STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk XVIII

Beslissingscriteria

door

J. Kriens

februari 1961

1. Het optimaliseren van verwachtingen

Bij zeer veel besliskundige problemen is het gebruikelijk om dat alternatief te kiezen, waarvoor de verwachting van de opbrengsten maximaal is, respectievelijk de verwachting van de verliezen minimaal. Wij pasten deze methode eveneens toe, bijvoorbeeld in de voorbeelden van hoofdstuk VIII en in hoofdstuk XI, terwijl ook de in de hoofdstukken XII t/m XIV behandelde methoden er in veel gevallen op neerkomen dat een verwachting wordt geöptimaliseerd.

In werkelijkheid wil men meestal de opbrengst zelf maximaliseren als functie van één of meer grootheden die men in de hand heeft. De relatie tussen de opbrengst en de manipuleerbare factoren is echter in veel gevallen niet definiet vastgelegd; wel is dan vaak bekend dat de opbrengst een kansverdeling volgt waarin de variabelen die de bewuste factoren voorstellen als parameters voorkomen. Een dergelijke relatie is echter op zichzelf genomen niet geschikt om de keuze te doen en daarom leidt men uit de kansverdeling een andere grootheid af, meestal de verwachting, waarmee de keuze wel gedaan kan worden.

Het kiezen van de verwachting als criterium om te optimaliseren kan gebaseerd worden op limietstellingen. Eén ter zake dienende stelling werd reeds behandeld in hoofdstuk IV, nl. stelling 1.1, die wij hier herhalen.

Stelling 1.1

Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ onderling onafhankelijk verdeelde stochastische grootheden zijn, die alle dezelfde verwachting μ en variantie σ^2 bezitten, dan convergeert het gemiddelde

$$\underline{\bar{x}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i \tag{1.1}$$

stochastisch naar μ, d.w.z. dat voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left| \underline{\bar{x}}_n - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0 \ . \tag{1.2}$$

Een andere stelling van dit type luidt:

Stelling 1.2

Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ onderling onafhankelijk verdeelde stochastische grootheden zijn met verwachtingen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ en varianties

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ en de reeks

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

convergent is, dan convergeert $\sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \mu_i)$ stochastisch naar nul, d.w.z. dat voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left| \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \right| > \varepsilon \right] = 0 . \qquad (1.3)$$

Er bestaan nog tal van andere dergelijke stellingen, waarvan de inhoud ruw geformuleerd hierop neerkomt, dat onder bepaalde voorwaarden de som van een aantal stochastische grootheden een grote kans heeft dicht te liggen bij de som van de verwachtingen van deze variabelen. Wanneer men nu een som $\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$ voor grote n wil maximaliseren, dan komt dit in deze gevallen dus op hetzelfde neer als het maximaliseren van de som van de verwachtingen en wanneer de variabelen $\underline{x}_i$ alle afhangen van verschillende parameters, dan is het laatste weer hetzelfde als het maximaliseren van alle verwachtingen afzonderlijk. Dit resultaat kan ook als volgt geformuleerd worden: als men een groot aantal beslissingen moet nemen en men baseert zich hierbij steeds op de verwachting, dan kan bij iedere beslissing afzonderlijk de verwachting aanzienlijk afwijken van het uiteindelijke resultaat, doch voor alle beslissingen tezamen zal de einduitkomst weinig van de verwachting verschillen; de bij de stellingen genoemde voorwaarden inpliceren dat er voldoend vele verwachtingen van vergelijkbare grootte dienen te zijn.

De hier gegeven fundering om verwachtingen te optimaliseren is dus een fundering hetzij op de lange duur, hetzij voor een groot aantal beslissingen die tegelijkertijd genomen moeten worden. Hoewel men, zoals gezegd, veelal op deze wijze te werk gaat, dient men toch voorzichtig te zijn. Wij zullen een aantal bezwaren noemen en aangeven op welke wijze men deze wel tracht te ondervangen.

In sommige gevallen leidt het maximaliseren van de winstverwachting tot uiterst merkwaardige resultaten. Een even oud als bekend voorbeeld hiervan is de zogenaamde <u>Petersburgse Paradox</u>, welke afkomstig is van J. BERNOULLI.

In een gokspel zijn verschillende uitkomsten mogelijk met bekende kansen van optreden. Er zijn twee spelers en er is een bepaalde regel die voorschrijft wie aan wie wat moet betalen, wanneer een bepaalde uitkomst is opgetreden. Het spel is eerlijk, wanneer beide spelers dezelfde winstverwachting hebben. Stel nu dat een zuivere munt wordt opgegooid totdat er voor de eerste keer munt bovenkomt. Speler I ontvangt 2^n van speler II, wanneer dit gebeurt in de n^{de} worp. Tijdens het spel krijgt II nooit iets van I terug, maar hier staat tegenover dat I vooraf een som zal betalen aan II. De vraag is nu, hoeveel I aan II moet geven, opdat het spel eerlijk is, dus de winstverwachtingen gelijk zijn.

De kans dat in de n^{de} worp voor het eerst munt boven komt is $(\frac{1}{2})^n$ (vgl. voorbeeld 5.9 uit hoofdstuk I) en de winstverwachting van I is dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n . 2^n ,$$

hetgeen oneindig groot is. Wanneer men zich dus op de winstverwachting in geld baseert, dan zou I bereid moeten zijn om een willekeurig grote som aan II te geven, teneinde het spel met II te kunnen spelen!

Ter oplossing van deze paradox stelde BERNOULLI dat niet gekeken moest worden naar de winstverwachting in geld, maar naar de verwachting van de waarde die men aan deze geldsbedragen toekent. Het ligt voor de hand aan te nemen dat men aan geld minder waarde hecht naarmate men er meer van heeft; "het nut" van geld neemt niet evenredig met de hoeveelheid geld toe. Een functie die dit verband kan aangeven is de logaritme en BERNOULLI stelde dan ook het nut van x gulden gelijk aan log x. De verwachting van het te verwerven nut bij bovenstaand spel is dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n \log 2^n ,$$

welke reeks wel convergeert naar een eindige waarde.

Behalve de logaritme zijn er ook tal van andere functies die voor toenemende waarde van het argument steeds langzamer toenemen, zodat het vrij willekeurig is om de logaritme te nemen. Er zijn dan ook tal van theoretische en enkele experimentele studies verricht om de gedaante van deze krommen, zogenaamde "utility functions" te vinden. Op een bepaalde wijze van benaderen zullen wij verderop nog terugkomen. Nutfuncties, waardoor het menselijk handelen in alle opzichten bevredigend verklaard kan worden, zijn tot nu toe niet gevonden, terwijl ook het probleem over het maximaliseren van verwachtingen er niet mee wordt opgelost, getuige het volgende van D. VAN DANTZIG afkomstige voorbeeld.[1]

Iemand kan een spel spelen waarin hij met kans $q=1-p$ twee wint en met kans p $\frac{q}{p}$ verliest; winst en verlies zijn uitgedrukt in verschillen aan nut voor en na het spel. De verwachting van het nut is dus

$$\mu(p) = p(-\tfrac{q}{p}) + q.2 = q \quad . \tag{1.4}$$

Wij onderstellen dat de speler p vrij mag kiezen mits hij van te voren het bedrag deponeert dat hij moet betalen als hij verliest. Wanneer zijn kapitaal F bedraagt kan hij dus de nutverwachting maximaliseren onder de voorwaarde

$$\frac{q}{p} \leqq F \quad . \tag{1.5}$$

De "optimale" waarde van p is dan $p^* = \frac{1}{F+1}$ en als de speler verliest is hij geruïneerd. Wordt dit spel op deze wijze een aantal keren achter elkaar gespeeld en is het kapitaal na n keer spelen $\underline{F}_n$, dan is zowel dit kapitaal als de optimale kans $\underline{p}_n^*$ bij het n^{de} spel stochastisch. Bij een beginkapitaal F_0 is de kans om vanaf het begin n keer te winnen gelijk aan

$$\prod_{k=1}^{n}(1-p_k^*) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{F_{k-1}+1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{F_0+2k-1}\right), \tag{1.6}$$

welke kans voor $n\to\infty$ naar nul convergeert. Als de speler één keer verliest, is hij voor goed verloren, omdat vanaf dat ogenblik geldt $F_n=0$, dus $q_{n+1}^*=q_{n+2}^*=\ldots=0$. Wij zien dus dat het optimaliseren van de verwachting leidt tot een spelwijze, waarbij men met kans één op de duur failliet gaat. Maximaliseert men daarentegen niet de verwachting, doch kiest men voor p_n een andere waarde dan de "optimale", bijvoorbeeld

$$p_n = \frac{1}{1+2^{-n}F_0}\ , \tag{1.7}$$

dan verliest men in n spelen hoogstens

----

1) D. VAN DANTZIG, Sur quelques questions de la théorie mathématique du choix pondéré, Rapport SP 69 van het Mathematisch Centrum (1959).

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{p_k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.F_0 \;, \tag{1.8}$$

hetgeen kleiner is dan F_0, zodat men in een eindig aantal spelen nooit failliet kan gaan. Bovendien is de winstverwachting

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{-k}.F_0}{1+2^{-k}F_0} = F_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_0+2k} \;, \tag{1.9}$$

welke waarde altijd positief is en voor kleine F_0 ongeveer F_0 bedraagt. Er zijn dus wel bruikbare strategieën, maar door de verwachting te maximaliseren worden ze niet gevonden.

Hoewel het hier gegeven voorbeeld zeer extreem is, kan een dergelijke situatie zich ook in andere gevallen voordoen. Het zijn situaties, waarin men teneinde de winstverwachting te maximaliseren gedwongen wordt zeer grote risico's te nemen. Men kan zich hiertegen beschermen door te eisen dat bepaalde risico's niet of slechts met zeer kleine kans kunnen voorkomen. Dit is onder andere gedaan in voorbeeld 1.4 van hoofdstuk VII.

Een tweede bezwaar tegen het optimaliseren van winstverwachtingen betreft situaties, waarin de in het begin van deze paragraaf genoemde limietstellingen geen betekenis hebben. Hoofdzakelijk is dit het geval, wanneer slechts één of een beperkt aantal beslissingen genomen moeten worden, omdat dan in het geheel niet behoeft te gelden dat bijvoorbeeld $\underline{x}_1+\underline{x}_2+\underline{x}_3$ met grote kans dicht bij de verwachtingswaarde $\mathcal{E}\underline{x}_1+\mathcal{E}\underline{x}_2+\mathcal{E}\underline{x}_3$ zal liggen. Men kan dan trachten een andere fundering te geven, hetgeen onder andere gedaan is door VON NEUMANN en MORGENSTERN[1] en door LUCE en RAIFFA[2].

Bij deze funderingen wordt uitgegaan van een bepaalde consistentie in de voorkeuren van diegene die moet kiezen. De formulering van deze consistentie geschiedt door middel van axiomastelsels, die bij verschillende auteurs in details uiteenlopen, doch waarvan de belangrijkste axioma's vrijwel overeenkomen. De axioma's beschrijven het gedrag van de mensen bij de keuze tussen alternatieven. Hier-

---

1) J. VON NEUMANN en O. MORGENSTERN, Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton University Press, Princeton, 1ste druk 1944, 2de druk 1947.

2) R.D. LUCE en H. RAIFFA, Games and Decisions, John Wiley and Sons, New York, 1957.

bij kan een alternatief zijn een bepaalde opbrengst, doch ook een zogenaamde loterij, dat is een kansmechanisme dat verschillende opbrengsten met gegeven kansen kan aanwijzen. Bijvoorbeeld kan men moeten kiezen tussen alternatief A: ƒ 100.- ontvangen,en alternatief B: een loterij die met kans $\frac{1}{5}$ ƒ 200.- opbrengt en met kans $\frac{4}{5}$ ƒ 50.-. De loterijen behoeven zich niet te beperken tot twee mogelijke uitkomsten, terwijl deze uitkomsten ook weer nieuwe loterijen mogen zijn. De uiteindelijke alternatieven waaruit de loterijen bestaan, noemt men de basisalternatieven.

De belangrijkste axioma's luiden nu (ruwweg geformuleerd):

I Elk tweetal alternatieven is vergelijkbaar, d.w.z. als twee alternatieven A en B gegeven zijn, kan medegedeeld worden, welke de voorkeur heeft of dat ze gelijkwaardig zijn.

II De voorkeurrelaties zijn transitief, d.w.z. als A de voorkeur heeft boven B en B de voorkeur boven C, dan heeft ook A de voorkeur boven C.

III Wanneer twee loterijen beide dezelfde twee uitkomsten kunnen geven, dan heeft de loterij die aan de uitkomst met de grootste voorkeur de grootste kans toekent, zelf ook de voorkeur boven de andere loterij.

IV Wanneer A de voorkeur heeft boven B en B boven C, dan bestaat er een loterij, waarin de uitkomsten A en C zulke kansen bezitten, dat deze loterij gelijkwaardig is met B.

Uitgaande van deze vier axioma's en nog enkele andere kan men voor de basisalternatieven, waartussen gekozen kan worden, een nutfunctie opstellen met de eigenschap dat het maximaliseren van de verwachting van het volgens deze functie te verwerven nut precies leidt tot het aanwijzen van dat alternatief, waarin men in werkelijkheid de voorkeur geeft. Deze theorieën zijn op allerlei wijzen uitgewerkt en becritiseerd; het reeds genoemde boek van LUCE en RAIFFA geeft hiervan een uitstekend overzicht. Het belangrijkste bezwaar dat men kan maken is dat in de praktijk het menselijk handelen niet aan de genoemde axioma's voldoet. Bovendien is het vrijwel steeds praktisch onmogelijk vast te stellen hoe groot de in axioma IV genoemde kansen voor de verschillende mensen zijn.

Resumerende kunnen wij vaststellen dat het maximaliseren van verwachtingen in veel gevallen het minst slechte is wat men kan doen, terwijl deze werkwijze goed te verdedigen valt, wanneer men te doen heeft met een groot aantal min of meer vergelijkbare beslissingen, wanneer de kansen door middel van ervaring of experimenten goed geschat kunnen worden en wanneer de voor- en nadelen van de verschillende alternatieven in dezelfde eenheid (bijvoorbeeld geld) uitgedrukt kunnen worden.

2. Het minimaxcriterium

Onder de voorwaarden die vervuld moeten zijn, wil men de mathematische verwachting als beslissingscriterium kunnen gebruiken, valt de eis dat de kansen waarmee de verschillende situaties op kunnen treden, bekend moeten zijn. In veel gevallen zijn deze kansen echter in het geheel niet bekend en dan is men genoodzaakt een ander criterium te gebruiken. Een mogelijk ander criterium is het zogenaamde minimaxcriterium, dat het best geïllustreerd kan worden aan de hand van de strategische speltheorie.

Het is niet mogelijk de theorie van de strategische spelen in kort bestek volledig te behandelen. Wij zullen ons daarom beperken tot het invoeren van de voornaamste begrippen, het geven van enkele belangrijke stellingen en een voorbeeld.

Naast de zuivere kansspelen bestaan er spelen, waarin de spelers zelf invloed uit kunnen oefenen op het resultaat, zoals bridge en het schaakspel. Dit type spelen noemt men strategische spelen. Zij bezitten een grote overeenkomst met allerlei situaties uit het dagelijks leven, waarin twee of meer partijen met elkaar in conflict zijn.

Een zeer eenvoudig strategisch spel is het spel, waarin twee personen onafhankelijk van elkaar een getal aangeven en waarin het van de combinatie van deze getallen afhangt hoeveel de één de ander moet betalen. Bij iedere combinatie van getallen is de som van de bedragen die beide spelers ontvangen dus nul; een spel waarvoor deze eigenschap geldt en waaraan, zoals in dit geval twee personen deelnemen is een twee personen nulspel. Laten wij aannemen dat de ene speler (I) kan kiezen uit de getallen 1, 2 en 3 en de andere (II) uit de getallen 1, 2, 3 en 4. Tabel 2.I geeft aan hoeveel guldens II na afloop aan I moet betalen. Wijst I dus het getal 2 aan en II het getal 3, dan ontvangt I na afloop ƒ 1.--; wijst I echter eveneens het getal 3 aan, dan ontvangt hij -ƒ 1.--, m.a.w.

hij moet II ƒ 1.-- betalen; enz.

Tabel 2.I

De winstfunctie

I \ II	1	2	3	4
1	3	5	0	-5
2	4	2	1	2
3	-2	0	-1	3

Iedere speelwijze die I of II kan kiezen, noemen wij een strategie. Wij geven de strategieën aan met x voor I en met y voor II; in het voorbeeld kan x dus de waarden 1, 2 en 3 aannemen en y de waarden 1, 2, 3 en 4. De functie die aangeeft hoeveel II na afloop aan I moet betalen noemen wij de winstfunctie; de notatie is $M(x,y)$, zo is $M(1,4)=-5$. Een spel, waarin beide spelers slechts uit eindig veel strategieën kunnen kiezen, is een eindig of rechthoekig spel.

De vraag rijst nu of het mogelijk is redelijke strategieën te vinden voor de deelnemers.

Wanneer I strategie 1 speelt, zal hij, afhangend van de keuze welke II doet, 3, 5, 0 of -5 ontvangen. De slechtste uitkomst is dan voor I: -5. Als hij het getal 2 kiest, is de slechtste uitkomst +1 en als hij het getal 3 kiest -2. Nu kan I besluiten die strategie te nemen, waarbij het bedrag dat hij minimaal ontvangt zo groot mogelijk is; hij moet dan het getal 2 aanwijzen. In het algemeen kan men deze strategie vinden door eerst voor iedere waarde van x het minimum van $M(x,y)$ te berekenen en vervolgens te bepalen voor welke waarde van x de functie $\min_{y} M(x,y)$ maximaal is.

Daarentegen zal II zich wellicht op het standpunt stellen, dat hij het bedrag dat hij hoogstens moet betalen, zo klein mogelijk moet trachten te maken. Hij berekent dan voor ieder van de getallen 1, 2, 3 en 4 de maxima van de eventueel te betalen bedragen en kiest dan die strategie, waarvoor dit maximum minimaal is, met andere woorden hij kiest die strategie, waarvoor $\max_{x} M(x,y)$ minimaal is. In ons geval is $\max_x M(x,1) = 4$, $\max_x M(x,2) = 5$, $\max_x M(x,3) = 1$ en $\max_x M(x,4) = 3$; het minimum over y is dus 1 en het wordt bereikt vóór y=3. Men noemt deze methode, waarbij men het maximaal mogelijke verlies minimaliseert de <u>minimaxmethode</u>.

In het voorbeeld is $\max_x \min_y M(x,y)=1$ en $\min_y \max_x M(x,y)=1$. Speler I kan er dus voor zorgen, dat hij minstens ƒ 1.-- ontvangt en speler II kan er voor zorgen, dat I niet meer dan ƒ 1.-- krijgt. Er kan dus geen strategie voor I bestaan, die hem een hogere winst garandeert dan ƒ 1.--, zodat dus iedere strategie die de mogelijkheid geeft op een winst groter dan ƒ 1.-- ook de mogelijkheid van een kleinere winst inhoudt. Voor II gelden soortgelijke overwegingen en men kan daarom zeggen dat de strategieën 2 voor I en 3 voor II in dit opzicht optimaal zijn.

Voor spelen, waarvan de winstfunctie M(x,y) de eigenschap bezit, dat

$$\max_x \min_y M(x,y) = \min_y \max_x M(x,y) \qquad (2.1)$$

is, kan men op de aangegeven wijze dus redelijke strategieën voor de spelers construeren. Wij noemen de corresponderende strategieën <u>de optimale strategieën</u> van I en II.

<u>Het kruis of munt-spel</u>

Dat niet alle winstfuncties aan de relatie (2.1) voldoen kunnen wij illustreren aan de hand van het kruis of munt-spel. De spelers leggen hierin onafhankelijk van elkaar een munt op tafel. Blijken beide munten met dezelfde kant boven te liggen, dan ontvangt I ƒ 1.-- van II, terwijl in het andere geval II ƒ 1.-- van I ontvangt. Beide spelers kunnen in dit spel uit twee strategieën kiezen, nl. kruis of munt bovenleggen. De winstfunctie is vermeld in tabel 2.II.

<u>Tabel 2.II</u>

<u>Winstfunctie in het kruis of munt-spel</u>

I \ II	K	M
K	1	-1
M	-1	1

In dit spel is $\max\limits_x \min\limits_y M(x,y)=-1$ en $\min\limits_y \max\limits_x M(x,y)=+1$ en er geldt dus: $\max\limits_x \min\limits_y M(x,y) < \min\limits_y \max\limits_x M(x,y)$.

Wij bewijzen nu de volgende stelling:

<u>Stelling 2.1</u>:

Zijn X en Y twee gegeven verzamelingen, zij $f(x,y)$ gedefinieerd voor $x \in X$ en $y \in Y$ en bestaan $\max\limits_x \min\limits_y f(x,y)$ en $\min\limits_y \max\limits_x f(x,y)$, dan is

$$\max_x \min_y f(x,y) \leqq \min_y \max_x f(x,y) \quad . \qquad (2.2)$$

<u>Bewijs</u>:

Voor iedere x uit X en iedere y uit Y geldt

$$\min_y f(x,y) \leqq f(x,y) \leqq \max_x f(x,y) \quad . \qquad (2.3)$$

Vergelijken wij nu $\min\limits_y f(x,y)$ en $\max\limits_x f(x,y)$, dan zien wij, dat in

$$\min_y f(x,y) \leqq \max_x f(x,y) \qquad (2.4)$$

het linkerlid onafhankelijk is van y en het rechterlid onafhankelijk van x. Bovendien geldt (2.4) voor iedere waarde van x en iedere waarde van y. De ongelijkheid blijft daarom juist als wij het maximum over x en het minimum over y nemen en dus is

$$\max_x \min_y f(x,y) \leqq \min_y \max_x f(x,y) \quad . \qquad (2.2)$$

Wij passen deze stelling toe op de winstfunctie $M(x,y)$. Wanneer wij $\max\limits_x \min\limits_y M(x,y)$ aangeven met λ_G en $\min\limits_y \max\limits_x (x,y)$ met ν_G, dan geldt dus voor ieder spel dat aan de in stelling 2.1 genoemde eisen voldoet

$$\lambda_G \leqq \nu_G \quad . \qquad (2.5)$$

Dit wordt geïllustreerd in figuur 2.1; I kan er voor zorgen dat hij minstens λ_G ontvangt, II kan zijn strategie zo kiezen dat de winst van I in ieder geval kleiner is dan ν_G.

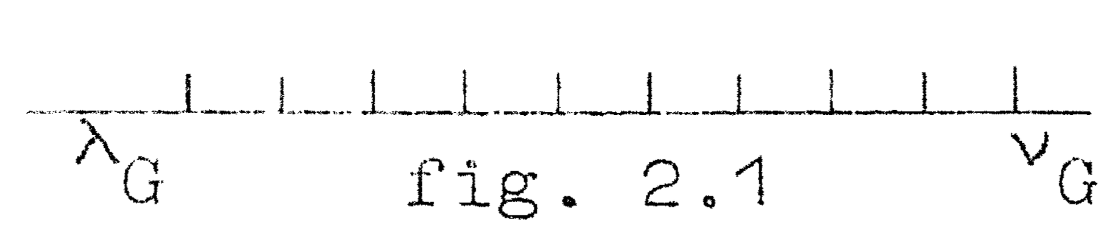

fig. 2.1

<u>Bedrag dat I ontvangt</u>

In een geval zoals het voorbeeld in paragraaf 1, waarin $\lambda_G = \nu_G$ is, noemen wij dit bedrag de <u>waarde</u> van het spel. Wanneer inderdaad $\lambda_G < \nu_G$ is en het voor I dus niet vaststaat dat II hem kan beletten meer dan λ_G te winnen, is nog niet in te zien, dat de max min strategie voor I een redelijke strategie is. Hetzelfde geldt voor de min max strategie voor II. Voor dit type spelen hebben wij dus nog geen goede oplossing gevonden.

Een variatie op het kruis of munt-spel is het spel, waarin I eerst zijn munt moet neerleggen en II pas, nadat hij gezien heeft welke strategie I heeft gekozen. I kan weer kiezen uit twee strategieën, doch II heeft meer mogelijkheden gekregen, omdat hij zijn strategie kan laten afhangen van hetgeen I heeft gedaan. Geven wij kruis aan met K, munt met M en stelt (i, j) de strategie voor van II, waarbij hij i kiest als I kruis boven legt en j als I munt boven legt, dan kan II kiezen uit de strategieën: (K,K), (K,M), (M,K) en (M,M). Als er gelijke zijden boven komen te liggen ontvangt I ƒ 1.-- van II en anders II ƒ 1.-- van I. Tabel 2.III bevat de winstfunctie van dit spel. Hier geldt wel $\max_x \min_y M(x,y) = \min_y \max_x M(x,y)$; de waarde van het spel is -1.

Tabel 2.III

Winstfunctie in het kruis of munt-spel met spionneren

I \ II	(K,K)	(K,M)	(M,K)	(M,M)
K	1	1	-1	-1
M	-1	1	-1	1

In vergelijking met het gewone kruis of munt-spel is de situatie voor I slechter geworden, want II kan zó spelen, dat I steeds ƒ 1.-- aan II moet betalen. Dit komt uiteraard doordat II volledig is ingelicht over hetgeen I heeft gedaan. Doch ook in het kruis of munt-spel zonder spionneren loopt I het risico, dat II in een reeks van spelen de speelwijze, die I toepast, doorziet en dan kan II steeds zijn winst maximaal maken door het tegenovergestelde te doen van wat I speelt. Hetzelfde risico loopt ook de tweede speler. Het is daarom voor beide spelers van belang hun strategie voor de ander te verbergen. Zij kunnen dit doen door in achtereenvolgende spelen op niet-systematische wijze K of M boven te leggen. Een hulpmiddel hiertoe is een kansmechanisme, dat voor ieder afzonderlijk spel met een bepaalde kans aangeeft of K, dan wel M gespeeld moet worden. De spelers kiezen dan niet meer een strategie voor ieder afzonderlijk spel, doch zij kiezen de kansverdeling, volgens welke de strategie in een bepaald spel wordt aangewezen.

Alvorens hier dieper op in te gaan, zullen wij dit principe uitwerken voor het kruis of munt-spel. Stel dat I een zodanig kansmechanisme kiest, dat de strategie K met kans α optreedt, de strategie M dus met kans $1-\alpha$ en dat II een kansmechanisme kiest, zodanig dat de strategie K met kans β en de strategie M dus met kans $1-\beta$ optreedt. Aangezien I en II de strategieën onafhankelijk van elkaar kiezen bedraagt de kans dat beide K kiezen $\alpha\beta$, de kans dat I K en II M kiest $\alpha(1-\beta)$, de kans dat I M en II K kiest $(1-\alpha)\beta$ en de kans dat beide M kiezen $(1-\alpha)(1-\beta)$. Als de winstfunctie per spel de in tabel 2.II vermelde is, dan is de winstverwachting voor I dus

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta) = \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) - \alpha(1-\beta) - \beta(1-\alpha) \qquad (2.6)$$

Ook in dit spel kan I nagaan hoe groot de winstverwachting is, die hij minimaal heeft voor een bepaalde α en dan α zodanig kiezen dat deze minimale winstverwachting maximaal is. Hij moet dan berekenen voor welke waarde van α de functie $\min\limits_{\beta} \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ het maximum bereikt. Nu is

$$\min_{\beta} \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \min_{\beta} \left[1-2\alpha+2\beta(2\alpha-1)\right] = \begin{cases} 2\alpha-1 & \text{voor } 2\alpha-1 \leqq 0 \\ 1-2\alpha & \text{voor } 2\alpha-1 \geqq 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

en dus is

$$\max_{\alpha} \min_{\beta} \mathcal{M}(\alpha, \beta) = 0 \qquad (2.8)$$

een maximum dat bereikt wordt voor $\alpha = \frac{1}{2}$ (vgl. fig. 2.2a).

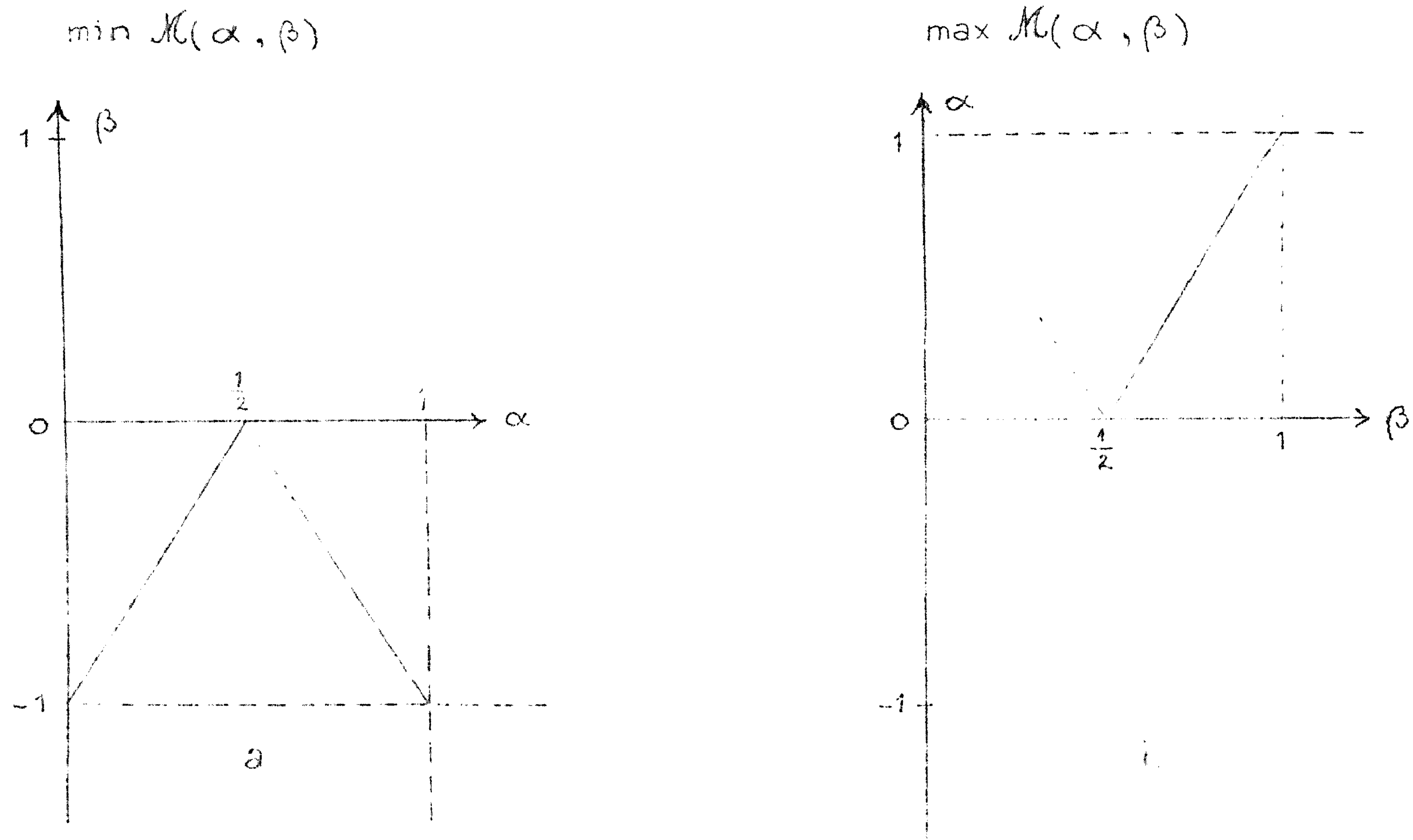

fig. 2.2

<u>De functies $\min\limits_{\beta} \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ en $\max\limits_{\alpha} \mathcal{M}(\alpha, \beta)$</u>

Evenzo zal II eerst $\max\limits_{\alpha} \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ bepalen en vervolgens β zodanig kiezen dat deze functie maximaal is. Uit

$$\max_{\alpha} \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \max_{\alpha} \left[1-2\beta + 2\alpha(2\beta - 1)\right] = \begin{cases} 1-2\beta \text{ voor } 2\beta - 1 \leqq 0 \\ 2\beta - 1 \text{ voor } 2\beta - 1 \geqq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

volgt $\min\limits_{\beta} \max\limits_{\alpha} \mathcal{M}(\alpha, \beta) = 0$ (vgl. fig. 2.2b). Voor dit nieuwe spel waarin de spelers via een kansmechanisme bepalen welke van de strategieën K of M zij in een bepaald spel spelen, geldt dus dat $\max\limits_{\alpha} \min\limits_{\beta} \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \min \max \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ is.

De strategieën β en α van dit nieuwe spel worden <u>gemengde strategieën</u> genoemd van het oude kruis of munt-spel, omdat zij, tenzij α en β nul of één zijn, ertoe leiden dat de spelers soms K, soms M spelen. Door zo'n gemengde strategie toe te passen kan I de winstverwachting die hij in ieder geval kan bereiken, verhogen van -1 tot 0; II kan door het toepassen van een gemengde strategie beletten dat de winstverwachting van I groter is dan nul. Hieruit volgt dat iedere gemengde strategie van I, die de mogelijkheid opent tot een winst, die gemiddeld groter is dan 0, ook de mogelijkheid inhoudt van een winst die gemiddeld lager is dan nul.

Zo kan de winstverwachting van I positief zijn als I in gemiddeld een derde deel van het aantal spelen K speelt ($\alpha = 1/3$), doch ook negatief; dit zal afhangen van de waarde van β die II kiest. Wij kunnen daarom zeggen dat de gemengde strategie $\alpha = \frac{1}{2}$ voor I optimaal is. Op geheel analoge gronden kunnen wij de strategie $\beta = \frac{1}{2}$ optimaal noemen voor II.

Vervolgens zullen wij voor willekeurige twee personen nulspelen onderzoeken wat de konsekwenties zijn van het invoeren van gemengde strategieën.

Daartoe nemen wij aan dat X de verzameling van strategieën is waaruit I kan kiezen. Een element hieruit geven wij aan met x. Een gemengde strategie ξ voor I is een kansverdeling op de verzameling X. Evenzo is een gemengde strategie voor II een kansverdeling η op de ruimte Y van strategieën, waaruit II kan kiezen. Voorlopig nemen wij aan dat X en Y slechts eindig veel elementen bevatten. De kans waarmee het element x gekozen wordt kunnen wij dan aangeven met $\xi(x)$ en de kans waarmee het element y gekozen wordt met $\eta(y)$. Moet II, wanneer I x en II y kiest het bedrag $M(x,y)$ aan I betalen, dan is de winstverwachting voor I, wanneer I de gemengde strategie ξ en II de gemengde strategie η speelt, gelijk aan

$$\mathcal{M}(\xi, \eta) = \sum_x \sum_y M(x,y)\, \xi(x)\, \eta(y) \tag{2.10}$$

De spelers kunnen nu de te kiezen gemengde strategie bepalen op dezelfde wijze als in de voorafgaande voorbeelden. De eerste speler zal dan voor iedere gemengde strategie ξ bepalen hoe groot het minimum van de winstverwachting is en dan die ξ kiezen, waarvoor $\min \mathcal{M}(\xi, \eta)$ het maximum bereikt. Hij berekent dus de grootheid

$$\lambda_\Gamma = \max_\xi \min_\eta \mathcal{M}(\xi, \eta) \tag{2.11}$$

en kiest die ξ, waarvoor λ_Γ wordt bereikt. [1)]
Evenzo kan II die η kiezen, waarvoor het maximum over ξ minimaal is; de bijbehorende winstverwachting van I is dan

----

1) Omdat ξ en η kansverdelingen zijn op eindige verzamelingen worden alle extremen ook werkelijk bereikt.

$$\nu_\Gamma = \min_\eta \max_\xi \mathcal{M}(\xi, \eta) \tag{2.12}$$

Wij gaan nu na wat het verband is tussen $\lambda_G, \nu_G, \lambda_\Gamma$ en ν_Γ. Daartoe voeren wij nog een nieuwe notatie in. Speler I kan voor ξ de kansverdeling kiezen, die met kans één de strategie x_o aanwijst en de andere strategieën dus met kans nul. De winstverwachting bedraagt dan $\sum_x \sum_y M(x,y)\,\xi(x)\,\eta(y) = \sum_y M(x_o,y)\,\eta(y)$, waarvoor wij schrijven $\mathcal{M}(x_o, \eta)$. Voor de winstverwachting die correspondeert met een willekeurige kansverdeling ξ voor I en de kansverdeling, die met kans één strategie y_o aanwijst voor II, schrijven wij $\mathcal{M}(\xi, y_o) = \sum_x M(x,y_o)\,\xi(x)$.

Wij bewijzen de volgende stelling:

<u>Stelling 2.2</u>

Bevatten de verzamelingen X en Y van mogelijke strategieën voor I, respectievelijk II eindig veel elementen, dan is

$$\min_\eta \mathcal{M}(\xi, \eta) = \min_y \mathcal{M}(\xi, y) \quad \text{en} \quad \lambda_G \leqq \lambda_\Gamma \tag{2.13}$$

en

$$\max_\xi \mathcal{M}(\xi, \eta) = \max_x \mathcal{M}(x, \eta) \quad \text{en} \quad \nu_G \geqq \nu_\Gamma \tag{2.14}$$

<u>Bewijs</u>:

Voor iedere ξ en η is

$$\mathcal{M}(\xi, \eta) = \sum_y \mathcal{M}(\xi, y)\,\eta(y) \geqq \min_y \mathcal{M}(\xi, y) .$$

Omdat deze betrekking voor iedere η geldt, is zij ook juist voor het minimum van $\mathcal{M}(\xi, \eta)$ over η en dus is

$$\min_\eta \mathcal{M}(\xi, \eta) \geqq \min_y \mathcal{M}(\xi, y) . \tag{2.15}$$

Onder de verzameling van alle mogelijke η's vallen ook die η's, die met kans 1 een bepaalde strategie y aanwijzen, waaruit voor iedere y volgt

$$\min_\eta \mathcal{M}(\xi, \eta) \leqq \mathcal{M}(\xi, y)$$

en dus

$$\min_{\eta} \mathcal{M}(\xi, \eta) \leqq \min_{y} \mathcal{M}(\xi, y). \qquad (2.16)$$

Uit de combinatie van (2.15) en (2.16) volgt

$$\min_{\eta} \mathcal{M}(\xi, \eta) = \min_{y} \mathcal{M}(\xi, y),$$

waarmee het eerste gedeelte van (2.13) is bewezen. Wanneer wij voor ξ de kansverdeling substitueren, die met kans 1 de strategie x aanwijst, dan vinden wij

$$\min_{y} M(x,y) = \min_{\eta} \mathcal{M}(x, \eta).$$

Deze betrekking geldt voor iedere x en dus ook voor het maximum over x, zodat geldt

$$\max_{x} \min_{y} M(x,y) = \max_{x} \min_{\eta} \mathcal{M}(x, \eta).$$

Het linker lid hierin is gelijk aan λ_G. Het rechter lid vergelijken wij met $\lambda_\Gamma = \max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{M}(\xi, \eta)$; λ_Γ is het maximum van $\min_{\eta} \mathcal{M}(\xi, \eta)$ over alle verdelingsfuncties ξ op de verzameling X. Hieronder komen de verdelingen voor die met kans één een bepaalde x aanwijzen. Dit betekent dat voor λ_Γ de functie $\min_{\eta} \mathcal{M}(\xi, \eta)$ gemaximaliseerd wordt over een grotere klasse van verdelingsfuncties dan in $\max_{x} \min_{\eta} \mathcal{M}(x, \eta)$ en dus is $\lambda_G \leqq \lambda_\Gamma$.

Het tweede deel van de stelling wordt op dezelfde manier bewezen.

Deze stelling heeft men niet alleen nodig voor het berekenen van optimale oplossingen, maar wij kunnen er ook het gezochte verband tussen $\lambda_G, \nu_G, \lambda_\Gamma$ en ν_Γ uit afleiden. De functie $\mathcal{M}(\xi, \eta)$ voldoet aan de voorwaarden genoemd in stelling 2.1 en dus is

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{M}(\xi, \eta) \leqq \min_{\eta} \max_{\xi} \mathcal{M}(\xi, \eta)$$

of

$$\lambda_\Gamma \leqq \nu_\Gamma$$

Samen met stelling 2.2 volgt hieruit de betrekking

$$\lambda_G \leqq \lambda_\Gamma \leqq \nu_\Gamma \leqq \nu_G . \qquad (2.17)$$

Hieruit blijkt dat de verwachting van de winst die I in ieder geval kan bereiken door het toepassen van gemengde strategieën wel hoger, maar nooit lager kan worden. Evenzo kan II met behulp van gemengde strategieën beletten, dat de verwachting van de winst die I kan bereiken groter is dan ν_Γ, een bedrag dat kleiner of gelijk is aan ν_G. Dat beide spelers hun situatie inderdaad kunnen verbeteren door gemengde strategieën toe te passen is reeds gebleken in het eerder genoemde kruis of munt-spel. Ongelijkheid (2.17) leert ons bovendien dat voor gevallen, waarin $\lambda_G = \nu_G$ is, ook $\lambda_\Gamma = \nu_\Gamma$ is.

Het introduceren van gemengde strategieën is nu daarom van veel belang omdat men de volgende stelling kan bewijzen.

<u>Stelling 2.3</u>:

In ieder eindig twee personen nulspel is

$$\lambda_\Gamma = \nu_\Gamma \tag{2.18}$$

en bezitten de spelers optimale strategieën.

Men noemt deze stelling <u>de hoofdstelling van de speltheorie</u>. Zij betekent dat de winstverwachting, waarvan I zich in ieder geval kan verzekeren gelijk is aan de verliesverwachting, die II hoogstens behoeft te accepteren. Op grond van deze stelling kunnen wij dus ook optimale oplossingen vinden voor eindige spelen, waarin $\lambda_G < \nu_G$ is. Het besproken kruis of munt-spel is er een voorbeeld van.

Het bewijs van deze stelling vergt nogal wat voorbereiding en zal daarom achterwege worden gelaten. Duidelijke bewijzen zijn onder andere te vinden in de boeken van Mc KINSEY [1] en van VAJDA [2].

Tot nu toe hebben wij ons beperkt tot spelen waarin X en Y beide slechts eindig veel elementen bevatten. Men kan echter ook spelen bedenken, waarin X en/of Y oneindig veel elementen bevatten. Zo zullen wij bij de toepassingen een voorbeeld geven waarin de strategieën van I en II de punten uit het interval [0 - 1] zijn.

Onder bepaalde voorwaarden, die in praktijkproblemen vrijwel steeds vervuld zijn, gelden de stellingen 2.2 en 2.3 ook voor

----

1) J.C.C. Mc KINSEY, Introduction to the Theory of Games, Mc Graw Hill, New York (1952).

2) S. VAJDA, Theory of Games and Linear Programming, Methuen and Co's, Londen (1956).

strategische spelen, waarin X en Y niet beide eindig veel elementen bevatten. Wij zullen hierop niet nader ingaan.

Voorbeeld 2.1

Hoewel de speltheorie vooral ontwikkeld is met de bedoeling economische conflictsituaties te onderzoeken, zijn de meeste toepassingen te vinden in de krijgswetenschappen. Een reeks artikelen hierover is gepubliceerd in Operations Research, het tijdschrift van de Operations Research Society of America. Zeer instructief is een artikel van O.G. HAYWOOD Jr [1].

De auteur vergelijkt hierin de wijze van beslissingen nemen bij militaire operaties, zoals deze is goedgekeurd door de (Amerikaanse) Gezamenlijke Chefs van Staven met de oplossingsmethoden van de strategische speltheorie. In principe kan een bevelhebber de situatie analyseren en zijn beslissing nemen op grond van hetgeen de tegenstander in staat is te doen, of op grond van hetgeen hij vermoedt dat de tegenstander zal gaan doen. De eerste is de officieel goedgekeurde methode, aangezien de bevelhebber volgens de instructies die acties moet uitvoeren, welke gezien de mogelijkheden waarover de vijand beschikt de grootste beloften tot succes geven. De geïnstrueerde analyse-methode bestaat uit vijf stappen en staat bekend onder de naam "Estimate of the Situation". Aan de hand van twee voorbeelden, ontleend aan de Tweede Wereldoorlog laat de schrijver zien dat bij de "Estimate of the Situation" en bij de speltheorie dezelfde overwegingen gebruikt worden. De speltheorie leidt in deze gevallen dan ook tot dezelfde beslissingen als de door de bevelhebbers genomen besluiten. In situaties waarin beide methoden inderdaad dezelfde overwegingen gebruiken is de speltheorie superieur, aangezien deze in tegenstelling tot de andere methode een procédé aangeeft om de optimale oplossing te berekenen.

Ter illustratie zullen wij het eenvoudigste voorbeeld hier in het kort behandelen. Het betreft de slag in de Bismarckzee. Een Japanse transportvloot moest in februari 1943 varen van Rabaul op New Britain naar Lae op Nieuw Guinea en kon hiervoor gebruik maken van de route ten Noorden van New Britain en de route ten Zuiden van het

1) O.G. HAYWOOD Jr, Military Decision and Game Theory, J.O.R.S.A. 2 (1954) 365-385.

eiland. Beide zeewegen namen drie dagen varen in beslag. De bevelhebber van de Geallieerde luchtmacht in het Zuid-Westen van de Grote Oceaan had de opdracht zoveel mogelijk schepen te vernietigen. Hiertoe moest uiteraard de transportvloot eerst worden opgespoord. Verder was bekend dat het zicht op de noordelijke route slecht was wegens regen. De Geallieerde bevelhebber beschouwde nu twee mogelijkheden: concentratie van het grootste gedeelte van zijn verkenningsvliegtuigen op de noordelijke route en slechts weinig op de zuidelijke, en juist andersom. Afhankelijk van de tijd, nodig om de vijandelijke vloot te ontdekken kon men bepalen hoeveel dagen er beschikbaar waren om de transportvloot te bombarderen. Dit aantal is voor de verschillende gevallen opgegeven in tabel 2.IV. Wij beschouwen deze tabel als de winstfunctie van een twee personen nulspel, waarin beide spelers twee strategieën ter beschikking hebben.

Tabel 2.IV

Winstfunctie bij de slag op de Bismarckzee

Japanners / Amerikanen	noordelijke route	zuidelijke route
noordelijke route	2	2
zuidelijke route	1	3

Men ziet direct dat de waarde van het spel twee is en dat beide partijen een zuivere optimale strategie bezitten, namelijk de noordelijke route, die ook in werkelijkheid door beide is gekozen.

Naar aanleiding van het tweede voorbeeld, de slag bij Avranches in Frankrijk, behandelt HAYWOOD de betekenis van gemengde strategieën. Ook de verhouding van het nemen van beslissingen op grond van de "Estimate of the Situation" tot het handelen op grond van de vermoede plannen van de tegenstander komt ter sprake.

Ondanks de grote overeenkomst tussen conflictsituaties in sociologie en economie enerzijds en de strategische speltheorie anderzijds is het aantal praktische toepassingen van de speltheorie buiten het krijgskundige terrein gering. Wel kan men bijvoorbeeld eenvoudige situaties bij reclamecampagnes analyseren, evenals andere concurrentieproblemen op oligopolistische markten.[1] Op welke wijze men bepaalde statistische problemen kan formuleren in het kader van de speltheorie wordt in de volgende paragraaf in het kort beschreven.

3. Statistische spelen

Spelen waarin de natuur optreedt als "tegenspeler" van de statisticus noemt men wel statistische spelen ("statistical games"). Weliswaar kan de natuur niet beschouwd worden als een tegenspeler die de statisticus zoveel mogelijk afbreuk tracht te doen, maar toch verkrijgt men een beter inzicht in allerlei problemen wanneer men de situatie vergelijkt met die in een twee personen nulspel. Hierin laten wij de natuur de rol van de eerste en de statisticus die van de tweede speler vervullen.

De statisticus behoeft niet zonder enige informatie omtrent de toestand van zijn tegenspeler een beslissing te nemen. Als hij weet dat een bepaald kenmerk normaal verdeeld is, maar het gemiddelde en de spreiding van die verdeling niet kent, dan kan hij hierover informatie krijgen door het nemen van een steekproef. Wij beschouwen nu de mogelijke waarden van de onbekende parameters als de zuivere strategieën van de natuur. Deze verzameling wordt aangegeven met Ω en een bepaald element eruit met ω. In het zojuist genoemde geval van een normale verdeling met onbekend gemiddelde μ en onbekende spreiding σ, vormen alle grepen (μ, σ) de elementen van Ω. Is wel de spreiding bekend, maar niet μ, dan bestaat Ω uit alle reële getallen.

Het resultaat van de steekproef geven wij aan met de letter z en de verzameling van alle denkbare resultaten met Z. Met ieder element ω uit Ω correspondeert een bepaalde kansverdeling $p(z \mid \omega)$ op Z; zolang Z eindig of aftelbaar veel elementen bevat, geeft $p(z \mid \omega)$ dus de kans aan dat het resultaat z optreedt, wanneer de natuur de strategie ω speelt.

Laat de statisticus kunnen kiezen uit de beslissingen a_1, a_2, ...; samen vormen deze de verzameling A. Bijvoorbeeld kan A bestaan uit twee elementen, namelijk a_1, goedkeuren van een partij goederen

----

1) Men vergelijke bijvoorbeeld: M. SHUBIK, Strategy and Market Structure, Wiley and Sons, New York (1959).

en a_2, afkeuren van die partij. Naar aanleiding van het steekproefresultaat z kiest de statisticus een element uit A, m.a.w. aan ieder steekproefresultaat wordt een a_i toegevoegd en de statisticus kan nu bepalen hoe deze toevoeging zal geschieden. Hij kiest dus een functie d, welke bij ieder element z uit Z een bepaald element d(z) uit A aanwijst. Het is heel goed mogelijk dat de functie d voor verschillende elementen uit Z hetzelfde element uit A aanwijst. Een dergelijke functie noemt men een beslissingsfunctie. De verzameling van functies d waaruit de statisticus kan kiezen geven wij aan met D. In figuur 3.1 zijn de betrekkingen die tussen de ingevoerde grootheden bestaan, schematisch aangegeven.

$$\omega \in \Omega \longrightarrow \text{kansverdeling } p(z\,|\,\omega) \text{ op } Z$$

$$z \in Z \xrightarrow{d \in D} a \in A$$

figuur 3.1
Het verband tussen Ω, Z, D en A

Het verlies dat men lijdt indien ω juist is en de beslissing a wordt genomen, noemen wij $L(\omega,a)$, de verliesfunctie. In de plaats van $L(\omega,a)$ schrijft men ook wel $L(\omega,d(Z))$ om het verband tussen het verlies en de gekozen beslissingsfunctie d tot uitdrukking te brengen. De verliesverwachting voor de statisticus bij de strategie ω van de natuur en de beslissingsfunctie d noemt men de risicofunctie $\rho(\omega,d)$; hiervoor geldt

$$\rho(\omega,d) = \sum_z L(\omega,d(z)).p(z\,|\,\omega) \quad . \qquad (3.1)$$

Vergelijken wij nu dit spel tegen de natuur met het gewone strategische spel, dan zien wij dat de ruimte X vervangen is door de ruimte Ω van de onbekende parameterwaarden en de ruimte Y door de ruimte D van beslissingsfuncties, waaruit de statisticus kan kiezen. De functie M(x,y) die de winst voor de eerste en dus het verlies voor de tweede speler aangeeft is overgegaan in de functie $\rho(\omega,d)$. Zowel Ω als D zijn dus ruimten van zuivere strategieën. Dat de functie $\rho(\omega,d)$ hier in tegenstelling tot M(x,y) toch de vorm van een verwachting aanneemt, komt doordat een zuivere strategie van de natuur een kansverdeling voor het steekproefresultaat z vastlegt.

Ter illustratie van de ingevoerde begrippen geven wij het volgende voorbeeld. Men heeft een partij goederen, waarvan men door middel van een steekproef van de grootte n wil schatten, hoe groot de fractie defectieven is.

In dit voorbeeld bestaat Ω uit alle getallen tussen 0 en 1, de waarden die de onbekende fractie defectieven in de partij kan bezitten. Het aantal defectieven in de steekproef kan 0, 1,...,n zijn en deze getallen vormen dus de verzameling Z. De kansverdeling $p(z\,|\,\omega)$ is

$$p(z\,|\,\omega) = \binom{n}{z}\omega^{z}(1-\omega)^{n-z} \qquad \left(\begin{array}{l} 0 \leqq \omega \leqq 1 \\ \\ z=0,1,\ldots,n \end{array}\right). \tag{3.2}$$

De ruimte A bestaat uit het interval $0 \leqq a \leqq 1$, waarin a een schatting is voor de onbekende fractie ω. Een beslissingsfunctie die men kan kiezen is b.v.

$$d(z) = \frac{z}{n}\,; \tag{3.3}$$

men neemt dan als schatting van de fractie defectieven in de partij de fractie, die men in de steekproef heeft gevonden. Een andere beslissingsfunctie, die men zou kunnen kiezen is

$$d_1(z) = \frac{z-1}{n} \qquad \text{voor } 1 \leqq z \leqq n,$$

$$d_1(z) = 0 \qquad \text{voor } z = 0\ .$$

Is bovendien gegeven dat het verlies, dat men lijdt evenredig is met het kwadraat van het verschil tussen de geschatte en de werkelijke fractie defectieven in de partij, dan is

$$L(\omega,a) = k(\omega-a)^2 \tag{3.4}$$

en de risicofunctie dus

$$\rho(\omega,d) = \sum_{z=0}^{n} L(\omega,d(z))\,p(z\,|\,\omega) = \sum_{z=0}^{n} k\left(\omega-\frac{z}{n}\right)^2.\binom{n}{z}\omega^{z}(1-\omega)^{n-z} =$$

$$= \sum_{z=0}^{n}\frac{k}{n^2}(z-\omega n)^2\binom{n}{z}\omega^{z}(1-\omega)^{n-z} = \frac{k}{n^2}\,n\omega(1-\omega) = \frac{k\omega}{n}(1-\omega). \tag{3.5}$$

Opmerking

Wij hebben hier bij het opstellen van de risicofunctie geen rekening gehouden met de kosten, die verbonden zijn aan het doen van experimenten. Dit is juist, wanneer de omvang van de steekproef van te voren vaststaat en de kosten onafhankelijk zijn van de uitkomsten der experimenten. In de meeste gevallen is aan deze voorwaarden echter niet voldaan en dan moeten ook deze kosten in de risicofunctie worden opgenomen.

Een gemengde strategie van de natuur is een kansverdeling op Ω; men noemt deze wel de a priori verdeling op de ruimte van mogelijke parameterwaarden. Een gemengde strategie voor de statisticus is een kansverdeling op de ruimte D van beslissingsfuncties, waaruit hij kan kiezen. Bij deze gemengde strategieën gaat de verliesverwachting van de statisticus over in

$$\varrho(\xi, \eta) = \sum_{\omega} \sum_{d} \varrho(\omega, d)\, \xi(\omega)\, \eta(d) \quad , \qquad (3.6)$$

waarin $\xi(\omega)$ de kans is, waarmee de natuur de strategie ω aanwijst en $\eta(d)$ de kans waarmee de statisticus de beslissingsfunctie d kiest.

Zodra de statisticus de functie $\varrho(\xi, \eta)$ kent, zal hij zich afvragen, welke strategie η voor hem de beste is. Om dit te onderzoeken heeft hij een maatstaf nodig, d.w.z. een criterium, ten opzichte waarvan hij een optimale strategie kan kiezen.

Aangezien het gelukt is het probleem te gieten in de vorm van een strategisch spel, ligt het voor de hand eerst na te gaan of het minimaxcriterium een bevredigende oplossing geeft. In tegenstelling tot spelen waarin de belangen van de spelers diametraal tegenover elkaar staan, is dit criterium hier niet zo goed en kan het tot zeer merkwaardige konsekwenties leiden. Dit komt doordat men niet kan aannemen dat de natuur tracht de statisticus zoveel mogelijk afbreuk te doen, terwijl bij de minimaxstrategie de beslissing gebaseerd wordt op de meest ongunstige strategie van de natuur.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Stel dat een partij goederen aan de kwaliteitseisen voldoet wanneer de fractie defectieven $\leqq \omega_0$ is en anders niet. De fabrikant keurt de partijen voordat ze worden afgeleverd. Hierbij zal hij weinig onjuiste beslissingen nemen bij zeer goede en zeer slechte partijen. De natuur kan het nu de fabrikant "moeilijk maken" door veel partijen te fabriceren, die een fractie defectieven bezitten, dicht bij ω_0. Bij de minimaxstrategie gaat de statisticus nu uit van een a priori verdeling ξ van de natuur waarbij vrijwel uitsluitend partijen met een fractie ω_0 aan defectieven worden gemaakt. In werkelijkheid beschikt men door ervaringen uit het verleden wel over enige voorkennis omtrent de a priori verdeling op Ω en doordat hiervan bij het minimaxcriterium geen gebruik wordt gemaakt, faalt dit criterium.

Een beslissingscriterium, waarbij dit wel gebeurt is het criterium van Bayes. Hierbij gaat men er van uit dat de statisticus de kansverdeling ξ op Ω, die de natuur gebruikt volledig kent. Het risico van de statisticus, wanneer hij als strategie de kansverdeling η op D kiest is dan de verwachting van $\rho(\omega, \eta)$ ten opzichte van de kansverdeling ξ, dus

$$\rho(\xi, \eta) = \sum_{\omega} \rho(\omega, \eta)\ \xi(\omega) . \tag{3.7}$$

Hij zal dan die zuivere of gemengde strategie η_0 kiezen, waarvoor de verwachting van $\rho(\xi, \eta)$ minimaal is. Men noemt η_0 de Bayes-oplossing met betrekking tot de a priori verdeling ξ.

Deze methode is identiek aan de in paragraaf 1 behandelde methode en zal dus tot goede resultaten leiden onder de aan het eind van die paragraaf genoemde voorwaarden. De a priori verdeling moet inderdaad bekend zijn. Bij veel problemen op het gebied van de kwaliteitsbeheersing is dit zo en kan men bijvoorbeeld de momenten van de a priori verdeling schatten uit aanwezig waarnemingsmateriaal.

Sommige auteurs[1] verdedigen ook het gebruik van Bayes-oplossingen, wanneer de a priori verdeling alleen het subjectieve oordeel van de onderzoeker beschrijft. Bayes-oplossingen hebben dan het bezwaar dat zij in dezelfde situatie tot geheel verschillende resultaten kunnen leiden, wanneer verschillende mensen deze situatie verschillend beoordelen. Men kan dan als statisticus alleen een uitspraak doen van de vorm: indien Uw beoordeling omtrent de a priori verdeling juist is, dan is deze η_0 de optimale beslissingsprocedure.

De conclusie is derhalve dat het opvatten van statistische problemen als spelen tegen de natuur weliswaar het inzicht in die problemen verdiept, maar in het algemeen toch weinig nieuwe gezichtspunten biedt om te komen tot praktisch bruikbare oplossingen. De minimaxmethode is te pessimistisch omdat deze zich richt op de meest ongunstige omstandigheden, terwijl de Bayes-methode neerkomt op het optimaliseren van verwachtingen. De minimaxmethode leidt wel tot bruikbare oplossingen in situaties, waarin de belangen van de

----

1) Zie bijvoorbeeld L.J. SAVAGE, The Foundations of Statistics, Wiley and Sons, New York (1954).

spelers lijnrecht tegenover elkaar staan.

4. De methode van de kleinste spijt

Naast het minimaxcriterium bestaat een criterium dat hiermee nauw verwant is, het zogenaamde "minimax-regret" criterium of wel het criterium van de kleinste spijt. Stel dat de natuur als tegenspeler de beschikking heeft over drie mogelijkheden, de toestanden S_1, S_2 en S_3. De statisticus kan kiezen uit vier alternatieven f_1, f_2, f_3 en f_4, terwijl de winstfunctie gegeven is in tabel 4.I.[1)] Hierin is a een positief getal, groot ten opzichte van 1. Bij de methode van de kleinste spijt wordt de minimaxgedachte niet toegepast op de winstfunctie zelf, doch op een andere funstie, die hieruit als volgt wordt afgeleid. Wanneer de natuur "strategie" S_1 toepast, dan krijgt de statisticus de grootst mogelijke winst als hij f_3 speelt. Kiest hij een andere strategie, dan ontvangt hij minder dan mogelijk geweest zou zijn en dit verschil kan men zien als de spijt die de statisticus heeft door het niet kiezen van de optimale handeling. In dit geval bedraagt de spijt bij de verschillende strategieën respectievelijk

Tabel 4.I

De winstfunctie

I \ II	f_1	f_2	f_3	f_4
S_1	0	-a	-2a	-1
S_2	0	-a	a	a-1
S_3	0	2a	a	2a-1

$$2a \qquad a \qquad 0 \qquad 2a-1\ .$$

Ook voor de andere strategieën van de natuur kan deze spijt berekend worden; de resulterende spijtfunctie is opgenomen in tabel 4.II. Bij de methode van de kleinste spijt wordt de minimaxmethode toegepast

----

1) Deze tabel is ontleend aan D. VAN DANTZIG, Statistical Priesthood (SAVAGE on personal probabilities), Statistica Neerlandica 11 (1957)1-16.

op deze spijtfunctie: men minimaliseert dus de maximaal mogelijke spijt. In deze zin is de optimale strategie voor de statisticus dus f_4. Past men de minimaxmethode toe op de winstfunctie zelf, dan

Tabel 4.II

De spijtfunctie behorende bij tabel 4.I

I \ II	f_1	f_2	f_3	f_4
S_1	2a	a	0	2a-1
S_2	a	0	2a	2a-1
S_3	0	2a	a	2a-1

is de optimale strategie voor de statisticus f_1. Evenals in dit geval leidt de methode van de kleinste spijt in het algemeen tot andere optimale strategieën als de minimaxmethode.

Hoewel de methode op het eerste gezicht niet zonder meer verwerpelijk lijkt, kan er toch ernstige kritiek op worden uitgeoefend; zie bijvoorbeeld het reeds genoemde artikel van D. VAN DANTZIG. Vergelijkt men in tabel 4.I strategie f_1 met strategie f_4, dan ziet men dat f_4 alleen iets beter is in situatie S_1, maar dat f_4 in de situaties S_2 en S_3 veel slechter is dan f_1. De methode van de kleinste spijt dwingt de statisticus in dit voorbeeld dus tot het lopen van grote risico's teneinde in een bepaald geval een kleine winst te krijgen, terwijl het bovendien zo is, dat als dat geval zich voordoet, de strategie ongeveer het slechtste is wat men doen kan, aangezien dan f_2 en f_3 veel betere strategieën zijn en f_1 slechts weinig minder goed dan f_4. Met andere woorden: men loopt enorme risico's teneinde in een bepaald geval een kleine winst te maken, maar als dat geval zich voordoet, heeft men ongeveer het slechtste gedaan, wat men doen kan!

Een andere merkwaardige eigenschap komt aan het licht, wanneer wij de statisticus de beschikking geven over een vijfde alternatief f_5. Laat de winstfunctie overgaan in de in tabel 4.III opgegeven functie. De bijbehorende spijtfunctie is opgegeven in tabel 4.IV.

Tabel 4.III

De uitgebreide winstfunctie

I \ II	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
S_1	0	-a	-2a	-1	a
S_2	0	-a	a	a-1	0
S_3	0	2a	a	2a-1	-a-1

Tabel 4.IV

De spijtfunctie behorende bij tabel 4.III

I \ II	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
S_1	2a	a	0	2a-1	3a
S_2	a	0	2a	2a-1	a
S_3	a+1	3a+1	2a+1	3a	0

Minimaliseert men hier de maximale spijt, dan wordt strategie f_1 aangewezen. Dit betekent derhalve: heeft men de keuze tussen vier strategieën f_1 t/m f_4, dan kiest men f_4, maar wordt het arsenaal uitgebreid met een extra strategie f_5, dan kiest men niet de oude optimale strategie f_4 noch de nieuwe mogelijkheid f_5, doch strategie f_1, dat wil zeggen een strategie die men vroeger ook al ter beschikking had. Een niet gewenste strategie beïnvloedt dus de keuze tussen de andere strategieën.

Het laatste blijkt ook duidelijk, wanneer wij de winstfunctie voor strategie f_5 wijzigen. Kiest men respectievelijk de waarden a, -a en 0, dan vindt men voor de spijtfunctie de in tabel 4.Va opgegeven waarden. Brengt men een kleine verandering aan door de waarden a, -a, -2 in te vullen (a groot t.o.v. 1), dan vindt men tabel 4.Vb. In het eerste geval blijft f_4 de optimale strategie, terwijl in het tweede geval f_1 en f_3 optimale strategieën zijn.

Tabel 4.V

Gewijzigde spijtfuncties

a

I \ II	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
s_1	2a	a	0	2a-1	3a
s_2	a	0	2a	2a-1	0
s_3	0	2a	a	2a-1	0

b

I \ II	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
s_1	2a	a	0	2a-1	3a
s_2	a	0	2a	2a-1	0
s_3	2	2a+2	a+2	2a+1	0

Dit betekent dat een relatief kleine verandering in de niet ter zake dienende strategie f_5, de bepaling van de optimale strategie beïnvloedt, welke bepaling dus afhankelijk is van irrelevante alternatieven.

Uit het voorgaande is duidelijk geworden dat de methode van de kleinste spijt geen oplossing biedt voor zogenaamde statistische spelen. Ook voor strategische spelen kan het als criterium niet verdedigd worden.

Het criterium is voorgesteld door L.J. SAVAGE, die opmerkt dat het in sommige statistische spelen minder pessimistisch is dan het minimaxcriterium, maar die het vooral verdedigt voor de volgende van het voorafgaande afwijkende situaties. Een groep mensen (bijvoorbeeld een jury of een directie) moet uit een aantal alternatieven kiezen. Het nut dat de i^{de} persoon toekent aan het j^{de} alternatief zij $U_i(j)$. Voor één of meer alternatieven zal dit niet maximaal zijn; wordt een ander alternatief uiteindelijk aangewezen, dan heeft het i^{de} lid een bepaalde spijt, daar het zijns inziens optimale niet bereikt is. Wanneer men uiteindelijk gezamenlijk één keuze moet doen, zal men, indien de meningen uiteenlopen, tot een compromis moeten komen. SAVAGE stelt nu voor dat alternatief als compromis te kiezen, waarvoor het maximum van de "spijten" die de leden van de groep hebben, minimaal is. De keuze wordt dus bepaald door de minimaxmethode toe te passen op de functie

$$\max_j U_i(j) - U_i(j) \ . \qquad (4.1)$$

Ook hierop kan men kritiek uitcefenen.

<u>De conclusie</u> is derhalve dat de methode van de kleinste spijt bij statistische en strategische spelen niet toegepast moet worden, terwijl men ook in andere situaties zeer voorzichtig dient te zijn.

Voor een verdere bespreking van het voor en tegen van verschillende beslissingscriteria verwijzen wij naar het boek van LUCE en RAIFFA [1], speciaal hoofdstuk XIII.

----

1) R.D. LUCE and H. RAIFFA, Games and Decisions, Wiley and Sons, New York (1957).