kostenfunctie is opgesteld voor een onbegrensd aantal maanden. Wij kunnen er ons met recht over verbazen, dat deze omstandigheid het probleem niet onoplosbaar heeft gemaakt.

Aangezien de kwadratische kostenfunctie slechts een grove benadering is van de werkelijke kosten, zal de uiteindelijke oplossing niet optimaal zijn in de zin, zoals wij die aan het begin van deze § hebben geformuleerd. Men dient dus na te gaan in hoeverre de beslisregels inderdaad een vermindering van de onkosten opleveren. De auteurs hebben dan ook de voorgestelde techniek toegepast op situaties, die zich in het verleden hebben voorgedaan en het resultaat vergeleken met de uitkomsten van de gevoerde bedrijfspolitiek. De nieuwe techniek kon deze vergelijking met glans doorstaan. In §2 zullen wij enige aandacht besteden aan het opstellen van de kostenfunctie, terwijl in §3 enige opmerkingen gemaakt zullen worden over de uiteindelijk verkregen beslisregels. Hoe deze regels uit de voorwaarden voor een minimum van de kostenfunctie worden afgeleid, kan men vinden in de wiskundige appendix van het oorspronkelijke rapport.

¹⁾ C.C. Holt: "Superposition Decision Rules for Production and Inventory Control". O.N.R. no. 3.

2.2. De kostenfunctie.

Als de vraag naar verf voor iedere maand gelijk is, dan zal de productie verlopen volgens een vast patroon. Op een schommelende vraag zou men kunnen reageren met een wisselende productiegrootte. Uit ervaring weet men dat een dergelijke productiewijze extra kosten met zich mee brengt. Het is dan ook niet te verwonderen, dat bij de verffabriek getracht werd de variatie in de vraag gedeeltelijk op te vangen door het aanleggen van een buffervoorraad. Het in voorraad houden van een grote hoeveelheid verf is echter een kostbare aangelegenheid. Het ligt dan ook voor de hand, dat een optimale politiek verkregen wordt door zowel de productie periodiek te wijzigen, als door het aanleggen van een buffervoorraad. Wijzigingen in de productie kan men verkrijgen door overwerk en verkorting van de werkweek of door aantrekking of ontslag van arbeidskrachten. Wij zullen dan ook de volgende kosten onderscheiden:

- a) loonkosten
- b) reorganisatiekosten, veroorzaakt door ontslag of aantrekking van personeel.
- c) overwerkkosten, een gevolg van overwerk of verkorting van de werkweek.
- d) voorraadkosten, kosten verband houdende met de buffervoorraad.

a) de loonkosten:

Het is niet onaannemelijk, dat de loonkosten bij benadering aangegeven kunnen worden door:

$$L_t = C_1 W_t, \quad (1)$$

waarbij C_1 het gemiddelde maandloon voorstelt en W_t het aantal arbeidskrachten, die in de t^{de} maand in dienst van de fabriek zijn.

b) de reorganisatiekosten:

Deze kosten ontstaan als wijzigingen worden aangebracht in de arbeidsbezetting en omvatten o.a. ook opleidingskosten. De auteurs menen, dat de reorganisatiekosten in eerste benadering gegeven worden door:

$$R_t = C_2 (W_t - W_{t-1})^2 \quad (2)$$

waarbij C_2 wederom een constante voorstelt.

c) de overwerkkosten:

Indien W_t arbeidskrachten aan het productie proces deelnemen, dan zal de normale productie $C_4 W_t$ bedragen. Als de geplande productie verschilt van de normale productie, dan gaat dit gepaard met extra kosten. In het rapport worden deze kosten

aangeduid door:

$$Pr_t = C_3(P_t - C_4W_t)^2 + C_5P_t - C_6W_t \quad (3)$$

waarbij C_3 , C_4 , C_5 en C_6 constanten zijn.

De betekenis van de constante C_4 is eenvoudig te raden, n.l. de gemiddelde productie per arbeider. De termen C_5P_t en C_6W_t zijn toegevoegd om een betere aanpassing te verkrijgen.

En tenslotte:

d) de voorraadkosten:

Zoals in het begin van deze § is vastgesteld, zal de productie bij een constante vraag verlopen volgens een regelmatig patroon. Met behulp van regels voor optimale productie grootte, kan men de optimale voorraad berekenen voor verschillende tijdstippen. De auteurs menen op grond van ervaringen, dat deze optimale voorraad goedbenaderd kan worden door:

$$C_8 + C_9O_t, \quad (4)$$

met C_8 en C_9 als constanten,
en O_t voor de vraag in de t^{de} maand.

De buffervoorraadkosten zijn dan een functie van het verschil tussen de werkelijke en de optimale voorraad. De werkelijke voorraad, aangegeven met I_t , is de som van de voorraden van de verfsoorten afzonderlijk aan het eind van de t^{de} maand, met dien verstande, dat achterstand in aflevering wordt beschouwd als een negatieve voorraad.

De voorraadkosten worden tenslotte aangegeven met:

$$V_t = C_7(I_t - C_8 - C_9O_t)^2 \quad (5)$$

waarbij C_7 een constante voorstelt.

Uit (1), (2), (3) en (5) kunnen wij voor n perioden de volgende kostenfunctie samenstellen:

$$K = \sum_{t=1}^n \left[C_1W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(P_t - C_4W_t)^2 + C_5P_t - C_6W_t + C_7(I_t - C_8 - C_9O_t)^2 \right] \quad (6)$$

In werkelijkheid moet men rekening houden met oneindig veel perioden. De auteurs doen dit ook door gebruik te maken van een limietovergang van $n \rightarrow \infty$. Formule (6) heeft echter voor oneindig veel perioden geen reële betekenis, omdat K dan voor elke waardencombinatie van P_t en W_t ($t=1, \dots, \infty$) onbegrensd is. Dergelijke moeilijkheden kan men eenvoudig onder-
vangen, door gebruik te maken van verdisconteringsfactoren.

In plaats van (6) maken Holt c.s. gebruik van de volgende kostenfunctie:

$$K = \sum_{t=1}^n [C_{10}W_t + C_2(W_t - W_{t-1} - C_{11})^2 + C_3(P_t - C_4W_t)^2 + C_5P_t + C_{12}P_tW_t + C_7(I_t - C_8 - C_9O_t)^2 + C_{13}] \quad (7)$$

waarbij $C_{10} = C_1 - C_6$.

De termen $C_{12}P_tW_t$, C_{13} en C_{11} zijn toegevoegd om de werkelijke kosten zo goed mogelijk te benaderen.

Uit de defenitie van I_t volgt:

$$I_t = I_{t-1} + P_t - O_t, \quad t=1, 2, \dots \quad (8)$$

2.3. De beslisregels.

De wiskundige formulering van het resterende gedeelte van het probleem is eenvoudig te geven. Bepaal het minimum van (7) onder de bijvoorwaarden gegeven in (8).

De beslisregels voor de betreffende verffabriek werden gegeven door:

$$P_t = 0,463 O_t + 0,234 O_{t+1} + 0,111 O_{t+2} + 0,046 O_{t+3} + 0,013 O_{t+4} - 0,002 O_{t+5} - 0,008 O_{t+6} - 0,010 O_{t+7} - 0,009 O_{t+8} - 0,008 O_{t+9} - 0,007 O_{t+10} - 0,005 O_{t+11} + 0,993W_{t-1} + 153 - 0,464I_{t-1} \quad (9)$$

$$W_t = 0,743W_{t-1} + 2,09 - 0,10I_{t-1} + 0,0031 O_{t+5} + 0,0023 O_{t+6} + 0,0016 O_{t+7} + 0,0012 O_{t+8} + 0,0009 O_{t+9} + 0,0006 O_{t+10} + 0,0005 O_{t+11} \quad (10)$$

Met behulp van (9) en (10) zijn zowel productie als arbeidsbezetting te bepalen. Immers alle grootheden in het rech-

terlid van (9) en (10) zijn aan het begin van de t^{de} maand bekend of geschat. Uit (9) en (10) blijkt, dat zowel de productie als de arbeidsbezetting mede bepaald wordt door een min of meer gewogen gemiddelde van de vraag, waardoor een ernstige schommeling in productie en arbeidsbezetting wordt voorkomen. Aangezien de gewichten van de grootheden voor de vraag in verafgelegen maanden zeer gering zijn, heeft men er van afgezien, deze grootheden in de beslisregels op te nemen. Het ligt voor de hand, dat de productie en arbeidsbezetting een functie is van het aantal arbeiders, dat in de vorige maand aan het productie proces heeft deelgenomen. Het negatieve teken van het gewicht van de voorraad I_{t-1} wekt evenmin verbazing. Verrassend zijn echter de negatieve gewichten van de omzetten O_{t+5} t/m O_{t+11} in de productieregel. Het is blijkbaar in verband met de voorraadkosten onvoordelig om lang van te voren te beginnen met het bouwen van de buffervoorraad. De eerste reactie op een uitzonderlijke hoge vraag in de verre toekomst zal dus zijn het aantrekken van arbeidskrachten. Is eenmaal de piekmaand voorbij, dan kan men met behulp van de extra arbeidskrachten een eventuele achterstand snel inlopen en een nieuwe buffervoorraad vormen. Het één en ander is uiteraard een gevolg van de vorm van de kostenfunctie, en wel van de voorraadkosten in het bijzonder. Door het optellen van positieve en negatieve voorraden bij het berekenen van I_t worden kosten van neenverkoop en voorraadkosten gelijk gewaardeerd en heffen elkaar zelfs gedeeltelijk op. In hoeverre hierdoor het ontstaan van de negatieve gewichten kan worden verklaard, is moeilijk na te gaan.

Uit de wiskundige oplossing van het probleem bleek, dat de constanten C_{11} , C_5 en C_{13} van de kostenfunctie uiteindelijk niet in de beslisregels voorkomen. De bijdrage van C_{13} tot de kostenfunctie is onafhankelijk van de keuze van de grootheden P_t en W_t en komt dus uiteraard niet in de beslisregels voor. Indien men bedenkt dat $\sum_{t=1}^n P_t \approx \sum_{t=1}^n O_t$, dan zal men zich evenmin verbazen over het uitblijven van de constante C_5 . De betekenis van de constante C_{11} in de kostenfunctie is echter onduidelijk en het niet voorkomen in de beslisregels kan derhalve moeilijk worden verklaard op niet wiskundige gronden. Alhoewel de constanten C_5 , C_{11} en C_{13} uiteindelijk niet in de oplossing voorkomen, kunnen zij in (7) niet zonder meer worden weggelaten, omdat de constanten hierin gedeeltelijk simultaan zijn geschat.

2.4. Nabeschouwing.

Door het gecompliceerde karakter van het gestelde probleem lag het voor de hand, dat slechts een rigoreuze aanpak tot een oplossing kon leiden. Men kan met recht twijfel en aan de juistheid van de gemaakte veronderstellingen. Door twijfel alleen verkrijgt men echter geen betere oplossing. Men zal dus na moeten gaan of de voorgestelde techniek inderdaad te verkiezen is boven de gebruikte methode. Men heeft daarom achteraf de techniek toegepast op de periode 1949-1954. Hierbij deed zich echter de moeilijkheid voor, dat wel de verkoopcijfers aanwezig waren voor die periode, maar niet meer de verkoopvoorspellingen. Om toch een indruk te krijgen van de verdienste van deze techniek, werden eerst de werkelijke verkoopcijfers gebruikt in plaats van de voorspellingen en vervolgens voorspellingen geconstrueerd met behulp van een voortschrijdend gemiddelde. Er wordt dan aangenomen, dat de verkoop van het volgende jaar gelijk is aan het voorafgaande. Met behulp van een seizoen patroon worden dan de maandcijfers verkregen. Indien men de werkelijke verkoopcijfers gebruikt voor de voorspellingen, dan behoeft men zich niet te verbazen, over het feit, dat de techniek tot betere resultaten leidt. Bedient men zich echter van een voortschrijdend gemiddelde, dan wordt niet van alle beschikbare informatie gebruik gemaakt. Verwacht wordt dan ook, dat de werkelijke kosten gebaseerd op voorspellingen, liggen tussen deze twee grenzen. Uit deze beide reconstructies bleek, dat zowel productie als voorraad minder aan schommelingen onderhevig waren, en dat de achterstand in aflevering in het algemeen geringer was. Tenslotte werden de kosten vergeleken voor een groot aantal posten, zoals lonen, overwerk, voorraad etc.. Voor de bepaling van deze kosten werd gebruik gemaakt van calculatie methoden, waarover de fabriek reeds beschikte. Op grond van deze vergelijkingen krijgt men sterk de indruk, dat de totale kosten bij toepassing van de voorgestelde techniek met 5% zullen dalen. Hetgeen een aanmerkelijke besparing oplevert.