STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk VII

Algemene voorbeelden

door

J. Kriens
en
G. de Leve

2e druk

november 1961

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Keuzeproblemen

Tijdens vele activiteiten wordt men bewust of onbewust geconfronteerd met één van de vele verschillende maar in wezen identieke problemen, waaraan deze paragraaf is gewijd.

Ter verduidelijking zullen wij van deze problemen een enkele noemen.

Een huisvrouw vraagt zich iedere zaterdag af hoeveel melk, brood etc. zij voor het komende weekend moet inkopen.

Een belegger houdt zich periodiek bezig met de vraag hoeveel geld hij in kas moet houden en welk deel opnieuw belegd moet worden.

Een vervoersmaatschappij overweegt hoeveel chauffeurs, treinbestuurders en conducteurs in reserve gehouden moeten worden om de Paasdrukte redelijk te verwerken.

In al deze gevallen wordt van de verantwoordelijke persoon verlangd, dat hij een keuze doet. Uiteraard zal men steeds zoeken naar die keuze, welke de beste is. Om na te kunnen gaan of een keuze goed, dan wel slecht is, dient men te beschikken over een criterium. Met behulp van zo'n criterium kan men veelal direct nagaan wat het effect is van een keuze, bijv. door de schade of winst te berekenen, welke mede een gevolg is van de keuze. Het komt echter ook voor, dat op het moment van de keuze de toekomstige ontwikkelingen niet kunnen worden voorzien. Aangezien men gedwongen wordt tot een keuze, zal men de resultaten van de mogelijke toekomstige ontwikkelingen moeten wegen en het is daarom zinvol om bijv. de verwachting van de schade of winst als criterium te kiezen.

Het opstellen van een criterium is dikwijls een moeilijke opgave. Welk criterium moet bijv. de huisvrouw hanteren? Indien zij ervoor wil zorgen, dat nooit één van haar gasten iets tekort komt, dan zal zij vaak op maandag etenswaren moeten weggooien. Bij het opstellen van een criterium wordt men gedwongen zich rekenschap te geven van het doel, dat wordt nagestreefd.

De problemen welke wij in deze paragraaf zullen bespreken, bezitten ieder een criterium met behulp waarvan de optimale keuze kan worden bepaald.

In het vierde vraagstuk zullen wij laten zien, dat niet altijd de optimale keuze verkozen wordt boven alle alternatieven. Immers verkeert men in een situatie, waarin de toekomstige ontwikkelingen niet tevoren vastliggen, dan kunnen enige mogelijke ontwikkelingen bijzonder ongunstig zijn. In dergelijke situaties wil men de kans op een realisering van zo'n ontwikkeling binnen zekere grenzen zo klein mogelijk maken, ook als dit bijv. ten koste van de verwachte winst mocht gaan.

Voorbeeld 1.1.

Laten wij om de gedachten te bepalen aannemen, dat wij belast zijn met het beheer van de champignonvoorraad van een restaurant. Door de eigenaardige geografische ligging van ons eethuis kan het slechts éénmaal in de twee dagen door de champignonkweker worden bediend. Nu is het met champignons zo gesteld, dat ook de houdbaarheid slechts twee dagen bedraagt, zodat dus steeds bij aankomst van de kweker de voorraad moet worden ververst. De behoefte aan champignons is echter van tevoren niet bekend, maar volgt een kansverdeling van bekend type met gegeven parameterwaarden. Het is heel goed mogelijk, dat bij een overstelpende vraag de voorraad niet toereikend blijkt te zijn. In dat geval zullen in de gerechten blikchampignons worden verwerkt, welke in "onbeperkte" hoeveelheden aanwezig zijn. De eigenaar gebruikt deze paddestoelen ongaarne vanwege hun hoge inkoopprijs. De opgave, waarvoor wij ons eens in de twee dagen gesteld zullen zien, luidt nu als volgt:

Indien gegeven zijn de inkoopkosten $Q(q)$ van de verse champignons als functie van de bestelgrootte q en vervolgens de prijs C voor één eenheid blikchampignons, gevraagd bij bekende kansverdeling van de vraag $\underline{x}$ de optimale bestelgrootte te bepalen.

Wij behoeven dus slechts rekening te houden met de volgende twee verschillende kosten:

1. de inkoopkosten $Q(q)$ van de verse champignons,
2. de inkoopkosten van de blikchampignons $(\underline{x}-q)C$, indien de vraag $\underline{x}$ groter is dan q.

Het is nu eenvoudig in te zien dat de verwachting van de totale kosten gegeven wordt door:

$$K(q) = Q(q) + C \int_q^{\infty} (x-q)\, f(x)\, dx \tag{1.1}$$

als f(x) de kansdichtheid van de vraagverdeling voorstelt.

Als voor $q = q^*$ de functie $K(q)$ minimaal is, wordt de bestelgrootte q^* optimaal genoemd.

Indien $K(q)$ een differentieerbare functie van q is dan geldt voor $q=q^*$ (vgl. stelling 6.5 uit hoofdstuk II):

$$K'(q^*) = Q'(q^*) - c \int_{q^*}^{\infty} f(y)\, dy = 0 \qquad (1.2)$$

m.a.w.

$$\int_{q^*}^{\infty} f(y)\, dy = P\left[\underline{y} \geq q^*\right] = \frac{Q'(q^*)}{C} \; . \qquad (1.3)$$

Het linker lid van (1.3) stelt de kans voor dat de voorraad niet toereikend is, terwijl het rechterlid gelijk is aan het quotiënt van de marginale kosten bij $q=q^*$ en de vervangingsprijs.

Indien $Q(q) = aq$ dan geldt:

$$\int_{q^*}^{\infty} f(y) dy = \frac{Q'(q^*)}{C} = \frac{a}{C} \quad . \qquad (1.4)$$

Voorbeeld 1.2.

In ons tweede voorbeeld kan een boer op iedere laatste dag van de maand een deel van zijn tegoed bij een coöperatieve melkfabriek opnemen.

Deze agrariër vraagt zich nu af hoeveel geld hij zal opnemen als gegeven is:

a) dat er nog *f* 150.- in zijn geldkist is,

b) dat de uitgaven voor de komende maand een kansverdeling bezitten met een kansdichtheid

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad (1.5)$$

waarbij de geldeenheid *f* 2.500.- bedraagt,

c) dat de melkfabriek 5% rente per jaar geeft,

d) dat de Plaatselijke Boerenleenbank altijd geld leent tegen 8% per jaar.

Stel nu dat onze boer aan het eind van de maand april zoveel geld opneemt dat hij in totaal de beschikking heeft over y geldeenheden. Aangezien de uitgaven per maand nooit meer kunnen bedragen dan één eenheid, is het zeker niet optimaal y groter dan 1 te kiezen. Wij beschouwen derhalve slechts waarden van y tussen 0 en 1.

Nu zijn er twee mogelijkheden.

1) De benodigde hoeveelheid $\underline{x}$ is minder dan y.

In figuur 1.1 is het kasverloop geschetst, waarbij werd aangenomen dat de uitgaven gelijkmatig over de maand mei gespreid zijn.

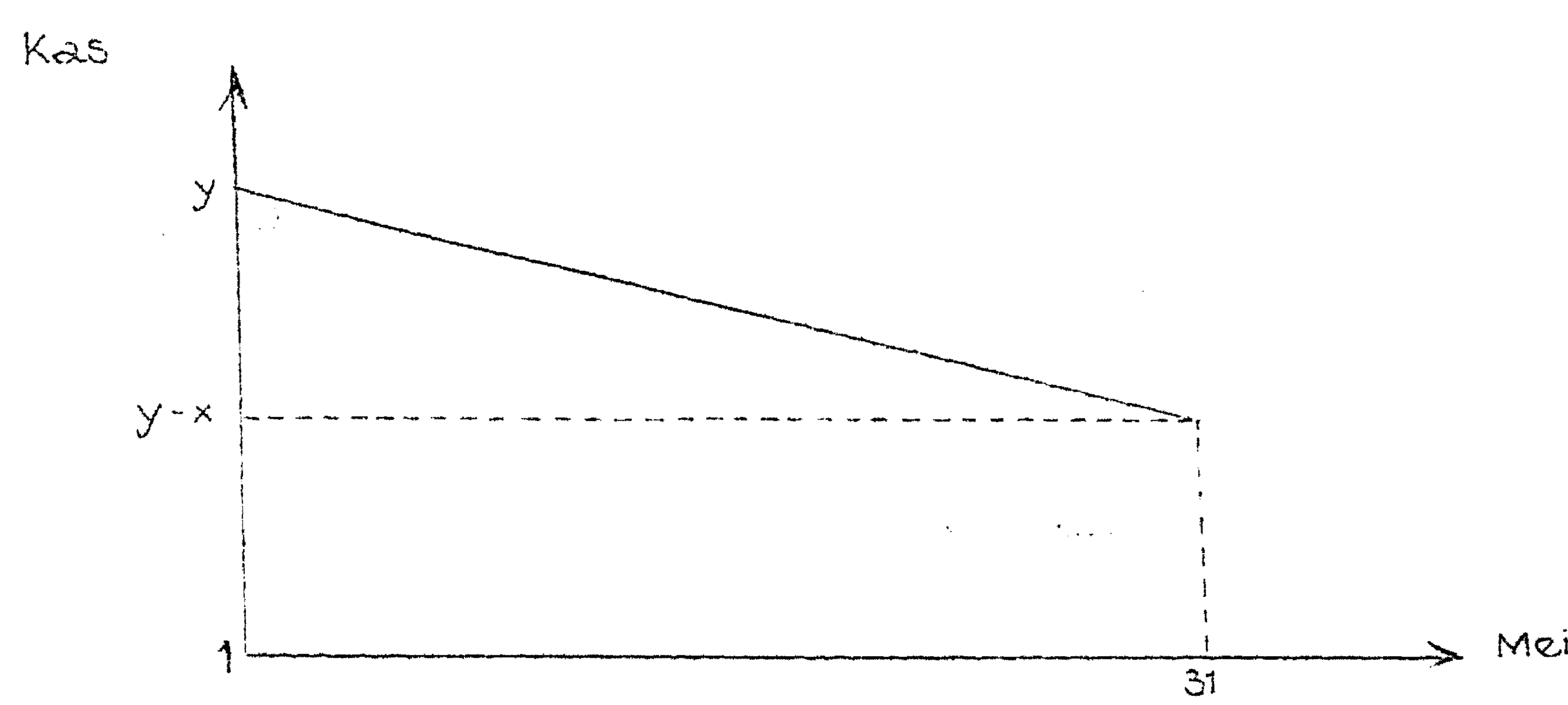

fig. 1.1

Het kasverloop in de maand mei, wanneer er minder dan y geldeenheden worden gebruikt

Gemiddeld heeft hij dus in kas:

$$\tfrac{1}{2}(y+y-x) = y-\tfrac{1}{2}x \qquad (1.6)$$

en derhalve is de rentederving (tijd x rentepercentage x kas):

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{100} \cdot (y-\tfrac{1}{2}x) = \frac{1}{240}(y-\tfrac{1}{2}x) \; . \qquad (1.7)$$

De totale uitgaven zijn dus $K(y,x) = x + \frac{1}{240}(y-\tfrac{1}{2}x)$ als $x < y$ (1.8)

2) De benodigde hoeveelheid $\underline{x}$ is groter of gelijk aan y. (zie figuur 1.2)

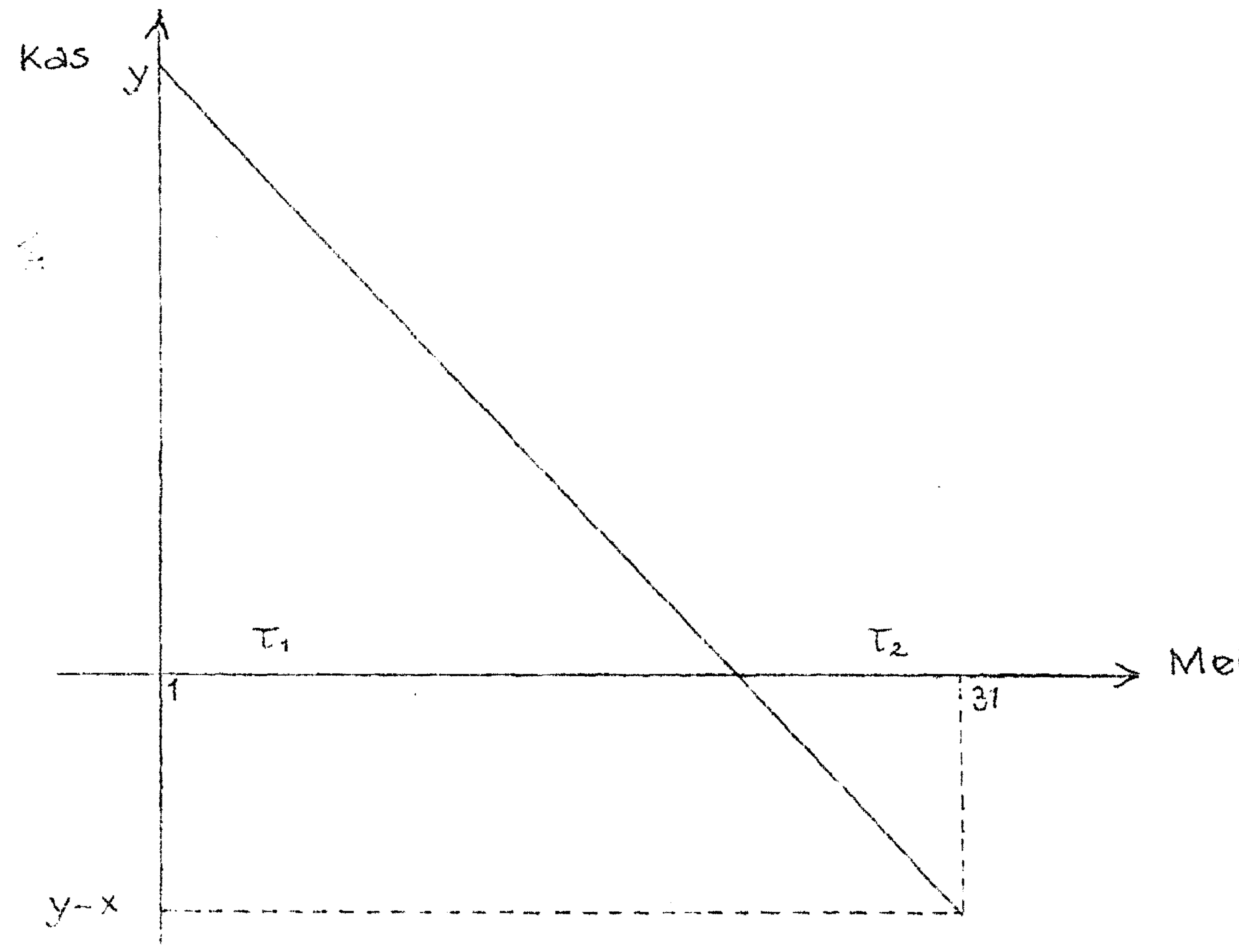

fig. 1.2

Het kasverloop in de maand mei, wanneer er meer dan y geldeenheden worden gebruikt

Gedurende een periode van de lengte τ_1 is er bij onze boer geld in het kistje, terwijl hij gedurende een periode van de lengte τ_2 geld moet lenen bij de Boerenleenbank. Men kan nu eenvoudig nagaan dat:

$$\tau_1 = \frac{y}{x} \tag{1.9}$$

$$\tau_2 = \frac{x-y}{x} \tag{1.10}$$

Gemiddeld heeft hij in de periode τ_1 in kas:

$$\tfrac{1}{2}y \; . \tag{1.11}$$

Gemiddeld heeft hij geleend in de periode τ_2:

$$\tfrac{1}{2}(x-y) \; . \tag{1.12}$$

De rentederving in de periode τ_1 wordt gegeven door:

$$\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{y}{x}\right) \frac{5}{100} \cdot \tfrac{1}{2}y = \frac{1}{480} \; \frac{y^2}{x} \; . \tag{1.13}$$

De te betalen rente aan de boerenleenbank (tijd x rentepercentage x gemiddeld geleend bedrag) in de periode τ_2 wordt gegeven door:

$$\left(\frac{1}{12}\,\frac{x-y}{x}\right)\frac{8}{100}\cdot\tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{300}\,\frac{(x-y)^2}{x} \tag{1.14}$$

De totale uitgaven worden dus gegeven door:

$$K(y,x) = x + \frac{1}{480}\,\frac{y^2}{x} + \frac{1}{300}\,\frac{(x-y)^2}{x} \quad \text{als } x \geq y \tag{1.15}$$

De verwachting van de kosten wordt gegeven door de verwachting van de functie $K(y,x)$, die gedefinieerd is door (1.8) en (1.15). Wij vinden dus voor de verwachting:

$$\mathcal{E}K(y,\underline{x}) = 2\int_0^1 x.xdx + 2\,\frac{1}{240}\int_0^y (y-\tfrac{1}{2}x)xdx +$$

$$+ 2\int_y^1 \left(\frac{1}{480}\,\frac{y^2}{x} + \frac{1}{300}\,\frac{(x-y)^2}{x}\right)xdx =$$

$$= \frac{301}{450} - \frac{1}{150}\,y + \frac{13}{1200}\,y^2 - \frac{13y^3}{3600} \tag{1.16}$$

Opdat de verwachting van de totale kosten minimaal is, moet voldaan zijn aan (vgl. stelling 4.2 uit hoofdstuk II):

$$\frac{d\,\mathcal{E}K(y,\underline{x})}{dy} = 0 \tag{1.17}$$

d.w.z.

$$-\frac{1}{150} + \frac{26}{1200}\,y - \frac{39y^2}{3600} = 0, \tag{1.18}$$

of

$$13y^2 - 26y + 8 = 0 \tag{1.19}$$

of

$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{13}}\,. \tag{1.20}$$

Aangezien $y \leqq 1$ volgt uit (1.16) $y = 1 - \sqrt{\frac{5}{13}} \approx 0,38$ (1.21)

Uit (1.16) vinden wij voor $\frac{d^2\ \mathcal{E}K(y,\underline{x})}{dy^2}$:

$$\frac{d^2\ \mathcal{E}K(y,\underline{x})}{dy^2} = \frac{26}{1200} - \frac{26}{1200}\, y \qquad (1.22)$$

en dus voor $y < 1$:

$$\frac{d^2\ \mathcal{E}K(y,\underline{x})}{dy^2} > 0 \ . \qquad (1.23)$$

De verwachting van de totale kosten bezit derhalve voor $y \approx 0,38$ een minimum en het optimale op te nemen bedrag wordt dus gegeven door:

$$0,38 \times f\ 2.500.- - f\ 150.- = f\ 800.- \ . \qquad (1.24)$$

Voorbeeld 1.3.

In ons derde voorbeeld zullen wij ons bezighouden met de problemen van een inkoper van één speciaal soort dameshoedje.

Dit hoedje kan in iedere gewenste hoeveelheid besteld worden op 1 februari. Tussen 1 februari en 1 juli is het in de normale verkoop, daarna verdwijnt het in de uitverkoop alwaar het met absolute zekerheid tegen een sterk gereduceerde prijs wordt verkocht.

Op 1 februari moet de inkoper dus beslissen hoeveel hoedjes het aanstaande voorjaar in de verkoop gebracht zullen worden.

Zijn keuze zal afhangen van de volgende gegevens:

a) de inkoopkosten bedragen $Q(q)$ voor een partij van de omvang q;
b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt a_1 per hoedje;
c) de verkoopprijs in de uitverkoop bedraagt a_2 per hoedje;
d) de voorraadkosten bedragen b voor ieder hoedje een geheel seizoen in voorraad;
e) de verdeling van de vraag wordt gegeven door de kansdichtheid $f(x)$.

De kansverdeling onder e) is uiteraard een benadering van de werkelijke vraagverdeling, die discreet is.

Uitgaande van de veronderstelling, dat de vraag gelijkmatig over de periode 1 februari - 1 juli is gespreid, zullen wij twee alternatieve mogelijkheden aan een beschouwing onderwerpen:

1. In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien. De voorraad is dan gemiddeld

$$\frac{q+q-x}{2} = q - \frac{x}{2} \tag{1.25}$$

groot, de kosten worden gegeven door:

$$K_1(q) = Q(q) + (q - \frac{x}{2})\, b \quad \text{als } x \leq q \tag{1.26}$$

en de inkomsten door:

$$I_1(q) = a_1 x + a_2(q-x) \quad \text{als } x \leq q\ . \tag{1.27}$$

2. In de behoefte kan niet door de voorraad worden voorzien. Op analoge wijze als in voorbeeld 1.2 vindt men dat tijdens een periode van de lengte $\frac{q}{x}$ voorraad aanwezig is en wel gemiddeld $\frac{1}{2}q$. De voorraadkosten en inkoopkosten tezamen bedragen dan:

$$K_2(q) = Q(q) + \frac{1}{2}\,\frac{q^2 b}{x} \quad \text{als } x \geq q. \tag{1.28}$$

De inkomsten worden nu gegeven door:

$$I_2(q) = a_1 q \qquad \text{als } x \geq q. \tag{1.29}$$

Met behulp van (1.26) t/m (1.29) kan eenvoudig worden nagegaan, dat de verwachting van de winst gegeven wordt door:

$$W(q) = \int_0^q \{ a_1 x + a_2(q-x) - (q-\tfrac{x}{2})b \} f(x)dx + \int_q^\infty \{ a_1 q - \frac{\frac{1}{2}q^2 b}{x} \} f(x)dx - Q(q). \tag{1.30}$$

De functie $W(q)$ kan slechts dan maximaal zijn voor $q=q^*$, indien voor deze waarde van q geldt:

$$W'(q^*) = 0 \tag{1.31}$$

Uit (1.30), (1.31) en stelling 6.5 uit hoofdstuk II volgt voor $q=q^*$:

$$W'(q^*) = \int_0^{q^*} (a_2-b)f(x)dx + \int_{q^*}^{x} (a_1 - \frac{q^* b}{x})f(x)dx - Q'(q^*) = 0 \tag{1.32}$$

of

$$a_2 - b + \int_{q^*}^{\infty} (a_1 - \frac{q^* b}{x} - a_2 + b)f(x)dx - Q'(q^*) = 0 . \tag{1.33}$$

In onze beschouwing werd tot dusver geen rekening gehouden met het verlies aan "goodwill" door "neen-verkoop". Het is uiteraard voor het modehuis geen reklame als de klanten onverrichterzake de winkel weer verlaten. Het verlies aan "goodwill" is echter slecht te meten. Wel kan men dikwijls aangeven welk bedrag de eigenaar bereid is uit te geven, opdat de klant een volgende keer zal terugkeren.

Wij zullen deze kosten aangeven met C, alhoewel deze constante in voorbeeld 1.1 gebruikt is voor de noodinkopen per eenheid. Men kan de dubbele betekenis van de constante C gemakkelijk rechtvaardigen, immers in beide gevallen probeert men het "uitverkocht zijn" af te kopen.

Aan het rechterlid van de betrekking (1.28) moet nu een term van de grootte $C(x-q)$ worden toegevoegd.

Voor $W(q)$, de verwachting van de winst, vinden wij dan:

$$W(q) = \int_0^q \{a_1 x + a_2(q-x) - b(q - \frac{x}{2})\} f(x)dx +$$

$$+ \int_q^\infty \{a_1 q - C(x-q) - \frac{\frac{1}{2}bq^2}{x}\} f(x)dx - Q(q) . \qquad (1.34)$$

De optimale waarde q^* van q volgt dan uit

$$a_2 - b + \int_{q^*}^\infty (a_1 + C - \frac{bq^*}{x} - a_2 + b) f(x)dx - Q'(q^*) = 0. \quad (1.35)$$

Van het bovenstaande resultaat zullen wij thans een toepassing bespreken. Wij zullen uitgaan van de volgende gegevens:

a) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden, m.a.w. $Q(q) = 30q$;
b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden, m.a.w. $a_1 = 50$;
c) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden, dus $a_2 = 20$;
d) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje, dus $b=5$;
e) de kansverdeling van de vraag wordt gegeven door een gamma-verdeling met $\alpha=2$ en $\lambda=0,02$, dus door $f(x) = (0,02)^2 \, x \, e^{-0,02x}$; (1.36)
f) het verlies C aan goodwill voor ieder hoedje te weinig in voorraad wordt achtereenvolgens getaxeerd op 0, 5, 10, 15, 20, 25 en 30 gulden.

De relatie (1.35) wordt in dit speciale geval gegeven door

$$(35 + C) \int_{q^*}^\infty (0,02)^2 \, x \, e^{-0,02x} dx - 5q^* \int_{q^*}^\infty (0,02)^2 \, e^{-0,02x} dx = 15$$

dat is na substitutie van $0,02x = t$

$$(35 + C) \int_{0,02q^*}^\infty t \, e^{-t} dt - 0,1q^* \int_{0,02q^*}^\infty e^{-t} dt = 15, \qquad (1.37)$$

of na enig rekenen:

$$(0,6 + 0,02\,C)\, q^* e^{-0,02q^*} + (35 + C)\, e^{-0,02q^*} = 15. \qquad (1.38)$$

Indien wij deze betrekking oplossen naar q^* vinden wij:

$$
\begin{array}{llrl}
q^* = & 38 & \text{als } C = & 0 \\
q^* = & 96 & C = & 5 \\
q^* = & 109 & C = & 10 \\
q^* = & 117 & C = & 15 \\
q^* = & 124 & C = & 20 \\
q^* = & 130 & C = & 25 \\
q^* = & 136 & C = & 30 .
\end{array}
$$

Voorbeeld 1.4.

Wanneer men een stuk land ter beschikking heeft en dit wil bebouwen, zal de keuze van de produkten afhangen van de netto opbrengst in geld, die de verschillende gewassen opleveren. Velerlei factoren spelen hierbij een rol, o.a. de opbrengst in hl per oppervlakte-eenheid, de prijs, die men per hl ontvangt, de spreiding in beide voornoemde factoren, bijv. ten gevolge van het weer; verder de bewerkelijkheid van het produkt en de invloed van vruchtwisseling (afwisselend verbouwen van verschillende gewassen brengt meer op dan het voortdurend telen van één bepaald gewas).

Het is uiteraard niet mogelijk met alle invloeden tegelijk rekening te houden, aangezien het model hierdoor te ingewikkeld zou worden. Dit neemt niet weg, dat wij kunnen trachten de onderstellingen zo reëel mogelijk te maken. De beschouwingen worden gegeven voor tarwe (T) en haver (H). Voor meer dan twee gewassen kunnen analoge methoden gevolgd worden.

Het eenvoudigste geval

Beperken wij ons verder nog tot het geval, dat geen vruchtwisseling wordt toegepast, dus dat op ieder stuk van het te bebouwen land steeds hetzelfde gewas wordt geteeld, dan is men alleen nog vrij in de keuze van de fractie λ van het land, dat met tarwe zal worden bezaaid; het overige deel is dan bestemd voor haver. Wij nemen aan dat het land 1 ha groot is en dat de opbrengst per ha voor tarwe a_{11} hl bedraagt en voor haver a_{22} hl. Zijn de prijzen die men per hl ontvangt p_1, resp. p_2, dan ontvangt men bij een fractie λ aan tarwe

$$z = \lambda a_{11}p_1 + (1-\lambda)a_{22}p_2. \qquad (1.40)$$

Uiteraard wil men z zo groot mogelijk maken, wat in het geval (1.40) zeer eenvoudig is. z is een lineaire functie van λ, die men ook kan schrijven in de vorm

$$(a_{11}p_1 - a_{22}p_2)\lambda + a_{22}p_2 ,$$

waaruit direkt blijkt, dat men $\lambda = 1$ moet kiezen, indien $a_{11}p_1 - a_{22}p_2 > 0$ en $\lambda = 0$, wanneer $a_{11}p_1 - a_{22}p_2 < 0$ is. In het geval $a_{11}p_1 - a_{22}p_2 = 0$ maakt het geen verschil, hoeveel men van het ene produkt verbouwt en hoeveel van het andere.

Bespreking waarbij rekening wordt gehouden met spreidingen

Het belangrijkste bezwaar, dat men tegen deze oplossing kan inbrengen, is het verwaarlozen van afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten. Het staat bij voorbaat vast, dat allerlei factoren, die men niet in de hand heeft, zoals de weersomstandigheden, de grootte van de oogst beïnvloeden. In dergelijke gevallen is het onjuist alleen te letten op de gemiddelde resultaten, omdat dan ook zeer lage opbrengsten kunnen voorkomen, wat soms niet te aanvaarden konsekwenties heeft.

Om nu afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten in onze beschouwingen te betrekken, vatten wij de oogstresultaten op als stochastische grootheden, waarvan wij de verdeling kennen. Het financiële resultaat zal dan eveneens een stochastische grootheid zijn, waarvan de verdelingsfunctie uit die van de opbrengsten volgt. Acht men nu een financiële opbrengst beneden een zeker bedrag eigenlijk onaanvaardbaar, dan kan men bij voorbaat stellen, dat de kans hierop een bepaalde waarde niet mag overtreffen. Gezien de aard van het probleem zal het in het algemeen niet mogelijk zijn er voor te zorgen, dat bepaalde kleine opbrengsten in het geheel niet kunnen voorkomen.

Onder alle mogelijkheden, die door de gestelde voorwaarde niet worden uitgesloten kunnen wij nu diegene kiezen, welke de verwachting van de financiële opbrengst maximaliseert.

Wij zullen nu nagaan op welke wijze men te werk kan gaan in het geval, waarin op een deel van het land jaar in jaar uit tarwe wordt verbouwd en op het overige stuk voortdurend haver.

Wiskundige formulering van het probleem

De opbrengst in hl aan tarwe, wanneer het gehele land hiermee bezaaid wordt geven wij aan met $\underline{x}_1$; de opbrengst in hl aan haver, wanneer alleen haver wordt verbouwd met $\underline{x}_2$. Wij nemen van beide grootheden aan, dat ze normaal verdeeld zijn met bekende gemiddelden en bekende spreidingen, welke wij voor tarwe, resp. haver aangeven met μ_1 en σ_1, resp. μ_2 en σ_2. Doordat de meeste toevallige factoren zowel de tarwe als de haveropbrengst zullen beïnvloeden, zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ niet onderling onafhankelijk, maar gecorreleerd; ook de waarde ϱ van de correlatiecoëfficiënt onderstellen wij bekend uit waarnemingen in voorafgaande jaren; $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ bezitten dus een simultane normale verdeling, waarvan alle vijf parameters gegeven zijn (vgl. (2.9) uit hoofdstuk III).

Bezaait men nu een fractie λ van het land met tarwe en de rest met haver, dan is de opbrengst aan tarwe gelijk aan $\lambda\underline{x}_1$ en die aan haver gelijk aan $(1-\lambda)\underline{x}_2$. Geven wij wederom de verkoopsprijs per hl aan met p_1 resp. p_2, dan is het geldbedrag $\underline{z}$, dat men ontvangt, wanneer een fractie λ met tarwe bezaaid wordt, gelijk aan

$$\underline{z} = \lambda p_1\underline{x}_1 + (1-\lambda)p_2\underline{x}_2 \, . \tag{1.41}$$

Nu is een lineaire combinatie van normaal verdeelde stochastische grootheden ook weer normaal verdeeld (vgl. stelling 2.5 uit hoofdstuk IV), zodat wij de verdeling van $\underline{z}$ volledig kennen, wanneer gemiddelde en spreiding ervan berekend zijn. Uit formule (1.41) en de gegevens omtrent de verdelingen van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ volgt (vgl. stelling 4.9 en formule (4.42) uit hoofdstuk III):

$$\mathcal{E}\underline{z} = \lambda p_1 \mu_1 + (1-\lambda)p_2 \mu_2 \tag{1.42}$$

en

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = \lambda^2 p_1^2 \sigma_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 \sigma_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)\,\sigma_1\sigma_2\varrho\, p_1 p_2 \, . \tag{1.43}$$

Wanneer wij geen extra eisen aan de uitkomst z opleggen, is het probleem hetzelfde als het reeds behandelde: kies λ zo, dat de verwachting van de opbrengst zo groot mogelijk is, d.w.z. maximaliseer (1.42) als functie van λ. In de praktijk zal men dit zeker niet blindelings doen, omdat het mogelijk is, dat een hoge verwachting van $\underline{z}$ gepaard gaat met een zo grote spreiding, dat men dan ondanks de hoge verwachting een flinke kans loopt, betrekkelijk kleine waarden van $\underline{z}$ te vinden. Zijn de konsekwenties van ontvangsten kleiner dan een bepaald bedrag w onaanvaardbaar, dan zal men eisen, dat de kans hierop niet groter mag zijn dan een klein getal β. Wij krijgen dus een nevenvoorwaarde, welke er als volgt uitziet:

$$P\left[\underline{z} \leq w\right] \leq \beta. \tag{1.44}$$

Deze voorwaarde kan tot gevolg hebben, dat wij beperkt worden in de keuze van λ. Wij moeten daarom eerst nagaan uit welke λ's er gekozen kan worden; de verwachting van de ontvangsten kan dan over de niet uitgesloten λ's worden gemaximaliseerd.

Voor de eerste van deze twee stappen voeren wij een nieuwe variabele $\underline{u}$ in, de gestandaardiseerde van $\underline{z}$:

$$\underline{u} = \sigma_{\underline{z}}^{-1}(\underline{z} - \mathcal{E}\underline{z}), \tag{1.45}$$

die dus normaal verdeeld is met gemiddelde nul en spreiding 1 (vgl. stelling 2.2 uit hoofdstuk IV). Voorwaarde (1.44) gaat dan, uitgedrukt in $\underline{u}$, over in

$$P\left[\underline{u} \leq \sigma_{\underline{z}}^{-1}(w - \mathcal{E}\underline{z})\right] \leq \beta, \tag{1.46}$$

of, als wij stellen

$$w' = \sigma_{\underline{z}}^{-1}(w - \mathcal{E}\underline{z}). \tag{1.47}$$

$$P\left[\underline{u} \leq w'\right] \leq \beta. \tag{1.48}$$

Daar $\underline{u}$ N(0,1) verdeeld is en β van tevoren wordt gekozen, kunnen wij in een fractielentabel van de normale verdeling[1] aflezen welke waarden van w' bij gegeven β aan (1.48) voldoen. Wij geven de waarde, die $\underline{u}$ met een kans β overschrijdt aan met ξ_β (zie fig. 1.3). Naarmate β kleiner is, is ξ_β groter,

----

1) In tabel 4.I uit hoofdstuk III werd β opgegeven als functie van u. Omgekeerd kan men ook u opgeven als functie van β; men spreekt dan van een fractielentabel en gebruikt in plaats van het symbool u vaak het symbool ξ_β.

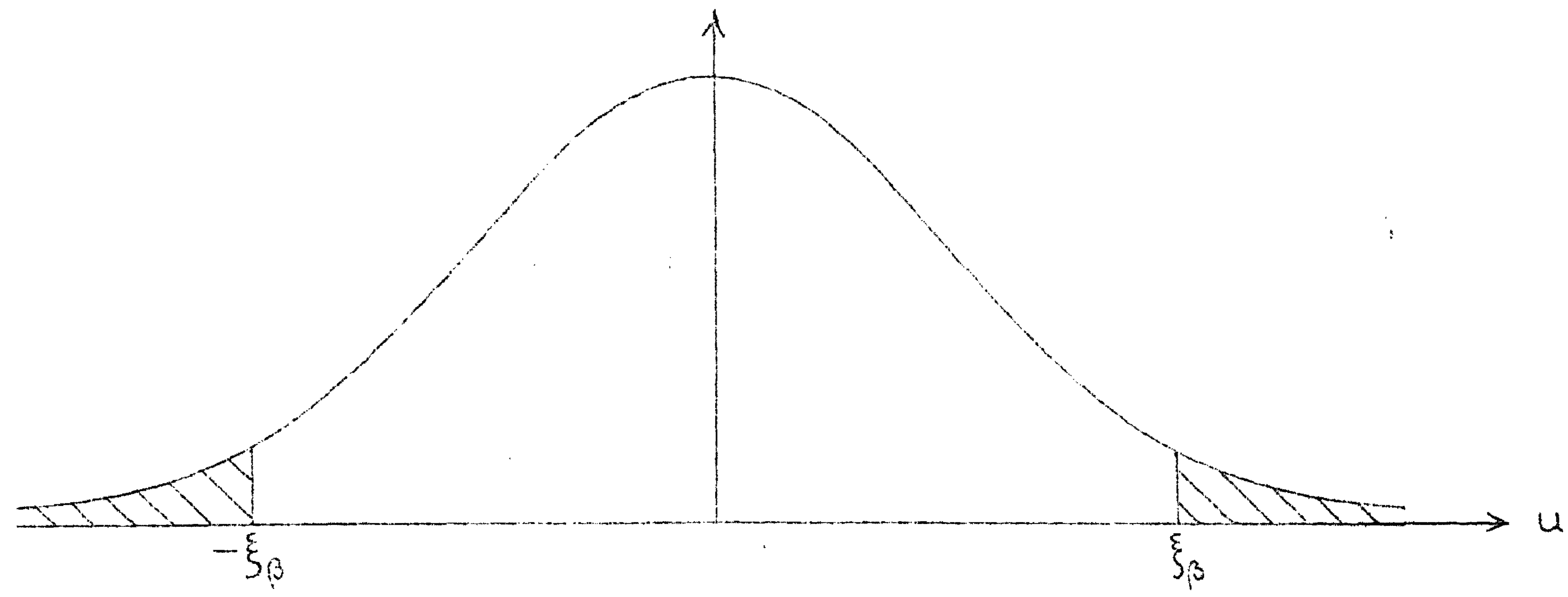

fig. 1.3
De overschrijdingskans bij een normale verdeling

zodat de waarden van w', die voldoen aan (1.48) gegeven worden door de ongelijkheid:

$$w' \leq -\xi_\beta . \tag{1.49}$$

Vervangen wij hierin w' door $\sigma_{\underline{z}}^{-1}(w-\mathcal{E}\underline{z})$ en vullen wij voor $\mathcal{E}\underline{z}$ en $\sigma_{\underline{z}}$ de gevonden waarden (1.42) en (1.43) in, dan zien wij, dat λ moet voldoen aan:

$$\frac{w-\{\lambda p_1\mu_1+(1-\lambda)p_2\mu_2\}}{\sqrt{\lambda^2p_1^2\sigma_1^2+(1-\lambda)^2p_2^2\sigma_2^2+2(1-\lambda)\lambda p_1p_2\varrho\,\sigma_1\sigma_2}} \leq -\xi_\beta . \tag{1.50}$$

Om de voorwaarde beter te kunnen doorzien schrijven wij deze in de vorm: [1)]

$$\begin{aligned}\{-(p_1\mu_1-p_2\mu_2)^2 &+ \xi_\beta^2(p_1^2\sigma_1^2+p_2^2\sigma_2^2-2p_1p_2\varrho\sigma_1\sigma_2)\}\,\lambda^2 + \\ &+ 2\{w(p_1\mu_1-p_2\mu_2)-p_1p_2\mu_1\mu_2+p_2^2\mu_2^2+ \\ &+ \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2+p_1p_2\varrho\sigma_1\sigma_2)\}\,\lambda-(w-p_2\mu_2)^2+ \\ &+ \xi_\beta^2p_2^2\sigma_2^2 \leq 0,\end{aligned} \tag{1.51}$$

of

$$A\lambda^2+B\lambda+C \leq 0, \tag{1.52}$$

----
1) Hierbij is uitgegaan van de reële onderstelling dat $\beta < \frac{1}{2}$ en dus $\xi_\beta > 0$ is.

waarin

$$A = \{-(p_1\mu_1 - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2(p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 - 2p_1p_2\varrho\sigma_1\sigma_2)\} \quad , \tag{1.53}$$

$$B = 2\{w(p_1\mu_1 - p_2\mu_2) - p_1p_2\mu_1\mu_2 + p_2^2\mu_2^2 + \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\varrho\sigma_1\sigma_2)\} \tag{1.54}$$

en

$$C = -(w - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2 p_2^2\sigma_2^2 \tag{1.55}$$

is.

De grootheid λ, die wij in ons probleem kunnen kiezen, moet dus voldoen aan een ongelijkheid van de tweede graad. Wij wijzen erop, dat tot nu toe geen andere onderstellingen gemaakt zijn dan die van de normaliteit en bekendheid van de verdelingen van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ en het bekend zijn van de prijzen p_1 en p_2.

Men kan het wiskundige probleem: $\mathcal{E}\underline{z}$ maximaliseren onder de voorwaarde (1.52) algemeen oplossen. Wij zullen dit hier niet doen en ons beperken tot de bespreking van een aantal speciale gevallen.

<u>Oplossing van het probleem in een aantal speciale gevallen</u>

a) <u>Het geval waarin $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ en $p_1^2\sigma_1^2 = p_2^2\sigma_2^2$</u>

De opbrengst in geld wanneer men het gehele land van 1 ha met tarwe bezaaid heeft, bedraagt $p_1\underline{x}_1$ en wanneer men dit doet met haver $p_2\underline{x}_2$. Zonder moeite is in te zien, dat $p_1\underline{x}_1$ een $N(p_1\mu_1, p_1\sigma_1)$-verdeling bezit en $p_2\underline{x}_2$ een $N(p_2\mu_2, p_2\sigma_2)$-verdeling. Als dus $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ en $p_1\sigma_1 = p_2\sigma_2$ is, zijn de waarschijnlijkheidsverdelingen van $p_1\underline{x}_1$ en $p_2\underline{x}_2$ aan elkaar gelijk. Hier is men wellicht geneigd te denken dat het er niet meer toe doet of men tarwe of haver, dan wel gedeeltelijk de één en gedeeltelijk de ander zaait. Toch is dit niet het geval. Men kan dit inzien door de verdeling van $\underline{z}$ te onderzoeken voor verschillende waarden van λ.

Voor iedere waarde van λ bedraagt volgens (1.42) de verwachting van z: $\mathcal{E}\underline{z} = p_1\mu_1 = p_2\mu_2$. De variantie gaat echter over in (zie (1.43)):

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = p_1^2\,\sigma_1^2\{1-2\lambda(1-\lambda)(1-\rho)\} \tag{1.56}$$

en blijft dus een functie van λ.

Men kan de overgebleven vrijheid nu gebruiken om de variantie van $\underline{z}$ zo groot of zo klein mogelijk te maken. In het eerste geval speculeert men op een zeer hoge opbrengst, in het tweede geval maakt men de kans op een slecht resultaat zo klein mogelijk. Wij stelden ons op het voorzichtige standpunt en dat betekent dus dat wij $\sigma_{\underline{z}}^2$ moeten minimaliseren.

Door differentiatie van (1.56) naar λ vindt men dat $\sigma_{\underline{z}}^2$ minimaal is voor $\lambda=\frac{1}{2}$. De optimale oplossing is hier dus onafhankelijk van β en w; wij noemen deze oplossing daarom <u>uniform optimaal</u>. Een duidelijke illustratie wordt gegeven door fig. 1.4, waarin voor verschillende waarden van λ de cumulatieve verdelingsfunctie F(z) van $\underline{z}$ is getekend. Zo leest men direkt uit deze figuur af,

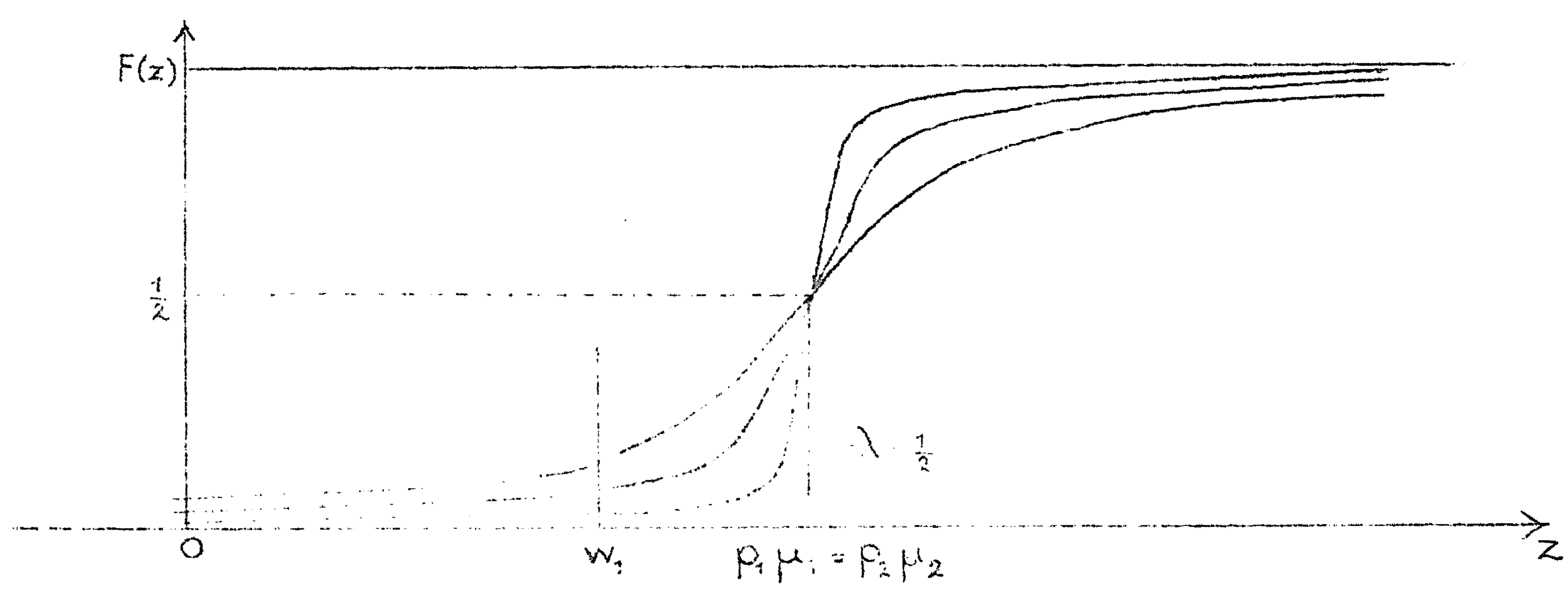

fig. 1.4

<u>De cumulatieve verdelingsfunctie van $\underline{z}$ voor verschillende waarden van λ.</u>

dat de kleinste waarde van β voor een bepaalde waarde $w_1(< p_1\,\mu_1)$ van w bereikt wordt bij die keuze van λ waarvoor $\sigma_{\underline{z}}$ minimaal is.

De bovenstaande oplossing geldt ook voor iedere waarde van ρ. Wel blijft de kleinste variantie die bereikt kan worden een functie van ρ; immers.bij de keuze $\lambda=\frac{1}{2}$, gaat (1.56) over in

$$(\sigma_{\underline{z}}^2)_{min} = \tfrac{1}{2}\,p_1^2\,\sigma_1^2(1+\rho)\ . \tag{1.57}$$

Het minimum ligt dus lager naarmate de waarde van ρ kleiner is. Men kan dit ook zo zeggen: door twee verschillende produkten te verbouwen, die niet op dezelfde wijze door de toevallige omstandigheden beïnvloed worden, kunnen wij eventuele risico's verdelen; dit gaat des te beter, naarmate de opbrengsten minder samenhangen (ϱ kleiner is).

Vergelijken wij de hier gevonden resultaten met de eerder afgeleide resultaten, dan zien wij dat daar voor het geval $p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$ van de vrijheid in de keuze van λ geen nuttig gebruik kon worden gemaakt, terwijl er hier een uniform optimale oplossing is gevonden voor $\lambda = \frac{1}{2}$.

b) Het geval waarin $p_1 \mu_1 = p_2 \mu_2$, doch $p_1^2 \sigma_1^2 \neq p_2^2 \sigma_2^2$.

De verdelingen van $p_1 \underline{x}_1$ en $p_2 \underline{x}_2$ bezitten nu wel dezelfde verwachting, maar niet meer dezelfde variantie. Het bepalen van de optimale oplossing gaat echter op dezelfde wijze als in a).
Neemt men aan dat

$$p_1 \sigma_1 = k\, p_2 \sigma_2 \qquad (1.58)$$

is, dan is de variantie van $\underline{z}$

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = p_1^2 \sigma_1^2 \{k^2 \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) k \varrho\}. \qquad (1.59)$$

Deze is minimaal voor

$$\lambda = \frac{1-k\varrho}{k^2+1-2k\varrho}\;; \qquad (1.60)$$

wanneer deze λ tussen 0 en 1 ligt geeft (1.60) de optimale waarde van λ, in het andere geval moet men hetzij $\lambda=0$, hetzij $\lambda=1$ kiezen. Substitueert men in (1.60) $k=1$, dan vindt men weer voor de optimale waarde van λ : $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ook oplossing (1.60) is uniform optimaal, d.w.z. geldig voor iedere combinatie van w en β. Het is echter mogelijk dat men zijn eisen zodanig heeft gesteld dat er ook door de gunstigste λ niet aan wordt voldaan; men zal dan hetzij de eisen moeten verlichten, hetzij van het produktieproces moeten afzien. In gevallen waarin het minimum van (1.59) voor $0 \leq \lambda \leq 1$ niet op de rand van dit interval wordt bereikt, kan men in de situatie verkeren dat zowel alleen tarwe als alleen haver verbouwen te grote risico's oplevert, doch dat het risico bij gedeeltelijk haver en gedeeltelijk tarwe verbouwen wel aanvaardbaar is; hetzelfde geldt uiteraard ook voor het eerder behandelde algemene geval.

c) Geen onderstellingen omtrent gemiddelden en spreidingen

Wij hebben reeds aangegeven op welke wijze de optimale λ kan worden berekend. Deze is nu niet meer zoals in de voorbeelden a) en b) uniform optimaal, doch een functie van β en w. De berekening is niet moeilijk, maar door het grote aantal mogelijkheden wat de constanten A, B en C uit (1.52) betreft, wel vrij langdradig en zal daarom niet worden gegeven.

Bovendien is het niet zeker, dat het berekenen van een optimale λ inderdaad weergeeft, hetgeen men eigenlijk wil doen. Immers de waarden van w en vooral die van β liggen minder nauwkeurig vast, dan tot nu toe werd gesuggereerd. De eisen voor w volgen nog hoofdzakelijk uit nauwkeurig bekende gegevens, maar β drukt uit welke kans op een zeer slechte oogst men wil aanvaarden. Zou men door de verwachting van $\underline{z}$ iets onder het te bereiken maximum te kiezen de kans op een resultaat kleiner dan w aanzienlijk verlagen, dan zal men dit zeker in overweging nemen. Hetzelfde geldt, wanneer het bereikbare maximum sterk stijgt bij een geringe verhoging van β. Men wil dus eigenlijk voor gegeven w in een grafiek zien hoe de samenhang is tussen β en het maximum van $\mathcal{E}\underline{z}$ over de toegelaten λ.

Het maximum van $\mathcal{E}\underline{z}$ en β hangen samen via de toegelaten waarden van λ. De verwachting van $\underline{z}$ is een monotone functie van λ. Ook het verband tussen de toegelaten λ's en β is zonder moeite op te sporen. Als bij een bepaalde β een verzameling van λ's toelaatbaar is, dan zullen deze λ's zeker toelaatbaar zijn, wanneer men zijn eisen lager stelt, d.w.z. een grotere kans β op een opbrengst kleiner dan w accepteert. De verzameling van toegelaten λ's zal dus groter worden of gelijk blijven, wanneer β toeneemt. Hieruit volgt dat ook het maximum van $\mathcal{E}\underline{z}$ zeker niet kleiner wordt bij stijgende β, m.a.w. dit maximum is een monotoon niet dalende functie van β.

Ook uit een grafiek zoals die van fig. 1.4 kan men een goede indruk krijgen van het verband tussen $\mathcal{E}\underline{z}$ en β bij gegeven waarde van w. Door de vrijheid in de keuze van λ zijn er verschillende waarden van $\mathcal{E}\underline{z}$ bereikbaar; het interessantste geval is nu dat waarin bij toenemende $\mathcal{E}\underline{z}$ ook $\sigma^2_{\underline{z}}$ toeneemt, waarin dus een hogere gemiddelde opbrengst samengaat met een groter risico. In figuur

1.5 zijn enige bereikbare cumulatieve verdelingsfuncties van $\underline{z}$ getekend. De snijpunten van de getekende krommen met de rechte $z=w$ geven aan hoe groot β is; aangezien $\underline{z}$ een symmetrische verdeling bezit kan men de waarden van $\mathcal{E}\underline{z}$ aflezen uit de snijpunten van de krommen met $F(z) = \frac{1}{2}$. Figuur 1.5 illustreert daardoor duidelijk op welke wijze β verloopt bij toenemende waarde van $\mathcal{E}\underline{z}$.

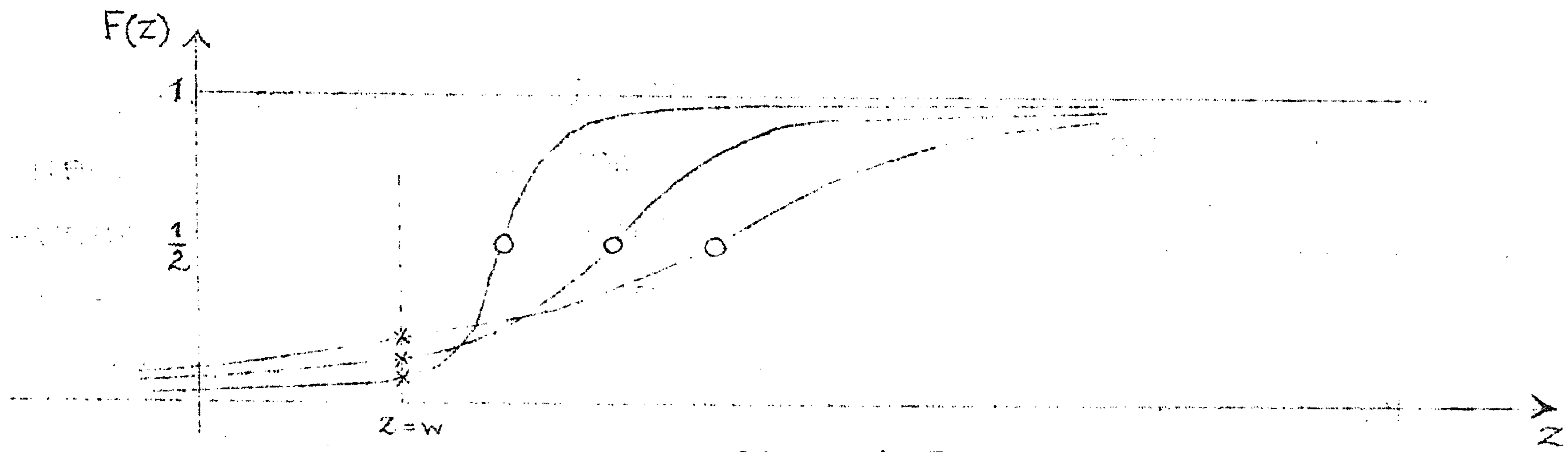

fig. 1.5

De cumulatieve verdelingsfunctie van z voor verschillende waarden van λ.

Aan de hand van een voorbeeld illustreren wij tenslotte op welke wijze men het beloop van $\max\limits_{\lambda} \mathcal{E}\underline{z}$ kan vinden als functie van β. Hierbij moeten wij gebruik maken van de algemeen geldende formules (1.42) en (1.51) t/m (1.55).

Het is niet nodig alle in de formules (1.52)-(1.55) voorkomende constanten afzonderlijk te kennen. Het is voldoende wanneer de volgende verhoudingen en gegevens bekend zijn:

$$\begin{aligned} p_2\mu_2 &= 0{,}85 \quad p_1\mu_1 & \qquad \rho &= \tfrac{1}{2} \\ p_1\sigma_1 &= 0{,}5 \quad p_1\mu_1 & \qquad w &= 0{,}35\ p_1\mu_1 \qquad\qquad (1.61) \\ p_2\sigma_2 &= 0{,}25 \quad p_1\mu_1 & & \end{aligned}$$

Wij hebben dus $p_2\mu_2$, $p_1\sigma_1$, $p_2\sigma_2$ en w uitgedrukt in $p_1\mu_1$, de gemiddelde opbrengst in geld, wanneer er alleen tarwe wordt verbouwd. De gemiddelde opbrengst (steeds in geld) van haver is dus minder dan de gemiddelde opbrengst van tarwe, doch de spreiding van de laatste is aanzienlijk groter. De opbrengst die wij behalve een kans β zeker willen behalen is 35% van de gemiddelde opbrengst, wanneer wij alleen tarwe verbouwen.

Substitueren wij (1.61) in de formules (1.53), (1.54) en (1.55), dan vinden wij

$$A = \left(\frac{3}{16}\,\xi_\beta^2 - 0{,}0225\right) p_1^2 \mu_1^2 \,, \tag{1.62}$$

$$B = -0{,}15\, p_1^2 \mu_1^2 \,, \tag{1.63}$$

$$C = \left(\frac{1}{16}\,\xi_\beta^2 - 0{,}25\right) p_1^2 \mu_1^2 \,. \tag{1.64}$$

Reeds eerder merkten wij op dat de eisen betreffende w en β niet willekeurig hoog kunnen worden gesteld. Wij gaan daarom eerst na welke waarden van β bij de gegeven w bereikt kunnen worden. Hiertoe schrijven wij voorwaarde (1.52) in de vorm

$$A\left(\lambda + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A} \leq 0 \;; \tag{1.65}$$

voor $A > 0$ is dit een parabool met een minimum, groot $C - \frac{B^2}{4A}$, dat bereikt wordt voor $\lambda = -\frac{B}{2A}$. Voor kleine waarden van β is $(1.62) > 0$[1] en dus kan er aan (1.65) niet worden voldaan, wanneer

$$C - \frac{B^2}{4A} > 0 \tag{1.66}$$

is. Hieruit volgt voor ξ_β^2 de voorwaarde $\xi_\beta^2 \geq 4{,}12$, waaruit met een tabel van de normale verdeling kan worden gevonden, dat $\beta \geq 0{,}0212$ moet zijn. De kleinste waarde β_0 van β, waarbij nog een oplossing mogelijk is, bedraagt dus $\beta_0 = 0{,}0212$, een waarde die wordt bereikt voor

$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{0{,}15}{2(0{,}1875 \,.\, 4{,}12 - 0{,}0225)} = 0{,}1 \,.$$

Wanneer men $\beta > \beta_0$ kiest, zal men een interval $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ van λ's ter beschikking krijgen en dan moet men dus nagaan voor welke λ de functie $\mathcal{E}\underline{z}$ maximaal is. Uit

$$\mathcal{E}\underline{z} = \lambda p_1 \mu_1 + (1-\lambda) p_2 \mu_2 = (0{,}85 + 0{,}15\lambda) p_1 \mu_1 \tag{1.67}$$

leest men af dat dit het geval is voor de grootste toegelaten waarde van λ. Groter dan één kan deze waarde nooit worden, omdat ook aan $0 \leq \lambda \leq 1$ voldaan moet zijn. Het heeft daarom geen zin, waarden van β te beschouwen, waarvoor de bovengrens λ_2 van het interval $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ groter is dan één. De waarde β_1 van β, welke

----

1) Men kan achteraf laten zien, dat A voor alle in aanmerking komende waarden van β inderdaad > 0 is.

behoort bij $\lambda_2=1$ vinden wij door in (1.52) $\lambda=1$ in te vullen; het linker lid moet dan nul worden. Men vindt op deze wijze $\beta_1 = 0{,}0968$. Het inderval van β's, waarvoor het gedrag van $\max_\lambda \mathcal{E}\underline{z}$ moet worden nagegaan is dus $0{,}0212 \leq \beta \leq 0{,}0968$.

Voor de waarden 0,0212; 0,04; 0,06; 0,08 en 0,0968 van β is de grootste wortel van $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ berekend, evenals de bijbehorende waarde van $\mathcal{E}\underline{z}$. In figuur 1.6 is het verband tussen $\max_\lambda \mathcal{E}\underline{z}$ en β geschetst, waarbij wij langs de verticale as als eenheid gebruikten $p_1\,\mu_1$. Wij zien dat $\max_\lambda \mathcal{E}\underline{z}$ bij toenemende β stijgt van $0{,}865\ p_1\,\mu_1$ tot $p_1\,\mu_1$ en dat alleen haver verbouwen nooit optimaal is, in tegenstelling tot alleen tarwe verbouwen, wat de optimale oplossing is bij $\beta = 0{,}0968$.

Andere voorbeelden kunnen op geheel analoge wijze worden uitgewerkt.

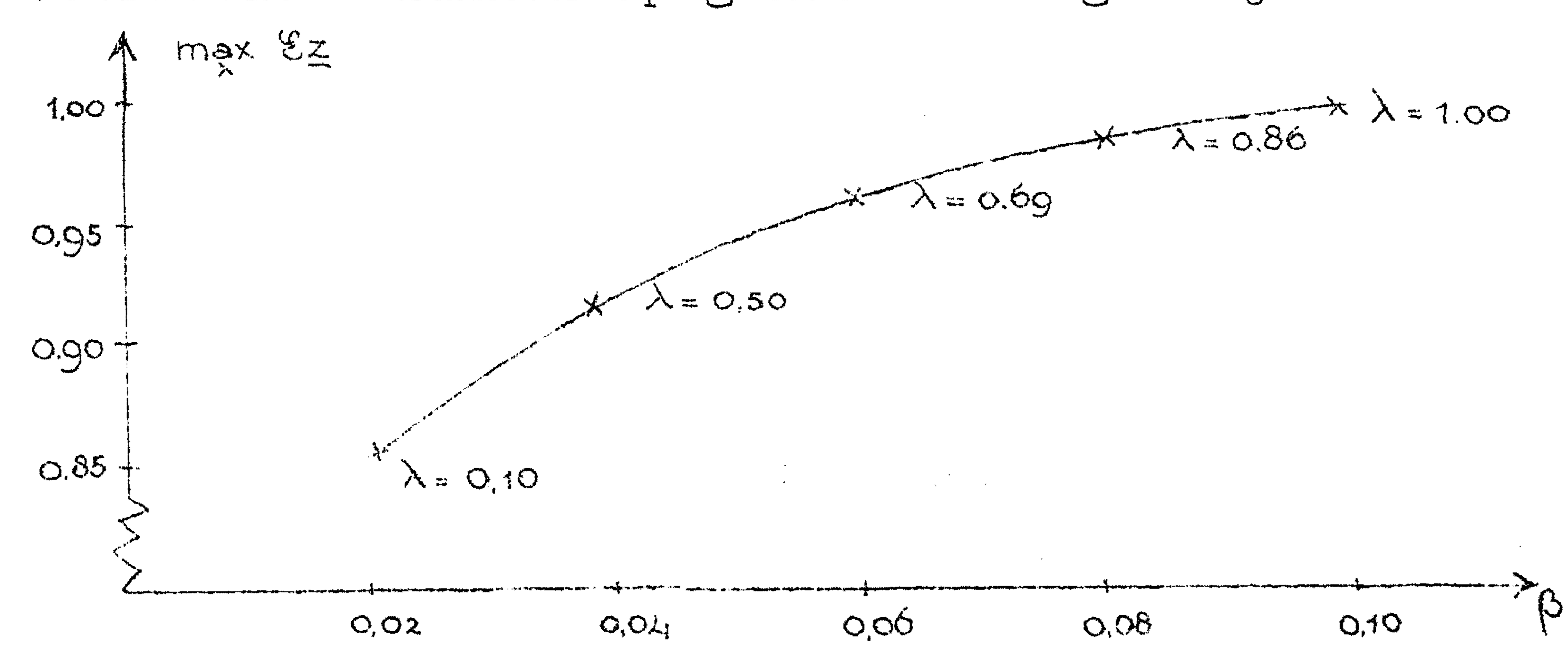

fig. 1.6

Verwachting van de opbrengst als functie van β bij optimale λ

2. Steekproeven bij accountantscontroles

In veel gevallen waarin men een groot aantal gelijksoortige dingen moet controleren, beperkt men zich tot het onderzoeken van een gedeelte daarvan. Soms is dit noodzakelijk omdat door het onderzoek het voorwerp vernietigd of onbruikbaar wordt (vgl. voorbeeld 1.1 uit hoofdstuk V), doch meestal geschiedt dit omdat men wil besparen op de kosten verbonden aan het keuren. Dat gedeelte, dat wel gecontroleerd wordt, noemt men de steekproef en het aantal exemplaren dat er in aanwezig is, de omvang van de steekproef.

Steekproeven, waarbij alle exemplaren een gelijke kans hebben om getrokken te worden noemt men aselecte steekproeven en het zijn steekproeven van dit type, waarmee in de industrie (bijv. bij het keuren van gemaakte produkten), in het medisch onderzoek (bijv. bij de vergelijking van geneesmiddelen), bij de marktanalyse (bijv. enquetes), voor bevolkingsschattingen en op nog talloos veel andere terreinen gewerkt wordt. Men kan zich dan ook afvragen, of aselecte steekproeven, die elders zoveel besparingen opleveren, ook niet van nut kunnen zijn bij het werk van accountants.

Uiteraard is de situatie bij een accountantscontrole niet zonder meer vergelijkbaar met een keuring van een partij goederen. Een belangrijk punt van verschil ligt in de konsekwenties, die het maken van onjuiste conclusies op grond van de steekproef kan hebben. Zo kan een ten onrechte goedgekeurde partij goederen in veel gevallen zonder al te grote kosten vervangen worden door een andere, zodra de fouten ontdekt worden. Het niet ontdekken echter van bijvoorbeeld een fraude heeft daarentegen in het algemeen zeer aanzienlijke gevolgen. Een vergelijkbare situatie ontstaat soms bij het medisch onderzoek, waarin bij het vergelijken van geneesmiddelen door middel van een steekproef, het doen van een onjuiste keuze ernstige gevolgen zal hebben voor de volksgezondheid.

Het is duidelijk dat bij een steekproefonderzoek minder informatie verkregen wordt dan bij een volledige keuring. Het is in principe mogelijk dat onjuistheden bij het steekproefonderzoek niet gezien worden en wil men dus steekproeven toepassen, dan zal men niet kunnen eisen dat alle onjuistheden met zekerheid opgespoord worden. De belangrijkste vraag betreft daarom de aard van de conclusies, die wél getrokken kunnen worden over de gehele verzameling op grond van de informatie, verkregen door een steekproef. Op deze vraag wordt een antwoord gegeven door de mathematische statistiek.

Laten wij aannemen dat een lange rij posten gecontroleerd moet worden op onjuistheden. Een aantal posten zal in orde zijn en een aantal kan onjuist zijn. Er bestaat dus een bepaalde breuk p tussen nul en één, die aangeeft welk deel van de posten het kenmerk "onjuist" bezit. Men noemt deze breuk de fractie p (van de posten die het kenmerk "onjuist" bezitten) en het is deze fractie, waarover wij een uitspraak willen doen op grond van de resultaten van de steekproef. Dit kan met behulp van de theorie van de betrouwbaarheidsintervallen, welke in de derde paragraaf van hoofdstuk VI behandeld werd.

Indien wij een enkel getal op willen geven als schatting voor p, dan ligt het voor de hand hiervoor de fractie f van onjuiste getallen in de steekproef te nemen. Zolang de steekproef niet alle posten omvat, behoeven f en p niet aan elkaar gelijk te zijn. Aan de andere kant zal p eerder een waarde in de omgeving van f bezitten, dan een waarde die sterk van f afwijkt. Men kan daarom een interval opgeven, waarbinnen p vermoedelijk ligt en een dergelijk interval is het reeds eerder behandelde betrouwbaarheidsinterval. Wij geven dus niet een bepaalde waarde op voor p, doch grenzen waartussen de onbekende fractie vermoedelijk ligt. Een dergelijk interval behoeft niet noodzakelijk een onder- en een bovengrens te bezitten. Men kan zich tot één van beide beperken, bijvoorbeeld door uit een steekproef de conclusie te trekken, dat p niet groter is dan een bepaalde waarde en dus een bovengrens voor p opgeven.

Hoewel p vermoedelijk een waarde bezit, welke niet te veel verschilt van die van f kunnen wij toch andere waarden niet geheel uitsluiten. Zelfs is het in principe mogelijk dat onze steekproef alle onjuiste posten uit de lijst bevat; in dat geval kan p een waarde bezitten, die zeer veel kleiner is dan f. De conclusie die wij uit deze overwegingen trekken luidt, dat zelfs onze uitspraak in de vorm van een interval niet juist behoeft te zijn. Wel zullen wij in het algemeen minder onjuiste uitspraken doen, naarmate wij een groter interval opgeven, maar dit voordeel gaat dan samen met het nadeel van een minder precieze uitspraak over p. Van belang is nu het verband tussen de gevonden fractie f, de grenzen van het betrouwbaarheidsinterval en de kans dat p werkelijk in dit interval ligt.

Tenzij wij ons beperken tot triviale mededelingen, zoals: p ligt tussen 0 en 1, zullen er in een lange reeks uitspraken over onbekende fracties (meestal) fouten gemaakt worden. Wij richten de vorm van onze uitspraken nu zo in, dat in deze reeks niet meer dan een bepaalde fractie uitspraken onjuist is. Hoe groot deze fractie gekozen wordt, hangt af van de aard van het onderzoek. Zo zal men deze fractie meestal lager kiezen bij proeven met een belangrijk geneesmiddel dan bij een vooronderzoek op het gebied van de marktanalyse. Veel gekozen waarden voor de toegelaten fractie onjuiste uitspraken zijn 0,01 respectievelijk 0,05. Deze fractie, die wij aangeven met α_0, noemt men de onbetrouwbaarheid. Staat deze eenmaal vast, dan stelt de mathematische statistiek ons weer in staat bij iedere steekproefomvang n en bij iedere gevonden fractie f in de steekproef, een betrouwbaarheidsinterval voor p te berekenen, zodanig dat de fractie onjuiste uitspraken hoogstens gelijk is aan de gekozen onbetrouwbaarheid α_0.[1] Wanneer men deze methode toepast, dan zegt men dat p behoudens een onbetrouwbaarheid (ook wel: behoudens een kans), die hoogstens gelijk is aan α_0, binnen de aangegeven grenzen ligt.

Men kan zich voorstellen, dat de zojuist beschreven methode toegepast wordt bij een accuratesse-controle. Men neemt een aselecte steekproef van n posten uit het totale aantal, geeft op grond van de steekproefuitkomst een betrouwbaarheidsinterval op voor de fractie p van onjuistheden in alle posten en gaat vervolgens na of de gevonden grenzen aanleiding vormen tot een nader onderzoek of tot ingrijpen. Tabel 2.I geeft betrouwbaarheidsgrenzen voor p, wanneer steekproeven van 100 exemplaren genomen worden, een onbetrouwbaarheid van 5% voor beide grenzen apart en dus 10% voor het gehele interval gekozen wordt en k onjuistheden

----

1) Aangezien de fractie onjuiste uitspraken hoogstens gelijk is aan α_0, noemt men α_0 meestal niet de gekozen onbetrouwbaarheid, maar de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel. Eenvoudigheidshalve is hier tussen deze twee begrippen geen onderscheid gemaakt.

Tabel 2.I [1)]

Betrouwbaarheidsgrenzen voor p bij n=100 en een onbetrouwbaarheid van 5% voor beide grenzen apart

k	ondergrens voor p	bovengrens voor p	k	ondergrens voor p	bovengrens voor p
5	0,02	0,10	12	0,07	0,19
6	0,03	0,12	13	0,08	0,20
7	0,03	0,13	14	0,09	0,21
8	0,04	0,14	15	0,09	0,22
9	0,05	0,15	16	0,10	0,23
10	0,05	0,16	17	0,11	0,24
11	0,06	0,18			

in de steekproef gevonden zijn. Het spreekt vanzelf dat dergelijke tabellen voor allerlei waarden van n en van de onbetrouwbaarheid opgesteld kunnen worden. Uit een dergelijke tabel kan men ook eenzijdig begrensde betrouwbaarheidsintervallen aflezen; de onbetrouwbaarheid bedraagt dan in het geval van tabel 2.I 5%. De keuze van n zullen wij hier niet behandelen; gewoonlijk vindt deze plaats door de kosten van de steekproef af te wegen tegen de te stellen eisen van nauwkeurigheid.

Bij een controle op fraude kan in principe dezelfde weg bewandeld worden als hier boven is aangegeven. Uiteraard zal men zich beperken tot het opgeven van een bovengrens voor de fractie p van gefraudeerde posten en bovendien zal men de onbetrouwbaarheid α_0 klein kiezen. Wanneer men systematisch op deze wijze te werk gaat, dan kan men dus concluderen, dat van een groot aantal controles slechts in hoogstens een fractie α_0 van de gevallen een interval opgegeven wordt, dat de ware p niet bevat.

Hoewel deze gedachtengang vanuit statistisch oogpunt gezien correct is, zijn er toch twee belangrijke bezwaren tegen aan te voeren. In de eerste plaats is men niet alleen geïnteresseerd in de fractie gefraudeerde posten, maar vooral in het totale gefraudeerde bedrag. Ten tweede zal men bij een controle, waarin een

1) Deze tabel is overgenomen uit: J. FABIUS, Syllabus van de cursus "Enkele elementaire statistische methoden", Rapport S 258(C 12) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, blz.1[illegible]

geval van fraude gevonden wordt zeker niet volstaan met het controleren van een steekproef uit de posten, doch overgaan tot het controleren van alle posten. Beide bezwaren kunnen worden ondervangen.

Laten wij aannemen dat alleen gefraudeerd kan worden door het opschrijven van te hoge bedragen, het toevoegen van niet bestaande posten of het opschrijven van hogere totaalsommen dan de werkelijke. Voor deze situatie zijn twee methoden ontwikkeld waarin aan de genoemde bezwaren tegemoet gekomen wordt.
P. DE WOLFF[1] heeft voorgesteld de grote posten allemaal te controleren en de kleinere slechts gedeeltelijk; zodra een geval van fraude gevonden wordt, gaat men tot het controleren van alle posten over en men doet dus slechts waarschijnlijkheidsuitspraken, wanneer in de steekproef geen enkel geval van fraude gevonden wordt.

Een andere methode om de bezwaren te ondervangen is afkomstig van A. VAN HEERDEN. De gedachtengang is als volgt:

Laat de te controleren lijst bestaan uit N posten en laat voor het totale bedrag van alle posten opgegeven zijn B gulden. Wij beschouwen nu niet de posten als eenheden, maar de afzonderlijke guldens en handelen dus alsof een lijst met B guldens gegeven is, waarover een uitspraak gedaan moet worden op grond van een steekproef. Uit de lijst worden n guldens aselect aangewezen en vervolgens worden de posten waartoe deze guldens behoren gecontroleerd. Grote posten hebben op deze wijze een grotere kans om aangewezen te worden dan kleinere en kunnen zelfs verschillende keren aangewezen worden. Men controleert dus hoogstens n posten. Zodra een geval van fraude gevonden wordt, gaat men alle posten controleren. De vraag is nu hoe groot n gekozen moet worden om de risico's voldoende klein te houden. Het risico voor de accountant bestaat hier uit het niet ontdekken van fraude als er in werkelijkheid wel gefraudeerd is en men kan dus een eis stellen van de volgende vorm: als er meer dan een fractie p_0 gefraudeerd is, dient

----

1) P. DE WOLFF, Steekproeven bij administratieve controle, Statistica Neerlandica 10 (1956), 35-44.
id. Produktiviteitsverhoging bij accountantscontrole door toepassing van gelaagde steekproeven, Statistica Neerlandica 13 (1959) 215-232.

de kans dat dit niet tijdens de controle gevonden wordt hoogstens β te bedragen.

Wij zullen het probleem nu formuleren in de terminologie van de toetsingstheorie, zoals deze in hoofdstuk VI behandeld is.

Wiskundige formulering

Gegeven is een populatie van B guldens, die twee kenmerken kunnen bezitten: gefraudeerd en niet gefraudeerd. Geven wij de fractie gefraudeerde guldens aan met p, dan wordt de nulhypothese p=0 getoetst tegen de alternatieve hypothese $p > 0$. Als toetsingsgrootheid gebruiken wij het aantal gefraudeerde guldens $\underline{k}$, dat in de steekproef gevonden wordt. Aangezien het een rechtseenzijdige binomiale toets is, bestaat het kritieke gebied Z_r uit alle waarden van k, groter of gelijk aan een bepaalde waarde t_r.

Wij concluderen tot fraude en verwerpen dus de nulhypothese, zodra er één geval van fraude gevonden is. De kritieke zone Z_r bestaat dus uit alle waarden van $k \geq 1$ en $t_r = 1$. De kans op een fout van de eerste soort, dus de kans op het ten onrechte verwerpen van de nulhypothese is nul, immers

$$P\left[\underline{k} \in Z_r \mid p=0\right] = P\left[\underline{k} \geq 1 \mid p=0\right] = 0 \ . \qquad (2.1)$$

De kans op het maken van een fout van de tweede soort, dus concluderen dat er niet gefraudeerd is, terwijl het in werkelijkheid wel het geval is, vinden wij uit

$$P\left[\underline{t} \notin Z_r \mid H_1\right] = P\left[\underline{t}=0 \mid H_1\right] . \qquad (2.2)$$

Een fraude van een fractie p van het totaal bedrag B, betekent dat er p B gefraudeerde guldens zijn en (1-p) B niet gefraudeerde. Wijst men nu aselect n guldens aan, dan is de kans dat geen ervan gefraudeerd is (vgl. voorbeeld 5.7 van hoofdstuk I)

$$P_0' = \frac{\binom{pB}{0}\binom{(1-p)B}{n}}{\binom{B}{n}} = \frac{\binom{(1-p)B}{n}}{\binom{B}{n}} , \qquad (2.3)$$

wat voor n veel kleiner dan B in voldoend goede benadering gelijk is aan $(1-p)^n$. De kans op een fout van de tweede soort

$$\beta(p) = (1-p)^n \qquad (2.4)$$

is dus nog een functie van n en van p. In figuur 2.1 is het verloop van $\beta(p)$ geschetst als functie van p voor n=2, n=10 en n=100. Wij zien dat $\beta(p)$ sterk afneemt voor toenemende n en toenemende p.

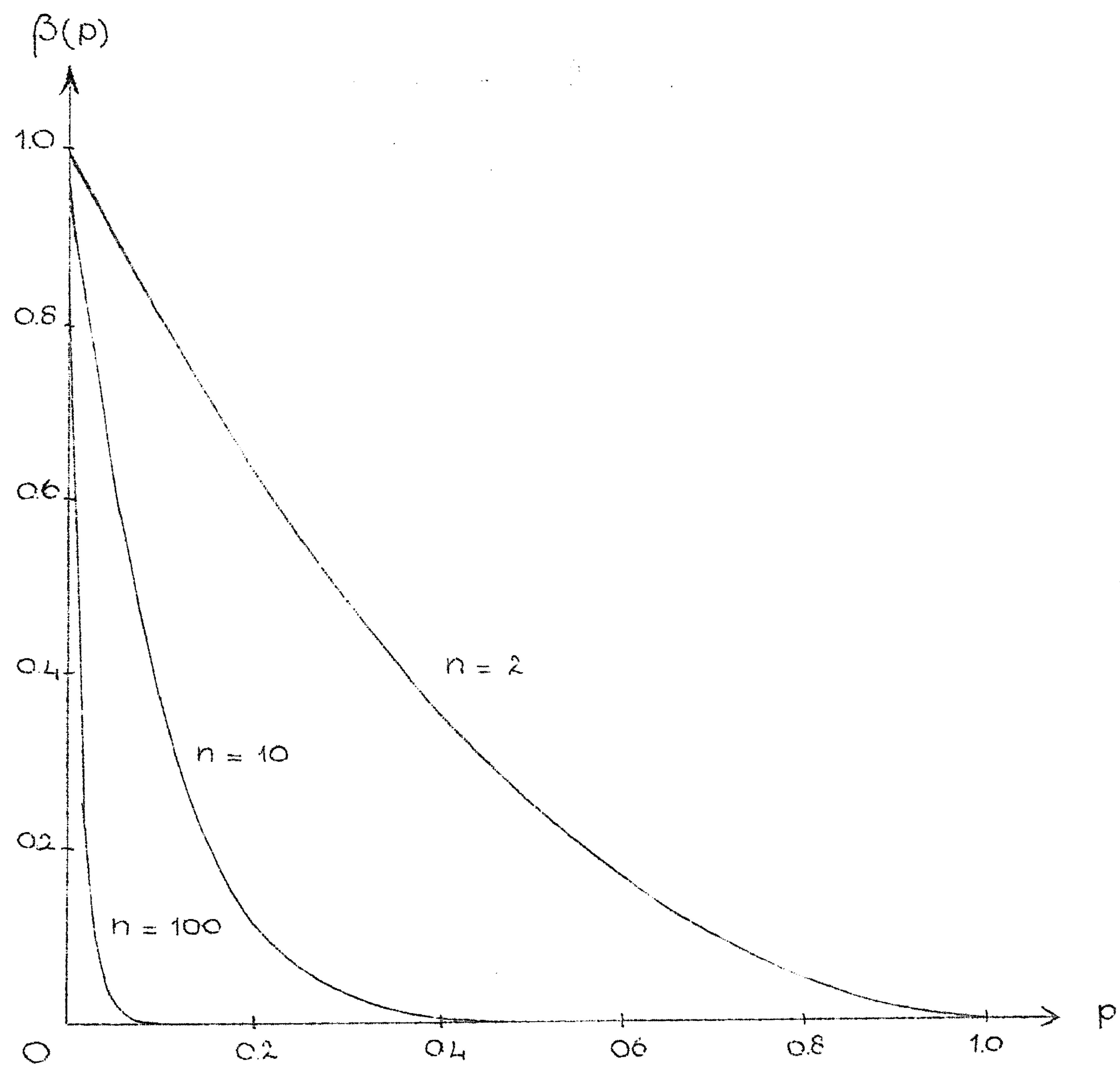

fig. 2.1

De kans op een fout van de tweede soort als functie van n en van β.

De keuze van n is nog vrij en daarvan kunnen wij gebruik maken om aan $\beta(p)$ een bepaalde eis op te leggen. Het ligt voor de hand te eisen dat een fraude groter dan de fractie p_0 slechts een kleine kans heeft niet ontdekt te worden. Bijvoorbeeld kan men stellen dat deze kans hoogstens 0,01 mag bedragen voor p_0=0,01. In dit geval moet dus gelden

$$(1-0,01)^n \leq 0,01, \tag{2.5}$$

of $n \geq 459$.

Waarden van n voor p_0=0,05; 0,01 en 0,001 en β =0,05; 0,01 en 0,001 zijn opgegeven in tabel 2.II. Men leest hieruit af dat

$\beta(p_0)$ nog aanzienlijk verlaagd kan worden zonder een al te sterke toename van n, maar dat men bij hogere eisen ten opzichte van p_0 zeer omvangrijke steekproeven moet gaan nemen.

Tabel 2.II

Waarden van n voor verschillende waarden van p_0 en $\beta(p_0)$

p_0 \ $\beta(p_0)$	0,05	0,01	0,001
0,05	59	90	135
0,01	299	459	688
0,001	2995	4603	6905

Conclusie

Wanneer wij aselect 459 guldens aanwijzen en als kritieke zone de steekproefuitkomsten met één of meer fraudes gebruiken, dan passen wij een rechtseenzijdige binomiale toets toe met onbetrouwbaarheid nul en een kans van hoogstens 0,01, dat een fraude groter dan 0,01 van het totaalbedrag niet ontdekt wordt. Nog iets anders geformuleerd: passen wij de hier beschreven controlemethode met behulp van steekproeven toe, dan zal in een lange reeks controles hoogstens 1% van de gevallen waarin meer dan 1% gefraudeerd is, niet worden ontdekt. Hierbij kan nog opgemerkt worden dat het risico van het niet ontdekken van fraude in werkelijkheid nog aanzienlijk lager ligt. (vergelijk opmerking 2.1)

Opmerkingen

2.1. Daar wij niet alleen de aangewezen guldens controleren maar de gehele posten waartoe zij behoren, wordt er veel meer gecontroleerd dan alleen de n guldens, waarvan in de formules (2.3), (2,4) en 2.5) gebruik is gemaakt. De kans op het niet ontdekken van een fraude van meer dan 1% is derhalve nog veel lager dan 0,01. Hoe klein deze kans precies is, valt zonder het maken van extra onderstellingen niet te berekenen.

2.2. De fraude is hier steeds uitgedrukt als fractie van het opgegeven totaalbedrag B. In gevallen waarin gefraudeerd is, bedraagt het totaal B', een bedrag dat kleiner is dan B. De fraude moet dan uitgedrukt worden als een fractie van B' en dus zou men in formule (2.3) met B' moeten werken in plaats van met B. Nu is een fraude-fractie p in B' gelijk aan een fraude-fractie $\frac{p}{1+p}$ in B en men zou dus in (2.4) p kunnen vervangen door $\frac{p}{1+p}$. Voor kleine waarden van p heeft deze substitutie echter slechts weinig invloed; zo zou voor p=0,01 en β=0,01 gevonden worden n=463 in plaats van n=459. Gezien het in opmerking 2.1 gezegde is deze correctie weggelaten.

2.3. In veel gevallen is van de lijst met posten niet alleen het totaalbedrag B bekend, maar zijn ook allerlei deeltotalen gemakkelijk te vinden. Het opzoeken van de aselect aangewezen guldens kan men dan vereenvoudigen door lijsten op te stellen met n aselecte getallen, die reeds naar grootte gerangschikt zijn. Hoewel het in principe mogelijk is alle controles te verrichten met één lange lijst van gerangschikte aselecte getallen, is het eenvoudiger aparte lijsten van n getallen op te stellen tussen bijvoorbeeld 0 en 10.000, tussen 0 en 15.000, enzovoorts.

2.4. Aanknopende bij opmerking 2.3 kan men het risico een fraude niet te ontdekken nog verder verkleinen door in die gevallen, waarin de sprong tussen twee in grootte opeenvolgende aselecte getallen meer is dan 1% van het totaalbedrag B, aselect een getal bij te loten tussen de twee reeds aanwezige aselecte getallen in. In het algemeen zijn hiervoor slechts enkele nieuwe aselecte getallen nodig terwijl men de mogelijkheid uitsluit, dat een fraude van meer dan 1% van B in een enkele post, niet opgemerkt wordt.

2.5. Men dient goed onderscheid te maken tussen een uitspraak in de vorm van een betrouwbaarheidsinterval, zoals bij de accuratessecontrole van belang kan zijn en een uitspraak, zoals voor de controle op fraude werd voorgesteld. Geeft men een lange reeks betrouwbaarheidsintervallen op met een onbetrouwbaarheid van 0,01, dan betekent dit dat in 1% van alle uitspraken een interval opgegeven wordt, dat de ware p niet zal bevatten. Formuleert men de conclusie met behulp van de kans op een fout van de tweede soort en zegt men dat deze voor $p \geq 0,01$ hoogstens 1% mag zijn, dan betekent dit, dat van die gevallen, waarin $p \geq 0,01$ is hoogstens 1% niet ontdekt zal worden. Gebruikt men betrouwbaarheidsintervallen, zoals in tabel 2.I zijn opgegeven voor een onbetrouwbaarheid van 10%, alleen in die situaties, waarin geen onjuistheden zijn opgetreden, dan kan men <u>niet</u> zonder meer zeggen dat de opgegeven betrouwbaarheidsintervallen in 10% van alle uitspraken de juiste waarde niet zal bevatten. Men moet dus oppassen met deze voorwaardelijke waarschijnlijkheidsuitspraken; op de vraag wat men wel kan zeggen, zullen wij hier niet ingaan.

Errata

bij

Rapport S 265 (C 13)(2e druk)

Hoofdstuk VII

pag.:	regel:	er staat:	er moet staan:
3	5 van onderen	$f(x)=\frac{1}{2}x$	$f(x)=2x$
4	2 van onderen	groter of	groter dan of
10	2 van boven	$q^{*} = 38$	$q^{*} = 88$
10	4 en 1 van onderen	a_{11}	a_1
10	4 en 1 van onderen	a_{22}	a_2
11	4,6 en 7 van boven	a_{11}	a_1
11	4,6 en 7 van boven	a_{22}	a_2
15	(1.53)	accoladen doorhalen	
15	10 van onderen	$N(p_2 \mu_2 \quad p_2 \sigma_2)$	$N(p_2 \mu_2, p_2 \sigma_2)$
17	(1.59)	$p_1^2 \ \sigma_1^2$	$p_2^2 \ \sigma_2^2$
20	13 van boven	$\geq 4,12$	$\leq 4,12$
21	3 van boven	inderval	interval
22	15 van boven	enquetes	enquêtes
28	onderschrift fig 2.1	β	p