STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 354 (C 16)

Inleiding tot de Mathematische Programmering

door

Prof.dr. G. de Leve

uitgewerkt door

H.C. Tijms

Deel I: Lineaire programmering

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

S354

Mathematische programmering

door

Prof.dr. G. de Leve
uitgewerkt door
H.C. Tijms

Hoofdstuk I. Inleiding.

De mathematische besliskunde onderscheidt twee typen van beslissingsproblemen. In een z.g.n. één-stapsbeslissingsprobleem behoeft de beslisser slechts één enkele beslissing te nemen. De beslissing wordt door een vektor x gegeven.

In een meer-stapsbeslissingsprobleem moet in een tijdbestek een reeks van beslissingen genomen worden. De oplossing wordt hier gegeven door een strategie. Een strategie is een beslissingsvoorschrift dat in elke toestand aangeeft welke beslissing genomen moet worden.

Wiskundig geformuleerd: een strategie is een afbeelding van de toestandsruimte in de beslissingsruimte.

In dit college zullen we ons bezighouden met problemen van het eerste type.

Eerst zullen we een aantal besliskundige problemen bespreken die m.b.v. een mathematische programmeringstechniek kunnen worden opgelost.

Eerste probleem.

Een bedrijf heeft een machinepark van m verschillende machines, waarvoor geldt dat elke machine geschikt is voor de produktie van een n tal verschillende produkten.

Aan het begin van elke maand wordt de bedrijfsleider geconfronteerd met de vraag hoe hij de verschillende produkties voor de machines moet verdelen opdat er zo goedkoop mogelijk gefabriceerd wordt.

De kosten om een eenheid van produkt i op machine j te maken

bedragen k_{ij}, de hiervoor benodigde produktietijd is t_{ij} tijdseenheden. Verder geldt dat machine j hoogstens τ_j tijdseenheden in bedrijf kan zijn. De vraag naar produkt i is v_i eenheden groot.

Geven we de hoeveelheid van produkt i gemaakt op machine j aan door x_{ij} dan zien we dat we de kostenfunctie

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} k_{ij} x_{ij} \qquad (1.1)$$

moeten minimaliseren onder de bijvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = v_i \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} t_{ij} \leq \tau_j \qquad (j = 1,\ldots m) \qquad (1.2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots m)$$

Dit is een wiskundig probleem.

<u>Tweede probleem.</u>

(zie R.M. Zaki e.a. Produktion Planning for a non storable commodity Management Science vol 10, number 3(1964) pg. 477).

Dit probleem heeft betrekking op een firma met bananenplantages verspreid over verschillende tropische gebieden. Het aantal plantages bedraagt f, de oppervlakten van deze plantages worden aangegeven met N_r (r=1...f). Het klimaat staat toe dat éénmaal per jaar naar keuze op één van een T-tal tijdstippen geoogst kan worden. Beschouw plantage r en laat n_{rt} het oppervlak zijn dat bestemd is voor een oogst op tijdstip t. Laat y_{rt} de opbrengst zijn per oppervlakteeenheid voor de r^{de} plantage en het t^{de} tijdstip. De oogst voor elk tijdstip en plantage behoeven niet gelijk te zijn. De hoeveelheid bananen die op tijdstip t vervoerd moet worden bedraagt

$$\sum_{r=1}^{f} y_{rt}\, n_{rt} \qquad (1.3)$$

De bananen moeten direct afgevoerd worden omdat ze anders bederven, daarom beschikt de firma over een eigen vloot. De vloot moet op elk tijdstip t in staat zijn de vereiste hoeveelheid bananen te vervoeren. Dit betekent dat men in staat moet zijn om max. $\sum_{r=1}^{f} y_{rt}\, n_{rt}$ zelf te vervoeren. We zullen nu aannemen dat de kosten van het bezitten en onderhouden van een vloot met een dergelijke capaciteit

$$c \max_{t} \sum_{r=1}^{f} y_{rt}\, n_{rt} \qquad (1.4)$$

bedragen, waarbij c een nader te bepalen constante is.

Aangezien altijd moet gelden

$$\begin{aligned} & n_{rt} \geq 0 && (r=1,\ldots,f;\ t=1,\ldots T) \\ \sum_{t=1}^{T} & n_{rt} \leq N_r && (r=1,\ldots,f) \end{aligned} \qquad (1.5)$$

en de jaarprodukties begrensd zijn volgt uit (1.4) dat het met het oog op de transportkosten voordelig is om de produktie van bananen ($\sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt}$ op tijdstip t) zoveel mogelijk over het jaar te verdelen. Immers een uitschieter naar boven bepaalt de omvang van de vloot. Er zijn ook andere argumenten aan te geven die per plantage voor de verschillende tijdstippen constante produkties bepleiten: b.v. de kosten die verband houden met het aantrekken, opleiden en ontslaan van personeel. In onze beschouwingen worden aan deze laatste argumenten geen aandacht besteed. Indien wij de kosten aan het hebben en onderhouden van de vloot niet in de kostenberekening betrekken en als wij de winst op het tijdstip t te maken op de oogst van één oppervlakteëénheid van plantage r aangeven met p_{rt}, dan bedraagt de totale jaarwinst:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt}\, p_{rt} \qquad (1.6)$$

Brengen we de kosten (1.4) wel in rekening dan vinden we voor de winst

$$z = \sum_{t=1}^{T} \sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt}\, P_{rt} - c \max_{t} \sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt} \qquad (1.7)$$

De firma zal uiteraard de stukken oppervlakten n_{rt} zo kiezen dat de fu z in de variabelen n_{rt} maximaal is onder de bijvoorwaarden (1.5).

De f_u (1.7) ziet er onprettig uit door de uitdrukking "max".

Beschouw

$$z^1 = \sum_{t=1}^{T} \sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt}\, P_{rt} - c\, G \qquad (1.8)$$

waarbij G een variabele is.

Maximaliseer z^1 onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} G &\geq 0 \\ n_{rt} &\geq 0 \\ \sum_{t=1}^{T} n_{rt} &\leq N_r \\ G &\geq \sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt} \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Het is duidelijk dat het maximum van (1.8) onder bijvoorwaarde (1.9) identiek is aan het maximum van (1.7) onder bijvoorwaarde (15).

Immers de optimale G in (1.9) is $G = \max_{t} \sum_{r=1}^{f} n_{rt}\, y_{rt}$.

Derde probleem.

(A. Charnes and W.W. Cooper, Generalizations of the warehousing model, Operational Research, Quarterly, vol 6 no. 1, 1955).

Een handelaar in één enkel produkt kan dit artikel in- en verkopen in elke gewenste hoeveelheid. Zijn voorraadruimte heeft echter een capaciteit B. De inkoopprijs aan begin van de i^{de} week is p_i, de verkoopprijs in de i^{de} week bedraagt c_i.

Deze prijzen zijn gegeven, doch mogen voor iedere week anders zijn.
De handelaar wil nu voor de komende n-weken zijn in- en verkooppolitiek vaststellen. De hoeveelheid die hij aan het begin van de i^{de} week inkoopt geven we aan met x_i, de hoeveelheid die hij in de i^{de} week verkoopt bedraagt y_i.

De handelaar begint met restantvoorraad A.

De voorraad vlak voor het begin van de i^{de} week is $A + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j)$. Aan het begin van de i^{de} week wordt een hoeveelheid x_i ingekocht.

In verband met de beperkte voorraadcapaciteit B geldt:

$$A + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j) + x_i \leq B \quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1.11)$$

Aangezien de handelaar nooit meer kan verkopen dan hij in voorraad heeft geldt bovendien:

$$y_i \leq A + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j) + x_i \quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1.12)$$

Verder geldt:

$$x_i \geq 0 \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.13)$$
$$y_i \leq 0$$

De winst van de handelaar wordt tenslotte vastgelegd door de (x_j, y_j) functie

$$z = \sum_{j=1}^{n} (p_j y_j - c_j x_j) \qquad (1.14)$$

Het optimale in- en verkoopschema wordt gevonden door het maximum te bepalen van (1.14) onder de bijvoorwaarden (1.11) t/m (1.13).

De drie beschreven beslissingsproblemen blijken alle drie te herleiden te zijn tot een wiskundig probleem van het volgende type:
Bepaal het maximum of minimum van de functie

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.15)$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m_1+m_2+m_3)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (1.16)$$

Wiskunde-problemen van dit type dragen de naam <u>lineaire programmerings problemen</u>.

<u>Het vierde probleem</u>.

(zie eind probleem)

Een reisbureau organiseert voor de maand Juli een excursie naar de noordelijke ijszee. Voor deze excursie hebben zich 750 deelnemers aangemeld. Het reisbureau heeft de zeevaartmaatschappij Poolster voor de excursie weten te interesseren. Deze maatschappij heeft twee typen schepen voor deze excursie ter beschikking.

Deze schepen geven we aan met type I en type II.
Uit de getroffen regeling volgt dat Poolster bij het uitzetten van een schip van type I en type II ƒ 2.000,-. resp. ƒ 1.000,-. netto winst zal hebben. Op Groenland moet voor de terugreis olie getankt worden. De beschikbare voorraad ter plaatse bedraagt 5.500 gal. Verder kan de maatschappij voor deze excursie hoogstens 90 man uittrekken. De vraag is nu hoe Poolster zijn vloot samenstellen zal als voor de beide typen nog de volgende technische gegevens van toepassing zijn:

	Type I	Type II	
max. aantal passagiers	200	100	
benodigde olie voor terugreis	1.200 gal	700	
bemanning in koppen	25	10	(1.17)

Als x_i (i=1,2) het aantal ingezette schepen van type i aangeeft dan gelden de volgende ongelijkheden:

$$\begin{aligned} 200\ x_1 + 100\ x_2 &\geq 750 \\ 1200\ x_1 + 700\ x_2 &\leq 5500 \\ 25\ x_1 + 10\ x_2 &\leq 90 \end{aligned} \qquad (1.18)$$

$$x_1, x_2 \in \{0,1,2,\ldots\} \qquad (1.19)$$

De te behalen winst wordt gegeven door

$$z = 2000x_1 + 1000\ x_2 \qquad (1.20)$$

Poolster zal uiteraard x_1 en x_2 zodanig kiezen dat (1.20) maximaal is onder de bijvoorwaarden (1.18) en (1.19).

(C.R. Carr en Ch.W. Hawe, Quantitative decision procedures in management and economics, part 1, pg. 222. Mc GrawHill, New York, 1964).

Het vijfde probleem.

Een zekere fabriek bezit een machinepark van m identieke machines. M.b.v. deze machines kan het bedrijf een n-tal produkten vervaardigen. Ondanks het feit dat men op één machine slechts één produkt tegelijk kan maken, kunnen de werkzaamheden over het machinepark toch zo worden verdeeld dat aan verschillende produkten gelijktijdig wordt gewerkt. Een machine kan slechts in veelvouden van één week met de vervaardiging van een bepaald produkt worden belast. Bij verandering van produktie moet de desbetreffende machine worden schoongemaakt. De schoonmaaktijd bedraagt één week. Gevraagd wordt een produktieschema te ontwerpen voor T weken die enerzijds het bedrijf in staat stelt aan een gegeven per week gespecificeerde vraag te voldoen en anderzijds ervoor waakt dat de voorraden de aan het eind van iedere week vastgestelde boven- en ondergrenzen niet zullen overschrijden.

Verder moet rekening gehouden worden met het feit dat maximaal r machines tegelijk schoongemaakt kunnen worden.

Zeer waarschijnlijk bestaat er meer dan één produktieplanning die aan de gestelde eisen voldoet. Bijgevolg kunnen wij proberen deze verschillende planningen te ordenen volgens een nog nader aan te geven wens. Een ieder weet dat een lange produktieserie voordeliger is dan een overeenkomstige rij van korte series. Aangezien na iedere serie de machine moet worden schoongemaakt kunnen wij het gebruik van lange produktieseries bevorderen door te eisen dat de totale schoonmaaktijd zo klein mogelijk wordt.

Ook nu zullen wij het gestelde beslissingsprobleem herleiden tot een wiskundeprobleem. Daartoe voeren wij de variabelen x_{ij}^{h} in $(i=0,1,\ldots,n;\ h=1,2,\ldots,m;\ j=1,\ldots,T)$ in met de volgende eigenschappen:

$$x_{oj}^{h} = \begin{cases} 1 & \text{als machine h in de } j^{de} \text{ week schoongemaakt wordt.} \\ & (h=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,T) \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad (1.21)$$

$$x_{ij}^{h} = \begin{cases} 1 & \text{als machine h in de } j^{de} \text{ week het product i vervaardigt} \\ & (h=1,\ldots,m;\ i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,T) \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad (1.22)$$

We kunnen maar één produkt tegelijk op een machine maken, waaruit volgt:

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^{h} \leq 1 \qquad (h=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,T) \qquad (1.23)$$

Verder geldt:

$$\sum_{h=1}^{m} x_{oj}^{h} \leq r \qquad (j=1,\ldots,T) \qquad (1.24)$$

De verplichting, welke een schoonmaakbeurt inhoudt na iedere produktiewijziging, legt de volgende voorwaarde op

$$x_{i_1 j}^{h} + x_{i_2,j+1}^{h} \leq 1 \quad (i_1 \neq i_2 \quad i_1,i_2=1,\ldots n;\ h=1,\ldots,m;j=1,\ldots,T) \qquad (1.25)$$

Indien v_i de beginvoorraad aangeeft van produkt i uitgedrukt in weekprodukties en als de behoefte aan produkt i, eveneens uitgedrukt in weekprodukts, in de t^{de} week a_{it} bedraagt dan bedraagt de voorraad van artikel i aan 't begin van de t^{de} week

$$v_i + \sum_{h=1}^{m} \sum_{j=1}^{t-1} x_{ij}^h - \sum_{j=1}^{t-1} a_{ij}$$

En gelden de volgende ongelijkheden:

$$v_i + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\sum_{h=1}^{m} x_{ij}^h - a_{ij} \right) \leq a_{it} \quad (i=1,\ldots,n;t=1,\ldots,T) \qquad (1.26)$$

$$b_i \leq v_i + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\sum_{h=1}^{m} x_{ij}^h - a_{ij} \right) \leq c_i \quad (i=1,\ldots,n) \qquad (1.27)$$

b_i en c_i stellen de toelaatbare onder- resp. bovengrens voor van de voorraad i aan het eind van elke week.

Tenslotte volgt uit de def. van x_{ij}^h

$$x_{ij}^h = 0 \text{ of } 1 \quad (i=0,\ldots,n;h=1,\ldots,m;j=1,\ldots,T) \qquad (1.28)$$

Het aantal malen dat de machines in totaal schoongemaakt moeten worden, wordt gegeven door de x_{oj}^h-functie

$$z = \sum_{j=1}^{T} \sum_{h=1}^{m} x_{oj}^h \qquad (1.29)$$

Een optimale produktieplanning verkrijgt men dus door de functie (1.29) te minimaliseren onder de bijvoorwaarden (1.23) t/m 1.28).

De beslissingsproblemen no. 4 en 5 blijken beiden te herleiden te zijn tot een wiskunde-probleem van het volgende type:

Bepaal het maximum of minimum van de functie

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.30)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (j=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i_1=m_1+m_2+1,\ldots,m_1+m_2+m_3)$$

$$x_j \in I \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (1.31)$$

waarbij I een verzameling is van niet-negatieve gehele getallen.

Wiskunde problemen van deze vorm geven we aan met de naam <u>discrete lineaire programmeringsproblemen</u>.

<u>Het zesde probleem</u>

(R. Dorfmann e.a. Linear Programming and Economic analysis, p. 186, Mc. Graw Hill, New York (1958)).

Een automobielfabriek heeft een collectie van twee modellen, een luxe personenwagen en een landbouwtruck. Bij een maandproduktie van x_1 luxe wagens bedraagt de winst per auto

$$625 - \frac{x_1}{60} \qquad (1.32)$$

guldens. Bij een maandproduktie van x_2 trucks bedraagt de winst per truck 250 guldens. De gedaante van (1.31) is economisch te rechtvaardigen. Er zal meer reclame gevoerd moeten worden, het zal extra krachtinspanning eisen om een groot aantal auto's te verkopen.

De genoemde fabriek heeft vier afdelingen die de bottleneck vormen. We zullen in de onderstaande tabel aangeven wat de afdelingen per maand kunnen verwerken als er alléén auto's, resp. alléén trucks gemaakt worden.

Afdeling	Luxe auto's	Trucks
Metaalstamperij	25.000	35.000
Motor assemblage	33.333	16.667
Auto assemblage	22.000	-
Truck assemblage	-	15.000

De vraag waarvoor de leiding van de fabriek gesteld word luidt: "hoeveel auto's en hoeveel trucks moeten we per maand maken opdat de winst maximum is?"

Stilzwijgend wordt bij deze vraagstelling uitgegaan van het feit dat auto's en trucks in elke gewenste hoeveelheid verkocht kunnen worden. Als er x_1 auto's en x_2 trucks per maand gemaakt worden dan gelden de volgende relaties:

$$\frac{x_1}{25000} + \frac{x_2}{35000} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{33.333} + \frac{x_2}{16.667} \leq 1 \qquad (1.33)$$

$$0 \leq x_1 \leq 22.500$$

$$0 \leq x_2 \leq 15.000$$

Deze relaties volgen uit de beperkte capaciteiten van de verschillende afdelingen.

De totale winst wordt gegeven door de (x_1, x_2) functie

$$z = \left(625 - \frac{x_1}{60}\right) x_1 + 250\, x_2 =$$

$$= \frac{-x_1^2}{60} + 625\, x_1 + 250\, x_2 \qquad (1.34)$$

De fabrikant zal dus trachten de functie (1.34) te maximaliseren onder de bijvoorwaarden (1. 33).

Merk op dat de functie (1.34) <u>niet lineair</u> is.

Het zevende probleem

(Leergang besliskunde, hfdst. 13, pg. 28, J. Kriens.
Niet lineaire programmering, Mathem. Centrum.)

Een belegger wil een bedrag van f 1.000.000,-. beleggen in een viertal ondernemingen, die we zullen aangeven met A, B, C en D. De belegger wil dit doen via 10.000 coupures van f 100,-. De jaarlijkse dividend uitkeringen per coupure zijn stochastisch en worden aangegeven door de stochastische variabelen $\underline{\alpha}_A$, $\underline{\alpha}_B$, $\underline{\alpha}_C$ en $\underline{\alpha}_D$, die we onafhankelijk zullen veronderstellen. De verwachtingen en spreidingen van deze stochasten zijn resp. 4, 5, 6, 3 en 1, 2, 2, 1 gulden. We zullen verder aannemen dat de koersen constant blijven.

De belegger wil gemiddeld minstens 4,5% rente van zijn kapitaal maken. Verder wenst hij in de bedrijven B en C niet meer dan 60% van zijn kapitaal te investeren en hij zal trachten onder deze omstandigheden zijn risico zo klein mogelijk te maken. Dit laatste zullen we interpreteren als het zo klein mogelijk maken van de variantie van de totale jaarlijksedividend uitkering.

De man vraagt zich nu af hoeveel geld hij in elk bedrijf moet steken om dit doel te bereiken. Stel dat hij x_A, x_B, x_C en x_D coupures belegt resp. in bedrijf A, B, C en D.

De jaarlijkse dividenduitkering is een stochastische variabele $\underline{y}$

$$\underline{y} = x_A \underline{\alpha}_A + x_B \underline{\alpha}_B + x_C \underline{\alpha}_C + x_D \underline{\alpha}_D \qquad (1.35)$$

De verwachting van $\underline{y}$ wordt gegeven door

$$\varepsilon \underline{y} = x_A \varepsilon \alpha_A + x_B \varepsilon \alpha_B + x_C \varepsilon \alpha_C + x_D \varepsilon \alpha_D =$$

$$= 4 x_A + 5 x_B + 6 x_C + 3 x_D \qquad (1.36)$$

De eis dat minstens 4,5% rente gemaakt moet worden houdt de voorwaarde in:

$$4 x_A + 5 x_B + 6 x_C + 3 x_D \geq 45000 \qquad (1.37)$$

De variantie van $\underline{y}$ wordt gegeven door

$$\sigma^2(\underline{y}) = x_A^2\,\sigma^2(\alpha_A) + x_B^2\,\sigma^2(\alpha_B) + x_C^2\,\sigma^2(\alpha_C) + x_D^2\,\sigma^2(\alpha_D) =$$

$$= x_A^2 + 4\,x_B^2 + 4\,x_C^2 + x_D^2 \qquad (1.38)$$

Verder geldt: $x_A + x_B + x_C + x_D = 10.000$ (1.39)

In de bedrijven B en C mag niet meer dan 60% van het kapitaal belegd worden, dus:

$$x_B + x_C \leq 6000 \qquad (1.40)$$

Het antwoord op het beleggingsprobleem wordt nu gevonden uit de minimalisering van de functie

$$z = \sigma^2(\underline{y}) = x_A^2 + 4\,x_B^2 + 4\,x_C^2 + x_D^2 \qquad (1.41)$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\begin{aligned} x_A + x_B + x_C + x_D &= 10.000 \\ x_B + x_C &\leq 6.000 \\ 4x_A + 5x_B + 6x_C + 3x_D &\geq 45.000 \\ x_A,\ x_B,\ x_C,\ x_D &\geq 0 \end{aligned} \qquad (1.42)$$

Het achtste probleem

(J.C.G. Boot, Quadratic programming, North Holland Publishing Company, p. 151, (1964) Amsterdam).

Het landbouwegalisatiefonds koopt in Nederland alle melk op welke de boeren niet voor eigen gebruik nodig hebben.

Een deel van deze melk is bestemd voor directe consumptie binnen Nederland. Het overige deel van de melk wordt gebruikt voor de produktie van boter en kaas. De afnemers van deze produkten worden zowel in Nederland als in het buitenland aangetroffen.

Het bedrag dat de boeren normaliter per liter melk van het fonds ontvangen is gelijk aan het quotient van de totale jaaropbrengst, verminderd met verwerkingskosten, transportkosten etc. en van de totale hoeveelheid uitgeleverde melk.

Wij spreken van een "ontvangst normaliter" omdat de regering een garantieprijs heeft ingesteld die de boeren, telkens wanneer het zojuist genoemde quotient daalt beneden de garantieprijs per liter, zal worden uitbetaald. Door de garantie hoopt de regering de boeren de nodige steun te verschaffen.

Het landbouwegalisatiefonds heeft de bevoegdheid om op de Nederlandse markt de prijzen van melk, boter, 40^+ kaas en volvette kaas vast te stellen. Het fonds kan dus trachten de opbrengst van de melk en de melkprodukten zo groot mogelijk te maken. Om de kosten van levensonderhoud in de hand te houden heeft de regering deze vrijheid van prijsvaststelling aan een beperking onderworpen. Bovendien kan een verhoging van de prijzen een daling van het verbruik van melk en melkprodukten bewerkstelligen.

Laten ξ_1, ξ_2, ξ_3 en ξ_4 de, in 1000 ton uitgedrukt, af te zetten hoeveelheden melk, boter, vette en 40^+ kaas voor het komende jaar voorstellen. Laten $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_3$ en $\bar{\xi}_4$ de corresponderende omzetcijfers zijn van het afgelopen jaar.
De symbolen π_1, π_2, π_3 en π_4 geven de te kiezen prijzen aan van de laatste produkten, terwijl $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$, $\bar{\pi}_3$ en $\bar{\pi}_4$ de prijzen waren van het afgelopen jaar.

Er wordt in het hierna volgende uitgegaan van het vermoeden dat als de prijzen π_1, π_2, π_3 en π_4 niet teveel afwijken van $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$, $\bar{\pi}_3$ en $\bar{\pi}_4$ de afhankelijkheid van omzet en prijs wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -1{,}2338\pi_1 + 2139 \\
\xi_2 &= -0{,}0203\pi_2 + 135 \\
\xi_3 &= -0{,}0136\pi_3 + 0{,}0015\pi_4 + 103 \\
\xi_4 &= 0{,}0016\pi_3 - 0{,}0027\pi_4 + 19
\end{aligned} \qquad (1.43)$$

Indien de regering niet wenst dat de kosten van levensonderhoud stijgen dan zullen de te kiezen prijzen moeten voldoen aan de volgende voorwaarden:

$$0{,}0163\pi_1 + 0{,}003\pi_2 + 0{,}0006\pi_3 + 0{,}0002\pi_4 = 10 \qquad (1.44)$$

Voor de motivering van deze relaties wordt de lezer verwezen naar het boek van J.C.G. Boot.

De belangrijkste bestanddelen van de melk zijn vet en de z.g.n. droge stof. De totale hoeveelheden vet en droge stof waarover men het komende jaar kan beschikken kan met grote zekerheid worden voorspeld. Vet en droge stof worden verwerkt in boter en kaas en blijven bovendien achter in de comsumptiemelk. De produktie van boter, melk en kaas worden dus beperkt door deze hoeveelheden.

Dit geeft aanleiding tot de volgende ongelijkheden:

$$\begin{aligned} 0{,}026\xi_1 + 0.800\xi_2 + 0.306\xi_3 + 0.245\xi_4 &\leq 119 \\ 0.086\xi_1 + 0.020\xi_2 + 0.297\xi_3 + 0.371\xi_4 &\leq 251 \end{aligned} \qquad (1.45)$$

Met behulp van (1.43) gaat (1.45) over in:

$$\begin{aligned} -0.0321\pi_1 - 0.0162\pi_2 - 0.0038\pi_3 - 0.0002\pi_4 &\leq -80{,}5 \\ -0.1061\pi_1 - 0.0004\pi_2 - 0.0034\pi_3 - 0.0006\pi_4 &\leq 26{,}6 \end{aligned} \qquad (1.46)$$

Uit $\xi_1 \geq 0$ en (1.43) volgen de ongelijkheden

$$\begin{aligned} 1{,}2338\pi_1 &\leq 2139 \\ 0{,}0203\pi_2 &\leq 135 \\ 0{,}0136\pi_3 - 0{,}0015\pi_4 &\leq 103 \\ -0{,}0016\pi_3 + 0.0027\pi_4 &\leq 19 \end{aligned} \qquad (1.47)$$

De opbrengst van de melk en de melkprodukten in het komende jaar wordt uiteraard gegeven door

$$z = \sum_{i=1}^{4} \pi_i \xi_i$$

Uit (1.43) en (1.47) volgt dat deze opbrengst ook kan worden weergegeven door

$$z = -1{,}2338\pi_1^2 - 0{,}0203\pi_2^2 - 0{,}0136\pi_3^2 - 0{,}027\pi_4^2 + \\ + 0.0031\pi_3\pi_4 + 2139\pi_1 + 135\pi_2 + 103\pi_9 + 19\pi_4 \qquad (1.48)$$

Het antwoord op het beslissingsprobleem rond de prijzen van boter, melk en kaas wordt verkregen door het maximaliseren van (1.48) onder de bijvoorwaarden (1.44), (1.46) en (1.47) en de bijvoorwaarde $\pi_i \geq 0$ $(i=1,\ldots,4)$.

De beslissingsproblemen no. 6, 7 en 8 blijken te herleiden te zijn tot een wiskundeprobleem van het volgende type: Bepaal het maximum of minimum van de functie

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_o \qquad (1.49)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j &\leq b_i && (i=1,\ldots,m_1)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j &\geq b_i && (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)\\
\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j &= b_i && (i=,_1+m_2+1,\ldots,m)\\
x_j &\geq 0 && (j=1,\ldots,n) \qquad (1.50)
\end{aligned}$$

Wiskunde problemen van deze vorm geven wij aan met de naam <u>kwadratische programmeringsproblemen</u>.

Wij hebben nu de meest voorkomende typen van programmeringsproblemen beschouwd. In alle bijvoorwaarden kwamen de beslissingsgrootheden x_j $(j=1,\ldots,n)$ slechts voor de eerste graad. In de tot dusver beschouwde kriterium functies kwamen de beslissingsvariabelen x_j hoogstens in de tweede graad voor. Er bestaan echter beslissingsproblemen die herleid

moeten worden tot meer ingewikkelde wiskunde problemen. Het algemene mathematische programmeringsprobleem formuleren wij dan ook als volgt:

Bepaal het minimum van:

$$z = f(x_1,\ldots,x_n) \tag{1.51}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} g_i(x_1,\ldots,x_n) &\leq b_i && (i=1,\ldots,m_1)\\ g_i(x_1,\ldots,x_n) &\geq b_i && (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)\\ g_i(x_1,\ldots,x_n) &= b_i && (i=m_1+m_2+1,\ldots,m) \end{aligned} \tag{1.52}$$

waarbij x_j slechts waarden mag aannemen uit een verzameling van getallen I_j, m.a.w.

$$x_j \in I_j \qquad (j=1,2,\ldots n) \tag{1.53}$$

In de behandelende beslissingsproblemen was de verzameling I_j òf het interval $[0,\infty)$ òf een verzameling van de niet-negatieve gehele getallen. Zijn er sommige x_j die enkel gehele waarden aan kunnen nemen en andere x_j die reeële waarden aannemen dan spreekt men van <u>gemengde programmering</u>.

We zullen in hoofdstuk 2 Lineaire programmeringsproblemen beschouwen waarbij we de kriteriumfunctie z zullen minimaliseren.

Dit is geen beperking, want maximaliseren van $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ komt neer op het minimaliseren van $-z = -\sum_{j=1}^{n} x_j x_j$ en omgekeerd .

Hoofdstuk 2. Lineaire programmering. (L.P.)

§ 1. Het lineaire programmeringsprobleem

In hoofdstuk 1 werd het L.P.-probleem als volgt gedefinieerd:

Eerste formulering:

bepaal het minimum van de functie

$$z^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.1.1)$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1) \qquad (2.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m) \qquad (2.1.4)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.1.5)$$

Een stelsel van n getallen x_j, dat voldoet aan (2.1.1), (2.1.3) en (2.1.4) noemen we een oplossing. Indien dit stelsel bovendien voldoet aan (2.1.5) dan spreken wij van een toegelaten oplossing. Een optimale oplossing is een toegelaten oplossing waarvoor (2.1.1) minimaal is.

Men zal zich kunnen afvragen of (2.1.5) geen beperking is. Dit is niet het geval. Stel dat een variabele x_k ook negatieve waarden aanneemt. Voer dan twee nieuwe variabelen $x_k^{\times}$ en $x_k^{\times\times}$ in gedefinieerd door:

$$x_k^{\times} = \begin{cases} 0 & \text{als } x_k \leq 0 \\ x_k & \text{als } x_k \geq 0 \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

$$x_k^{\times\times} = \begin{cases} 0 & \text{als } x_k \geq 0 \\ -x_k & \text{als } x_k \leq 0 \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

Direct uit de def. volgt: $x_k^{\times} \geq 0$ $x_k^{\times\times} > 0$ en verder $x_k^{\times} = x_k^{\times\times} - x_k$

Men behoeft slechts x_k in (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) te vervangen door $x_k^{\times} - x_k^{\times\times}$

In het hierna volgende zullen wij steeds onderstellen dat de constanten $b_i \geq 0$ zijn. (i=1,...,m).

Ook dit is geen beperking, omdat een negatieve b_i overgaat in een positieve $b_i^1 = -b_i$ als men rechter- en linkerlid van de betreffende relatie met -1 vermenigvuldigt. Bedenk echter dat na vermenigvuldiging met -1 $\geq$ overgaat in $\leq$ en omgekeerd.

Door achteraf de gelijk- en ongelijkheden te herschikken kan men ervoor zorgen dat de bijvoorwaarden in de gewenste vorm komen met $b_i \geq 0$. We zullen nu de formulering van het L.P.-probleem iets wijzigen. Daartoe voeren wij in de variabelen:

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \qquad (i=1,...,m_1) \qquad (2.1.10)$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i=m_1+1,...,m_1+m_2) \qquad (2.1.11)$$

Deze variabelen zullen wij aangeven met de naam <u>verschilvariabelen</u>. In de literatuur spreekt men van <u>slackvariables</u>. De verschilvariabelen geven het verschil aan tussen de linker- en rechterleden van (2.1.2) en (2.1.3).

Uit de definitie van deze variabelen volgt direct:

$$x_{n+i} \geq 0 \qquad (i=1,...,m_1+m_2) \qquad (2.1.12)$$

We zullen in stelling 1.1. bewijzen dat het L.P.-probleem uit de eerste formulering equivalent is met:

<u>Tweede formulering</u>.

bepaal het minimum van de functie

$$z^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m_1+m_2} c_{n+i} x_{n+i} \qquad (2.1.13)$$

met

$$c_{n+i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.14)$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0$$
$$x_{n+i} \leq 0 \qquad (2.1.15)$$

Stelling 1.1.

Als het minimum van (2.1.1) onder (2.1.2) t.m (2.1.5) bereikt wordt voor $x_j = x_j^{(1)}$ $(j=1,\ldots,n)$ dan is (2.1.13) onder (2.1.15) minimaal voor

$$x_j = x_j^{(1)} \qquad (j=1,\ldots,n)$$

$$x_{n+i} = x_{n+i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(1)} - b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$x_{n+i} = x_{n+i}^{(1)} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(1)} \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.16)$$

Omgekeerd als het minimum van (2.1.13) onder (2.1.15) bereikt wordt voor $x_j^{(2)}$ $(j=1,\ldots,n+m_1+m_2)$ dan is (2.1.1) onder (2.1.2) t.m. (2.1.5) minimaal voor $x_j = x_j^{(2)}$ $(j=1,\ldots,n)$.

Anders gezegd: De optimale oplossing van probleem uit formulering 1 is gelijk aan de optimale oplossing voor probleem uit formulering 2, mits deze oplossingen bestaan.

Het hoeft geen betoog, dat probleem 1 onoplosbaar is, en dus ook

probleem 2, als voorwaarden (2.1.2) t.m. (2.1.5) tegenstrijdig zijn.

Bewijs a) uitgaande van de optimale oplossing $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ voor probleem 1 construeren we een oplossing voor probleem 2.

Definieer daartoe

$$x_{n+i}^{(1)} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(1)} \quad (i=1,\ldots,m_1) \qquad (2.1.17)$$

$$x_{n+i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(1)} - b_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.18)$$

Vul de vektor $x^{(1)}$ aan met deze m_1+m_2 componenten en de zo verkregen vektor $(x_1^{(1)},\ldots,x_{n+m_1+m_2}^{(1)})$ voldoet aan de bijvoorwaarden (2.1.15) (dit volgt direct uit de def. van $x_{n+i}^{(1)}$ en het feit dat $x^{(1)}$ aan (2.1.1) t/m (2.1.5) voldoet). Dus we hebben een toegelaten oplossing van $z^{(2)}$ gevonden. Daar $x_j^{(2)}$ $(j=1,\ldots,n+m_1+m_2)$ de optimale oplossing (minimum) is van $z^{(2)}$ geldt:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^{(2)} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^{(1)} \qquad (2.1.19)$$

(de c_{n+i} zijn immers 0).

b) Uitgaande van de optimale oplossing $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ldots,x_{n+m_1+m_2}^{(2)}\right)$ voor probleem 2. Vinden we een toegelaten oplossing voor probleem 1 door de eerste n componenten van deze vektor $x^{(2)}$ te nemen. Het is duidelijk dat $\left(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)}\right)$ aan de voorwaarde (2.1.2) t.m. (2.1.5) voldoet, immers $x^{(2)}$ voldoet aan (2.1.15) en de $x_{n+i}^{(3)}$ zijn ≥ 0.
$x^{(1)}$ is de optimale oplossing voor $z^{(1)}$

dus

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^{(1)} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^{(2)} \qquad (2.1.20)$$

Uit (2.1.19) en (2.1.20) volgt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{(2)}$$

waarmee de stelling bewezen is.

Tenslotte beschouwen wij nog een derde formulering (de derde formulering verschilt slechts dan van de tweede als $m_1 < m$).

Derde formulering

Bepaal het minimum van de functie:

$$z^{(3)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m_1+m_2} c_{n+i} x_{n+i} + M \sum_{i_1=m_1+1}^{m} y_{n+i} \qquad (2.1.21)$$

met

$$c_{n+i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.22)$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + y_{n+i} = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_{n+i} = b_i \qquad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m) \qquad (2.1.23)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m_1+m_2)$$

$$y_{n+i} \geq 0 \qquad (i=m_1+1,\ldots,m) \qquad (2.1.24)$$

de y_{n+i} heten artificial variables.

Als wij zoeken naar die waarden van x_j en y_{n+i} waarvoor (2.1.21) minimaal is en als M een zeer groot positief getal is dan zal de optimale oplossing zo weinig mogelijk van de variabelen y_{n+i} bevatten

omdat deze de functie $z^{(3)}$ sterk beïnvloeden als ze niet nul zijn.

Als de voorwaarden (2.1.2) t/m (2.1.5) dan ook niet tegenstrijdig zijn dan zal, mits we M zeer groot nemen, voor de optimale eindoplossing van het derde probleem gelden:

$$y_{n+i} = 0 \qquad (i=m_1+1,\ldots,m) \qquad (2.1.25)$$

We zien dat als (2.1.25) geldt, en we (2.1.25) in (2.1.21), (2.1.23) en (2.1.24) substitueren dat de derde formulering overgaat in de tweede formulering. De eindoplossing van ons probleem uit derde formulering is dan de eindoplossing voor het probleem uit de tweede formulering.

Het gevaar bestaat echter dat als M niet groot genoeg gekozen wordt niet al de variabelen y_{n+i} nul worden, terwijl dit toch mogelijk is. Als we M bizonder groot nemen, dat gaat echter de precisie bij de berekeningen verloren (een computer werkt bij reële variabelen slechts met eindige precisie). Er kleven dus nadelen aan deze derde formulering.

Men kan zich dan ook afvragen of het enige zin heeft de derde formulering te verkiezen boven de eerste twee. De keuze van de derde formulering wordt ingegeven door het feit dat de bestaande oplossingstechnieken voor L.P.-problemen pas dan kunnen worden toegepast als men beschikt over een <u>toegelaten oplossing</u>. Het opsporen van een toegelaten oplossing kan bij L.P.-problemen uitgedrukt in de eerste twee formuleringen een tijdrovende bezigheid zijn. (aangenomen dat het mogelijk is een toegelaten oplossing te vinden).

In derde formulering daarentegen is een toegelaten oplossing altijd direct beschikbaar. Een beginoplossing wordt gegeven door

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i && (i=1,\ldots,m_1) \\ y_{n+i} &= b_i && (i=m_1+1,\ldots,m) \\ x_j &= 0 && (j=1,\ldots,n) \\ x_{n+i} &= 0 && (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \end{aligned} \qquad (2.1.26)$$

We kunnen dus direct starten.

Een tweede vraag die in dit verband rijst, luidt:"Wat gebeurt er als de bijvoorwaarden in de eerste twee formuleringen strijdig zijn en er derhalve geen toegelaten oplossing bestaat? Het antwoord op deze vraag is geruststellend. Indien de bijvoorwaarden in de eerste twee formuleringen strijdig zijn kan dit uit de eindoplossing van het L.P.-probleem in de derde formulering worden afgelezen. De oplossingstechniek is dus tevens een detectiemiddel voor onoplosbare problemen.

We zullen nu een andere methode beschouwen om het probleem uit de tweede formulering op te lossen, de z.g.n. <u>twee fasen methode</u>.

We nemen aan dat $z^{(2)}$ een toegelaten oplossing bezit, dus dat de voorwaarden (2.1.15) niet strijdig zijn.

Beschouw nu het volgend L.P.-probleem, dat de standaardvorm heeft van de derde formulering, d.w.z. in <u>elke vergelijking</u> kunnen we precies <u>één variabele</u> met coëfficient +1 aanwijzen die <u>alléén</u> in de betreffende vergelijking voorkomt en in geen enkele andere vergelijking.

Bepaal het minimum van de functie

$$z^{(4)} = \sum_{i=m_1+1}^{m} y_{n+i}$$

onder de bijvoorwaarden (2.1.23) en (2.1.24).

Het is vrij eenvoudig in te zien dat de optimale eindoplossing bestaat en dat in de optimale oplossing geldt: $y_{n+i} = 0$ $(i=m_1+1,\ldots m)$

Immers de voorwaarden (2.1.15) zijn niet strijdig en als $y_{n+i} = 0$ $(i=m_1+1,\ldots m)$ dan gaan (2.1.23) en (2.1.24) over in (2.1.15).

Het oplossingsproces voor problemen die van het type zijn als in de derde formulering, dus ook het oplossingsproces voor bovenstaande probleem, is een <u>eindig iteratieproces</u>.

Dit proces zullen we laten leren kennen.

Bij elke stap worden de bijvoorwaarden in equivalente bijvoorwaarden veranderd, en wel zodat ook die steeds de standaardvorm bezitten

Aan het eind van het oplossingsproces van $z^{(4)}$ onder (2.1.23) en (2.1.24) vinden we waarden voor de variabelen x_{n+i}, x_j en y_{n+i},

waarbij de $y_{n+i} = 0$.

De gevonden waarden voor x_{n+i} en x_j vormen een toegelaten oplossing van $z^{(2)}$. De tevens aan het eind van het iteratieproces gevonden voorwaarden die de standaardvorm bezitten, zijn equivalent met (2.1.15).

We zien dus dat we om nu vervolgens de optimale oplossing voor $z^{(2)}$ te bepalen, voor de tweede keer (vandaar de naam twee-fasen-methode) een L.P.-probleem van het type als in de 3^{de} formulering moeten oplossen.

We kunnen nu de conclusie trekken dat we onze aandacht moeten besteden aan het volgende wiskunde-probleem:

Standaardprobleem

Bepaal het minimum van de functie

$$z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \qquad (2.1.27)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n+m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m) \qquad (2.1.28)$$

Al onze vorige problemen zijn speciale gevallen van dit probleem.

opmerking: De constanten a_{ij}, b_j, c_j in (2.1.27) en (2.1.28) zijn uiteraard niet dezelfde als in (2.1.21), (2.1.22), (2.1.23) en (2.1.24). Het gaat er hier slechts om de vorm van de functie en bijvoorwaarde te geven.

Voor de constanten b_i in 2.1.28 geldt:

$$b_i \geq 0 \qquad (2.1.29)$$

In §4 zullen wij een oplossingstechniek geven voor dit standaardprobleem.

2. De wiskundige achtergrond [1]

We zullen veronderstellen dat de lezer bekend is met de eerste beginselen van de lineaire algebra. Niettemin zullen wij enkele begrippen en stellingen memoreren uit deze, voor de mathematische programmering zo belangrijke theorie.

Een m bij n rechthoek van getallen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

heet een m x n matrix. De getallenrijen $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ heten de rijvektoren van de matrix. De getallenrijen $(a_{1j},\ldots,a_{mj})$ zijn de kolomvektoren van de matrix. De getallen a_{ij} noemen we de dementen van de matrix. a_{ij} is het element in rij i en kolom j. De kolomvektoren geven we aan door $\vec{a}_j$, de rijvektoren door $\vec{a}^i$. We kunnen $\vec{a}_j$ als een m x 1 deelmatrix en $\vec{a}^i$ als een 1 x n deelmatrix beschouwen.

Matrices geven we aan met hoofdletters A,B,C,... De optelling C = A+B van twee matrices is alléén dan gedefinieerd als zowel A als B een m x n matrix is. Voor de m x n matrix C geldt: de elementen worden gegeven door $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. De matrixoptelling voldoet aan de commutatieve en associatieve wet

$$A + B = B + A \qquad (2.2.1)$$

$$A + (B+C) = (A+B) + C \qquad (2.2.2)$$

Het produkt C = A B van twee matrices A en B is alléén dan gedefinieerd als het aantal kolommen van de matrix A gelijk is aan het aantal rijen van B, dus als A een m x n matrix en B een n x k matrix dan is C = AB

---

1) G. Hadley. Lineair programming. Addison-Wesley Publishing Company.

gedefinieerd met C een n x k matrix, en voor de elementen van C geldt:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Uit deze produktregel volgt dat i^{de} rijvektor $\vec{c}^{\,i}$ van C gegeven wordt door:

$$\vec{c}^{\,i} = \vec{a}^{\,i}\, B$$

Voor de j^{de} kolomvektor $\vec{c}_j$ van C geldt:

$$\vec{c}_j = A\, \vec{b}_j \quad (j = 1,\ldots,k) \tag{2.2.3}$$

Merk op dat als AB gedefinieerd is dat BA iha niet gedefinieerd is, zou dit wel het geval zijn dan geldt iha niet AB = BA. Wel geldt (mits de operaties gedefinieerd zijn)

$$(AB)C = A(BC) \tag{2.2.4}$$

$$A(B+C) = AB + BC \tag{2.2.5}$$

λA is de matrix verkregen door de matrix A met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, de elementen van λA zijn λa_{ij}, dus elk element van A is met λ vermenigvuldigt.

Is een matrix A een n x n matrix (m=n) dan spreken we van een vierkante matrix. Voorbeelden zijn:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$, de eenheidsmatrix

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$, de nulmatrix

De <u>**getspiegelde**</u> van een matrix A geven we aan met A'

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dan

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Is $A' = A$ dan heet A <u>symmetrisch</u>.

De volgende relaties gelden:

$$I_m A = A \cdot I_n \qquad \text{(A is een m x n matrix)}$$

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$(AB)' = B' A'$$

$$I_n' = I_n$$

$$(A^{-1})' = A \qquad (2.2.6)$$

Indien van een (m x n) matrix A (m-k) rijen en (n-s) kolommen worden weggelaten, dan noemen we de resulterende k x s matrix een <u>submatrix</u> van A.

We kunnen elke matrix splitsen in submatrices, dit kan bijzonder nuttig zijn, vooral bij vermenigvuldiging.

De matrix A gegeven door

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \qquad (2.2.7)$$

kan b.v. worden gesplitst in de volgende vier submatrices

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} , \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} \qquad (2.2.8)$$

Dus geldt voor A:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad (2.2.9)$$

Laat C = AB zijn, dan volgt direct uit de produktregel $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ dat elke submatrix D van een produktmatrix het produkt is van een door D bepaalde submatrix van A en van een door D bepaalde submatrix van B.

Als AB gedefinieerd is en A en B zijn gesplitst als

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

dan geldt:

$$A\,B = \begin{bmatrix} A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} & A_{11}\,B_{12} + A_{12}\,B_{22} & A_{11}\,B_{13} + A_{12}\,B_{23} \\ A_{21}\,B_{11} + A_{22}\,B_{21} & A_{21}\,B_{12} + A_{22}\,B_{22} & A_{21}\,B_{13} + A_{22}\,B_{23} \end{bmatrix} \qquad (2.2.10)$$

Dit is juist als elk produkt $A_{ik}\,B_{kj}$ gedefinieerd is.

Aleen bij een <u>vierkante</u> n x n matrix A kunnen we van de <u>determinant</u> van A spreken, die gedefinieerd is door het volgende getal:

$$|A| = \sum_{P} (\pm)\, a_{1i}\, a_{2j} \cdots a_{nr} \qquad (2.2.11)$$

de som genomen over alle permutaties van i,j,...,r waarbij

$$\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} = \begin{matrix} + \text{ als } i,j,...,r \text{ een even permutatie is van } (1,2,...,n) \\ - \text{ als } i,j,...,r \text{ een oneven permutatie is van } (1,2,...,n) \end{matrix} \qquad (2.2.12)$$

Men kan eenvoudig nagaan dat

$$|A| = |A^0| \qquad (2.2.13)$$

Als A_{ij} nu die submatrix van A voorstelt welke wordt verkregen door i^{de} rij en j^{de} kolom te schrappen en als $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ dan geldt voor i = 1,2,...,n

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{A}_{ij} \qquad (2.2.14)$$

Het getal $\mathcal{A}_{ij}$ heet de <u>cofactor</u> van het element a_{ij}. De uitdrukking (2.2.14) heet de <u>cofactorontwikkeling</u> van |A| volgens de i^{de} rij. Uit (2.2.13) volgt dat we |A| ook als volgt kunnen bepalen

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathcal{A}_{ij} \qquad (2.2.15)$$

De uitdrukking (2.2.15) heet de cofactor-ontwikkeling van |A| volgens de j^{de} kolom.

De volgende eigenschappen van determinanten worden bekend verondersteld:

1) Een verwisseling van twee rijen (kolommen) in een n x n matrix A verandert het teken van |A|.
2) Een vermenigvuldiging van ieder element uit <u>één</u> rij (kolom) van A met een getal λ vermenigvuldigt eveneens |A| met λ. Merk wel op dat $|\lambda A| \neq \lambda \cdot |A|$, immers $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.
3) Een optelling van een veelvoud van een rij $\vec{a}^{i_1}$ bij een rij $\vec{a}^{i_2}$ $(i_1 \neq i_2)$ (of kolom $\vec{a}_{j_1}$ bij kolom $\vec{a}_{j_2}$, $j_1 \neq j_2$) verandert niet de waarde van de determinant.
4) Als A en B vierkante n x n matrices zijn dan geldt

$$|A\ B| = |A| \cdot |B| \qquad (2.2.16)$$

Uit 1) volgt:

5) Voor een vierkante matrix A met twee gelijke rijen (kolommen) geldt:

$$|A| = 0 \qquad (2.2.17)$$

Uit 2) volgt:

6) De determinant van een vierkante matrix met minstens één rij (kolom) nullen is gelijk aan nul.

Als A en A^* twee matrices zijn waarvan alle rijen (of kolommen) op de k^{de} na identiek zijn en als de k^{de} rij (kolom) van A^* een herhaling is van de i^{de} rij (kolom) dan geldt (k^{de} rij ontwikkeling)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathcal{A}_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^* \mathcal{A}_{kj}^* = |A^*| = 0 \qquad i \neq k \qquad (2.2.18)$$

en dus

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathcal{A}_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \mathcal{A}_{jk} = |A| \ \delta_{ki} \qquad (2.2.19)$$

waarbij

$$\delta_{ki} = \begin{matrix} 1 \text{ als } k = i \\ 0 \text{ als } k \neq i \end{matrix} \qquad (2.2.20)$$

Immers combineer (2.2.18) met (2.2.14) en (2.2.15).

Beschouwen wij thans de matrix A^+ gedfinieerd door

$$A^+ = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{21} & \cdots & \mathcal{A}_{n1} \\ \mathcal{A}_{12} & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \mathcal{A}_{1n} & & \cdots & \mathcal{A}_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.2.21)$$

We zien A^+ is de gespiegelde van de matrix verkregen uit A door elk element a_{ij} te vervangen door zijn cofactor $\mathcal{A}_{ij}$.

$$A^+A = A \cdot A^+ = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdot & & & 0 \\ 0 & \cdots & & |A| \end{bmatrix} = |A| \cdot I_n \qquad (2.2.22)$$

Dit volgt uit (2.2.19) en (2.2.21).

Een belangrijk begrip in de matrixtheorie is het begrip <u>inverse van een matrix</u>.

Gegeven een vierkante matrix A. Als er een vierkante matrix B bestaat die voldoet aan

$$AB = BA = I \qquad (2.2.23)$$

dan heet B de inverse van A. Notatie: A^{-1} . Alleen vierkante matrices kunnen een inverse bezitten $1 = |AB| = |A| . |B|$ dus A bezit alléén een inverse als $|A| \neq 0$.

Als voor een matrix A geldt $|A| = 0$ dan heet A <u>singulier</u> is $|A| \neq 0$ dan noemen we A <u>niet-singulier</u>.

Uit (2.2.22) volgt:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{+} \qquad (2.2.24)$$

De volgende relaties worden bekend verondersteld

1) $AB = I \quad AD = I \rightarrow B = D$, d.w.z. inverse is éénduidig bepaald.
2) $B = A^{-1} \leftrightarrow B^{-1} = A$
3) $(A^{-1}) = A$
4) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (mits A, B niet-singulier)
5) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
6) als A niet singulier is en $AB = 0$ dan $B = 0$ (2.2.25)

Het is vaak handig om de inverse van een matrix, vooral als deze groot is, als volgt te bepalen:

Beschouw de niet-singuliere n x n matrix M (dus M^{-1} bestaat) die als volgt gesplitst is:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad (2.2.26)$$

waarbij α een s x s submatrix is, β een s x m submatrix, γ een m x s submatrix, en δ een m x m submatrix (dus n = s+m).

Omdat M niet singulier is bestaat M^{-1} welke als volgt wordt aangegeven

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (2.2.27)$$

waarbij A is s x s, B is s x m, C is m x s en D is m x m submatrix.

Veronderstel dat de matrix δ een inverse heeft en dat δ^{-1} bekend is.

Uit $MM^{-1} = I$ volgt

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \qquad (2.2.28)$$

of

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta C &= I_s & \qquad \alpha B + \beta D &= 0 \\ \gamma A + \delta C &= 0 & \qquad \gamma B + \delta D &= I_m \end{aligned} \qquad (2.2.29)$$

Lossen we hieruit A, B, C en D op dan vinden we:

$$\begin{aligned} A &= (\alpha - \beta\ \delta^{-1}\ \gamma)^{-1}, & \qquad B &= -A\ \beta\ \delta^{-1} \\ C &= -\delta^{-1}\ \gamma\ A, & \qquad D &= \delta^{-1} - \delta^{-1}\ \gamma\ B \end{aligned} \qquad (2.2.30)$$

Voor het bepalen van de inverse van M behoeven we dus slechts δ en $(\alpha - \beta\ \delta^{-1}\ \gamma)$ te inverteren. Desgewenst kunnen ook deze inversies m.b.v. één of meer splitsingen worden uitgevoerd.

Stel dus dat we een matrix volgens het bovenstaande schema willen inverteren, dan splitsen we de matrix zó, dat δ van een grootte is die eenvoudig te inverteren is.

We zullen nu het geval beschouwen dat M gegeven wordt door:

$$M = \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & R \end{bmatrix} \qquad (2.2.31)$$

Als R^{-1} bestaat en bekend is, dan wordt M^{-1} geschreven door

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & -QR^{-1} \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2.2.32)$$

We zullen bij de L.P.-problemen vaak dit soort matrices ontmoeten.

Laat A een vierkante matrix zijn. Onder zekere voorwaarden kunnen wij een machtreeksontwikkeling opschrijven voor $(I-A)^{-1}$.

We noteren $AA = A^2$, $AAA = A^3$ etc., $A^0 = I$.

Met

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \qquad (2.2.33)$$

bedoelen we dat voor elk element $a_{ij}^{(k)}$ van A^k geldt:

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = 0 \qquad (2.2.34)$$

$(I-A)\ (I+A+...+A^k) = I-A^{k+1}$

Als (2.2.33) geldt dan zien we dat

$$(I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I \qquad (2.2.35)$$

of

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \qquad (2.2.36)$$

<u>Stelling 2.2.1.</u> Een voldoende voorwaarde voor (2.2.34) is

$$0 \leq a_{ij} < 1 \qquad (i,j= 1,...,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (j = 1,...,n) \qquad (2.2.37)$$

<u>Bewijs:</u> Uit (2.2.37) volgt dat er een r bestaat met $0 < r < 1$, zodat

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < r \qquad (j=1,...,n)$$

$A^2 = AA$. Voor de elementen $a_{ij}^{(2)}$ van A^2 geldt:

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj} \qquad (2.2.38)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj} \leq r^2 \qquad (i,j,=1,...,n)$$

Zodat $a_{ij}^{(2)} \leq r^2$. Zetten we dit proces voort, dan zien we $a_{ij}^{(k)} \leq r^k$ dus $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = 0$ (alle i,j).

We hebben reeds gezien dat een matrix bestaande uit één rij een rijvektor genoemd wordt, terwijl een matrix bestaande uit één kolom een kolomvektor wordt genoemd. Zoals we weten is een n-dimensionale vektor $\vec{a}$ een geordend n-tal van reële getallen, geschreven als rij $(a_1,\ldots,a_n)$ of als kolom $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Meetkundig is er geen verschil tussen een rij- en een kolomvektor, beiden kunnen worden voorgesteld door een lijnsegment getrokken uit de oorsprong van een n-dimensionaal coördinatensysteem. In deze voorstelling geven de componenten van de vektor de coördinaten aan van het eindpunt van het lijnsegment.

We zullen zowel rij- als kolomvektoren gebruiken, doch bijna altijd kolomvektoren.

<u>Definitie</u> 2.2.1. Een eenheidsvektor, aangeduid met $\vec{e}_i$, is een vektor met als i^{de} component het getal één en de overige componenten nul.

Voor vektoren met n componenten zijn er n eenheidsvektoren.

$$\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0);\ \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0);\ldots;\ \vec{e}_n = (0,\ldots,0,1) \qquad (2.2.38a)$$

Meetkundig gezien liggen de eenheidsvektoren langs de assen van het coördinatenstelsel.

Voor elke vektor $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ geldt

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + \ldots + a_n\,\vec{e}_n \qquad (2.2.39)$$

<u>Definitie</u> 2.2.2. De nul- en somvektor worden resp, gegeven door

$$\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$$

$$\vec{1} = (1,1,\ldots,1) \qquad (2.2.40)$$

Het matrixprodukt van de rijvektor $\vec{1}$ en de kolomvektor $\vec{b}$ wordt gegeven door $\vec{1} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

<u>Definitie</u> 2.2.3. Het <u>scalair-produkt</u> van twee n-component vektoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ wordt gegeven door het <u>reële getal</u>

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \qquad (2.2.41)$$

We kunnen het scalair produkt altijd als matrix produkt opvatten, als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kolomvektoren zijn geven we het scalair produkt aan door $\vec{a}' \circ \vec{b}$. (produkt van een 1 x n matrix en een n x 1 matrix, met als uitkomst het getal, een 1 x 1 matrix, $\sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$)
Is $\vec{a}$ een rijvektor en $\vec{b}$ een kolomvektor, dan geven we het scalair produkt aan met $\vec{a} \circ \vec{b}$, en we duiden het aan met $\vec{a} \circ \vec{b}'$ als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ rijvektoren zijn.

Definitie 2.2.4. De afstand tussen de eindpunten van twee n-dimensionale kolomvektoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ wordt gegeven door

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \left[(\vec{a}-\vec{b})' \circ (\vec{a}-\vec{b})\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.42)$$

Definitie 2.2.5. De cosinus van de hoek θ tussen twee n-dimensionale kolomvektoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ wordt gegeven door

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}' \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \circ |\vec{b}|} \qquad (2.2.43)$$

Definitie 2.2.6. Twee n-dimensionale kolomvektoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$ heten orthogonaal als $\vec{a}' \circ \vec{b} = \vec{0}$ (2.2.44)

Definitie 2.2.7. Een n-dimensionaal Euclidische ruimte, gesymboliseerd door E^n, is gedefinieerd als de verzameling van alle vektoren $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Voor deze vektoren zijn optelling en vermenigvuldiging met een scalair gedefinieerd en wel overeenkomstig de operaties bij matrices. Bovendien is aan elk paar vektoren een niet-negatief getal toegevoegd, de afstand genoemd, gegeven door (2.2.42).

Definitie 2.2.8. Een stelsel vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ uit de E^n heet lineair afhankelijk als er een m-tal reële getallen λ_i bestaat,

die niet allen nul zijn, zodat

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \qquad (2.2.45)$$

Als (2.2.45) alleen maar geldt als $\lambda_i = 0$ $(i=1,\ldots,m)$ dan heten $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ <u>lineair onafhankelijk</u>.

<u>Definitie</u> 2.2.9. Een vektor $\vec{b}$ heet afhankelijk van het stelsel $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ als er getallen μ_i bestaan zodat

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{a}_i .$$

opmerking: er is geen beperking opgelegd aan de getallen μ_i.
Zo is $\vec{0}$ afhankelijk van elk stelsel vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$, immers

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_m .$$

We zullen nu een aantal stellingen geven, waarvan we veronderstellen dat ze de lezer bekend zijn. Niettemin zullen wij enkele van deze stellingen bewijzen.

<u>Stelling 2.2.2.</u> Als een m-tal vektoren $\vec{a}_i$ lineair afhankelijk is, dan kan minstens één van de vektoren geschreven worden als een lineaire combinatie van de anderen, en omgekeerd.

Gevolg: Een stelsel dat $\vec{0}$ bevat is lineair afhankelijk.

<u>Stelling 2.2.3.</u> Als van een m-tal vektoren maximaal k vektoren lineair onafhankelijk zijn dan kunnen de overige (m-k) vektoren lineair in deze k vektoren worden uitgedrukt.

<u>Definitie</u> 2.2.10. Een verzameling van vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ spant een ruimte E^n op als elke vektor in de E^n geschreven kan worden als een lineaire combinatie van deze r vektoren.

<u>Definitie</u> 2.2.11. Een stelsel <u>lineair onafhankelijke</u> vektoren in de E^n is een <u>basis</u> van de E^n als <u>elke</u> vektor in E^n als een lineaire combinatie van deze vektoren geschreven kan worden.

<u>Stelling 2.2.4.</u> Iedere representatie van een vektor als een lineaire combinatie van gegeven basisvektoren is uniek.

Bewijs: $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ basis, $\vec{b}$ willekeurige vektor.
Stel

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{a}_i \qquad (2.2.46)$$

dan geldt

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \mu_i) \vec{a}_i \qquad (2.2.47)$$

Aangezien de vektoren $\vec{a}_i$ lineair onafhankelijk zijn geldt

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad \lambda_i = \mu_i \quad (i = 1,\ldots,r)$$

Vervolgens zullen we de volgende belangrijke stelling bewijzen.

<u>Stelling 2.2.5.</u> Gegeven een verzameling basisvektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ voor de E^n. $\vec{b}$ willekeurige vektor in de E^n. Als in $\vec{b} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{a}_i$ geldt $\alpha_{i1} \neq 0$ dan is het stelsel dat men verkrijgt door in $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ de vektor a_{i1} door $\vec{b}$ te vervangen ook een basis voor de E^n.

Bewijs: Stel minstens één $\alpha_i \neq 0$ (zeker het geval als $\vec{b} \neq \vec{0}$). Hernummer de vektoren zodat $\alpha_r \neq 0$. We zullen eerst bewijzen dat $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{r-1}, \vec{b}$ lineair onafhankelijk zijn. Stel dat dit niet het geval is, dus

$$\sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \vec{a}_i + \lambda \vec{b} = 0 \qquad (2.2.48)$$

met minstens één λ_i of λ ongelijk aan nul. Er geldt $\lambda \neq 0$. Immers stel $\lambda = 0$, dan is minstens één $\lambda_i \neq 0$. Dan geeft dit tegenspraak, omdat $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{1-1}$ lineair onafhankelijk zijn (deelstelsel van onafhankelijk stelsel is ook onafhankelijk)

Verder weten we dat $\vec{b} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{a}_i \qquad (2.2.49)$

substitueer dit in (2.2.48)

$$\sum_{i=1}^{r-1} (\lambda_i + \lambda \alpha_i) \vec{a}_i + \lambda \alpha_r \vec{a}_r = 0 \qquad (2.2.50)$$

met $\lambda\ \alpha_r \neq 0$. Tegenspraak met $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ lineair onafhankelijk. Dus $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{r-1}, \vec{b}$ zijn lineair onafhankelijk.

Laat $\vec{c}$ willekeurige vektor in E^n zijn. De $\vec{a}_i$ $(i=1,\ldots,r)$ vormen een basis, dus

$$\vec{c} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \vec{a}_i \qquad (2.2.51)$$

Elimineer $\vec{a}_r$ in (2.2.51) d.m.v. (2.2.49) dit geeft

$$\vec{c} = \sum_{i=1}^{r-1} \left(\gamma_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r}\ \gamma_r\right) \vec{a}_i + \frac{\alpha_r}{\alpha_r}\ \vec{b} \qquad (2.2.52)$$

Dus $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{r-1}, \vec{b}$ vormen een basis voor de E^n.

<u>Opmerking</u>: Als $\alpha_r = 0$ en we vervangen $\vec{a}_r$ door $\vec{b}$ dan krijgen we een afhankelijk stelsel. Immers uit (2.2.49) volgt

$$\vec{b} - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

<u>Stelling 2.2.6</u>. Iedere basis van de E^n bevat <u>precies</u> n vektoren.

Bewijs: We zullen eerste bewijzen dat ieder tweetal basissen een gelijk aantal vektoren bevat. Laat $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_u$ een verzameling van basisvektoren van de E^n zijn en $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_v$ een andere verzameling basisvektoren. We willen aantonen u=v. We kunnen de vektoren $\vec{a}_i$ zo nummeren zodat wanneer b_{uv} als een lineaire combinatie van de $\vec{a}_i$ geschreven is, $\vec{b}_v = \sum_{i=1}^{uv} \lambda_i \vec{a}_i$, dat dan $\lambda_u \neq 0$.

Stelling 2.2.5 leert ons nu $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{u-1}, \vec{b}_v$ is een basis van de E^n. Schrijven we nu

$$b_v = \sum_{i=1}^{u-1} \delta_i \vec{a}_i + \delta b_v \qquad (2.2.53)$$

dan is tenminste één $\delta_i \neq 0$, immers $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_v$ zijn lineair onafhankelijk. Door de $\vec{a}_i$ desnoods opnieuw te laten hernummeren, kunnen we ervoor zorgen dat $\delta_{u-1} \neq 0$.

$\vec{a}_1,\ldots,a_{u-2}, \vec{b}_{v-1}, \vec{b}_v$ een basis van de E^n.

We kunnen dit eliminatieproces voortzetten tot een basis is gevonden die één van de volgende vormen heeft:

$$\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{u-v},\ b_1,\ldots,b_v \qquad u > v \qquad (2.2.54)$$

$$\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_v \qquad u = v \qquad (2.2.55)$$

$$\vec{b}_{v-u+1},\ldots,\vec{b}_v \qquad u < v \qquad (2.2.56)$$

Omdat $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_v$ een basis vormen zijn de vektoren uit (2.2.54) lineair afhankelijk. Dit impliceert $u \leq v$.

Omdat $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_v$ een basis vormen kan (2.2.56) geen basis zijn, bijgevolg $u \geq v$. Dus $u = v$.

Om nu het werkelijke aantal vektoren in een basis van de E^n te vinden, behoeven we slechts een basis te vinden en het aantal vektoren te tellen in deze basis.

Aangezien de n-eenheidsvektoren een basis vormen, (ga na!), geldt dat elke basis van de E^n precies uit n vektoren bestaat.

<u>Stelling 2.2.7.</u> Elk stelsel van n lineaire onafhankelijk vektoren in de E^n vormen een basis voor de E^n.

Bewijs: Laat $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ een stelsel van n lineair onafhankelijke vektoren zijn en laat $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ de basis van de eenheidsvektoren zijn. We kunnen volgens stelling 2.2.5 een vector $\vec{e}_i$ vervangen door $\vec{a}_n$.

M.b.v. volledige inductie zullen we nu bewijzen dat elke vektor $\vec{e}_i$ door een vektor $\vec{a}_j$ kan worden vervangen. Stel dat de vektoren $\vec{a}_{j+1},\ldots,\vec{a}_n$ reeds elk een vektor $\vec{e}_i$ uit de basis hebben verwijderd, zodat $\vec{e}_{i1},\ldots,\vec{e}_{ij}, \vec{a}_{j+1},\ldots,\vec{a}_n$ een basis vormen.

Er bestaan dus λ_k's zodat

$$\vec{a}_j = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \vec{e}_{ik} + \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k \qquad (2.2.57)$$

Minstens één $\lambda_k \neq 0$ met $k \leq j$, want anders zijn $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ niet lineair onafhankelijk. Dus $\vec{a}_j$ kan in de basis opgenomen worden ten koste van een $\vec{e}_i$.

Gevolg: Elk stelsel van meer dan n vektoren uit de E^n is lineair afhankelijk.

Geheel analoog te bewijzen is:

Stelling 2.2.8. (aanvullingsstelling van Steinitz.)

Elk stelsel van m lineair onafhankelijke vektoren in de E^n ($m < n$) kan worden aangevuld tot een basis voor de E^n.

Gevolg: Er zijn een onbegrensd aantal basissen voor de E^n.

Definitie 2.2.12. De kolommenrang (rijenrang) van een m x n matrix A is gelijk aan het maximum aantal onafhankelijke kolommen (rijen) van A.

Welbekend is de stelling dat de rijenrang van A gelijk is de kolommenrang van A, we kunnen dus zonder meer over de rang van een matrix A spreken, notatie: r(A).

Nuttige eigenschappen (we geven geen afleiding).

1° $r(A\,B) \leq \min\,[r(A), r(B)]$ (2.2.58)

2° als B niet singulier is $r(AB) = r(A)$ (2.2.59)

In de L.P. komen we soms voor het probleem te staan de inverse van een matrix te bepalen die slechts één kolom verschilt van een matrix waarvan de inverse bekend is.

Gegeven een niet-singuliere matrix $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ waarvan de inverse B^{-1} bekend is. Stel dat we de kolomvektor $\vec{b}_r$ vervangen door a en stel dat we de inverse willen bepalen van

$$B_a = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r-1}, \vec{a}, \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_n) \qquad (2.2.60)$$

De kolomvektoren van B vormen een basis voor de E^n. Ze zijn lineair onafhankelijk. ($|B| \neq 0$, dan en slechts dan als $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ lineair onafhankelijk zijn, een bekende stelling uit de lineaire algebra).

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{b}_i \qquad (2.2.61)$$

Nu zijn $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{r-1}, \vec{a}, \vec{b}_{r+1},\ldots,\vec{b}_r$ lineair onafhankelijk (dus B_a niet-singulier) dan en slechts dan als $y_r \neq 0$ (stelling 2.2.5).

Stel dus $y_r \neq 0$, dan

$$\vec{b}_r = -\sum_{i\neq r}^{n} \frac{y_i}{y_r} \vec{b}_i + \frac{1}{y_r} \vec{a} \qquad (2.2.62)$$

of in matrix notatie (zie opgave 2.2.1)

$$\vec{b}_r = B_a \vec{\eta} \qquad (2.2.63)$$

met

$$\vec{\eta} = \left[-\frac{y_1}{y_r},\ldots,-\frac{y_{r-1}}{y_r}, \frac{1}{y_r}, -\frac{y_{r+1}}{y_r},\ldots,-\frac{y_n}{y_r} \right] \qquad (2.2.64)$$

Ga zelf na dat

$$B_a \vec{e}_i = \vec{b}_i \quad i \neq r$$

dus (zie 2.2.3)

$$B = B_a E \qquad (2.2.65)$$

met

$$E = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{r-1}, \vec{\eta}, \vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n) \qquad (2.2.66)$$

of te wel

$$B_a^{-1} = E B^{-1} \qquad (2.2.67)$$

Voor het bepalen van B_a^{-1} moeten wij dus (2.2.66) kennen. De vektor $\vec{\eta}$ is éénduidig bepaald als $\vec{y}$ bekend is. Deze is eenvoudig te bepalen. Immers (2.2.61) luidt in matrixvorm

$$\vec{a} = B \vec{y} \qquad (2.2.68)$$

en dus

$$\vec{y} = B^{-1} \vec{a} \qquad (2.2.69)$$

Deze methode om y te berekenen zullen we vaak toepassen, de lezer wordt aangeraden hier aandacht aan te besteden.

Opmerking: De bovenstaande theorie geeft ons een andere manier om de inverse van een niet-singuliere matrix $B = (\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)$ te bepalen. We beginnen met de eenheidsmatrix I ($I^{-1} = I$) en vervangen telkens een $\vec{e}_i$ door een $\vec{b}_j$. Bijvoorbeeld, we kunnen de eerste kolom van I vervangen door de eerste kolom van B, dit geeft B_1. Dan de tweede kolom van B_1 vervangen door $\vec{b}_2$ enz.

Stelling 2.2.9. Voor een niet-singuliere matrix B geldt

$$B^{-1} = E_n\, E_{n-1},\ldots,\, E_1 \qquad (2.2.70)$$

waarbij

$$E_i = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_{i-1},\, \vec{n}_i,\, \vec{e}_{i+1},\ldots,\vec{e}_n)$$

$$\vec{n}_i = \left[-\frac{y_{1i}}{y_{ii}},\ldots,-\frac{y_{i-1,i}}{y_{ii}},\ \frac{1}{y_{ii}},\ -\frac{y_{i+1,i}}{y_{ii}},\ldots,\ -\frac{y_{ni}}{y_{ii}}\right]$$

$$\vec{y}_i = B_{i-1}^{-1}\ \vec{b}_i$$

$$B_i^{-1} = E_i\, E_{i-1},\ldots,E_1 = E_i\, B^{-1}{}_{i-1} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

en

$$B_0^{-1} = I \qquad (2.2.71)$$

We noemen (2.2.70) de produktvorm van de inverse.

Ter illustratie beschouwen we het volgende voorbeeld:

Gegeven een matrix $B = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ met

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2.2.72)$$

Gevraagd wordt de inverse te bepalen van de matrix

$B_a = (\vec{b}_1, \vec{a}, \vec{b}_3)$ met $\vec{a} = (1.8.6)$

Oplossing : Eerste bepalen we:

$$\vec{y} = B^{-1}\,\vec{a} = (26,\ 49,\ 97) \qquad (2.2.73)$$

Vervolgens vormen we de vektor

$$\vec{n} = \left(-\frac{y_1}{y_2}\,,\ \frac{1}{y_2}\,,\ -\frac{y_3}{y_2}\right) = \left(-\frac{26}{49}\,,\ \frac{1}{49}\,,\ -\frac{97}{49}\right) \qquad (2.2.74)$$

Daarna construeren we de matrix E door de tweede kolom van I_3 door $\vec{n}$ te vervangen

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{26}{49} & 0 \\ 0 & \frac{1}{49} & 0 \\ 0 & -\frac{97}{49} & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2.75)$$

En tenslotte

$$B_a^{-1} = E\,B^{-1} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -32 & -26 & 40 \\ 5 & 1 & 6 \\ -142 & 344 & -435 \end{bmatrix} \qquad (2.2.76)$$

Opgave 2.2.1. Zij $A = (\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$ een m x n matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

en $A\vec{y} = \vec{b}$, met $\vec{y}$ een n-dim. kolomvektor.

Toon aan door het opschrijven van de componenten van $\vec{b}$ dat $A\vec{y} = \vec{b}$ een andere schrijfwijze is voor $y_1\,\vec{a}_1+\ldots+y_n\,\vec{a}_n = \vec{b}$.

Opgave 2.2.2. Zij A een m x n matrix. $A = (\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$. Toon aan $A\,\vec{e}_i = \vec{a}_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Dus i h b als A een n xn matrix is en A is niet - singulier dan $\vec{e}_i = A^{-1}\,\vec{a}_i$.

Opgave 2.2.3. Bewijs ongelijkheid van Schwarz

$$|\vec{a}\,'.\,\vec{b}| \leq |\vec{a}|\ |\vec{b}|$$

Aanwijzing: beschouw $|\lambda\,\vec{a} + \vec{b}|^2 \geq 0$ voor alle λ.

We beschouwen nu het bekende probleem van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden $x_1,\circ\circ\circ,x_n$.

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \circ\circ\circ\circ + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ &\circ \\ &\circ \\ a_{m1}\,x_1 + \circ\circ\circ\circ + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2.2.77)$$

waarbij a_{ij}, en b_i bekende constanten zijn.

In matrixnotatie wordt (2.2.77)

$$A\,\vec{x} = \vec{b}.$$

Als m = n en A-niet-singulier dan geldt:

$$\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b} \qquad (2.2.78)$$

of volgens (2.2.24)

$$\vec{x} = \frac{1}{|A|}\,A^{+}\,\vec{b} \qquad (2.2.79)$$

en dus

$$x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}\,b_j \qquad (i=1,\circ\circ\circ,n) \qquad (2.2.80)$$

Uit de definitie van determinant volgt, dat $\sum_{j=1}^{n} A_{ji}\,b_j$ is de determinant van de matrix gevormd uit A door de i^{de} kolom van A door b te vervangen.

We zien dus dat

$$x_1 = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\circ\circ a_{1n} \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ b_n & a_{n2} \quad a_{nn} \end{vmatrix};\circ\circ;\; x_n = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11}\circ\circ\circ a_{1,n-1} & b_1 \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ a_{n1} \quad a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix} \qquad (2.2.81)$$

De bekende regel van Cramer, die meer van theoretische betekenis is.

<u>Opmerking</u>: Een handige methode om n vgl. met n onbekende op te lossen is de volgende. In (2.2.77) is dus nu m = n. Neem aan $a_{11} \neq 0$ (hernummer indien noodzakelijk)

1) deel de eerst volgende van (2.77) door a_{11}, dit geeft

$$x_1 + \hat{a}_{12}\,x_2 + \circ\circ\circ + \hat{a}_{1n}\,x_n = \hat{b}_1 \qquad (2.2.82)$$

2) Trek a_{i1} x (2.2.82) af van de i^{de} vergelijking in (2.2.77) $(i=r,\ldots,n)$ en dit geeft

$$\hat{a}_{i2}\, x_2 + \ldots + \hat{a}_{in}\, x_n = \hat{b}_i \qquad (2.2.83)$$

3) Herhaal deze procedure maar nu beginnende met de eerste vergelijking van (2.2.83), neem aan $a_{12} \neq 0$, etc.

Tenslotte vinden we een (2.2.77) gelijkwaardig stelsel vergelijkingen dat in matrixvorm gegeven wordt door

$$H\,\vec{x} = \vec{g} \qquad (2.2.84)$$

waarbij

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ 0 & 1 & & h_{2n} \\ \cdot & & 1 & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdots\cdots & & 01 \end{bmatrix} \qquad (2.2.85)$$

Hieruit volgt:

$x_n = g_n$, $x_{n-1} = g_{n-1}$, $h_{n-1,n}\, g_n$, etc.

Nu terug naar ons uitgangspunt (2.2.77). We beschouwen weer het algemene geval, waarbij m niet gelijk aan n hoeft te zijn. We voeren een nieuwe m x(n+1) matrix A_b in, die A in de eerste n kolommen bevat en b in de $n+1^{de}$ kolom.

$$A_b = (A,\vec{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (2.2.86)$$

Dit is een bijzonder belangrijke matrix, die bepaalt of (2.2.77) oplosbaar is of niet.

Direct volgt uit de definitie van A_b dat $r(A_b) \geq r(A)$.
Stel nu eens $r(A_b) > r(A)$, dan zullen we aantonen dat de vergelijkingen (2.2.77) strijdig zijn. Stel $r(A_b) = k$. Elke k-tal lineair onafhankelijk kolomvektoren van A_b moet $\vec{b}$ bevatten, omdat $r(A_b) > r(A)$.

Men ziet nu eenvoudig in dat b dus niet kan worden geschreven als een lineaire combinatie van de kolommen van A, dus er bestaan geen getallen x_j zodat $\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j = \vec{b}$.

Als $r(A_b) = r(A) = k$ ($\leq \min n,m$) . Dan bestaat er minstens één oplossing voor (2.2.77). Daar $r(A_b) = k$ en $r(A) = k$ kan elke kolom van A_b, ih$_b$ $\vec{b}$, geschreven worden als een lineaire combinatie van k lineair onafhankelijke kolommen van A. (neem aan de eerste k kolommen van A).

Dus er bestaan getallen x_j zodat

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \vec{a}_j = \vec{b}.$$

We hebben dus de volgende stelling:

<u>Stelling 2.2.10</u>. Het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ is dan en slechts dan oplosbaar als $r(A) = r(A_b)$.

In de problemen die wij bij de L.P. tegenkomen geldt steeds $m < n$. We zullen nu (2.2.77) bestuderen voor het geval dat $r(A) = r(A_b) = k < m < n$.

De vergelijkingen zijn zo te nummeren dat de eerste k rijen van A lineair onafhankelijk zijn.

De rijen van A_b geven we aan door $(\vec{a}^i, b_i)$. Dan geldt:

$$(\vec{a}^r, b_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda i_r \, (\vec{a}^i, b_i) \qquad (r=k+1,\ldots,m) \qquad (2.2.87)$$

of tewel

$$\vec{a}^r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir} \vec{a}^i \qquad (r=k+1,\ldots,m)$$

$$b_r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir} b_i \qquad (r=k+1,\ldots,m) \qquad (2.2.88)$$

Veronderstel dat $\vec{x}$ voldoet aan de eerste k vergelijkingen van (2.2.77), dus $\vec{a}^i \vec{x} = b_i$ $(i=1,\ldots,k)$. Dan geldt ook:

$$\vec{a}^r \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ir} b_i = b_r \qquad (r=k+1,\ldots,m) \qquad (2.2.89)$$

Dus $\vec{x}$ voldoet aan alle m vergelijkingen van (2.2.77). We zien dus dat we ons voor het bepalen van $\vec{x}$ tot de eerste k (onafhankelijke) vergelijkingen kunnen beperken.

We zeggen dat de overige m-k vergelijkingen overtollig zijn. Als k=m is geen enkele vergelijking overbodig.

We stellen van nu af aan $r(A) = r(A_b) = k \leq m$, en verder nemen we aan dat de variabelen x_j zodanig genummerd zijn, dat niet alleen de eerste k rijen van A, maar ook de eerste k kolommen van A lineair onafhankelijk zijn. Geef de submatrix bestaande uit de eerste k rijen en eerste k kolommen aan met A_1, A_1 is niet-singulier. Als R de submatrix voorstelt van de eerste k rijen en de laatste n-k kolommen van A, en als $\vec{b}^*$ de vektor voorstelt bestaande uit de eerste k componenten van $\vec{b}$ dan geldt

$$A_1 \vec{x}_\alpha + R \vec{x}_\beta = \vec{b}^* \qquad (2.2.90)$$

waarbij

$$\vec{x}_\alpha = (x_1, \ldots, x_k)$$
$$\vec{x}_\beta = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (2.2.91)$$

A_1^{-1} bestaat, dus

$$\vec{x}_\alpha = A_1^{-1} \vec{b}^* - A_1^{-1} R \vec{x}_\beta \qquad (2.2.92)$$

We zien dus als de componenten van $\vec{x}_\beta$ elke waarde aannemen mogen, en dat gegeven een $\vec{x}_\beta$ de vektor $\vec{x}_\alpha$ éénduidig bepaald is. Kiezen we voor $\vec{x}_\beta = \vec{0}$ dan vinden we

$$\vec{x}_\alpha = A_1^{-1} \vec{b}^*$$

dus

$$\vec{x} = (A_1^{-1} \vec{b}^*, \vec{0}) \qquad (2.2.93)$$

We zien dus als $r(A) = r(A_b) = k$, dan kunnen we k lineair onafhankelijke kolomvektoren van A vinden, we kunnen de n-k variabelen die niet bij die kolomvektoren horen willekeurige waarden geven. De overblijvende k variabelen zijn éénduidig bepaald door de n-k variabelen.

Interessant is het geval als we de n-k variabelen de waarde nul geven.
Vanaf nu aan k=m.
Definitie van basisoplossing.

Gegeven een systeem m lineaire vergelijkingen in n onbekenden, $n > m$. $A\vec{x} = \vec{b}$ en $r(A) = m$. Als een niet-singuliere m x m deelmatrix van A wordt gekozen, en alle n-m variabelen die niet bij de kolomvektoren van die matrix horen de waarde nul gegeven wordt, dan wordt de verkregen oplossing voor $A\vec{x} = \vec{b}$ een basisoplossing genoemd. De m variabelen, welke behoren bij de kolomvektoren van de gekozen deelmatrix heten de basisvariabelen.

Als B de gekozen deelmatrix voorstelt, en $\vec{x}_B$ de bijbehorende basisoplossing, dan geldt:

$$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b} \qquad (2.2.94)$$

Een basisoplossing heeft dus hoogstens m componenten ongelijk aan nul.
Men kan eenvoudig nagaan, dat bij een systeem van m vergelijkingen en n onbekenden, slechts eindig veel basisoplossingen bestaan.
N.L. hoogstens $\binom{n}{m}$.

Definitie 2.2.13. Een basisoplossing heet ontaard als één of meer van de basisvariabelen nul is.

Stelling 2.2.11. 1) Een nodig en voldoende voorwaarde voor het bestaan en het niet ontaard zijn van alle mogelijke basisoplossingen van $A\vec{x} = \vec{b}$ is de lineaire onafhankelijkheid van elk verzameling van m kolommen van de matrix $A_b = (A, \vec{b})$.

2) Een nodige en voldoende voorwaarde voor een gegeven basisoplossing om niet ontaard te zijn is de lineaire onafhankelijkheid van de vektor $\vec{b}$ en van elk stelsel van (m-1) kolomvektoren van B, waarbij $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$.

Bewijs: We zullen stelling 2.2.5 gebruiken

1) Stel eerst dat alle basisoplossingen bestaan en niet ontaard zijn.
Doordat al de basisoplossingen bestaan moet elk m-tal kolomvektoren van A lineair onafhankelijk zijn.

Voor elk m-tal $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ geldt er bestaan getallen $x_i \neq 0$ $(i=1,\ldots,m)$ $\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{a}_m = \vec{b}$. Uit stelling 2.2.5 volgt dat we elke $\vec{a}_j$ kunnen vervangen door $\vec{b}$, en dat het verkregen stelsel dan lineair onafhankelijk is. De noodzakelijkheid is bewezen. Nu nemen we aan dat elk m-tal kolomvektoren van A_b lineair onafhankelijk is. Dus alle basisoplossingen bestaan. Laat $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ een m-tal lineaire onafhankelijke kolomvektoren van A zijn. Dit stelsel is basis voor de E^m. Er geldt $\vec{b} = \sum_{i=1}^{m} x_i \vec{a}_i$. Daar $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1},\ldots,\vec{a}_m$ lineair onafhankelijk zijn geldt $x_i \neq 0$ $(i=1,\ldots,m)$. (Immers stel $x_i = 0$, dit geeft tegenspraak). Dus we zien dat de basisoplossingen niet ontaard zijn.

2) is een gevolg van 1).

<u>Stelling 2.2.12.</u> Laat in (2.2.77) $n > m$ en $r(A) = m$ zijn. Als er een oplossing van (2.2.77) bestaat met precies m variabelen x_j ongelijk aan nul en er geen andere oplossing gevonden kan worden met dezelfde variabelen x_j ongelijk aan nul en de overige variabelen x_j gelijk aan nul, dan is de gegeven oplossing een basisoplossing.

Bewijs: Als we kunnen aantonen dat de kolomvektoren die bij de betreffen-m variabelen horen lineair onafhankelijk zijn, dan is de gegeven oplossing een basisoplossing.

Nummer de m variabelen $x_1,\ldots,x_m$.

Zij $\vec{y}$ de gegeven oplossing. $A\vec{y} = \vec{b}$, $y_i \neq 0$ $i = 1,\ldots,m, y_i = 0$ $i = m+1,\ldots,n$. Dus $y_1 \vec{a}_1 + \ldots + y_m \vec{a}_m = \vec{b}$ (x)

Stel de kolomvektoren $\vec{a}_i$ $(i=1,\ldots,m)$ lineair afhankelijk, dan bestaat er een lineaire combinatie

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

met niet alle λ_i gelijk aan nul, of ook

$$\sum_{i=1}^{m} \rho \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \qquad \text{(xx)}$$

waarbij ρ zo gekozen wordt dat

$$\rho\ \lambda_i + y_j \neq 0 \quad (i=1,\circ\circ\circ,m)$$

Kies $\rho \neq 0$ en $\rho \neq -\ \frac{y_i}{\lambda_i}$, $\lambda_i > 0$

Tel (x) en (xx) op, dit geeft

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i + \rho\ \lambda_i)\ \vec{a}_i = \vec{b}$$

$y_i + \rho\ \lambda_i \neq 0$, y_i $\qquad i = 1,\circ\circ\circ,m$.

Tegenspraak :

Dus de kolomvektoren $\vec{a}_i$ $i=1,\circ\circ\circ,m$ zijn lineair onafhankelijk.

Voorbeeld. Vind al de basisoplossingen voor

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

Het maximum aantal basisoplossingen is $\binom{3}{2} = 3$.

Stel eerst $x_3 = 0$, los op naar x_1 en x_2, dit geeft $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Stel $x_2 = 0$, dit geeft $x_1 = 5$, $x_3 = -1$.

En stellen we $x_3 = 0$ dan vinden we $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

Dus de drie basisoplossingen bestaan en zijn niet ontaard.

Hypervlakken en convexe verzamelingen.

E^n is de n-dimensionale Euclidische ruimte. Het begrip afstand is in de E^n gedefinieerd. Laten $\vec{a}$ en $\vec{b} \in E^n$ dan $|\vec{a} - \vec{b}| = \{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

Definitie 2.2.14. Een omgeving van een punt $\vec{a} \in E^n$ is de verzameling van alle punten $\vec{x} \in E_n$ met $|\vec{x} - \vec{a}| < \varepsilon$, waarbij ε een positief getal is.

$\{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{a}| < \varepsilon\}$ wordt wel hyperbol in E^n met middelpunt $\vec{a}$ en straal ε genoemd, notatie $U_\varepsilon(a)$.

Zij A een willekeurige deelverzameling in de E^n, $A \subset E^n$.

Definitie 2.2.15. $\vec{a}$ heet inwendig punt van A, als er een getal $\varepsilon > 0$ bestaat zodat $U_\varepsilon(a) \subset A$, dus als je een omgeving van $\vec{a}$ kunt vinden die geheel in A bevat is.

Definitie 2.2.16. $\vec{a}$ heet randpunt voor A als elke omgeving van $\vec{a}$ minstens één punt van A en minstens één punt dat niet

tot A behoort bevat.

Merk op dat in tegenstelling tot een inwendig punt een randpunt niet tot de verzameling A behoeft te behoren.

Definitie 2.2.17. Een verzameling A heet open, als elk punt van A inwendig punt van A is.

Definitie 2.2.18. Een verzameling A heet gesloten, als elk randpunt van A tot A behoort.

Definitie 2.2.19. Een verzameling A heet begrensd als er een positief getal c bestaat zodat voor elke $\vec{a} \in A$: $|\vec{a}| < c$.

De verzameling A heet begrensd van onder als er een $\vec{r}$ bestaat met elk component eindig zodat voor elke $\vec{a} \in A$ geldt $\vec{r} \leq a$.

Een verzameling die begrensd is van onder heeft een ondergrens voor elke component van ieder punt in de verzameling.

Stelling 2.2.13. De doorsnede van eindig veel gesloten verzamelingen is weer gesloten.

Bewijs: $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$. A_i $(i=1,\ldots,k)$ gesloten.

Zij a een randpunt van A.

$A \subset A_i$ $(i=1,\ldots,k)$. Nu is a randpunt of een inwendig punt voor A_i. $(i=1,\ldots,k)$. Als a inwendig punt voor A_i, dan $a \in A_i$.

Stel a randpunt voor A_i. Er geldt A_i is gesloten. Dus $a \in A_i$ $(i=1,\ldots,k)$. Waaruit volgt $a \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i = A$. Waarmee bewezen is dat A gesloten is.

Definitie 2.2.20. In de E^n definieren we de lijn door de punten $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, als de verzameling van alle punten

$$X = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \vec{x}_2 + (1-\lambda)\vec{x}_1, \text{ alle reële } \lambda\} \quad (2.2.95)$$

Merk op dat als we ons beperken tot $0 \leq \lambda \leq 1$ dat we dan het lijnsegment tussen $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ verkrijgen.

Definitie 2.2.21. De punten $\vec{x} \in E^n$ die voldoen aan

$$\vec{c}\,\vec{x} = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = z \quad (2.2.96)$$

liggen in een <u>hypervlak</u>, bij gegeven waarden van c_i en z. ($\vec{c} \neq \vec{0}$, en is een rijvektor).

Als z = 0 dan gaat het hypervlak (2.2.96) door de oorsprong . Er geldt dan $\vec{c} \cdot \vec{x} = 0$ voor elke $\vec{x}$ in (2.2.96). Dus $\vec{c}$ is orthogonaal m.b.t. elke $\vec{x} \neq \vec{0}$ in het hypervlak.

Als $z \neq 0$, en $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ voldoen dan $\vec{c}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0$. $\vec{c}$ heet de <u>normaal vektor</u> op het hypervlak $\pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ heten de eenheidsnormalen. Twee hypervlakken heten evenwijdig als ze dezelfde eenheidsnormal hebben. Dus $\vec{c}_1 \vec{x} = z_1$ en $\vec{c}_2 \vec{x} = z_2$ zijn evenwijdig als $\vec{c}_1 = \lambda \vec{c}_2, \lambda \neq 0$.

Beschouw het hypervlak $\vec{c} \vec{x} = z_0$. De meetkundige plaats van de punten $\vec{x}_0 + \vec{c}'$ met $\lambda > 0$, $\vec{c} \vec{x}_0 = z_0$ ($\vec{c}'$ is kolomvektor) is het hypervlak $\vec{c} \vec{x} = z_1$, waar $z_1 = z_0 + \lambda |\vec{c}|^2 > z_0$.

Punten liggend op het hypervlak $\vec{c} \vec{x} = z$, voldoen aan $\vec{c} \vec{x} > z_0$. Intuïtief kunnen we zeggen dat het hypervlak $\vec{c} \vec{x} = z_1$ verkregen is door $\vec{c} \vec{x} = z_0$ evenwijdig aan zichzelf te verschuiven in de richting $\vec{c}'$.

Een hypervlak $\vec{c} \vec{x} = z$ verdeelt de E^n in drie disjuncte verzamelingen, die te zamen weer de E^n vormen.
Deze verzamelingen zijn:

$$X_1 = \{\vec{x} \mid \vec{c} \vec{x} < z\}$$
$$X_2 = \{\vec{x} \mid \vec{c} \vec{x} = z\}$$
$$X_3 = \{\vec{x} \mid \vec{c} \vec{x} > z\} \qquad (2.2.97)$$

De verzamelingen X_1 en X_3 heten de open halfruimten. Dus in de E^3 is een open halfruimte alles liggend aan één kant van een vlak. De verzamelingen $X_4 = \{\vec{x} \mid \vec{c} \vec{x} < z\}$ en $X_5 = \{\vec{x} \mid \vec{c} \vec{x} \geq z\}$ heten de gesloten halfruimten.

Merk op dat $X_4 \cap X_5 = X_2$. X_2, X_4, X_5 zijn gesloten verzamelingen en X_1 en X_3 open verzamelingen.

Bewijs : We tonen aan dat een hypervlak gesloten is. Elk punt op het hypervlak is randpunt, en een punt niet op het hypervlak is geen randpunt van het hypervlak. Dus het hypervlak bevat al zijn randpunten. Kies $\vec{x}_0$ willekeurig op het hypervlak $\vec{c} \vec{x} = z$.

Neem een willekeurige ε- omgeving van $\vec{x}_0$ en beschouw het punt $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \frac{\varepsilon}{z} \frac{\vec{c}'}{|\vec{c}|}$

$|\vec{x}_1 - \vec{x}_0| = \frac{\varepsilon}{z} < \varepsilon$, dus $\vec{x}_1$ in de ε-omgeving, maar $\vec{x}_1$ ligt niet op het hypervlak:

$$\vec{c}\,\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \frac{\varepsilon}{z} |\vec{c}| > z$$

Laat nu $\vec{x}_1$ in één der open halfruimten liggen.

Stel $\vec{c}\,\vec{x}_1 = z_1 < z$. We kunnen nu een ε-omgeving van $\vec{x}_1$ aangeven die geen punt van het hypervlak bevat.

$$\text{Neem } \varepsilon = \frac{z - z_1}{2|\vec{c}|}$$

Voor elke $\vec{x}$ in deze ε-omgeving geldt:

$$\vec{c}\,\vec{x} = \vec{c}\,\vec{x}_1 + \vec{c}(\vec{x}-\vec{x}_1) \leq z_1 + |\vec{c}(\vec{x} - \vec{x}_1)|$$

Pas ongelijkheid van Schwarz toe:

$$\vec{c}\,\vec{x} \leq z_1 + |\vec{c}\,(\vec{x}-\vec{x}_1)| \leq z_1 + |\vec{c}|\varepsilon = z_1 + \frac{z - z_1}{2} < z.$$

Direct gevolg van dit bewijs is: een gesloten halfruimte is gesloten, een open halfruimte is open.

We zullen nu een bijzonder belangrijk begrip definiëren, n.l. het begrip <u>convexe verzameling</u>.

<u>Definitie</u> 2.2.22. Een verzameling $X \subset E^n$ heet convex als voor elk tweetal punten $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ geldt dat het lijnsegment dat deze twee punten verbindt ook tot X behoort.
Dus $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2 \in X$. Dan ook $\vec{x} = \lambda \vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}$,

$$0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (2.2.98)$$

behoort tot X.

Afspraak: Een verzameling bestaande uit één punt is convex. Intuitief is een convexe verzameling een verzameling zonder onregelmatigheden, zoals gaten, instulpingen etc.

<u>Definitie</u> 2.2.23. Een punt $\vec{x}$ heet een <u>hoekpunt</u> van een convexe verzameling dan en slechts dan als er geen andere punten $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ in de verzameling zijn met
$\vec{x} = \lambda \vec{x}_2 + (1 - \lambda)\vec{x}_1$, waarbij $0 < \lambda < 1$ (2.2.99)

Populair gezegd: een hoekpunt kan niet tussen twee andere punten van de verzameling liggen.

Een hoekpunt van een convexe verzameling X is tevens randpunt van de verzameling.

Laat x_0 hoekpunt zijn. Stel $\vec{x}_0$ inwendig punt van X. Dan is er een ε-omgeving van $\vec{x}_0$ die geheel in X bevat is. Zij $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_0$ een punt in die ε-omgeving, $\vec{x}_1 \in X$. Beschouw $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 + 2\vec{x}_0$, $|\vec{x}_2 - \vec{x}_0| = |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$ dus $\vec{x}_2$ behoort tot de ε-omgeving, dus tot X.

Er geldt $\vec{x}_0 = \frac{1}{2}(\vec{x}_2 + \vec{x}_1)$.

Tegenspraak.

Dus $\vec{x}_0$ is een randpunt.

Het hoeft geen betoog dat een randpunt in het algemeen niet een hoekpunt is.

<u>Stelling 2.2.14</u>. Een hypervlak, gesloten halfruimte, open halfruimte, allen zijn convexe verzamelingen.

Bewijs. We bewijzen het voor een hypervlak.

Laat het hypervlak $\vec{c}\,\vec{x} = z$ zijn, en $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ op het hypervlak liggen, d.w.z. $\vec{c}\,\vec{x}_1 = \vec{c}\,\vec{x}_2 = z$. Nu ligt $\vec{x} = \lambda\,\vec{x}_2 + (1-\lambda)\,\vec{x}_1$ ook op het hypervlak daar $\vec{c}\,\vec{x} = \lambda\,\vec{c}\,\vec{x}_2 + (1-\lambda)\,\vec{c}\,\vec{x}_1 =$
$= \lambda z + (1-\lambda) z = z$.

Dit geldt voor alle λ, dus zeker voor $0 \leq \lambda \leq 1$.

<u>Stelling 2.2.15</u>. De doorsnee van eindig veel convexe verzamelingen is weer convext.

Bewijs. $X = \bigcap_{i=1}^{k} X_i$, X_i convex $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \quad X$. Te bewijzen dat $\lambda\vec{x}_2 + (1-\lambda)\,\vec{x}_1 \in X \quad 0 \leq \lambda \leq 1$. Er geldt $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X_i$ $(i=1,\ldots,k)$ X_i convex. Dus $\lambda\,\vec{x}_2 + (1-\lambda)\vec{x}_1 \in X_i$ $(i=1,\ldots,k)$ $0 \leq \lambda \leq 1$. Waaruit volgt $\lambda\,\vec{x}_2 + (1- \quad)\,\vec{x}_1 \in X$.

Gevolg: De doorsnee van een eindig aantal hypervlakken, of halfruimten of van beiden is een convexe verzameling. Tevens geldt dat de doorsnee van eindig veel hypervlakken, of gesloten halfruimten of van beiden een <u>gesloten convexe</u> verzameling is.

We zagen in hoofdstuk I dat de bijvoorwaarden voor een L.P.-probleem geschreven kunnen worden als

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \{ \leq 1 = \geq \}\, b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (2.2.100)$$

en $x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n)$

Definieer de rijvektor

$$\vec{a}^i = (A_{i1},\ldots,a_{in})$$

Dan wordt (2.2.100)

$$\vec{a}^i \circ \vec{x} \quad \{\leq = \geq\} \quad b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (2.2.101)$$

voor elke i geldt één van de tekens.

Elk van deze voorwaarden impliceert dat de oplossing $\vec{x}$ in een zekere gesloten halfruimte moet liggen, of als de gelijkheid geldt, op een zeker hypervlak. Schrijven we

$$\vec{a}^{m+j} = \vec{e}^j \qquad (2.2.102)$$

dan wordt

$$\begin{aligned} &x_j \geq 0 \\ &\vec{a}^{m+j} \circ \vec{x} = \vec{e}^j \vec{x} \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \end{aligned} \qquad (2.2.103)$$

Elk van deze ongelijkheden impliceert dat de oplossing $\vec{x}$ in een gesloten halfruimte moet liggen.

We zien nu dat elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ een element moet zijn van elk der verzamelingen

$$X_i = \{\vec{x} \mid \vec{a}^i \circ \vec{x} \ (\leq \ = \ \geq) \ b_i\} \qquad i=1,\ldots,m+n$$

(voor elke i geldt één der relaties)

met $b_i = 0$, $i = m+1,\ldots, m+n$.

Dus de verzameling der toegelaten oplossingen is de doorsnede van m+n verzamelingen X_i.

Elke X_i is convex en gesloten.

Dus we komen tot de volgende belangrijke stelling

<u>Stelling 2.2.15</u>. De verzameling van toegelaten oplossingen van een lineair programmeringsprobleem (aangenomen dat een toegelaten oplossing bestaat) is een <u>gesloten convexe verzameling</u>. Tevens is deze verzameling <u>begrensd van onder</u> (door $\vec{0}$) daar $\vec{x} \geq \vec{0}$.

We zien tevens dat de verzameling van oplossingen van een systeem van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden, $\vec{Ax}=\vec{b}$, een gesloten convexe verzameling is. De verzameling van oplossingen is de doorsnee van m hypervlakken.

<u>Definitie</u> 2.2.25. Een convexe combinatie van een eindig aantal punten $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ is gedefinieerd als een punt:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{x}_i, \quad \mu_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,m. \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \qquad (2.2.104)$$

Bewijs zelf dat de verzameling van alle convexe combinaties van een eindig aantal punten een convexe verzameling is. (Schrijf definitie op).

De verzameling van alle convexe combinaties van een eindig aantal punten heet de convexe polyhydroon opgespannen door deze punten.
De convexe polyhydroon opgespannen door n+1 punten in de E^n, die niet allen in een zelfde hypervlak liggen heet een simplex.
Voorbeeld in de E^2: driehoek en zijn inwendige, de hoekpunten van de driehoek brengen de simplex voort.

We zullen nu een aantal voor de L-P, speltheorie belangrijke stellingen geven, die meetkundig duidelijk zijn doch niet zo simpel te bewijzen zijn.

<u>Stelling 2.2.16</u>. Gegeven een gesloten convexe verzameling X, een punt $\vec{y}$ behoort tot X of niet. Behoort $\vec{y}$ niet tot X dan bestaat er een hypervlak, waarin $\vec{y}$ ligt, zodat X in zijn geheel bevat is

<u>Bewijs</u>: uit de Analyse is bekend dat als A en B twee disjuncte compacte verzamelingen zijn, dat dan $|\vec{x}-\vec{y}|$ een minimum aanneemt, afstand tussen A en B geheten, waarbij $\vec{x}$ in A varieert en $\vec{y}$ in B.
Als B uit één punt $\vec{y}$ bestaat, dan weten we dus dat er een minimum-

afstand tussen het punt $\vec{y}$ en A bestaat.
Zoals men weet is een verzameling die begrensd en gesloten is, compact.
We nemen aan dat $\vec{y} \notin X$.
X hoeft niet begrensd te zijn, doch we beschouwen een begrensde deelverzameling van X, (die gesloten is), en wel die deelverzameling van X die "het dichtst" bij $\vec{y}$ ligt.
Dus we kunnen een punt $\vec{w}$ in X vinden, zodat voor alle $\vec{u} \in X$

$$|\vec{w}-\vec{y}| = \min |\vec{u}-\vec{y}| \quad . \tag{2.2.105}$$

Er is slechts één punt $\vec{w} \in X$ met deze eigenschap.
Stel $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ hebben dezelfde minimum afstand tot $\vec{y}$.
Beschouw

$$|\tfrac{1}{2}(\vec{w}_1+\vec{w}_2)-\vec{y}| = \tfrac{1}{2}|(\vec{w}_1-\vec{y}) + (\vec{w}_2-\vec{y})| < \tfrac{1}{2}|\vec{w}_1-\vec{y}| + \tfrac{1}{2}|\vec{w}_2-\vec{y}| = |\vec{w}_1-\vec{y}| \quad . \tag{2.2.106}$$

Het punt $\frac{1}{2}(\vec{w}_1+\vec{w}_2) \in X$ zou een kleinere afstand hebben tot $\vec{y}$.
Tegenspraak.
In (2.2.105) geldt niet = teken i.p.v. < omdat $w_1-y \neq \lambda(w_2-y)$, immers $w_1 \neq w_2$ en $|w_1-y| = |w_2-y|$. Maak een tekening, dan ziet men direkt dat < teken gelden moet.

Laat $\vec{u}$ een willekeurig punt in X zijn.
Beschouw het punt $(1-\lambda)\vec{w} + \lambda\vec{u}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.
Dit punt behoort tot X, omdat X convex is.
Uit (2.2.105) volgt $|(1-\lambda)\vec{w} + \lambda\vec{u} - \vec{y}|^2 \geq |\vec{w}-\vec{y}|^2$, $0 \leq \lambda \leq 1$,
of $|(\vec{w}-\vec{y}) + \lambda(\vec{u}-\vec{w})|^2 \geq |\vec{w}-\vec{y}|^2$.
Werken we dit uit dan geldt
$|\vec{w}-\vec{y}|^2 + 2\lambda(\vec{w}-\vec{y})'(\vec{u}-\vec{w}) + \lambda^2|\vec{u}-\vec{w}|^2 \geq |\vec{w}-\vec{y}|^2$
of $2\lambda(\vec{w}-\vec{y})'(\vec{u}-\vec{w}) + \lambda|\vec{u}-\vec{w}|^2 \geq 0$.
Neem $\lambda > 0$. Deel door λ: $2(\vec{w}-\vec{y})'(\vec{u}-\vec{w}) + \lambda|\vec{u}-\vec{w}|^2 \geq 0$.
Laat λ naar 0 gaan, dan zien we

$$(\vec{w}-\vec{y})'(\vec{u}-\vec{w}) \geq 0 \tag{2.2.107}$$

echter $\vec{u}-\vec{w} = \vec{u}-\vec{y} - (\vec{w}-\vec{y})$.
Substitueer dit in (2.2.107) en werk het matrixprodukt van de vektoren uit: $(\vec{w}-\vec{y})'(\vec{u}-\vec{y}) \geq |\vec{w}-\vec{y}|^2$.

Maar $|\vec{w}-\vec{y}|^2 > 0$, omdat $\vec{y} \notin X$ en $\vec{w} \in X$.
Dus $(\vec{w}-\vec{y})'(\vec{u}-\vec{y}) > 0$, of

$$(\vec{w}-\vec{y})'\vec{u} > (\vec{w}-\vec{y})'\vec{y} \qquad (2.2.108)$$

Definieer

$$\vec{c} = (\vec{w}-\vec{y})' \quad , \quad z = (\vec{w}-\vec{y})'\vec{y} = \overrightarrow{\vec{c}\vec{y}} \qquad (2.2.108^a)$$

Beschouw nu het hypervlak

$$\overrightarrow{\vec{c}\vec{x}} = z.$$

Daar $\overrightarrow{\vec{c}\vec{y}} = z$, ligt $\vec{y}$ in het hypervlak.
Uit (2.2.108) volgt, dat voor elke $\vec{u} \in X$ geldt

$$\overrightarrow{\vec{c}\vec{u}} > z \qquad (2.2.109)$$

Dus elk punt van X ligt in de halfruimte $\overrightarrow{\vec{c}\vec{x}} > z$.
Waarmee de stelling bewezen is.

We zien dus dat voor elke $\vec{y} \notin X$ (hoe dicht $\vec{y}$ ook bij X), er een hypervlak $\overrightarrow{\vec{c}\vec{x}} = z$ is, dat $\vec{y}$ bevat en zodat $\overrightarrow{\vec{c}\vec{u}} > z$ voor alle $\vec{u} \in X$.
Dit suggereert dat als $\vec{w}$ een randpunt is van X, dat er dan een hypervlak $\overrightarrow{\vec{c}\vec{x}} = z$ is, waarin $\vec{w}$ ligt, zodat $\overrightarrow{\vec{c}\vec{u}} \geq z$ voor alle $\vec{u} \in X$.

Opmerking: We hebben in (2.2.109) het > teken. Dit is niet essentieel. Immers $(-\vec{c})\vec{x} < -z$. Het hypervlak $-\vec{c}(\vec{x}) = -z$ bevat $\vec{y}$ ook.

Definitie van draaghypervlak:

Zij $\vec{w}$ een randpunt van een convexe verzameling X, dan heet $\overrightarrow{\vec{c}\vec{x}} = z$ een draaghypervlak in $\vec{w}$ als $\overrightarrow{\vec{c}\vec{w}} = z$ en als X in zijn geheel ligt in een gesloten halfruimte voortgebracht door het betreffende hypervlak, dus $\overrightarrow{\vec{c}\vec{u}} \geq z$ voor alle $\vec{u} \in X$ óf $\overrightarrow{\vec{c}\vec{u}} \leq z$ voor alle $\vec{u} \in X$.

Stelling 2.2.17. Als $\vec{w}$ een randpunt is van een gesloten convexe verzameling X, dan is er tenminste één draaghypervlak in $\vec{w}$.

Bewijs: We hebben in stelling 2.2.16 niet bewezen dat het daar optredende punt $\vec{w}$, dat de minimumafstand tot $\vec{y}$ bezit, een randpunt van X is.
Als dit niet het geval was dan bestond er een $\vec{s} \in X$ op de lijn die $\vec{w}$ en $\vec{y}$ verbindt met $\vec{s} = \lambda\vec{w} + (1-\lambda)\vec{y}$, $0 < \lambda < 1$

zodat $|\vec{s} - \vec{y}| = \lambda|\vec{w} - \vec{y}| < |\vec{w} - \vec{y}|$

en $\vec{w}$ zou niet het dichtst bij $\vec{y}$ zijn.
Dus $\vec{w}$ is randpunt van X.

Substitueren we (2.2.108^a) in (2.2.107) dan,

$$\vec{c}(\vec{u} - \vec{w}) \geq 0$$

$$\vec{cu} \geq \vec{cw} \qquad (2.2.110)$$

Als we het hypervlak $\vec{cx} = \vec{cw} = z$ beschouwen dan ligt $\vec{w}$ op dit hypervlak, en uit (2.2.110) volgt

$$\vec{cu} \geq z \quad \text{voor alle} \quad \vec{u} \in X.$$

Dus in het randpunt $\vec{w}$ is een draaghypervlak aan te geven.
Hiermee is stelling 2.2.17 niet bewezen, daar de $\vec{w}$ uit stelling 2.2.16 niet een willekeurig randpunt is, maar $\vec{w}$ is bepaald door het punt $\vec{y}$ uit stelling 2.2.16. We hebben de stelling bewezen als we voor elk randpunt $\vec{w}$ van X een punt $\vec{y} \notin X$ kunnen vinden, zodat $\vec{w}$ het punt uit X is dat de minimumafstand tot het betreffende punt $\vec{y}$ bezit.

Zij $\vec{w}$ een willekeurig randpunt van X. Beschouw een ε-omgeving van $\vec{w}$, elke omgeving bevat een punt dat niet tot X behoort.
Kies $\varepsilon = \varepsilon_k$. En neem uit de ε_k-omgeving een punt $y_k \notin X$.
Er zal dan een randpunt $\vec{w}_k$ van X zijn dat de kleinste afstand tot $\vec{y}_k$ heeft. We hebben reeds aangetoond dat er een draaghypervlak $\vec{c}_k\vec{x} = \vec{c}_k\vec{w}_k = z_k$ is in $\vec{w}_k$.
We kiezen de rij ε_k zo dat $\varepsilon_k \to 0$ als $k \to \infty$.
Uit de driehoeksongelijkheid:

$$|\vec{w}_k - \vec{w}| = |\vec{w}_k - \vec{y}_k + \vec{y}_k - \vec{w}| \leq |\vec{w}_k - \vec{y}_k| + |\vec{y}_k - \vec{w}|. \qquad (2.2.111)$$

Uit de keuze van $\vec{y}_k$ volgt $|\vec{y}_k - \vec{w}| < \varepsilon_k$, dus

$$|\vec{y}_k - \vec{w}| \to 0 \quad \text{als} \quad k \to \infty.$$

Daar $|\vec{w}_k - \vec{y}_k|$ de kortste afstand is tussen $\vec{y}_k$ en X, en $|\vec{w}_k - \vec{y}_k| \leq |\vec{y}_k - \vec{w}|$, vinden we dat

$$|\vec{w}_k - \vec{y}_k| \to 0 \quad \text{als} \quad k \to \infty.$$

Nu kunnen we uit (2.2.111) concluderen

$$|\vec{w}_k - \vec{w}| \to 0 \quad \text{als} \quad k \to \infty, \text{ of } \vec{w}_k \to \vec{w}.$$

Voor elke $\vec{w}_k$ is er een draaghypervlak $\vec{c}_k \vec{x} = z_k$.

Deel door $|\vec{c}_k|$, stel $\vec{n}_k = \dfrac{\vec{c}_k}{|\vec{c}_k|}$, $b_k = \dfrac{z_k}{|\vec{c}_k|}$

dan krijgen we

$$\vec{n}_k \vec{x} = b_k \quad , \quad |\vec{n}_k| = 1. \qquad (2.2.112)$$

De ongelijkheid van Schwarz leert ons

$$|b_k| = |\vec{n}_k \vec{w}_k| \leq n_k ||\vec{w}_k| = |\vec{w}_k| \qquad (2.2.113)$$

immers $\vec{w}_k$ voldoet aan (2.2.112).

Voor $k \geq k_0$ geldt $|\vec{w}_k| < r$, waarbij $r > 0$ is, dit is zo omdat

$$|\vec{w}_k| = |\vec{w}_k - \vec{w} + \vec{w}| \leq |\vec{w}| + |\vec{w}_k - \vec{w}|$$

en $|\vec{w}_k - \vec{w}| \to 0$ als $k \to \infty$.

Zeker $r = 2\,|w|$ voldoet.

Nu is (2.2.113) te schrijven als

$$-r < -|\vec{w}_k| \leq b_k \leq |\vec{w}_k| < r$$

Dus de rij b_k is begrensde oneindige rij van getallen $|\vec{n}_k| = 1$. Dus de componenten van n_k vormen begrensde oneindige rij van getallen. Uit de Analyse is bekend dat elke begrensde oneindige rij reële getallen tenminste één limietpunt bezit.

Zij $\{a_k\}$ een begrensde oneindige rij van reële getallen dan heet

a een limietpunt van de rij als er bij elke $\varepsilon > 0$ oneindig veel indices k_j zijn met $|a_{k_j} - a| < \varepsilon$.

Dus we kunnen deelrij van punten $\vec{y}_k$ vinden met $\vec{n}_k \to \vec{n}$ en $b_k \to b$ als $\vec{w}_k \to \vec{w}$.

Verder geldt voor elke k $\vec{n}_k \vec{w}_k - b_k = 0$, dus in de limiet $\vec{n}\vec{w} = b$. We hebben nu aangetoond dat voor elke $\vec{w}$ er een hypervlak $\vec{n}\vec{x} = b$ is met $\vec{n}\vec{x} = b$, $\vec{n}\vec{u} \geq b$ voor all $\vec{u} \notin X$.

Dit is het gezochte draaghypervlak.

Opmerking: uit het bewijs volgt dat de stelling ook geldt als X niet gesloten is.

De stelling heeft belangrijke gevolgen. We hebben reeds gezien dat de verzameling van toeglaten oplossing van een L.P.-probleem een gesloten convexe verzameling X is, en dat de functie die geoptimaliseerd moet worden een hypervlak is.

Dit hypervlak wordt evenwijdig aan zichzelf verschoven tot z zijn minimum heeft bereikt, waarbij we er wel voor zorgen dat steeds tenminste één punt $\vec{x} \in X$ op het hypervlak ligt.

Als we nu het hypervlak beschouwen waarvoor z optimaal is (aangenomen dat dit optimum eindig is) dan kan geen enkel punt van het hypervlak inwendig punt van X zijn.

Stel $z = \vec{c}\vec{x}$ optimale hypervlak, $\vec{x}_0$ inwendig punt van X en $z = \vec{c}\vec{x}_0$. We kunnen ε-omgeving van $\vec{x}_0$ bepalen die geheel tot X behoort. $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\vec{c}'}{|\vec{c}|} \in X$ en $\vec{c}\vec{x}_1 = z - \frac{\varepsilon}{2} |\vec{c}| < z$. Dit is in tegenspraak met het feit dat z de minimumwaarde van de kriteriumfunctie is. Dus als $\vec{x}_0$ een optimale oplossing van een L.P-probleem is dan moet het een randpunt van de convexe verzameling van toegelaten oplossingen zijn, en als $z = \vec{c}\vec{x}_0$ dan is $\vec{c}\vec{x} = z$ een draaghypervlak van de convex verzameling van toegelaten oplossingen in $\vec{x}_0$.

Stelling 2.2.18. Een gesloten convexe verzameling die van onder begrensd is heeft in elk van zijn draaghypervlakken tenminste één hoekpunt.

Deze belangrijke stelling zegt ons, dat als er een optimale oplossing is voor het L.P.-probleem, dat dan tenminste één hoekpunt van

van de convexe verzameling van de toegelaten oplossingen een optimale oplossing is.

We zullen later bewijzen dat het aantal hoekpunten eindig is. Dus als we een methode bezitten om de hoekpunten te vinden, dan behoeven slechts eindig veel punten onderzocht te worden om een optimale oplossing voor het probleem te vinden.

Dit is de grondslag van de Simplex Methode. We gaan van het ene hoekpunt naar een andere, tot de optimale oplossing bereikt is.

Bewijs: Het hypervlak $\vec{c}\,\vec{x} = z$ wordt verondersteld het draaghypervlak te zijn in $\vec{x}_0$ van de gesloten convexe verzameling X, die tevens van onder begrensd is.

$S = \{\vec{x} \mid \vec{\varepsilon} \cdot \vec{x} = z\}$. $S \cap X = T$.

T is niet leeg, daar $\vec{x}_0 \in T$.

T is gesloten en convex en ook van onder begrensd.

We zullen nu aantonen dat elke hoekpunt van T ook een hoekpunt van X is.

Laat $\vec{t} \in T$, als nu

$$\vec{t} = \lambda\,\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\,\vec{x}_1 \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad (2.2.114)$$

waarbij $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ dan geldt $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in T$. Immers $\vec{c}\,\vec{x} = z$ is draaghypervlak van X, dus we kunnen stellen $\vec{c}\,\vec{x}_1 \geq z$, $\vec{c}\,\vec{x}_2 \geq z$.

We beweren nu dat geldt

$$\vec{c}\,\vec{x}_1 = \vec{c}\,\vec{x}_2 = z \qquad (2.2.115)$$

Er geldt

$$z = \vec{c}\,\vec{t} = \lambda\,\vec{c}\,\vec{x}_2 + (1 - \lambda)\,\vec{c}\,\vec{x}_1 \qquad (2.2.116)$$

Stel $\vec{c}.\vec{x}_i = z + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \geq 0 \quad (i=1,2)$.

Vul dit in (2.2.116) in

$$z = \lambda(z + \varepsilon_1) + (1 - \lambda)(z + \varepsilon_2) \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \varepsilon_2 \qquad (2.2.117)$$

We zullen nu aantonen dat $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

$\lambda > 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$ dus uit (2.2.117) $\quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \geq 0$

Als $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0$, dan vinden we $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.
Stel nu eens $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$, er geldt dan

$$0 < \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leq \varepsilon_2.$$

Deel (2.2.117) door $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, dan vinden we $\lambda \geq 1$.
Tegenspraak. Dus $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, of $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = z$, waarmee aangetoond is $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in T$.

Dus een hoekpunt van T kan niet worden geschreven als een convexe combinatie van twee punten uit X. Elk punt van T behoort ook tot X. We zien dus dat een hoekpunt van T een hoekpunt van X is. De stelling is bewezen als we kunnen aantonen dat T werkelijk een hoekpunt bezit.

Kies van de punten van T dat punt, die de kleinste eerste component bezit. Er is tenminste één zo'n punt, daar T gesloten en begrensd van onder is. Als er meer dan één punt is met een kleinste eerste component, kies dan het punt of de punten met de kleinste eerste en tweede component. Als we dan nog niet een uniek punt gevonden hebben, zet dan het beschreven procédé voort. Tenslotte zullen we één uniek punt $\vec{t}^{*}$ vinden.

Dat het punt $\vec{t}^{*}$ uniek is bewijzen we met volledige inductie.
Stel dat we twee punten $\vec{t}^{*}$ en $\vec{t}^{**}$ vinden. Dan geldt $\vec{t}^{*} = \vec{t}^{**}$.
Bewijs: $t_1^{*} = t_1^{**}$.
Stel $t_i^{*} = t_i^{**}$ voor $i \leq n-1$. Dan geldt $t_n^{*} = t_n^{**}$ (immers stel $t_n^{*} \neq t_n^{**}$, dan zouden we of het punt $\vec{t}^{*}$ of het punt $\vec{t}^{**}$ niet gekozen hebben).

Dus $t_i^{*} = t_i^{**}$ $i = 1,\ldots,n$, of $\vec{t}^{*} = \vec{t}^{**}$. Het unieke punt $\vec{t}^{*}$ is een hoekpunt van T. Als $\vec{t}^{*}$ geen hoekpunt van T is, dan geldt

$$\vec{t}^{*} = \lambda \vec{t}_1 + (1-\lambda)\vec{t}_2 \quad 0 < \lambda < 1 \quad \vec{t}_1, \vec{t}_2 \in T, \vec{t}_1 \neq \vec{t}_2 \qquad (2.2.118a)$$

Stel de unieke $\vec{t}^{*}$ is bij het gevolgde procédé bepaald op grond van zijn k^{de} component.

De i^{de} component van $\vec{t}^{*}$, $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ geven we resp. aan door t_i^{*}, t_{i1}, t_{i2}. Uit (2.2.118a) volgt

$$t_i^{*} = \lambda t_{i1} + (1-\lambda) t_{i2} \quad 0 < \lambda < 1 \qquad (2.2.118b)$$

M.b.v. volledige inductie bewijzen we

$$t_i^* = t_{i1} = t_{i2} \quad i = 1,\ldots,k-1.$$

i=1. Uit constructie van $\vec{t}^*$ volgt $t_1^* \leq t_{11}, t_{12}$.

Uit (2.2.118b), met daarin i = 1, volgt nu

$$t_1^* = t_{11} = t_{12} \quad \text{(zie 2.2.115)}$$

Stel $t_i^* = t_{i1} = t_{i2}$ voor $i \leq \ell - 1$, met $\ell - 1 \leq k - 2$ (x)

Nu geldt ook voor $i = \ell$, $t_\ell^* = t_{11} = t_{12}$, immers uit de constructie van $\vec{t}^*$ en (x) volgt $t_\ell^* \leq t_{\ell 1}, t_{\ell 2}$. Gebruik (2.2.118b) met $i=\ell$, dan vindt men $t_\ell^* = t_{\ell 1} = t_{\ell 2}$.

En dus na volledige inductie

$$t_i^* = t_{i1} = t_{i2} \quad 1 \leq i \leq k-1 \qquad \text{(xx)}$$

Daar de unieke $\vec{t}^*$ op grond van zijn k^{de} component bepaald is en (xx) geldt, moet gelden $t_k^* < t_{k1}, t_{k2}$

Doch dit geeft tegenspraak met

$$t_k^* = \lambda\, t_{k1} + (1 - \lambda) t_{k2} \quad 0 < \lambda < 1$$

waarmee afgeleid is dat de aanname $\vec{t}^*$ geen hoekpunt van T onjuist is.

$\vec{t}^*$ hoekpunt van T. $\vec{t}^*$ ligt ook in het draaghypervlak S van X, $S = T \cap X$.

We hebben nu gevonden dat elk draaghypervlak van X een hoekpunt van X bevat.

<u>Stelling 2.2.19</u>. Als een gesloten, begrensde convexe verzameling X een eindig aantal hoekpunten bezit, dan kan elk punt van X geschreven worden als een convexe combinatie van de hoekpunten, dus X is de verzameling van alle convexe combinaties van zijn hoekpunten.

Bewijs. Noem de hoekpunten van X $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_m$

$$S = \{\vec{y} \mid \vec{y} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{y}_i, \text{ alle } \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\} \qquad (2.2.119)$$

Het polydroon S is convex en gesloten.

Stel er is een punt $\vec{v}_0 \in X$, $\vec{v}_0 \notin S$. We zullen een tegenspraak afleiden.

Dan volgt uit stelling 2.2.16 dat er een hypervlak $\vec{c}\,\vec{x} = z$, met $\vec{c}\,\vec{v}_0 = z$ en $\vec{c}\,\vec{y} > z$ voor alle $\vec{y} \in S$, bestaat. (2.2.120)

Tevens is er een $\vec{w} \notin S$ die het dichtst bij $\vec{v}_0$ ligt (S is gesloten).
Stel $$\vec{c}' = \vec{w} - \vec{v}_0.$$

Beschouw nu eens de verzameling van punten $\vec{x}_k$, die niet noodzakelijk in X hoeven te leggen:

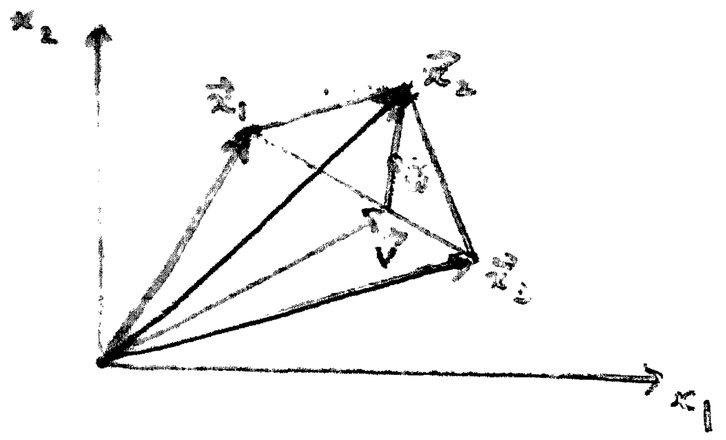
$$\vec{x}_k = \vec{v}_0 - \lambda_k(\vec{w} - \vec{v}_0), \qquad \lambda_k \geq 0$$

Er geldt $|\vec{w} - \vec{x}_k| = (1 + \lambda_k)|\vec{w} - \vec{v}_0| \geq |\vec{w} - \vec{v}_0|$

Het hypervlak met normaal $\vec{c}$, gaande door $\vec{x}_k$, is te schrijven als $\vec{c}\,\vec{x} = z_k$ en $\vec{c}\,\vec{x} = \vec{c}\,\vec{x}_k = \vec{c}\,\vec{v}_0 - \lambda_k |\vec{c}|^2 = z - \lambda_k |\vec{c}|^2 = z_k < z$
(2.2.120) zegt $\vec{c}\,\vec{y} > z$ voor alle $\vec{y} \in S$, en dus voor elke $\vec{y} \in S$ geldt $\vec{c}\,\vec{y} > z_k$.

Neem de grootste λ_k waarvoor het hypervlak $\vec{c}\,\vec{x} = z_k$ nog een punt van X bevat. Deze grootste λ_k bestaat omdat X begrensd en gesloten is. De z_k van dit hypervlak noemen we z^*. Dus er bestaat een $\vec{v}^* \in X$ zodat $\vec{c}\,\vec{v}^* = z^*$ en $\vec{c}\,\vec{v} = z^*$ en $\vec{c}\,\vec{v} \geq z^*$ voor alle $\vec{v} \in X$.
We zien dat $\vec{c}\,\vec{x} = z^*$ een draaghypervlak is van X, dit draaghypervlak bevat geen hoekpunten van X, want die liggen allen in S en elk punt $\vec{y}$ van S voldoet $\vec{c}\,\vec{y} > z^*$. Dit spreekt stelling 2.2.18 tegen (X is van onder begrensd, omdat X begrensd is).
Dus elk punt van X behoort tot S, waarmee de stelling bewezen is.
Voorbeeld: Stel dat we elk punt $\vec{w}$ binnen een driehoek wensen te schrijven als een convexe combinatie van de hoekpunten.

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \vec{x}_i, \quad \mu_i \geq 0 \quad \sum \mu_i = 1.$$



Trek een lijn van $\vec{x}_2$ door $\vec{w}$, deze snijdt de overliggende zijde van de driehoek in $\vec{v}$.
Dan $\vec{v} = \lambda_1 \vec{x}_2 + (1 - \lambda_1)\vec{v}$, $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ maar
$\vec{v} = \lambda_2 \vec{x}_1 + (1 - \lambda_2)\vec{x}_3$, $0 \leq \lambda_2 \leq 1$

Dus

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{x}_2 + (1 - \lambda_1)\lambda_2 \vec{x}_1 + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\vec{x}_3 =$$

$$= \mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \mu_3 \vec{x}_3$$

$$\mu_1 = (1 - \lambda_1)\lambda_2,\ \mu_2 = \lambda_1,\ \mu_3 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad \text{en } \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Definitie van ribbe. Laten $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ twee verschillende hoekpunten van de convexe verzameling X zijn. De lijn die hen verbindt heet een ribbe van de convexe verzameling als deze lijn de doorsnee is van X en een draaghypervlak van X. Als $\vec{x}^*$ een hoekpunt is en er bestaat een ander punt $\vec{x} \in X$ zodat de lijn $\vec{x}^* + \lambda(\vec{x} - \vec{x}^*)$, alle $\lambda \geq 0$, in X bevat is en de doorsnee is van X met een draaghypervlak van X, dan wordt deze lijn een ribbe genoemd, die voortkomt uit $\vec{x}^*$ en zich uitstrekt tot oneindig.

Definitie 2.2.26. Twee verschillende hoekpunten $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ van de convexe verzameling X heten aangrenzend als het lijnsegment dat ze verbindt een ribbe is van de convexe verzameling.

§ 3. Theoretische achtergrond van de Simplex methode.

In §1 hebben wij vastgesteld dat het algemene L.P.-probleem als volgt kan worden geformuleerd.

Bepaal het minimum van de functie

$$z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \qquad (2.1.27)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\ldots,n+m) \qquad (2.1.28)$$

(2.1.28) stelt m vergelijkingen in n+m onbekenden voor, en luidt in matrixnotatie $\vec{Ax} = \vec{b}$, waarbij we A kunnen schrijven als

$$A = (A^*, I)$$

A^* is de m × n-matrix van de coëfficienten a_{ij} en $I=I_m$, de eenheidsmatrix bestaande uit de m eenheidsvektoren. Zoals we weten is $A_b = (A,\vec{b})$, de matrix A aangevuld met $\vec{b}$. In §2 hebben wij bewezen dat $\vec{Ax} = \vec{b}$ dan en slechts dan oplosbaar is als $r(A) = r(A_b)$.
Men ziet eenvoudig in dat voor (2.1.28) geldt $r(A) = r(A_b) = m$. We kunnen direct m onafhankelijke kolomvektoren van A aangeven, nl. de m eenheidsvektoren van I. De bijbehorende basisoplossing kan men zonder meer uit (2.1.28) aflezen, nl.:

$$x_{n+i} = b_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$x_j = 0 \quad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (2.3.1)$$

De basisoplossing is ook een toegelaten oplossing voor ons probleem, immers $b_i \geq 0$. We komen nu tot de volgende belangrijke conclusie: Ons algemene L.P.-probleem is altijd oplosbaar, geen enkele vergelijking is overbodig ($r(A) = m$) en we kunnen direct een toegelaten basisoplossing aangeven. Voor de toegelaten basisoplossing (2.3.1)

neemt onze kriteriumfunctie $z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$ een bepaalde waarde aan, en we willen nu een procedure ontwikkelen om, uitgaande van een toegelaten oplossing, deze waarde te verbeteren.

Om precies te zien hoe deze procedure werkt schrijven we ons L.P.-probleem in de meer algemene vorm:

Bepaal het minimum van

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.3.2)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (2.3.3)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.3.4)$$

De $m \times n$ matrix van de coëfficienten a_{ij} geven we in vervolg aan met A, dus (2.3.3) is ook te schrijven als $\vec{Ax} = \vec{b}$, en ook als $\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i = \vec{b}$. We weten als $r(A) = n = m$, dat er dan een unieke oplossing is voor (2.3.3).

Merk op dat deze oplossing niet toegelaten hoeft te zijn, immers wil een oplossing toegelaten zijn dan moet ook (2.3.4) gelden.

We nemen in vervolg aan $n \geq m$.

We zullen <u>veronderstellen</u> in deze paragraaf <u>dat $r(A) = m$</u>, dus dan ook $r(A_b)=m$, dit betekent niet alleen dat (2.3.3) oplosbaar is maar ook dat geen enkele vergelijking uit (2.3.3) overbodig is. De lezer zal zich afvragen of deze veronderstelling geen beperking is, omdat het bij veel bijvoorwaarden nu éénmaal lastig is om na te gaan of $r(A) = m$. We zullen later zien dat de Simplex methode ons niet alleen vertelt of er een optimale oplossing bestaat, maar ons tevens zegt of de bijvoorwaarden al of niet afhankelijk zijn en welke, in geval van afhankelijkheid kunnen worden weggelaten.

We zullen nu laten zien hoe men uit een toegelaten oplossing voor (2.3.3) een toegelaten basisoplossing kan construeren.

<u>Stelling 2.3.1.</u> Zij $\vec{x}^*$ een toegelaten oplossing van (2.3.3), dan

bestaat er een toegelaten basisoplossing voor (2.3.3).

Bewijs $\vec{x}^*$ is een toegelaten oplossing, dus $\vec{x}^* \geq \vec{0}$. Zij $p \leq n$ het aantal positieve componenten van $\vec{x}^*$. Hernummer de variabelen x_i^* zo dat $x_i^* > 0 \quad i=1,\ldots,p$.

De toegelaten oplossing $\vec{x}^*$ voldoet nu aan

$$\sum_{j=1}^{p} x_j^* \vec{a}_j = \vec{b} \qquad (2.3.5)$$

Voor de vektoren $\vec{a}_j$ behorende bij de positieve variabelen x_j zijn er twee mogelijkheden:

1) De vektoren $\vec{a}_j$ $(j=1,\ldots,p)$ zijn lineair onafhankelijk

2) De vektoren $\vec{a}_j$ $(j=1,\ldots,p)$ zijn lineair afhankelijk.

We beschouwen eerst geval 1). Daar $r(A) = m$ geldt $p \leq m$. Als $p = m$, dan is de gegeven oplossing een toegelaten basisoplossing, die niet ontaard is.

Als $p < m$ dan kunnen de p vektoren met m-p kolomvektoren van A worden aangevuld tot een basis. De éénduidige schrijfwijze van $\vec{b} = \sum_{j=1}^{p} x_j^* \vec{a}_j$ als lineaire combinatie van deze basisvektoren (zie stelling 2.2.4) is een garantie dat $\vec{x}^*$ ook nu een toegelaten basisoplossing, die weliswaar ontaard is, omdat m-p basisvariabelen gelijk aan nul zijn. De stelling is dus juist in geval 1).

Als de vektoren $\vec{a}_j$ $(j=1,\ldots,p)$ lineair afhankelijk zijn, dan bestaan er constanten λ_j, niet allen gelijk aan nul, zodat

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0} \qquad (2.3.6)$$

Door linker- en rechterlid van (2.3.6) met -1 te vermenigvuldigen kunnen wij er altijd voor zorgen dat minstens één $\lambda_j > 0$ is. We zullen nu een andere toegelaten oplossing construeren uit de gegeven oplossing, door minstens één component van deze oplossing nul te maken.

We zoeken de vektor $\vec{a}_j$ $(j=1,\ldots,p)$ waarvoor geldt $\lambda_j > 0$ en $\frac{x_j^*}{\lambda_j}$ minimaal. Stel dat dit minimum bereikt wordt voor $j=r$.

Dus $\lambda_r > 0$, $\frac{x^*_r}{\lambda_r}$ minimaal. $\vec{a}_r = - \sum_{j \neq r} \frac{\lambda_j}{\lambda_r} \vec{a}_j$ (volgt uit 2.3.6).

Substitueer dit in (2.3.5), dit geeft

$$\sum_{j=1}^{p} (x^*_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x^*_r) \vec{a}_j = \vec{b}. \qquad (2.3.7)$$

In sommatie j=r toe te voegen, want $x^*_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x^*_r = 0$ voor j=r.

We hebben nu een nieuwe toegelaten oplossing voor (2.3.3) gevonden met hoogstens p-1 positieve variabelen, nl. $\vec{x}^{**}$, $x_j^{**} =$

$= x_j^* - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x_r^* \geq 0 \quad (j=1,\ldots,p) \quad x_j^{**} = 0 \quad (j=p+1,\ldots,n)$

<u>Immers</u>: $x^*_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x_r^* = 0$ voor j=r. Daar $x_j^* \geq 0$ (j=1,...,p) en $\lambda_r > 0$ geldt voor elke index j met $\lambda_j \leq 0$:

$x_j^* - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x_r^* \geq 0.$

Beschouw nu die indices j met $\lambda_j > 0$. Nu geldt

$$x^*_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x_r^* = (\frac{x^*_j}{\lambda_j} - \frac{x^*_r}{\lambda_r}) \lambda_j$$

Nu is

$$\frac{x^*_r}{\lambda_r} = \min_j (\frac{x^*_j}{\lambda_j}, \lambda_j > 0), \qquad (2.3.8)$$

waaruit volgt $x_j^* - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x_r^* \geq 0.$

<u>Opmerking</u>: Als r uit (2.3.8) niet uniek is, dan is $x_j^{**} =$

$= x_j^* - \frac{\lambda_j}{\lambda_r} x_r^* = 0$ voor die indices j waarvoor $\lambda_j > 0$ is en $\frac{x_j^*}{\lambda_j}$ de minimumwaarde aanneemt.

Beschouw nu de kolomvektoren $\vec{a}_j$ die behoren bij de positieve

variabelen van de nieuwe toegelaten oplossing $\vec{x}^{**}$. Zijn deze lineair afhankelijk dan herhalen we de aangegeven werkwijze. Uiteindelijk vinden we een toegelaten oplossing waarbij de kolomvektoren, die corresponderen met de positieve variabelen van deze oplossing, lineair onafhankelijk zijn. Dit betekent dat we geval 2) hebben teruggebracht tot geval 1).
Bijgevolg is de stelling ook juist voor geval 2).

In matrixnotatie is (2.3.3) $A\vec{x}=\vec{b}$, in § 2 hebben wij gezien dat bij elk stelsel van m lineair onafhankelijke kolomvektoren van A een basisoplossing hoort.
De n-m variabelen die niet bij de betreffende m kolomvektoren behoren wordt de waarde nul gegeven. De m basisvariabelen zijn daardoor éénduidig bepaald. Als deze basisvariabelen niet negatief zijn dan heet de basisoplossing toegelaten.
Er zijn slechts eindig veel basisoplossingen, hoogstens $\binom{n}{m}$, dus ook eindig veel toegelaten basisoplossingen.

Stelling 2.3.2. Iedere toegelaten basisoplossing is een hoekpunt van de convexe verzameling van toegelaten oplossingen. Omgekeerd is elk hoekpunt van de convexe verzameling van toegelaten oplossingen een toegelaten basisoplossing.

Bewijs: We tonen eerst aan dat iedere toegelaten basisoplossing een hoekpunt is. We nemen aan dat de variabelen zodanig zijn genummerd zodat de basisvariabelen de eerste m variabelen zijn. De matrix van de bijbehorende eerste m onafhankelijke kolomvektoren van A geven we aan met B. Nu wordt de toegelaten basisoplossing gegeven door

$$\vec{x}^{**} = [B^{-1}\,\vec{b},\ \vec{0}] \qquad (2.3.9)$$

$B^{-1}\,\vec{b}$ is een m-component vektor, $\vec{0}$ een n-m component vektor. Stel nu dat (2.3.9) geen hoekpunt voorstelt, dan bestaat er een getal λ met $0 < \lambda < 1$ en er bestaan twee toegelaten oplossingen $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ zodat

$$\vec{x}^{**} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\,\vec{x}_2. \qquad (2.3.10)$$

We schrijven nu

$$\vec{x}_1 = [\vec{u}_1, \vec{v}_1], \quad \vec{x}_2 = [\vec{u}_2, \vec{v}_2] \tag{2.3.11}$$

waarbij $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$ m-component vektoren zijn, en dus $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ n-m component vektoren.

Uit (2.3.9) t.m. (2.3.11) volgt

$$\vec{0} = \lambda\vec{v}_1 + (1 - \lambda)\vec{v}_2 \tag{2.3.12}$$

Daar $\vec{v}_i \geq \vec{0}$ (i=1,2) en $0 < \lambda < 1$ volgt uit (2.3.12) $\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{0}$. Nu is $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 = \vec{b}$. Daar $\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{0}$ geldt nu $B\vec{u}_1 = B\vec{u}_2 = \vec{b}$.

Aangezien $\vec{b}$ maar op één wijze in de basisvektoren van B kan worden uitgedrukt geldt $\vec{u}_1=\vec{u}_2=B^{-1}\vec{b}$.

Tegenspraak met $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, bijgevolg is $\vec{x}^*$ een hoekpunt.

Nu zullen we bewijzen dat elk hoekpunt $\vec{x}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ van de verzameling van toegelaten oplossingen een toegelaten basisoplossing is. We zullen daartoe eerst aantonen dat de vektoren, die bij de positieve componenten van $\vec{x}^*$ horen, lineair onafhankelijk zijn. Laten k componenten van $\vec{x}^*$ positief zijn, hernummer de variabelen zodat de eerste k componenten positief zijn. We hebben nu

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* \vec{a}_i = \vec{b}, \quad x_i^* > 0 \quad i=1,\ldots,k \tag{2.3.12a}$$

Stel dat de kolomvektoren $\vec{a}_i$ (i=1,...,k) lineair afhankelijk zijn, dan bestaan er getallen λ_i, niet allen gelijk aan nul, zodat

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \tag{2.3.13}$$

Laat η gedefinieerd zijn door

$$\eta = \min_i \frac{x_i^*}{|\lambda_i|}, \ \lambda_i \neq 0 \quad (i=1,\ldots,k) \tag{2.3.14}$$

Merk op $\eta > 0$. Kies nu een getal met $0 < \varepsilon < \eta$, dan geldt

$$x_i^{*} + \varepsilon \lambda_i > 0$$
$$x_i^{*} - \varepsilon \lambda_i > 0 \quad (i=1,\ldots,k) \qquad (2.3.15)$$

Definieer nu een n-component kolomvektor $\vec{\lambda}$ met de λ_i uit (2.3.13) als de eerste k componenten en de overige componenten gelijk aan nul.

Geef $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ door

$$\vec{x}_1 = \vec{x}^{*} + \varepsilon \vec{\lambda}$$
$$\vec{x}_2 = \vec{x}^{*} - \varepsilon \vec{\lambda}.$$

Uit (2.3.15) volgt nu $\vec{x}_1 \geq \vec{0}$, $\vec{x}_2 \geq \vec{0}$.

$\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \neq \vec{x}^{*}$. Uit (2.3.12) en (2.3.13) volgt:

$$A\vec{x}_1 = A\vec{x}^{*} + \varepsilon A\vec{\lambda} = A\vec{x}^{*} = \vec{b}$$
$$A\vec{x}_2 = A\vec{x}^{*} - \varepsilon A\vec{\lambda} = A\vec{x}^{*} = \vec{b}.$$

Dus $\vec{x}_1$ en $\vec{x}_2$ zijn toegelaten oplossingen, waarvoor geldt $\vec{x}^{*} = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$.

Tegenspraak, immers $\vec{x}^{*}$ is een hoekpunt. Waarmee aangetoond is dat de kolomvektoren $\vec{a}_j$ (j=1,...,k) lineair onafhankelijk zijn. De vektoren $\vec{a}_j$ (j=1,...,k) vormen een basis als k=m of kunnen tot een basis worden aangevuld als k < m. De éénduidige schrijfwijze (2.3.12) van $\vec{b}$ als lineaire combinatie van basisvektoren garandeert dat de bijbehorende basisoplossing, die toegelaten is, gelijk is aan het hoekpunt.

Opmerking: Als k=m dan is het hoekpunt een niet-ontaarde toegelaten basisoplossing, die éénduidig bepaald is.

Als k < m dan behoeft de aanvulling van het stelsel vektoren $\vec{a}_j$ (j=1,...,k) niet uniek te zijn. Dus bij een zelfde hoekpunt kan in dit geval een aantal gelijke ontaarde toegelaten basisoplossingen behoren, waarvan de basisvariabelen echter verschillend zijn. Met gelijke basisoplossingen bedoelen we dat de overeenkomstige componenten van de oplossingen dezelfde waarde bezitten.

Een direct gevolg van stelling 2.3.2. is:

Stelling 2.3.3. Het aantal hoekpunten van een convexe verzameling

van toegelat4n oplossingen is eindig. De verzameling van toegelaten oplossingen is een polyhedron.

Bewijs: De eerste bewering volgt onmiddellijk uit stelling 2.3.2 en het feit dat het aantal basisoplossingen hoogstens $\binom{n}{m}$ is. De tweede bewering is een gevolg van stelling 2.2.19.

We hebben in §2, blz. 56, gezien dat de verzameling van toegelaten oplossingen van een L.P-probleem een gesloten convexe verzameling X is, die van onder begrensd is. De kriteriumfunctie $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ is voor te stellen door een hypervlak $z = \vec{c}\,\vec{x}$. De optimale waarde van z (aangenomen dat het optimum bestaat en eindig is) wordt bereikt in een randpunt van X. Zij $\vec{x}_0$ een randpunt van X waarvoor de kriteriumfunctie optimaal is, dan is $\vec{c}\,\vec{x} = z_0$ met $z_0 = \vec{c}\,\vec{x}_0$ een draaghypervlak in $\vec{x}_0$ van X. (blz. 62). Nu ligt er in dit draaghypervlak minstens één hoekpunt van X (stelling 2.2.18).

Dus we vinden dat tenminste één hoekpunt van de convexe verzameling van toegelaten oplossing een optimale oplossing is. Daar elk hoekpunt een toegelaten basisoplossing is, komen we tot de volgende stelling:

Stelling 2.3.4. **Als het minimum van (2.3.2) onder (2.3.3) en (2.3.4) eindig is dan wordt het bereikt voor één of meer toegelaten basisoplossingen.**

Uit deze stelling volgt nu dat we onze aandacht kunnen beperken tot basisoplossingen. Tevens hebben we het algemen en interessante resultaat gevonden dat een optimale oplossing van een L.P.-probleem nooit meer dan m variabelen ongelijk aan nul behoeft te bezitten, waarbij m het aantal bijvoorwaarden in (2.3.3) is.

Opmerking: we spreken af dat we een toegelaten oplossing waarvoor z een onbegrensde waarde aanneemt niet optimaal noemen.

Enkele definities en notaties

Voor we de theorie voortzetten zullen we enkele notaties invoeren die op het eerste gezicht ingewikkeld lijken doch bijzonder verhelderend zijn. Tot dusver hebben wij steeds als we een basis van kolomvektoren beschouwden, deze kolommen hernummerd. Doch indien meerdere basissen een rol gaan spelen, werkt het hernummeren eerder verwarrend

dan verhelderend In het hierna volgende zullen we de basisvektoren steeds aangever met $\vec{b}_k$ (k=1,...,m). De kolomvektoren $\vec{b}_k$ vormen tezamen de matrix B De nummering van de kolommen van B leert ons niet welke kolomvektoren van A met kolomvektoren van B corresponderen. $\vec{b}_i$ kan elke kolom van A voorstellen, evenzo de andere b_k. Men zal dus steeds moeten noteren welke vektoren $\vec{a}_j$ door de vektoren $\vec{b}_k$ worden weergegeven. Omdat $\{\vec{b}_k\}$(k=1,...,m) een basis is geldt voor elke kolomvektor $\vec{a}_j$ van A:

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i = B \vec{y}_j \qquad (2.3.16)$$

of tewel $$\vec{y}_j = B^{-1} \vec{a}_j$$

$\vec{y}_j = (y_{1j}, \ldots, y_{mj})$. Merk op de indices j slaat op $\vec{a}_j$.

Elke basismatrix bepaalt een basisoplossing van $\vec{Ax}=\vec{b}$. De basisoplossing geven we nu in vervolg aan met $\vec{x}_B$, waarbij de kolomvektor $\vec{x}_B$ bestaat uit die variabelen x_j welke behoren bij de kolomvektoren in B en die op dezelfde wijze gerangschikt zijn.

Uit (2.2.13) volgt

$$\vec{x}_B = B^{-1} \vec{b} \qquad (2.3.17)$$

Men bedenke wel steeds dat de n-m variabelen behorende bij de kolomvektoren van A die niet in B zitten gelijk aan nul zijn.

We geven $\vec{x}_B$ ook wel aan met

$$\vec{x}_B = (x_{B1}, \ldots, x_{Bm}) \qquad (2.3.18)$$

Merk op dat de indices i betekent dat x_{Bi} hoort bij kolom $\vec{b}_i$ van B echter het leert ons niet welke variabele x_j door x_{Bi} wordt voorgesteld. De getallen B1,...,Bm moeten dus afzonderlijk worden genoteerd.

Op analoge wijze vormen wij de rijvektor $\vec{c}_B$

$$\vec{c}_B = (c_{B1}, \ldots, c_{Bm}) \qquad (2.3.19)$$

Voor een toegelaten basisoplossing wordt de waarde van $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ gegeven door

$$z = \vec{c}_B \vec{x}_B \qquad (2.3.20)$$

Tenslotte beschouwen wij nog het vektorprodukt

$$z_j \overset{def}{=} \vec{c}_B \vec{y}_j \qquad (2.3.21)$$

De betekenis van z_j wordt ons dadelijk duidelijk.

<u>Opmerking</u>: Als $\vec{a}_j$ in de basismatrix B zit, laat $\vec{a}_j = \vec{b}_k$ zijn, dan is $\vec{y}_j = \vec{e}_k$, immers uit $\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i$ volgt: $y_{ij} = 0, i \neq k$; $y_{kj} = 1$.

(2.3.22a)

Nu volgt uit (2.3.21)

$$z_j = \vec{c}_B \vec{e}_k = c_{Bk} = c_j. \qquad (2.3.22b)$$

Dus voor vektoren a_j in B geldt $z_j - c_j = 0$.

We zien tevens dat de vektoren $\vec{y}_j$, die bij de vektoren $\vec{a}_j$ in B horen, de eenheidsmatrix I_m vormen.

<u>Voorbeeld</u>. We zullen de notaties en definities in dit voorbeeld toepassen. Beschouw het L.P.-probleem

$$\min z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{5} x_j \vec{a}_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0$$

met $\vec{a}_1 = (4,1)$; $\vec{a}_2 = (2,2)$; $\vec{a}_3 = (1,3)$; $\vec{a}_4 = (1,0)$; $\vec{a}_5 = (0,-1)$;
$\vec{b} = (2,1)$.

De variabelen x_4 en x_5 zijn als verschilvariabelen te beschouwen.
De vektoren $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_3$ zijn lineair onafhankelijk en vormen dus een basis voor de E^2. De basismatrix B wordt gevormd door $\vec{a}_3$ als eerste en $\vec{a}_1$ als tweede kolomvektor te nemen.

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}_1 = \vec{a}_3 \qquad \vec{b}_2 = \vec{a}_1$.

De basisoplossing met alle variabelen behalve x_1 en x_3 gelijk aan nul is:

$$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{pmatrix}$$

met $x_2=x_4=x_5=0$.

Dus $x_{B1}=x_3$, $x_{B2}=x_1$, $C_{B1}=c_3=3$, $c_{B2}=c_1=2$.

Voor deze basisoplossing is $\vec{c}_B=(3,2)$

z wordt gegeven door $z=\vec{c}_B \vec{x}_B = 3.\frac{2}{11} + 2.\frac{5}{11} = \frac{16}{11}$

Elkevektor $\vec{a}_j$ in A is te schrijven als $\vec{a}_j = B\vec{y}_j$. Voor $\vec{a}_2$ b.v.

$$\vec{y}_2 = B^{-1}\vec{a}_2 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = y_{12}\vec{b}_1 + y_{22}\vec{b}_2 = y_{12}\vec{a}_3 + y_{22}\vec{a}_1$$

De waarde z_2 wordt gegeven door

$$z_2 = \vec{c}_B \vec{y}_2 = 3.\frac{6}{11} + 2.\frac{4}{11} = \frac{26}{11}.$$

<u>Verbetering van een toegelaten basisoplossing.</u>

Laat een toegelaten basisoplossing voor (2.3.2) onder (2.3.3) en (2.2.4) <u>gegeven zijn</u>, $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$.

De waarde van de objectfunctie z is voor deze oplossing $z = \vec{c}_B \vec{x}_B$.

We nemen verder aan dat voor deze basisoplossing $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$ en $z_j = \vec{c}_B \vec{y}_j$ bekend zijn voor elke $\vec{a}_j$ uit A. We willen nu een andere toegelaten basisoplossing vinden met een verbeterde waarde van z. Daartoe brengen we de vektor $\vec{a}_j$ in de basis en verwijderen een vektor $\vec{b}_r$ uit B. Opdat het nieuwe stelsel ook een basis is moet gelden $y_{rj} \neq 0$ (stelling 2.2.5). We zullen j vast nemen, later vinden we een kriterium dat ons zegt welke $\vec{a}_j$ we nemen moeten. We zullen eerst gaan bepalen welke $\vec{b}_r$ we moeten vervangen door $\vec{a}_j$.

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\vec{b}_i \text{ , j vast.}$$

Laat $y_{rj} \neq 0$.

$$\vec{b}_r = - \sum_{i \neq r} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \vec{b}_i + \frac{1}{y_{rj}} \vec{a}_j \qquad (2.3.23)$$

Voor de basisoplossing $\vec{x}_B$ geldt: $\sum_{i=1}^{m} x_{Bi} \vec{b}_i = \vec{b}$ (2.3.24)

Substitueer (2.3.23) in (2.3.24), dit geeft

$$\sum_{i \neq r} (x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) \vec{b}_i + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \vec{a}_j = \vec{b} \qquad (2.3.25)$$

De nieuwe basisoplossing $\vec{x}_B^*$ wordt gegeven door:

$$x_{Bi}^* = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \quad (i \neq r;\ i=1,\ldots,m)$$

$$x_{Br}^* = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

Deze basisoplossing is een toegelaten oplossing als

$$x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0 \quad i \neq r \qquad (2.3.26a)$$

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0 \qquad (2.3.26b)$$

Nu volgt uit (2.3.26a) dat $y_{rj} > 0$ moet zijn als $x_{Br} > 0$. We kunnen nu eenvoudig aantonen dat de nieuwe basisoplossing toegelaten is als $y_{ij} > 0$ voor tenminste één index i en de juiste kolomvektor $\vec{b}_r$ van B wordt verwijderd.

Als $y_{rj} > 0$ is dan geldt (2.3.26a) voor elke index i met $i \neq r$ en $y_{ij} \leq 0$, immers $x_{Bi} \geq 0$ $(i=1,\ldots,m)$.

We behoeven alleen nog maar die indices i met $y_{ij} > 0$ te beschouwen.

Is $y_{ij} > 0$ dan is voorwaarde (2.3.26a) te schrijven als

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} - \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \geq 0.$$

Het is nu duidelijk hoe we de kolomvektor $\vec{b}_r$ van B bepalen, die door $\vec{a}_j$ vervangen wordt, de regel die ons dit zegt luidt:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\right) = \theta \qquad (2.3.27)$$

Als we r m b.v. (2.3.27) kiezen, dan is de nieuwe basisoplossing toegelaten.

Résumé We beginnen met een basismatrix $B=(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m)$ en de toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$.

We kiezen nu een kolomvektor $\vec{a}_j$ die niet in B zit. $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$.

Als $y_{ij} > 0$ is voor minstens één index i dan krijgen we een nieuwe toegelaten basisoplossing door een geschikte kolom van B door $\vec{a}_j$ te vervangen. Welke kolom van B we moeten vervangen wordt bepaald door (2.3.27).

De nieuwe basismatrix geven we aan met $B^* = (\vec{b}_1^*,\ldots,\vec{b}_m^*)$ verkregen uit B door $\vec{b}_r$ door $\vec{a}_j$ te vervangen. Merk op $\vec{b}_i^* = \vec{b}_i$ $i\neq r$, $\vec{b}_r^* = \vec{a}_j$.

De nieuwe toegelaten basisoplossing is $\vec{x}_B^*$ met $\vec{x}_B^* = (B^*)^{-1}\cdot\vec{b}$

De nieuwe basisvariabelen zijn direct in de oude basisvariabelen en in de y_{ij} uit te drukken.

$$x_{Bi}^* = x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}} \qquad (i=1,\ldots,m,\ i\neq r)$$

$$x_{Br}^* = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \qquad (2.3.28)$$

We zullen nu enige details van bovenstaande procedure behandelen, nl. gaande over het al of niet ontaard zijn van de toegelaten basisoplossingen.

We nemen aan dat $y_{ij} > 0$ voor minsten één index i, waarbij $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$ en $\vec{a}_j$ niet in de basismatrix B.

We beschouwen de twee gevallen:

1) De oorspronkelijke toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ is niet ontaard. Er zijn dan twee mogelijkheden voor de nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^*$, nl.

1a) $\vec{x}_B^*$ is niet ontaard. Dit is alleen het geval als r in (2.3.27) uniek is. Immers $\vec{x}_B$ is niet ontaard, dus $x_{Bi} > 0$ $(i=1,\ldots,m)$.
Is r in (2.3.27) uniek dan ziet men direct uit (2.3.28) $x_{Bi}^* > 0$

$(i=1,\ldots,m)$.

1b) $\vec{x}_B^{\,*}$ is ontaard. Dit is het geval als r in (2.3.27) niet uniek is, immers dan is $x_{Bi}^{*}=0$ voor die indices i waarvoor $\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}$ de minumwaarde aanneemt.

2) De oorspronkelijke toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ is ontaard. Voor de nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^{\,*}$ zijn er ook nu twee mogelijkheden.

2a) $\vec{x}_B^{\,*}$ is niet ontaard. Dit kan op de volgende manier gebeuren:
Laat $y_{ij} < 0$ voor elke index i met $x_{Bi}=0$.
Als r in (2.2.27) uniek is dan ziet men eenvoudig in dat $x_{Bi}^{*} > 0$ $(i=1,\ldots,m)$.

2b) $\vec{x}_B^{\,*}$ is ontaard. Een interessante situatie die hiertoe leidt is de volgende:
Laat voor een index r met $x_{Br}=0$ gelden $y_{rj} > 0$.
Dan is $x_{Bi}^{*} = x_{Bi}$ $i\neq r$

$$x_{Br}^{*} = 0 \ (=x_{Br})$$

Hieruit volgt direct dat de nieuwe toegelaten basisoplossing gelijk is aan de oorspronkelijke toegelaten basisoplossing. Toch is er iets wezenlijks veranderd, $\vec{a}_j$ zit nu in de basis.
Meetkundig: We blijven in het zelfde hoekpunt van de convexe verzameling van toegelaten oplossing (zie ook opmerking bij stelling (2.3.2).

Na deze details over ontaarding besproken te hebben, keren we terug naar ons hoofddoel: het vinden van een nieuwe toegelaten basisoplossing met een verbeterde waarde van de objectfunctie. Stel dat we uitgaande van een gegeven toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ een nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^{\,*}$ hebben geconstrueerd door in de basis B de vektor $\vec{b}_r$ door $\vec{a}_j$ te vervangen, waarbij r voldoet aan (2.4.27). Nu zullen we de nieuwe waarde z^{*} van de objectfunctie voor deze nieuwe oplossing bepalen en daarbij zullen we een kriterium vinden dat ons aangeeft welke vektor $\vec{a}_j$ uit A, die niet in B zit, we moeten kiezen.

$$z^{*} = \vec{c}_B^{\,*}\,\vec{x}_B^{\,*} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}^{*}\, x_{Bi}^{*}$$

Merk op: $c_{Bi}^{*} = c_{Bi}$, $i \neq r$; $c_{Br}^{*} = c_j$

dit geeft

$$z^{*} = \sum_{i \neq r} (x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) c_{Bi} + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} c_j = \sum_{i=1}^{m} (x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) c_{Bi} + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{Bi} c_{Bi} + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_j - \sum_{i=1}^{m} y_{ij} c_{Bi}) =$$

$$= z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_j - z_j) \qquad (2.3.29)$$

Immers z_j hebben wij gedefinieerd als $z_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} c_{Bi}$.

In de literatuur geeft men het quotiënt $\frac{x_{Br}}{y_{rj}}$ aan met Θ, dus $z^{*} = z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (c_j - z_j) = z + \Theta(c_j - z_j) =$
$z - \Theta(z_j - c_j)$.

Stel nu dat we de objectfunctie willen minimaliseren. Als $\Theta > 0$ (dit is zeker het geval als de oorspronkelijke toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ niet ontaard is) en $z_j - c_j > 0$ dan behoort bij de nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^{*}$ een lagere kriteriumwaarde dan bij $\vec{x}_B$ waarvan wij zijn uitgegaan. In elk geval geldt, als $z_j - c_j > 0$, dat dan altijd $z^{*} \leq z$. Merk op dat als $\vec{x}_B$ ontaard is dat dan niet noodzakelijk $z^{*} = z$. Dit laatste zal niet het geval zijn als $x_{Br} = 0$ en er geldt $y_{rj} \leq 0$ en voor minstens één i $x_{Bi} > 0$ en $y_{ij} > 0$.
(2.3.29) geeft ons nu ook een kriterium dat zegt welke vektor $\vec{a}_j$ we de basis inhalen. Als we de vektor $\vec{a}_j$ kiezen dan neemt de objectfunctie met $\frac{x_{Br}}{y_{rj}} (z_j - c_j)$ af. Het lijkt nu logisch die vektor $\vec{a}_k$ te kiezen met

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} (z_k - c_k) = \max_j \left\{ \frac{x_{Br}}{y_{rj}} (z_k - c_k) \right\}, \; z_k - c_k > 0. \qquad (2.3.30)$$

Vanwege het quotient $\frac{x_{Br}}{y_{rj}}$, is dit geen gemakkelijk hanteerbaar kriterium. Een eenvoudiger kriterium om de vektor $\vec{a}_k$ te bepalen is:

$$z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j), \; z_j - c_j > 0. \qquad (2.3.31)$$

In praktijkproblemen leiden (2.3.30) en (2.3.31) in ongeveer een zelfde aantal stappen tot een optimale oplossing.
In vervolg gebruiken we dus kriterium (2.3.31).
We hebben de volgende stelling bewezen:

Stelling 2.3.5. Gegeven een toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$ van het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$. Als voor een kolomvektor $\vec{a}_j$ in A maar niet in B geldt

a) $z_j - c_j > 0$

b) minstens één $y_{ij} > 0 \quad (i=1,\ldots,m)$

dan is het mogelijk een nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^*$ te construeren door $\vec{b}_r$, bepaald door (2.3.27), in de basis te vervangen door $\vec{a}_j$. De bij de nieuwe basisoplossing behorende kriteriumwaarde z^* voldoet aan $z^* \leq z$. Als voor de oorspronkelijke basisoplossing $x_{Br} > 0$ dan geldt: $z^* < z$.

Zij een toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$ van het stelsel $A\vec{x}=\vec{b}$ gegeven, en verder veronderstellen we dat voor elke $\vec{a}_j$ in A de vektor $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$ bekend is en dat ook al de getallen $z_j - c_j$ bekend zijn. Het zal de lezer duidelijk zijn dat er één van de volgende drie, elkaar uitsluitende, situaties optreedt.

A: $z_j - c_j > 0$ voor sommige indices j en voor elke $\vec{a}_j$ met $z_j - c_j > 0$ geldt $y_{ij} > 0$ voor minstens één index i.

B: $z_j - c_j > 0$ voor sommige indices j en voor minstens één $\vec{a}_j$ met $z_j - c_j > 0$ geldt $y_{ij} \leq 0$ voor elke index i.

C: $z_j - c_j \leq 0$ voor elke index j.

De volgende zeer belangrijke stelling, die een hoofdrol speelt bij de Simplex Methode, geldt nu:

Stelling 2.3.6
1) Als A geldt dan kunnen we een nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^*$ construeren met $z^* \leq z$.
2) Als B geldt dan bestaan er toegelaten oplossingen waarvoor de waarde van de objectfunctie onbegrensd klein is.

3) Als C geldt dan is de gegeven toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ een optimale oplossing.

Bewijs 1) stelling 2.3.5.

2) We merken eerst op dat als $z_j - c_j \neq 0$ dat dan $\vec{a}_j$ niet in de basis zit, immers als $\vec{a}_j$ in de basis zit dan is $z_j - c_j = 0$.
Zij s een index met $z_s - c_s > 0$ en $y_{is} \leq 0$ $(i=1,\ldots,m)$.
We zien dus: $\vec{a}_s$ niet in de basis, immers $z_s - c_s > 0$.
$\vec{x}_B$ is een basisoplossing, dus

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\,\vec{b}_i = \vec{b}$$

en dus ook

$$\sum_{i=1}^{m} x_{Bi}\,\vec{b}_i - \rho\vec{a}_s + \rho\vec{a}_s = \vec{b} \qquad (2.3.32)$$

$\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{m} y_{is}\,\vec{b}_i$, substitueer dit in (2.3.32)

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{Bi} - \rho y_{is})\vec{b}_i + \rho\,\vec{a}_s = \vec{b} \qquad (2.3.33)$$

Als $\rho > 0$ dan $x_{Bi} - \rho\, y_{is} \geq 0$, omdat $y_{is} \leq 0$. $(i=1,\ldots,m)$
(2.2.33) is dus een toegelaten oplossing, waarvan m+1 variabelen ongelijk aan nul kunnen zijn. De waarde z van de objectfunctie voor deze toegelaten oplossing wordt gegeven door:

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}(x_{Bi} - \rho y_{is}) + \rho\, c_s =$$

$$= z - \rho(z_s - c_s) \qquad (2.3.34)$$

Daar $z_s - c_s > 0$, volgt uit (2.3.34) dat er toegelaten oplossingen zijn waarvoor de objectfunctie geen eindig minimum bezit. In de praktijk betekent zo'n situatie meestal dat het gekozen wiskundige model niet realistisch is.

3) $z_j - c_j \leq 0$ voor elke $\vec{a}_j$ uit A.

Nu moeten we aantonen dat de waarde van de objectfunctie voor de gegeven toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ minimaal is. Zij $\vec{x}^*$ een willekeurige toegelaten oplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$, dus $x_j^* \geq \vec{0}$ $(j=1,\ldots,n)$ en $\sum_{j=1}^{n} x_j^* \vec{a}_j = \vec{b}$ (2.3.35)

Elke vektor $\vec{a}_j$ is te schrijven als een lineaire combinatie van de basisvektoren van B,

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i \qquad (2.3.36)$$

Substitueer (2.3.36) in (2.3.35),

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i \right) = \vec{b}$$

of

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* y_{ij} \right) \vec{b}_i = \vec{b}$$

Daar echter de schrijfwijze van een vektor als een lineaire combinatie van basisvektoren, geldt

$$x_{Bi} = \sum_{j=1}^{n} x_j^* y_{ij} \qquad (2.3.37)$$

De kriteriumwaarde voor de basisoplossing $\vec{x}_B$ wordt gegeven door

$$\sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^* y_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ij} \right) x_j^* = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (z_j - c_j) x_j^* + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \qquad (2.3.38)$$

Er geldt $z_j - c_j \leq 0$, $x_j^* \geq 0$ $(j=1,\ldots,n)$. Nu volgt uit (2.3.38)

$$\sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, x_{Bi} \leq \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^{*} \qquad (2.3.39)$$

De relatie (2.3.39) impliceert dat de kriteriumwaarde van elke toegelaten oplossing niet lager kan zijn dan de kriteriumwaarde van de toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$, waarvan uitgegaan werd. Dus $\vec{x}_B$ is een optimale oplossing.

Merk op dat niet geeist wordt, dat $\vec{x}_B$ niet-ontaard moet zijn.

Opmerking 1: Het is uiteraard mogelijk dat meerdere toegelaten basisoplossingen optimaal zijn. Men kan eenvoudig nagaan dat dan iedere convexe combinatie van deze basisoplossingen optimaal is. Het is echter niet noodzakelijk om meer dan één optimale toegelaten basisoplossing te bezitten voor het verkrijgen van oneindig veel toegelaten oplossingen. Deze situatie doet zich voor als $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten basisoplossing is en als voor een kolom $\vec{a}_j$ van A, niet in B, geldt:

a) $z_j - c_j = 0$

b) $y_{ij} \leq 0 \quad (i=1,\ldots,m)$.

Nu zijn er ook oneindig veel toegelaten oplossingen waarvoor de kriteriumfunctie de minimumwaarde aanneemt. Zie (2.3.32) t/m (2.3.34).

Opmerking 2: Zij $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten basisoplossing en laat $z_j - c_j < 0$ voor elke $\vec{a}_j$ uit A niet in de basis. Bewijs dan: Er is slechts één optimale oplossing, nl. $\vec{x}_B$. Aanwijzing: Zij $\vec{x}^{*}$ een toegelaten oplossing ongelijk aan $\vec{x}_B$. Toon aan: er is een $j \notin \{b_1,\ldots,b_m\}$ met $x_j^{*} > 0$. Zie dan het bewijs van stelling 2.3.6c.

Voor elk L.P.-probleem is slechts één van de volgende drie, elkaar uitsluitende gevallen mogelijk:

(1) er is geen toegelaten oplossing;

(2) er is een optimale oplossing;

(3) er is een onbegrensde oplossing.

Als er een toegelaten oplossing is, dan is er ook een toegelaten basisoplossing, dan blijven alleen (2) en (3) over.

Is een toegelaten basisoplossing bekend en er wordt volgens (2.3.31) en (2.3.28) gehandeld en er treden geen ontaardingen op, dan daalt de waarde van de kriteriumfunctie bij elke stap (het veranderen van één vektor in de basis), dus geen enkele basis wordt herhaald.
Maar omdat er slechts één eindig aantal basisoplossingen bestaan, zal na een eindig aantal stappen òf situatie (2) òf situatie (3) worden bereikt. Wanneer daarentegen wel ontaardingen worden ontmoet dan zou z voor elke stap constant kunnen blijven en in principe zouden we dan in een kringloop kunnen geraken en nooit situatie (2) òf (3) bereiken. In de litteratuur heet dit laatste cycling. In praktijkproblemen treedt ontaarding wel eens op, maar veroorzaakt bij de berekeningen geen enkele moeilijkheid, men bereikt de optimale oplossing ook dan in een eindig aantal stappen. Cycling is in geen enkel praktijkprobleem ooit opgetreden.
E.M. Beale heeft op een kunstmatige wijze een voorbeeld geconstrueerd waarin cycling optreedt.

Bepaal minimum van

$$z = -0{,}75x_1 + 20x_2 - 0{,}5x_3 + 6x_4$$

onder de voorwaarden

$$0{,}25x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$0{,}5x_1 - 12x_2 - 0{,}5x_3 + 3x_4 \leq 0$$

$$x_3 \leq 1;\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Dit probleem herleiden we, door verschilvariabelen in te voeren tot:

Bepaal minimum van

$$z = -0{,}75x_1 + 20x_2 - 0{,}5x_3 + 6x_4$$

onder de bijvoorwaarden:

$$0{,}25x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$0{,}5x_1 - 12x_2 - 0{,}5x_3 + 3x_4 + x_6 = 0$$

$$x_3 + x_7 = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,7)$$

Als eerste basis werd gekozen de eenheidsvektoren $\vec{a}_5$, $\vec{a}_6$ en $\vec{a}_7$, de kolomvektoren die behoren bij de variabelen x_5, x_6, x_7.
Passen we nu (2.3.31) en (2.3.27) toe, dan komen we tot de volgende tabel

stap	in de basis opnemen	uit de basis verwijderen	gevolg van
1	$\vec{a}_1$ (wordt $\vec{b}_1$)	$\vec{a}_5$ (was $\vec{b}_1$)	$x_{B1}^{(1)}=0$ $y_{11}^{(1)}>0$
2	$\vec{a}_2$ (wordt $\vec{b}_2$)	$\vec{a}_6$ (was $\vec{b}_2$)	$x_{B2}^{(2)}=0$ $y_{22}^{(2)}>0$
3	$\vec{a}_3$ (wordt $\vec{b}_1$)	$\vec{a}_1$ (was $\vec{b}_1$)	$x_{B1}^{(3)}=0$ $y_{13}^{(3)}>0$
4	$\vec{a}_4$ (wordt $\vec{b}_2$)	$\vec{a}_2$ (was $\vec{b}_2$)	$x_{B2}^{(4)}=0$ $y_{24}^{(4)}>0$
5	$\vec{a}_5$ (wordt $\vec{b}_1$)	$\vec{a}_3$ (was $\vec{b}_1$)	$x_{B1}^{(5)}=0$ $y_{15}^{(5)}>0$
6	$\vec{a}_6$ (wordt $\vec{b}_2$)	$\vec{a}_4$ (was $\vec{b}_2$)	$x_{B2}^{(6)}=0$ $y_{26}^{(6)}>0$

na de zesde stap is de oorspronkelijke basis $(\vec{a}_5, \vec{a}_6, \vec{a}_7)$ hersteld.

Dit voorbeeld kan men o.a. in G. Hadley, Lineair Programming, blz. 190 vinden.
Zowel Charnes als Dantzig, Orden en Wolfe hebben een procedure ontwikkeld, die voor iedere stap naar een verbetering leidt Deze procedures zijn slechts van theoretische betekenis *), omdat in praktijkproblemen nog nooit cycling is opgetreden.
Als we uitgaande van een gegeven toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ een nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^*$ hebben geconstrueerd volgens

---

*) zie G. Hadley, Lineair Programming, hoofdstuk 6.

(2.3.31) en (2.3.27) dan willen we graag weten of de nieuwe oplossing optimaal is. Om dit na te gaan hebben wij de nieuwe $z_j - c_j$, aangegeven met $z_j^* - c_j$, nodig. (zie stelling 2.3.6). Deze bepalen wij met behulp van de nieuwe vektoren $\vec{y}_j$, die aangeduid worden door $\vec{y}_j^*$.
We kennen de oorspronkelijke basis B, de vektoren $\vec{y}_j$ en de getallen $z_j - c_j$.
Stel dat we in de basis B de vektor $\vec{b}_r$ hebben vervangen door $\vec{a}_k$.
Uitgedrukt in de oorspronkelijke basis, geldt voor elke $\vec{a}_j$

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i \qquad (2.3.40)$$

We vervangen in de basis $\vec{b}_r$ door $\vec{a}_k$, dus uit (2.3.40) volgt:

$$\vec{b}_r = \sum_{i \neq r} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \vec{b}_i + \frac{1}{y_{rk}} \vec{a}_k . \qquad (2.3.41)$$

Substitueer (2.3.41) in (2.3.40), dan vinden we $\vec{a}_j$ uitgedrukt in de nieuwe basisvektoren:

$$\vec{a}_j = \sum_{i \neq r} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) \vec{b}_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}^* \vec{b}_i^*$$

waarbij $\vec{b}_i^* = \vec{b}_i$, $i \neq r$; $\vec{b}_r^* = \vec{a}_k$.

We zien nu:

$$y_{ij}^* = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} , \quad (i=1,\ldots,m;\ i \neq r)$$

$$y_{rj}^* = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \qquad (2.3.42)$$

Merk op dat in overeenstemming met (2.3.22a) geldt $\vec{y}_k^* = \vec{e}_r$ (immers uit (2.3.42) volgt: $y_{rk}^* = 1$, $y_{ik}^* = 0$ $i \neq r$)

We kunnen nu vervolgens de nieuwe $z_j - c_j$ bepalen.

$$z_j^* - c_j = \vec{c}_B^* \vec{y}_j^* - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}^* y_{ij}^* - c_j \qquad (2.3.43)$$

Er geldt: $c_{Bi}^{*} = c_{Bi}$ $\quad i \neq r$, $c_{Br} = c_k$. Substitueer (2.3.42) in (2.3.43).

$$z_j^{*} - c_j = \sum_{i \neq r} c_{Bi} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} c_k - c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} c_k - c_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ij} - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{Bi}\, y_{ik} - c_k\right).$$

of

$$z_j^{*} - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \qquad (2.3.44)$$

We zullen nu een kort overzicht geven van de Simplex Methode.

Uitgaande van de verkregen toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$, de vektoren $\vec{y}_j$ en de getallen $z_j - c_j$ in de n^{de} stap, verloopt de $n+1^{ste}$ stap van de interatieprocedure als volgt:

(1) Beschouw de getallen $z_j - c_j$. Er zijn drie verschillende mogelijkheden.

(a) $z_j - c_j \leq 0$ voor alle j. In dit geval is $\vec{x}_B$ een optimale oplossing.

(b) $z_j - c_j > 0$ voor sommige j en voor tenminste één j waarvoor $z_j - c_j > 0$ geldt $y_{ij} \leq 0$ voor alle i. Dan is er een onbegrensd minimum.

(c) $z_j - c_j > 0$ voor sommige j en voor elke j met $z_j - c_j > 0$ geldt $y_{ij} > 0$ voor minstens één index i. Kies de $\vec{a}_k$ bepaald door

$$z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j),\ z_j - c_j > 0.$$

Is de index k niet uniek, dan is het gebruikelijk de kleinste index te nemen.

(2) Als geval 1^c van toepassing is. Bepaal de vektor $\vec{b}_r$ in de basis waarvoor geldt

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left(\frac{x_{Bi}}{y_{ik}} \text{ , } y_{ik} > 0\right)$$

Vervang $\vec{b}_r$ door $\vec{a}_j$

Is r niet uniek, dan is het gebruikelijk de index r te kiezen waarvoor y_{rk} het grootst is.

(3) Bepaal de nieuwe toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B^*$, de vektoren $\vec{y}_j^*$, de getallen $z_j^* - c_j$ en de nieuwe waarde van de objectfunctie.
Daarvoor geldt (zie (2.3.28), (2.3.29), (2.3.42) en (2.3.44)):

$$x_{Bi}^* = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \quad , \; i \neq r$$

$$x_{Br}^* = \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \qquad (2.3.45)$$

$$y_{ij}^* = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \quad , \quad i \neq r$$

$$y_{rj}^* = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \qquad (2.3.46)$$

$$z_j^* - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \; (z_k - c_k)$$

$$z^* = z - \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \; (z_k - c_k) \qquad (2.3.47)$$

Is $\vec{x}_B^*$ niet optimaal, dan keren we terug naar (1).
Deze iteratieprocedure leidt in een eindig aantal stappen naar de oplossing van het probleem.

Opgave: Ga na dat het in het geval we de kriteriumfunctie z willen maximaliseren het kriterium (2.3.31) overgaat in $z_k - c_k = \min_j (z_j - c_j)$, $z_j - c_j < 0$ en dat kriterium (2.3.27) onveranderd blijft.
Herformuleer de stellingen (2.3.5) en (2.3.6).

De beschreven Simplex methode dient voor het oplossen van het volgende L.P.-probleem:

Bepaal het minimum van

$$z = \vec{c}\vec{x} \tag{2.3.48}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq \vec{0} \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

De toepassing van de Simplex-methode vereist:

a) Het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ is oplosbaar, d.w.z. $r(A,\vec{b}) = r(A)$.

b) Geen enkele vergelijking van $A\vec{x} = \vec{b}$ is overbodig, d.w.z.
$r(A,\vec{b}) = r(A) = m$, waarbij m het aantal rijen van A aangeeft.

c) Een toegelaten basisoplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ is ons bekend.

Het oorspronkelijke L.P.-probleem werd als volgt geformuleerd:

Minimaliseer

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.3.50}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i && (i=1,\ldots,m_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i && (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i && (i=m_1+m_2+1,\ldots,m) \\ x_j &\geq 0 && (j=1,\ldots,n). \end{aligned} \tag{2.3.51}$$

In deze formulering wordt de vektor $\vec{b}$ zo gekozen[x] dat

$$\vec{b} \geq \vec{0}. \tag{2.3.52}$$

---

x) zie opmerking 2) na stelling 2.3.7.

In § 1 (stelling 1.1) hebben wij gezien dat deze formulering <u>gelijkwaardig</u> is aan:

Minimaliseer

$$z = \sum_{j=1}^{n+m_1+m_2} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.3.53)$$

met $c_j = 0$ $(j=n+1,\ldots,n+m_1+m_2)$ onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i \quad (i=1,\ldots,m_1)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} &= b_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i \quad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m)\\
x_j &\geq 0 \quad (j=1,\ldots,n+m_1+m_2)
\end{aligned} \qquad (2.3.54)$$

<u>De matrix van de coëfficienten van het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) geven we voor dit probleem aan met A.</u>

De variabelen x_{n+i} heten verschilvariabelen, hun c-waarde is nul.
Deze laatste formulering brengt het L.P.-probleem in de vorm (2.3.48) -(2.3.49). Het zal de lezer duidelijk zijn dat voor het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54) eisen a) en b) niet altijd even gemakkelijk controleerbaar zijn en dat het vinden van een toegelaten oplossing (als deze bestaat) een tijdrovende bezigheid kan zijn. Om aan deze bezwaren tegemoet te komen gaan we ons probleem veranderen door het invoeren van <u>artificial variabelen</u> u_i (op te vatten als tijdelijke hulpvariabelen), die we de c-waarden M geven, waarbij M een zeer groot positief getal zodat $M \gg c_j, a_{ij}$.
Het volgende L.P.-probleem, dat probleem (2.3.53)-(2.3.54) omvat, gaan we nu oplossen.

Bepaal het minimum van

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m_1+m_2} c_j x_j + M \sum_{j=m_1+1}^{m} u_j$$

met $c_j = 0$ $(j=n+1,\ldots,n+m_1+m_2)$, M zeer groot positief getal onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} && = b_i \quad (i=1,\ldots,m_1)\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} + u_i && = b_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + u_i && = b_i \quad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m)
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0,\ u_i \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n+m_1+m_2;\ i=m_1+1,\ldots,m) \qquad (2.3.56)$$

Alléén dan als alle $u_i = 0$ zijn de L.P.-problemen (2.3.53)-(2.3.54) en (2.3.55)-(2.3.56) gelijk. We hebben met het invoeren van de artificial bereikt dat de coëfficientenmatrix D van het vergelijkingsstelsel uit (2.3.56), merk op dat A een deelmatrix van D is, in de vorm D=(R,I) geschreven kan worden, waarbij I de eenheidsmatrix I_m is.
De eisen a), b) en c) zijn voor dit probleem vervuld.
Immers de m × (n+m) matrix D bevat de m eenheidsvektoren van I_m, dus $r(D) = r(D_b) = m$. Verder kunnen wij direct een toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ aangeven, nl. $\vec{x}_B = \vec{b} \geq \vec{0}$, waarbij $B = I_m$ en de variabelen x_{n+i} $(i=1,\ldots,m_1)$ en u_i $(i=m_1+1,\ldots,m)$ de basisvariabelen zijn met

$$\begin{aligned}
x_{n+i} &= b_i\\
u_i &= b_i
\end{aligned} \qquad (2.3.57)$$

Een oplossing van (2.3.55)-(2.3.56) is alléén dan een oplossing voor (2.3.53)-(2.3.54) als voor die oplossing alle $u_i = 0$ zijn. Als in probleem (2.3.55)-(2.3.56), alle $u_i=0$ zijn, dan zijn de twee problemen (2.3.55)-(2.3.56) aan elkaar gelijk. We gaan nu het L.P.-probleem (2.3.55)-(2.3.56) volgens de Simplex methode oplossen. We beginnen met de toegelaten basisoplossing (2.3.57) en zullen tijdens het oplossingsprocédé proberen de vektoren die bij de artificials behoren uit de basis te verwijderen, zodat de artificials de waarde nul krijgen. Als (2.3.53)-(2.3.54) een oplossing bezit dan lukt dit als we M maar voldoende groot nemen, immers zolang een artificial nog een positieve

waarde bezit, kan de waarde van de kriteriumfunctie verbeterd worden. Als na een stap in het oplossingsproces de bij een artificial variabele behorende basisvektor (merk op dat dit een eenheidsvektor is) uit de basis verdwijnt, dan zullen we deze kolomvektor uit D schrappen, dus de betreffende artificial krijgt de waarde nul en wordt uit de vergelijking geschrapt waarin deze artificial voorkomt.
We krijgen weliswaar een nieuw L.P.-probleem dat "tussen de L.P.-problemen (2.3.53)-(2.3.54) en (2.3.55)-(2.3.56) inzit" maar ook voor dit probleem zijn de eisen a), b) en c) vervuld. Een oplossing van dit nieuwe probleem is alléén dan oplossing van (2.3.53)-(2.3.54) als de resterende artificials nul zijn. Het verschilt van (2.3.55)-(2.3.56) omdat het minder artificials bevat. De weggelaten artificial was oorspronkelijk nodig om een beginoplossing te verkrijgen, maar is nu overbodig geworden omdat een toegelaten basisoplossing is gevonden waarin de artificial niet meespeelt. Deze werkwijze zorgt ervoor dat als de kolomvektor behorende bij een artificial uit de basis is verwijderd, deze kolomvektor er niet meer in kan terugkomen. Wanneer we op deze wijze tewerk gaan zal na verloop het optimaliteitskriterium $z_j - c_j \leq 0$, alle j, vervuld zijn, mits er geen onbegrensde oplossing is, hetgeen we zullen aannemen.

Men kan nu drie gevallen onderscheiden

1) In de optimale toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ komen geen artificials voor.
2) In de optimale toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ komen artificials voor, maar alléén op nulniveau, d.w.z. $u_i = 0$.
3) In de optimale toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ komen artificials voor met positieve waarden.

<u>Nu geldt de volgende stelling</u>

<u>Stelling 2.3.7.</u>

I. Als geval 1) zich voordoet dan is $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten <u>basis</u>oplossing voor het oorspronkelijke L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54). Er geldt tevens dat het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) niet strijdig is en dat geen enkele vergelijking overbodig is.

II. Als geval 2) zich voordoet dan vormen de x-variabelen van $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten oplossing voor het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54). Het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) is niet strijdig, maar sommige vergelijkingen kunnen overbodig zijn. Is dit laatste het geval, dan kan men eenvoudig bepalen welke vergelijkingen gemist kunnen worden.

III. Als geval 3) zich voordoet dan bezit het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54) geen toegelaten oplossing. Er is geen toegelaten oplossing òf omdat het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) strijdig is òf omdat het vergelijkingenstelsel niet strijdig is maar geen toegelaten oplossing bezit.

De Simplex-methode stelt ons in staat onderscheid te maken tussen deze twee mogelijkheden.

Gevolg. We zien uit deze stelling dat we voor het oorspronkelijke L.P.-probleem de eisen a), b) en c) niet afzonderlijk behoeven te onderzoeken. Welke van deze eisen vervuld zijn volgt als "bijprodukt" uit de toepassing van de Simplex-methode op het L.P.-probleem (2.3.55)-(2.3.56).

Bewijs:

I. $\vec{x}_B$ bevat geen artificials, dus de bij de basisvariabelen van $\vec{x}_B$ behorende basisvektoren zijn kolomvektoren van de matrix A van probleem (2.3.53)-(2.3.54). Dus $\vec{x}_B$ is een toegelaten basisoplossing voor het vergelijkingenstelsel in (2.3.54), wat betekent dat dit vergelijkingenstelsel niet strijdig is. Verder is geen enkele vergelijking van dit stelsel overbodig, omdat r(A) = m. r(A) = m, daar de m basisvektoren behorende bij $\vec{x}_B$ kolomvektoren van A zijn. We weten dat voor de toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ geldt $z_j - c_j \leq 0$, voor elke $\vec{a}_j$ uit A. Nu zegt stelling 2.3.6 ons dat $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten basisoplossing is voor het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54).

II. Wegens de handelwijze toegepast bij het oplossingsprocédé van probleem (2.3.55)-(2.3.56), het schrappen van de artificial variabele waarvan de bijbehorende kolomvektor uit de basis is gewerkt, weten we dat $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten basisoplossing is van een zeker L.P.-probleem "tussen de problemen (2.3.53)-(2.3.54) en (2.3.55)-(2.3.56) in". Als de in dit probleem optredende artificials de waarde nul bezitten, dan is het probleem gelijk aan het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54). Voor $\vec{x}_B$ geldt dat er onder de basisvariabelen artificials voorkomen, doch met de waarde nul. Dit betekent dat de x-waarden van $\vec{x}_B$ een optimale toegelaten oplossing vormen voor het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54). Hieruit volgt dat het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) niet strijdig is. Nu gaan we onderzoeken of wellicht sommige vergelijkingen overbodig zijn . In $\vec{x}_B$ komen artificials voor als basisvariabelen met de waarde nul, dit houdt in dat sommige kolomvektoren van D behorende bij artificials nog in de basis zitten. Stel dat de basisvektor $\vec{b}_r$ correspondeert met een artificial $x_{Br} = u_k = 0$. Voor elke kolom $\vec{a}_j$ van D <u>niet</u> in de basis (ga na dat $\vec{a}_j$ dan kolomvektor van de matrix A) geldt:

$$\vec{a}_j = \sum_{i \neq r} y_{ij} \vec{b}_i + Y_{rj} \vec{b}_r \qquad (2.3.57)$$

Als $y_{rj} \neq 0$ dan kunnen we de vektor $\vec{a}_j$ in de basis opnemen en de vektor $\vec{b}_r$ uit de basis verwijderen. (stelling 2.2.5). De nieuwe basis wordt: $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{r-1}, \vec{a}_j, \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_m)$

De bijbehorende basisoplossing is toegelaten, dit volgt uit (2.3.26) omdat $x_{Br} = 0$, (nu hoeft y_{rj} niet noodzakelijk positief te zijn), en wordt gegeven door

$$x_{Bi}^{*} = x_{Bi} \quad i \neq r$$
$$x_{Br}^{*} = x_j = 0 \qquad (2.3.58)$$

We zien dat de componenten van de nieuwe basisoplossing dezelfde waarden bezitten als de componenten van de vorige basisoplossing,

dit betekent dat de waarde van de kriteriumfunctie onveranderd is gebleven.

We kunnen nu concluderen:

Als voor een "artificial kolom" $\vec{b}_r$ in de basis met $x_{Br}=0$ en een niet artificial kolom $\vec{a}_j$ buiten de basis geldt: $y_{rj}\neq 0$, dan kan $\vec{a}_j$ in debasis worden opgenomen ten koste van $\vec{b}_r$. De bijbehorende basisoplossing is toegelaten en bezit dezelfde waarde van de kriteriumfunctie als de oorspronkelijke basisoplossing.

Lukt het ons om op grond van bovenstaande al de "artificial kolommen" uit de basis te verwijderen, dan krijgen we een ontaarde toegelaten basisoplossing (die ook optimaal is), waarbij onder de basisvariabelen geen artificial variabelen voorkomen en dus de m basisvektoren behorende bij de basisvariabelen kolomvektoren van A zijn. Hieruit volgt $r(A)=m$, of te wel geen enkele vergelijking uit het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) is overbodig.

Lukt het ons niet om al de artificial kolommen uit de basis te verwijderen dan blijven er aantal over in de basis. Stel dit aantal is s en laten we aannemen dat de eerste s kolomvektoren $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_s$ van de basis artificial vektoren zijn. Voor deze vektoren geldt:

$$y_{rj}=0 \quad \text{voor} \quad \vec{a}_j\neq\vec{b}_r, \text{ met } 1 \leq r \leq s.$$

Voor alle niet-artificial kolommen $\vec{a}_j$ geldt:

$$\vec{a}_j = \sum_{i=s+1}^{m} y_{ij}\,\vec{b}_i \qquad (2.3.59)$$

Omdat voor de artificials geldt $u_i=0$ vinden wij tevens

$$\vec{b} = \sum_{i=s+1}^{m} x_{Bi}\,\vec{b}_i \qquad (2.3.60)$$

De vektoren $\vec{b}_i$ $(i=s+1,\ldots,m)$ zijn niet-artificial kolommen, dus kolomvektoren van de matrix A. We zien nu uit (2.3.59) en (2.3.60) dat elke kolomvektor uit de matrix $(A,\vec{b})$ geschreven kan worden als een lineaire combinatie van (m-s) lineair onafhankelijke kolomvektoren van A. Hieruit volgt $r(A)=r(A_b)=m-s$.

Bijgevolg kunnen s vergelijkingen van het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) gemist worden. We moeten nu alleen nog onderzoeken welke weggelaten kunnen worden.

Zoals we weten zijn de artificial kolommen eenheidsvektoren. Stel dat $\vec{b}_1$ de eenheidsvektor $\vec{e}_k$ voorstelt. De rang van de matrix A is m-s. Vul de matrix A aan met de artificial kolommen $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_s$. De zo verkregen matrix geven we aan met H. H aangevuld met $\vec{b}$ is $H_b = (H,\vec{b})$. Er geldt $r(H)=r(H_b)=m$. Immers $\vec{b}_{s+1},\ldots,\vec{b}_m$ zijn kolomvektoren van A en $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_m$ zijn lineair onafhankelijk. Laat $H_{1,b}$ de matrix zijn die we verkrijgen uit H_b door de kolomvektor $\vec{b}_1$ weg te laten. Er geldt $r(H_{1,b})=m-1$. Merk op dat A een deelmatrix is van $H_{1,b}$, waarbij $H_{1,b}$ en A een zelfde aantal rijen bezitten, n.l. m.

De rijen van $H_{1,b}$ geven we aan met $\vec{h}_1{}^i$, $(i=1,\ldots,m)$, de rijen van H_b worden aangegeven met $(\vec{h}_1{}^i,0)$, $i\neq k$ en $(\vec{h}^i,1)$, als $i=k$. (Immers $\vec{b}_1=\vec{e}_k$). Omdat de rang van $H_{1,b}$ gelijk aan m-1 is, bestaan er getallen λ_i <u>niet</u> allen gelijk aan nul, zodat geldt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{h}_1{}^i = \vec{0} \qquad (2.3.61)$$

We zullen nu aantonen dat $\lambda_k\neq 0$, dit betekent dat de $k^{\underline{de}}$ rij van $H_{1,b}$ te schrijven is als een lineaire combinatie van de overige rijen van $H_{1,b}$. A is een deelmatrix van $H_{1,b}$ met het zelfde aantal rijen. Dus de $k^{\underline{de}}$ rij van A is te schrijven als een lineaire combinatie van de overige rijen van A, of te wel de $k^{\underline{de}}$ vergelijking van het vergelijkingenstelsel in (2.3.54) kan worden weggelaten.

Nu moeten we nog aantonen dat $\lambda_k\neq 0$.

(2.3.61) is ook te schrijven als

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\vec{h}_1{}^i, 0) = \vec{0} \qquad (2.3.62)$$

Stel λ_k=0. Dan volgt uit (2.3.62)

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \lambda_i(\vec{h}_1{}^i, 0) + \lambda_k(\vec{h}_1{}^i, 1) = \vec{0} \qquad (2.3.63)$$

met λ_k=0, en minstens één $\lambda_i \neq 0$, $i \neq k$.
Doch dit is in tegenspraak met $r(E_b)=m$.

Immers uit $\sum_{i\neq k} \alpha_i(\vec{h}_1{}^i, 0) + \alpha_k(\vec{h}_k{}^i, 1) = \vec{0}$ volgt $\alpha_i=0$ $(i=1,\ldots,m)$. Bijgevolg $\lambda_k \neq 0$.

<u>We hebben nu het volgende aangetoond:</u>

Als voor een artificial kolom $\vec{b}_r$ in de basis met $x_{Br}=0$ en voor elke niet-artificial kolom $\vec{a}_j$ buiten de basis geldt: $y_{rj}=0$ en als de vektor $\vec{b}_r$ de eenheidsvektor $\vec{e}_k$ voorstelt dan kan de $\underline{k^{de}}$ vergelijkingen in (2.3.54) worden weggelaten.
In de praktijk betekent dit dat we ons wiskundige model door een eenvoudiger model kunnen vervangen.

III. Het is onmiddellijk duidelijk dat in dit geval het L.P.-probleem (2.3.53)-(2.3.54) geen toegelaten oplossing bezit. Stel (2.3.53)-(2.3.54) bezit wel een toegelaten oplossing $\vec{t}$. $\vec{x}_B$ is de optimale toegelaten basisoplossing van een zeker L.P.-probleem dat "tussen (2.3.53)-(2.3.54) en (2.3.55)-(2.3.56) inzit". Stelt men de in dit probleem optredende artificials nul dan is $\vec{t}$ aangevuld met deze nul zijnde artificials, ook een toegelaten oplossing voor dit L.P.-probleem, waarbij de waarde van de kriteriumfunctie voor $\vec{t}$ veel lager is dan voor $\vec{x}_B$, immers in $\vec{x}_B$ komen positieve artificials voor en er geldt $M>>c_j$. Tegenspraak met $\vec{x}_B$ is optimaal.
Dus probleem (2.3.53)-(2.3.54) bezit geen toegelaten oplossing.
De bijvoorwaarden (2.3.54) zijn te splitsen in:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - x_{n+i} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (2.3.64)$$

en

$$x_j \geq 0 \qquad (2.3.65)$$

We hebben reeds vermeld dat A de matrix van de coëfficiënten van het vergelijkingenstelsel (2.3.64) is.
Nu zijn er twee mogelijkheden.
De vergelijkingen (2.3.64) zijn strijdig óf de vergelijkingen (2.3.64) zijn weliswaar niet strijdig doch bezitten geen toegelaten (d.w.z. niet-negatieve) oplossing.
In de basis behorende bij de $\vec{x}_B$ komen een aantal artificial kolommen voor. Zij $\vec{b}_r$ een artificial kolom en $\vec{a}_j$ een niet-artificial kolom, die niet in de basis zit met $y_{rj} \neq 0$. Nu kan $\vec{a}_j$ in de basis worden opgenomen ten koste van $\vec{b}_r$. We krijgen dan een nieuwe basis, en als deze basis nog artificial kolommen bevat, dan kunnen we het voorgaande trachten te herhalen. Als we op deze wijze tewerk gaan dan stuiten we op één van de volgende situaties:

α) we verkrijgen een basis waaruit alle artificial kolommen verwijderd zijn.

β) het lukt niet om al de artificial kolommen uit de basis te verwijderen.

<u>Situatie α)</u> impliceert dat de vergelijkingen (2.3.64) niet strijdig zijn. Maar ze bezitten geen toegelaten oplossing. Immers de vektoren van de verkregen basis zijn kolomvektoren van de matrix A en we hebben dus een basisoplossing voor het vergelijkingenstelsel (2.3.64) gevonden, die echter <u>niet</u> toegelaten is om de eenvoudige reden dat het probleem (2.3.53)-(2.3.54) geen toegelaten oplossing bezit.

<u>Situatie β)</u> impliceert dat het steldel (2.3.64) strijdig is.
Laat in de verkregen basis het resterende aantal artificial kolommen p zijn. Neem aan $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p$ artificial kolommen.
Voor elke niet-artificial kolom $\vec{a}_j$ geldt:

$$y_{ij} = 0 \quad (i=1,\ldots,p).$$

Bijgevolg geldt voor elke niet-artificial kolom $\vec{a}_j$:

$$\vec{a}_j = \sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i \qquad (2.3.66)$$

$\vec{b}_{p+1}, \ldots, \vec{b}_m$ zijn niet-artificial kolommen, dus kolomvektoren van A. We zien uit (2.3.66) dat elke kolomvektor van A te schrijven is als een lineaire combinatie van m-p lineair onafhankelijke kolomvektoren van A. Hieruit volgt $r(A) = m-p$.
Daar $\vec{x}_B$ positieve artificials bevat en $\vec{b} = \sum_{i=1}^{m} x_{Bi} \vec{b}_i$ zien we dat $\vec{b}$ niet als een lineaire combinatie van de m-p lineair onafhankelijke kolomvektoren $(\vec{b}_{p+1}, \ldots, \vec{b}_m)$ van A te schrijven is. Men ziet nu eenvoudig in dat $r(A_b) > r(A)$. Dit betekent dat het stelsel vergelijkingen (2.3.64) strijdig is. (zie stelling 2.2.10).

<u>Opmerking 1:</u> Het zal de lezer duidelijk zijn dat als de matrix A van probleem (2.3.53)-(2.3.54) al een gedeelte van de eenheidsmatrix I_m bevat we niet meer artificials toevoegen dan noodzakelijk is om I_m te verkrijgen.

<u>Opgave:</u> Laat voor een L.P.-probleem de bijvoorwaarden de vorm

$$\vec{Ax} \geq \vec{b}, \ \vec{b} \geq \vec{O}, \qquad (*)$$

bezitten. Ga na dat men voor het oplossen van dit L.P.-probleem hoogstens één artificial behoeft in te voeren.
Aanwijzing: Na toevoegen van verschilvariabelen wordt (*) gelijk aan $\vec{Ax} - \vec{Ix}_v = \vec{b}$ (**). Zij $b_s = \max_i b_i$. Transformeer nu (**) in een equivalent stelsel vergelijkingen door elke vergelijking, behalve de s^{de}, met -1 te vermenigvuldigen en de s^{de} vergelijking erbij op te tellen.

<u>Opmerking 2:</u> In de L.P.-probleem hebben wij er steeds voor gezorgd dat de getallen b_i niet negatief waren. (als b_i negatief was, dan vermenigvuldigden we de relatie waarin b_i optrad met -1). Theoretisch bezien is dit onnodig, zoals we direct zullen aantonen. Maar bij het oplossen van L.P.-probleem in de praktijk zorgt men er altijd voor dat de getallen b_i positief zijn, de berekeningen in het oplossings-

procédé lopen dan gemakkelijker. Berekeningen uitgevoerd m.b.v. een computer zijn ingesteld op niet-negatieve getallen b_i.
We herhalen nogmaals dat de methodiek van de Simplex-methode ook negatieve getallen b_i toestaat.
Ons L.P.-probleem luidt:

$$\text{minimaliseer} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{onder} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \leq = \geq \right\} b_i \quad (i=1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

De getallen b_i kunnen negatief zijn.
Voeg vervolgens verschilvariabelen $x_{n+i} \geq 0$ toe, hun c-waarde is nul
Het probleem komt nu in de vorm (2.3.53)-(2.3.54), alleen zijn er nu mogelijk negatieve getallen b_i. Wederom staan we voor de moeilijkheid om de eisen a), b) en c) na te gaan. Deze moeilijkheid is eenvoudig op te lossen. Voeg artificial variabelen $u_i \geq 0$ toe (met coëfficient +1 of -1) zodat er in elke vergelijking één variabele voorkomt, die niet in de andere vergelijkingen voorkomt, met coëfficiënt +1 of -1 al naar gelang b_i positief of negatief is. De artificials krijgen c-waarde M. Voor het nu verkregen L.P.-probleem gelden de eisen a), b) en c). De basismatrix waarmee we beginnen bevat zowel kolommen van de vorm $-\vec{e}_i$ als kolommen van de vorm $+\vec{e}_i$. De bijbehorende basisoplossing wordt gegeven door $x_{Bi} = |b_i| \quad (i=1,\ldots,m)$.
We kunnen nu analoog te werk gaan als beschreven onder probleem (2.3.55)-(2.3.56).
Deze opmerking 2 is slechts van <u>theoretisch</u> belang, in de <u>praktijk</u> zorgen we altijd voor dat $b_i \geq 0$, alle i.

Wanneer Simplex-berekeningen met de hand worden uitgevoerd is het wenselijk dat een doelmatige schema wordt gevolgd.
Beschouw het L.P.-probleem:

$$\text{minimaliseer} \quad z = \vec{\vec{c}}\vec{x}$$

$$\text{onder}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}, \; \vec{x} \geq \vec{0}$$

met $\vec{b} \geq \vec{0}$ en $r(A) = r(A_b) = m$ = aantal rijen A. Verder is een basis B ons bekend, dus ook de bijbehorende toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1} \vec{b}$. Elke kolomvektor $\vec{a}_j$ van A is uit te drukken in de basisvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$ van B.

$$\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \vec{b}_i$$

Voor elke vektor $\vec{b}_j$ in de basis geldt

$$\vec{b}_j = \sum_{i \neq j} 0.\vec{b}_i + 1.\vec{b}_j$$

De vektoren y_j die bij de basisvektoren van B behoren vormen dus altijd de eenheidsmatrix I_m

Met elke $\vec{a}_j$ van A correspondeert een variabele z_j gegeven door

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} c_{Bi}$$

met c_{Bi} de c-waarden van de basisvariabelen.

Voor elke vektor in de basis geldt $z_j = c_j$.

De waarde van de kriteriumfunctie voor $\vec{x}_B$ bedraagt:

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} x_{Bi}.$$

We zullen nu een tabel geven waarin al de grootheden voorkomen, die van belang zijn. Bij elke stap in de Simplex-methode, dus telkens wanneer één nieuwe vektor in de basis verschijnt, wordt een nieuwe tabel geconstrueerd.

De eerste kolom van de tabel, met als hoofd $\vec{c}_B$, geeft de c-waarden van de variabelen die bij de basisvektoren van B behoren. De tweede kolom, hoofd B, zegt ons welke vektoren van A in de basis zitten. Dus $\vec{b}_1$ is de vektor van A die de eerste kolomvektor van B is. Als $\vec{a}_8$ tweede kolomvektor van B is dan schrijven we $\vec{a}_8$ waar $\vec{b}_2$ staat in de tabel. De derde kolom, hoofd $\vec{b}$, geeft de lopende waarde van $\vec{x}_B$. In de volgende kolommen, staan de waarden van $\vec{y}_j$ vermeld voor elke kolomvektor $\vec{a}_j$ van A. (In de begintabel schrijven we de kolomvektoren van A die de basisvektoren van B zijn voorop, in de volgende tabellen zullen wij de volgorde van de hoofden $\vec{a}_j$ ongewijzigd laten).

We voegen aan de tabel nog twee rijen toe. In de rij aan de onderkant

staat in elk hokje onder de kolom met het hoofd $\vec{a}_j$ het getal $z_j - c_j$.
In het hokje onder de kolom met hoofd $\vec{b}$ vermelden we de waarde van de kriteriumfunctie voor de in de tabel gegeven $\vec{x}_B$.
Aan de bovenkant van de tabel voegen wij een rij toe waarin de c-waarden staan van de variabelen, die bij de kolomvektoren $\vec{a}_j$ behoren.

Tabel voor Simplex-methode

			c_{B1}		c_{Br}		c_{Bm}	c_1		c_k		c_n
$\vec{c}_B$	B	$\vec{b}$	$\vec{b}_1$		$\vec{b}_r$		$\vec{b}_m$	$\vec{a}_1$		$\vec{a}_k$		$\vec{a}_n$
c_{B1}	$\vec{b}_1$	x_{B1}	1	..	0	..	0	y_{11}	..	y_{1k}	..	y_{1n}
c_{Br}	$\vec{b}_r$	x_{Br}			1			y_{r1}		y_{rk}		y_{rn}
c_{Bm}	$\vec{b}_m$	x_{Bm}	0	..	0	..	1	y_{m1}	..	y_{mk}	..	y_{mn}
$z_j - c_j$		z	0	0	0	0	0	$z_1 - c_1$	..	$z_k - c_k$	..	$z_n - c_n$

We zullen nu laten zien hoe deze tabel gebruikt wordt om het L.P.-probleem op te lossen. Een toegelaten basisoplossing is gegeven, en we hebben bovenstaande tabel voor deze oplossing geconstrueerd. Eerst onderzoeken wij de laatste rij.
Als alle $z_j - c_j \leq 0$, dan is de toegelaten basisoplossing optimaal.
Is dit niet het geval, kies dan de kolom waarvoor $z_j - c_j > 0$ en maximaal is. Laat dit de kolom zijn met hoofd $\vec{a}_k$. Is k niet uniek neem dan b.v. de kleinste k-index. Als $y_{ik} \leq 0$ voor alle i, dan is er een onbegrensde oplossing. Als voor minstens één index i $y_{ik} > 0$, dan brengen we $\vec{a}_k$ in de basis ten koste van de basisvektor $\vec{b}_r$, waarbij r bepaald wordt door:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \frac{x_{Bi}}{y_{ik}} \quad , \quad y_{ik} > 0$$

Is r niet uniek, dan, is het gebruikelijk de index r te nemen waarvoor y_{rk} het grootst is. We vervangen nu $\vec{b}_r$ door $\vec{a}_k$. Dit betekent dat de vektor in de $r^{\underline{de}}$ rij van de kolom met het hoofd B vervangen wordt door $\vec{a}_k$. Verder wordt in de kolom met hoofd $\vec{c}_B$ de c-waarde c_{Br} vervangen door c_k. De berekeningen om het minimum te bepalen zijn eenvoudig uit te voeren. Men deelt elk element uit de kolom met hoofd $\vec{b}$ door het, in dezelfde rij staande, overeenkomstige element uit de kolom met hoofd $\vec{a}_k$. Als we de vektor $\vec{b}_r$ hebben bepaald die door $\vec{a}_k$ vervangen wordt, dan moeten we de nieuwe tabel construeren, die behoort bij de nieuwe basis.

De berekening van de nieuwe tabel geschiedt d.m.v. de transformatieformules (2.3.45) t/m (2.3.47). Hierin worden de nieuwe waarden voor $\vec{x}_B$, $\vec{y}_j$, $z_j - c_j$ en z gegeven.

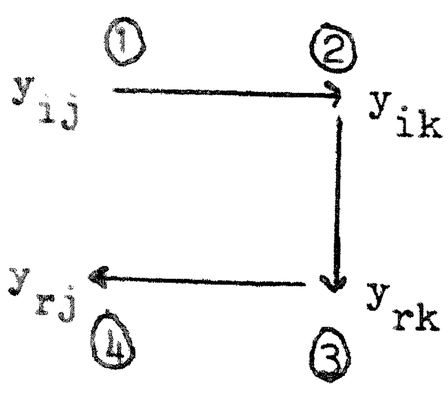
We zullen deze transformatieformules, die op het eerste gezicht er gecompliceerd uitzien, aan een nader onderzoek onderwerpen.

Het zal dan blijken dat ze eenvoudig toe te passen zijn. We laten dit zien aan de hand van de nieuwe getallen y_{ij}. We beschouwen daartoe (2.3.46)

$$y_{ij}^{*} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\, y_{rj} \qquad i \neq r \tag{2.3.46a}$$

$$y_{rj}^{x} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \tag{2.3.46b}$$

De $i^{\underline{de}}$ rij onder de rij waarin de hoofden staan, noemen we rij i. Elk element in de nieuwe rij r wordt gevonden door het corresponderende element in de oude rij r door y_{rk} te delen. Elke andere rij in de nieuwe tabel vindt men d.m.v. (2.3.46a). We zullen (2.3.46a) nu met een plaatje verhelderen.



① y_{ij}, ② $y_{ij} - y_{ik}$

③ $y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}$ ④ $y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \cdot y_{rj} = y_{ij}^{*}$

Om y_{ij}^{*} voor de nieuwe tabel te bepalen, beginnen we in de oude tabel met y_{ij}. We gaan dan langs rij i naar kolom k (de kolom behorende bij $\vec{a}_{k1}$ die de basis inkomt). We noteren dan $y_{ij}-y_{ik}$. Vervolgens gaan we langs kolom k naar rij r (de rij behorende bij $\vec{b}_r$, die door $\vec{a}_k$ vervangen wordt) en noteren $y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}$. Tenslotte gaan we langs rij r terug naar kolom j en noteren $y_{ij}^{*} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \cdot y_{rj}$

Ga na dat voor x_{Bi}^{*}, $z_j^{*}-c_j$ en z^{*} een zelfde operatie van toepassing is. Wanneer men de nieuwe tabel geconstrueerd bespaart men zich overbodig rekenwerk als men bedenkt dat als $\vec{a}_j$ de $i^{\underline{de}}$ kolomvektor van de nieuwe basis is, er dan geldt $\vec{y}_j^{*} = \vec{e}_i$ en $z_j^{*} - c_j = 0$. Wb kunnen dus direct m kolommen van de nieuwe tabel invullen.

Als de nieuwe tabel verkregen is onderzoekt men de nieuwe getallen $z_j^{*} - c_j$ om na te gaan of $\vec{x}_B^{*}$ mogelijk optimaal is. Als een optimale oplossing verkregen is, dan verschaft de eindtabel ons alle mogelijke informatie over deze oplossing. Uit de kolom met hoofd B zien we welke variabelen basisvariabelen zijn voor de optimale toegelaten basisoplossing. Uit de kolom met hoofd B lezen we direct de waarden van de basisvariabelen af, en de optimale waarde van de kriteriumfunctie.

<u>Opmerkingen</u>:

Als de basismatrix B waarmee we beginnen de eenheidsmatrix is dan is de begintabel eenvoudig te construeren, immers $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b} = I^{-1}\vec{b} = \vec{b}$, $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j = \vec{a}_j$.

Wanneer onder de kolomvektoren "artificial kolommen" voorkomen, en als na een stap in de Simplex-methode een "artificial kolom" uit de basis verwijderd wordt dan laten we in de nieuwe tabel de betreffende artificial kolom weg.

In §4 zullen we een iets gewijzigde tabel geven, de hoofden zullen we anders noteren i.p.v. vektoren schrijven we er de corresponderende variabelen. Het hoofd $\vec{b}$ vervangen we door het hoofd x_0, terwille van de uniformiteit.

Dit is alleen een kwestie van notatie.

Meetkundige interpretaties van de Simplex Methode

We zullen een intuïtieve toelichting geven. In de E^2 is een lijn een deelruimte van dimensie 1, een vlak in de E^3 is een deelruimte van dimensie 2. Men kan eenvoudig aantonen dat een hypervlak in de E^n een deelruimte van de E^n van dimensie n-1 is. De doorsnee van k onafhankelijke hypervlakken (d.w.z. de normalen zijn lineair onafhankelijk) in de E^n is een deelruimte van dimensie n-k. Ook dit bewijzen we niet. Algemeen geldt dat k hypervlakken in de E^n elkaar snijden volgens een deelruimte waarvan de dimensie minstens n-k is.

Beschouw het L.P.-probleem: x)

$$\text{minimaliseer} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m) \qquad (2.3.67)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.3.68)$$

We nemen aan dat de bijvoorwaarden onafhankelijk en niet strijdig zijn. De doorsnee van de gesloten halfruimten (2.3.67) en (2.3.68) is de gesloten convex verzameling X van toegelaten oplossingen.

De begrenzingen van X worden gegeven door de n+m hypervlakken

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1,\ldots,m)$$

$$x_j = 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.3.69)$$

---

x) Elk L.P.-probleem is in deze vorm te brengen. Immers vervang $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ door $\sum_{j=1}^{n} - a_{ij} x_j \leq - b_i$. De getallen b_i zullen nu iha niet allen positief zijn, doch dit is in het meetkundige betoog irrelevant.

Door ieder hoekpunt van X gaan minstens n van deze hypervlakken en in elk hoekpunt komen minstens n ribben tezamen.
We geven ter illustratie een convexe X in de E^3.

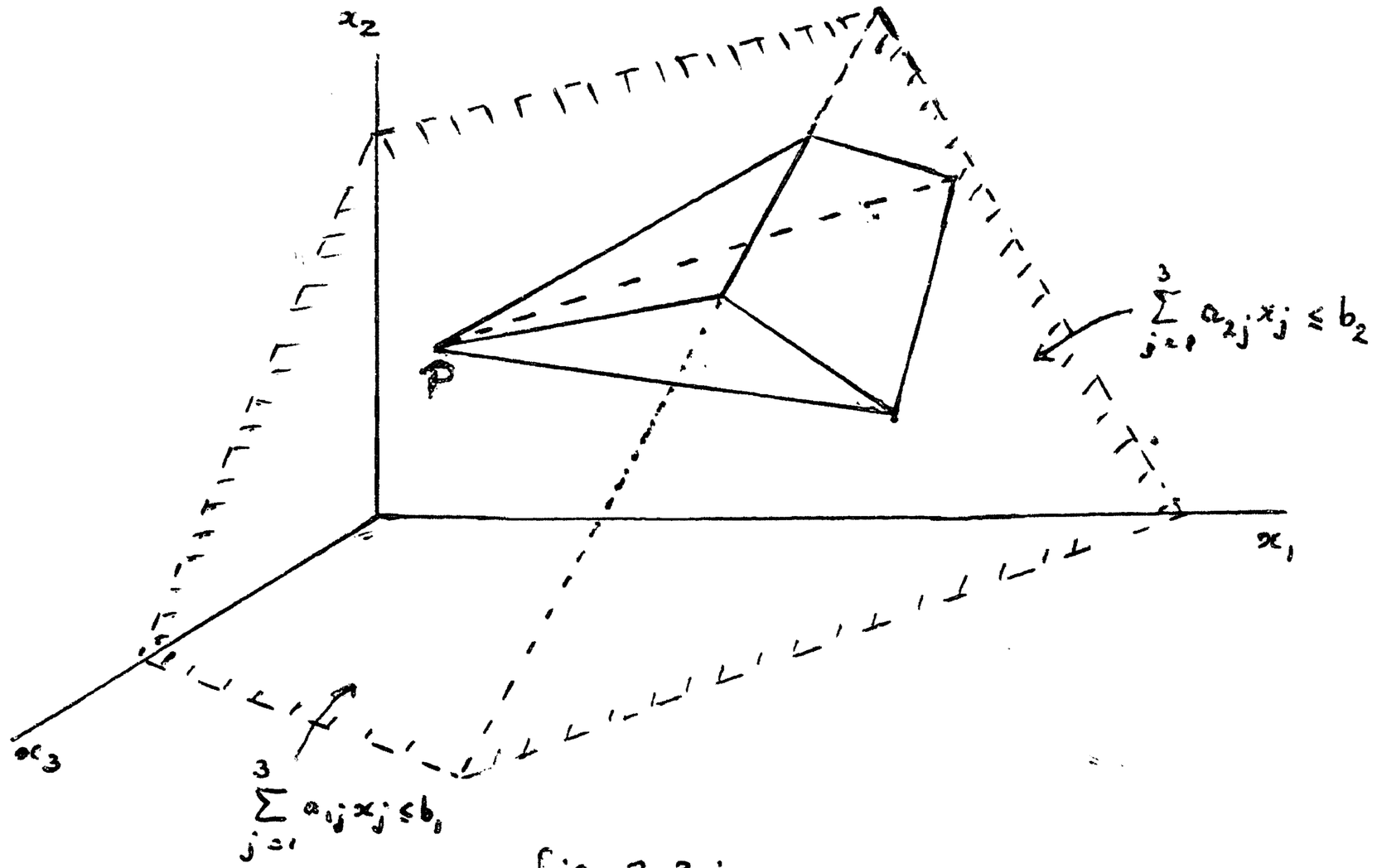


fig. 2.3.1

Merk op dat in het hoekpunt P 4 ribben tezamen komen. Voegen we aan (2.3.67) verschilvariabelen en artificials toe, dan wordt ons probleem

$$\text{minimaliseer } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i=1,\ldots,m) \qquad (2.3.70)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m)$$

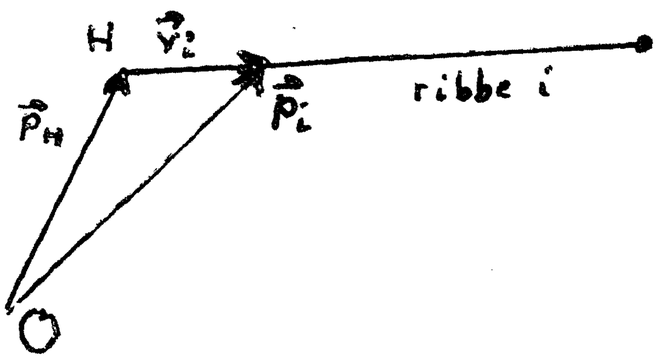
(2.3.70) is ook te schrijven als $A\vec{x} = \vec{b}$ of $\sum_{j=1}^{n+m} x_j \vec{a}_j = \vec{b}$.
We kunnen aan elk punt in de E^n m "afstandscomponenten" x_{n+i} toevoegen waarbij voor elke $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ geldt

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad (i=1,\ldots,m)$$

De meetkundige plaats van de punten in de E^n met $x_{n+i} = 0$ is het hyper-
n
vlak $\sum_{j=1} a_{ij}x_j = b_i$. We kunnen zeggen dat het hypervlak $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$

gekarakteriseerd wordt door $x_{n+i} = 0$.

Door elk hoekpunt van X gaan minstens n hypervlakken (2.3.69), dit betekent dat voor elk hoekpunt n van de n+m variabelen $x_j (j=1,\ldots,n+m)$ gelijk aan nul zijn, dus hoogstens m positief.
Ieder hoekpunt van X is een toegelaten basisoplossing van $A\vec{x}=\vec{b}$ (stelling 2.3.2) en er geldt dat minstens één hoekpunt een optimale oplossing is, als deze bestaat (stelling 2.2.18).
Bij de Simplex-methode starten we in één of ander hoekpunt en gaan we langs een ribbe naar een aangrenzend hoekpunt. We zullen nu voor de eenvoud van ons betoog aannnemen dat we in een niet-ontaard hoekpunt H beginnen. H is dus een niet-ontaarde toegelaten basisoplossing.
Omdat H niet ontaard is gaan door H n hypervlakken (2.3.69), of anders gezegd voor het hoekpunt H geldt dat m van de variabelen x_j $(j=1,\ldots,n+m)$ positief zijn, deze positieve variabelen zijn de basisvariabelen. Het bijbehorende m-tal vektoren $\vec{a}_j$ van A vormt de basis B waarmee we beginnen. In het hoekpunt H komen n ribben tezamen. Deze ribben zijn de n snijlijnen van de n verschillende combinaties van (n-1) hypervlakken door H. Als wij de n hypervlakken door H aangeven met $x_{s_j}=0$ $(j=1,\ldots,n)$ dan verstaan we onder de i^{de} ribbe de snijlijn van de combinatie $x_{s_j} = 0$ $(j\neq i)$. M.a.w. de i^{de} ribbe heeft maar één punt met het hyper-
j
vlak $x_{j_i} = 0$ gemeen, op de i^{de} ribbe geldt alléén voor het punt H: $x_{j_i}=0$
De kriteriumfunctie $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \vec{c}\vec{x}$ moet geminimalisserd worden.
Zij H het punt $\vec{p}_H$ in de E^n. Voor H geldt: $z = \vec{c}\,\vec{p}_H$.
We gaan nu de verandering van de kriteriumfunctie bepalen als we ons uitgaande van H een eenheid langs ribbe i verplaatsen. Doen we dit dan komen we in het punt $\vec{p}_i$ op ribbe i.



Nu is $\vec{p}_H + \vec{v}_i = \vec{p}_i$, $|\vec{v}_i| = 1 \quad (i=1,\ldots,n)$

Voor $\vec{p}_i$ geldt: $\overrightarrow{cp}_i = \overrightarrow{cp}_H + \overrightarrow{cv}_i$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b}) \qquad \text{(zie 2.2.43)}$$

dus $$\overrightarrow{cp}_i = \vec{c}.\vec{p}_H + |\vec{c}| \cos\phi_i$$

met $\phi_i = \sphericalangle(\vec{c},\vec{v}_i)$ = de hoek tussen ribbe i en de normaal $\vec{c}$.

en $0^\circ \leq \phi_i \leq 180^\circ$.

Bij deze verplaatsing is dus de verandering van de kriteriumfunctie-waarde

$$|\vec{c}| \cos\phi_i, \quad 0 \leq \phi_i \leq 180^\circ \qquad 1 \leq i \leq n \qquad (2.3.70)$$

Daar we de kriteriumfunctie willen minimaliseren volgt uit (2.3.70): Als alle ribben in H een hoek van 90° of minder met de normaal $\vec{c}$ maken dan is het hoekpunt H een optimale oplossing.
Wanneer niet al de ribben in H een hoek van 90° of minder met $\vec{c}$ maken dan kiezen we de ribbe i waarvoor $90^\circ < \phi_i \leq 180^\circ$ en ϕ_i maximaal is (zijn er meerdere index i waarvoor ϕ_i maximaal, kies dan één van hen); een verplaatsing van een éénheid langs deze ribbe geeft de grootste afname van de kriteriumfunctie. De gekozen ribbe is de doorsnee van n-1 van de n hypervlakken door H. Er is dus éénduidig een hypervlak $x_k=0$ (of gekarakteriseerd door $x_k = 0$) waarin deze ribbe niet ligt, $k \in \{s_1,\ldots,s_n\}$. De vektor $\vec{a}_k$ behoort niet tot de basis, omdat voor het hoekpunt H: $x_k=0$ (H is niet-ontaard, dus de basisvariabelen bezitten een positieve waarde). Deze vektor $\vec{a}_k$ gaan we in de basis brengen ten koste van een vektor uit de basis, die we als volgt bepalen. We bewegen langs de gekozen ribbe totdat de ribbe een hypervlak snijdt, dat niet door

H gaat. Nu zijn we in een aangrenzend hoekpunt beland. Zouden we nog verder langs de ribbe gegaan zijn, dan waren we buiten X terechtgekomen. Snijdt de ribbe meer dan één hypervlak niet door H, tegelijk kies dan één van hen. Laat dit hypervlak $x_t=0$ zijn (of gekarakteriseerd worden door $x_t=0$). Er geldt nu $t \notin \{s_1,\ldots,s_n\}$, $1 \leq t \leq n+m$. Dit hypervlak gaat niet door het hoekpunt H, dus voor H geldt $x_t > 0$. H is niet-ontaard, dus x_t is basisvariabele van de toegelaten basisoplossing die H voorstelt. De vektor $\vec{a}_t$ zit dus in de basis B, en stel $\vec{a}_t$ wordt daarin aangegeven met $\vec{b}_r$. Nu wordt $\vec{b}_r$ in de basis vervangen door $\vec{a}_k$. We zien dus dat het oude en nieuwe hoekpunt in slechts één basisvariabele verschillen. Voor het hoekpunt H is x_t basisvariabele en x_k niet, terwijl bij het nieuwe hoekpunt het omgekeerde het geval is.
We merken nog op dat het nieuwe hoekpunt ontaard is als de gekozen ribbe meer dan één hypervlak, niet door H gaande, tegelijk snijdt. Snijden we bij het gaan langs de ribbe niet een hypervlak, dat niet door H gaat, dan bezit het L.P.-probleem een onbegrensde oplossing.

Tenslotte zullen we een meetkundige interpretatie van cycling geven. Wanneer meer dan n hypervlakken (2.3.69) door een hoekpunt van X gaan dan is het hoekpunt ontaard. Een ontaard hoekpunt is op te vatten als een aantal samenvallende hoekpunten (zie figuur 2.3.1). Dit kan men als volgt inzien. door elk van de hypervlakken die door het ontaarde hoekpunt gaan een "weinig" parallel aan zichzelf te verschuiven; verander die hypervlakken in $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + \epsilon_i$ resp. $x_j = \epsilon_j$ waarbij de getallen ϵ_i zeer kleine niet-negatieve getallen zijn; kan men het ontaarde hoekpunt uiteen laten vallen in een aantal verschillende dicht bij elkaar liggende hoekpunten, die de doorsnee zijn van een n-tal (of meer) van de nieuwe hypervlakken. Neemt men alle $\epsilon_i = 0$ dan vallen deze hoekpunten samen.

Als we bij het oplossingsprocédé in een ontaard hoekpunt terechtgekomen zijn, dan kan het in theorie gebeuren dat we steeds in dit zelfde hoekpunt blijven bij het oplossingsproces. Immers denk het ontaarde hoekpunt als een verzameling van een aantal verschillende hoekpunten, dan is het mogelijk dat we bij de Simplex-methode van het ene naar het andere hoekpunt van deze verzameling gaan. Dit betekent dat cycling optreedt.

§ 4. De rekentechnische aspecten van de Simplex methode.

We zullen een kort overzicht geven van de Simplex-methode en verder zullen wij een rekenschema voor het algemene L.P.-probleem aangeven, dat bijzonder geschikt is om berekeningen met de hand uit te voeren.

1) Het L.P.-probleem luidt:
   Minimaliseer $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
   onder de bijvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1) \qquad (2.1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m) \qquad (2.1.5)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

We nemen aan $b_i \geq 0$, alle i.
Door verschilvariabelen toe te voegen (zie pg. 20 e.v.) zijn de eerste twee stelsels ongelijkheden te schrijven als:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1) \qquad (2.1.3a)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \qquad (2.1.3b)$$

met $x_{n+i} \geq 0$, aan de verschilvariabelen wordt de c-waarde nul toegekend. In matrixnotatie kunnen we ons probleem nu herformuleren:
Minimaliseer $z = \vec{c}\,\vec{x}$ onder $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$.
waarbij $A = (\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{n+m_1+m_2})$
met $\vec{a}_{n+i} = \vec{e}_i$ $(i=1,\ldots,m_1)$; $\vec{a}_{n+i} = -\vec{e}_i$ $(i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$.

2) Onderzoek of de matrix A de m eenheidsvektoren van I_m bevat, is dit niet het geval, voeg dan een voldoende aantal artificial variabelen toe aan (2.1.3b) en (2.1.5), zodat de coëfficientenmatrix

nu wel de m eenheidsvektoren bevat.

We geven in vervolg de artificial variabelen aan met $u_1, u_2, \ldots$.

Aan de artificial variabelen wordt de c-waarde M toegekend, waarbij M een zeer groot positief getal is (zie pg. 22 e.v.). We kunnen nu direct een basismatrix aangeven, nl. de eenheidsmatrix I. De (triviale) toegelaten basisoplossing is $\vec{x}_B = \vec{b}$. B = I is basis, dus voor elke $\vec{a}_j$ in A geldt: $\vec{a}_j = B\,\vec{y}_j = I\,\vec{y}_j = \vec{y}_j$. De waarde van de objectfunctie z voor deze basisoplossing is $z = \vec{c}_B \vec{x}_B$. Verder geldt voor deze basisoplossing $z_j - c_j = \vec{c}_B\,\vec{a}_j - c_j$. Voor de uniformiteit van de notatie in het rekenschema stellen we in vervolg $b_i = a_{io}$ $(i=1,\ldots,m)$. Verder geven we in het schema de waarde van de objectfunctie z voor een toegelaten basisoplossing aan met z_o.

Tevens voeren we $c_o = 0$ in, zodat $z_o - c_o = z_o$.

Voor het opstellen van het rekenschema gaan wij uit van het algemene L.P.probleem:

$$\text{Minimaliseer} \quad z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$$

$$\text{onder} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = a_{io} \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (2.4.1)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m)$$

De uitgangstabel voor onze berekeningen is tabel 4.1. Deze bevat alle coëfficienten uit de vergelijkingen (2.4.1); de rechterleden zijn in de eerste kolom opgenomen, on der het hoofd x_o, de coëfficienten van het eerste stelsel basisvariabelen $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ in de kolommen 2 t/m m+1. Boven elke kolom schrijven we de variabele die bij de in de kolom vermelde coëfficienten behoort.

Opmerking: Men bedenke wel dat de kolom x_j eigenlijk de componenten van de vektor $\vec{y}_j$ bevat. Omdat de basismatrix waarmee we beginnen de eenheidsmatrix is, geldt $\vec{y}_j = B^{-1}\,\vec{a}_j = I^{-1}\,\vec{a}_j = \vec{a}_j$ en verder beginnen we met de toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\,\vec{b} = I^{-1}\,\vec{b} = \vec{b}$.

x_o	x_{n+1}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	x_1	...	x_k	...	x_n
a_{10}	1		0		0	a_{11}		a_{1k}		a_{1n}
⋮	⋮		⋮			⋮		⋮		⋮
⋮	⋮		⋮			⋮		⋮		⋮
⋮	⋮		⋮			⋮		⋮		⋮
a_{ro}	0		1		0	a_{r1}		a_{rk}		a_{rn}
⋮	⋮		⋮			⋮		⋮		⋮
⋮	⋮		⋮			⋮		⋮		⋮
⋮	⋮		⋮			⋮		⋮		⋮
a_{mo}	0	...	0	...	1	a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}

Tabel 4.1

Oorspronkelijke coëfficienten

Deze tabel breiden wij nu uit met twee kolommen. Links van de kolom met het hoofd x_o schrijven wij een kolom met het hoofd B, waarin van boven naar beneden de basisvariabelen $x_{n+1},...,x_{n+m}$ opgenomen worden (vgl. tabel 4.2). Links daarvan komt nog een kolom met het hoofd C_B, waarin de c-waarden van de basisvariabelen worden ingevuld. Aan de onderkant van tabel 4.1. wordt een rij toegevoegd, waarin de getallen z_j-c_j komen te staan, z_j is de som van de produkten der elementen uit de C_B-kolom en de x_j-kolom. Aangezien $c_0=0$ vinden we in de x_0-kolom het getal z_0, de waarde van de objectfunctie behorende bij de desbetreffende toegelaten basisoplossing. Zoals we weten is $z_j - c_j = 0$ voor de basisvariabelen. Aan de bovenkant van tabel 4.1 wordt een rij toegevoegd, waarin de c-waarden van de variabelen $x_j (j = 1,..., n+m)$ zijn vermeld.

			c_{n+1}		c_{n+r}		c_{n+m}	c_1		c_k		c_n
C_B	B	x_0	x_{n+1}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	x_1	...	x_k	...	x_n
c_{n+1}	x_{n+1}	a_{10}	1	...	0	...	0	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
c_{n+r}	x_{n+r}	a_{r0}	0	...	1	...	0	a_{r1}	...	a_{rk}	...	a_{rn}
c_{n+m}	x_{n+m}	a_{m0}	0	...	0	...	1	a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
z_j+c_j		z_0	0	...	0	...	0	z_1-c_1	...	z_k-c_k	...	z_n-c_n

Tabel 4.2.

Eerste stap: de triviale oplossing.

Uit tabel 4.2. kunnen we direct de triviale toegelaten basisoplossing aflezen, de basisvariabelen in de B-kolom bezitten de waarden die in de x_0-kolom staan, de niet basisvariabelen zijn gelijk aan nul.

3) Pas nu het optimaliteitskriterium toe: Als alle $z_j-c_j \leq 0$ $(j \geq 1)$ dan is de toegelaten basisoplossing optimaal (dus de objectfunctie is dan minimaal).

Wanneer één of meer $z_j-c_j > 0$ zijn $(j \geq 1)$, dan wenden we Simplex Kriterium I aan om te bepalen welke variabele een basisvariabele uit kolom B van tabel 4.2. gaat vervangen.

Simplex Kriterium I: Bepaal

$$(z_k - c_k) = \max_j \ (z_j-c_j), \quad z_j-c_j > 0 \quad (j \geq 1).$$

Als de k voor dit maximum niet uniek is, dan kiest men iha de variabele met de kleinste j-index. Dus de variabele x_k gaat een basisvariabele uit kolom B van tabel 4.2. vervangen, en x_k wordt basisvariabele in de nieuwe tabel die we uit tabel 4.2. construeren.

Nu x_k bepaald is, zijn er twee mogelijkheden:

(a) $a_{ik} \leq 0$ voor alle i. Dit betekent dat het L.P.-probleem een onbegrensde oplossing bezit.

(b) $a_{ik} > 0$ voor tenminste één index i. In dit geval kunnen we een nieuwe toegelaten basisoplossing vinden met een verbeterde waarde voor de objectfunctie z.

4) Als $a_{ik} > 0$ voor tenminste één index i, pas dan Simplex Kriterium II toe om te bepalen welke basisvariabele door x_k vervangen wordt.

<u>Simplex Kriterium II</u>: Bepaal

$$\frac{a_{ro}}{a_{rk}} = \min_i \left(\frac{a_{io}}{a_{ik}}, a_{ik} > 0\right)$$

Als index r voor het minum niet uniek is, dan kiest men in het algemeen die index r waarvoor a_{rk} het grootst is.

5) Nu kunnen we uitgaande van tabel 4.2. de nieuwe tabel construeren (zie opmerking).

a) Vervang in de C_B- en B-kolom van tabel 4.2. c_{n+r} en x_{n+r} door c_k resp. x_k.

b) Deel de elementen a_{rj} door a_{rk} $(j=0,\ldots,n)$

c) Verminder al de andere elementen a_{ij} uit de kolommen x_j $(j=0,\ldots,n)$ met $a_{ik} \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$ $(i \neq r)$.

d) verminder z_j-c_j met $(z_k-c_k)\frac{a_{rj}}{a_{rk}}$ $(j=0,\ldots,n)$

e) Laat alle overige hokjes in de B en C_B-kolom, aangegeven met ⊡, ongewijzigd.

C_B	B	x_0		x_0		x_k		x_t	
⋮ ⋮	⋮ ⋮								
⋮ ⋮	⋮ ⋮								
c_k	x_k					1			
⋮ ⋮	⋮ ⋮								
⋮ ⋮	⋮ ⋮								
z_j-c_j									

Tabel 4.3.

<u>Tweede stap: eerste verbeterde oplossing</u>

Op dezelfde wijze, waarop we uit tabel 4.2. de triviale oplossing konden aflezen zo kunnen we ook direct uit tabel 4.3. de nieuwe toegelaten basisoplossing bepalen. De basisvariabelen in de B-kolom bezitten de in de x_0-kolom staande waarden, de andere variabelen zijn gelijk aan nul.

De nieuwe z_j-c_j zijn te vinden in het laatste vakje van de x_j-kolommen. Pas het procédé vanaf 3) weer toe, net zo lang tot de getallen $z_j-c_j \leq 0$ $(j=1,\ldots,n+m)$. Op dat moment kan de optimale oplossing m.b.v. de B- en x_0-kolom worden afgelezen.

<u>Opmerking</u>: 5b) en 5c) kunnen we interpreteren als het transformeren van het stelsel vergelijkingen (2.4.1) in een equivalent stelsel. Bij deze transformatie wordt de coëfficient van x_k in de $r^{\underline{de}}$ vergelijking gelijk aan 1 gemaakt, en wordt x_k uit de overige vergelijkingen geëlimineerd.

Voeren we dit uit, dan krijgen we:

$$\sum_{j\neq k}^{n} \frac{a_{rj}}{a_{rk}} x_j + x_k + \frac{1}{a_{rk}} x_{n+r} = \frac{a_{r0}}{a_{rk}}$$

Trek deze gelijkheid a_{ik}-maal van de $i^{\underline{de}}$ vergelijking, $i\neq r$, af.

$$\sum_{j\neq k}^{n} \left(a_{ij}-a_{ik}\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) x_j - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} x_{n+r} + x_{n+i} =$$

$$= a_{i0} - a_{ik}\frac{a_{r0}}{a_{rk}} \quad (i=1,\ldots,m;\ i\neq r)$$

We zien dus dat door het iteratieprocédé de bijvoorwaarden (2.4.1) telkens in een equivalente vorm worden getransformeerd. We zullen nu enige voorbeelden geven.

<u>Voorbeeld 2.4.1</u> (S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Volume I).

Een fabrikant heeft de keus tussen één of meer verschillende productieprocessen: I, II, III, IV. Zowel het eerste als het tweede proces leveren het artikel A op, de processen III en IV geven het artikel B.

Om de artikelen te kunnen produceren heeft de farbikant nodig: personeel (manuren), een losse grondstof G en een in dozen verpakt materiaal M. Omdat het verbruik van de diverse grondstoffen sterk af-

hangt van de gevolgde produktieprocessen, zullen ook de te maken winsten hiervan afhangen.

De gegevens, die van belang zijn, worden gegeven in de volgende tabel.

	één eenheid van A		één eenheid van B		beschikbaar
	proces I	proces II	proces III	proces IV	
man-uren	1	1	1	1	15
kilo's grondstof G	7	5	3	2	120
dozen materiaal M	3	5	10	15	100
Winst	6	5,5	9	8	

Bepaal het optimale produktieschema.

Oplossing: Zij x_1 het aantal eenheden A geproduceerd volgens proces I

x_2 " A " II

x_3 B " III

x_4 B " IV

De winst, die gemaximaliseerd moet worden, is gelijk aan

$$6x_1 + 5\tfrac{1}{2}x_2 + 9x_3 + 8x_4.$$

Ons probleem luidt nu: Minimaliseer

$$z = -6x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 9x_3 - 8x_4$$

onder de bijvoorwaarden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

We voeren drie verschilvariabelen x_4, x_5 en x_6 in. De bijvoorwaarden komen daardoor in de volgende vorm

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15\\
7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 &= 120\\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 &= 100
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,7)$$

Onder deze bijvoorwaarden moeten we de kriteriumfunctie

$$z = -6x_1 - 5\tfrac{1}{2}x_2 - 9x_3 - 8x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$$

minimaliseren.

We krijgen nu het volgende rekenschema:

Triviale oplossing

		0	0	0	0	-6	$-5\frac{1}{2}$	-9	-8
C_B	B	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_5	15	1	0	0	1	1	1	1
0	x_6	120	0	1	0	7	5	3	2
0	x_7	100	0	0	1	3	5	[10]	15
z_j-c_j		0	0	0	0	6	$5\frac{1}{2}$	9	8

← kleinste $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ ($\rightarrow$ r=3)

grootste $z_j-c_j > 0$ ($\rightarrow$ k=3)

Eerste verbeterde oplossing

			0	0	0	-6	$-5\frac{1}{2}$	-9	-8	
C_B	B	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_5	5	1	0	-0,1	0,7	0,5	0	-0,5	←
0	x_6	90	0	1	-0,3	6,1	3,5	0	-2,5	
-9	x_3	10	0	0	0,1	0,3	0,5	1	1,5	
z_j-c_j		-90	0	0	-0,9	+3,3	+1	0	-5,5	

↑

Eindoplossing

			0	0	0	-6	$-5\frac{1}{2}$	-9	-8
C_B	B	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4
-6	x_1	7,143	1,429	0	-0,143	1	0,714	0	-0,714
0	x_6	46,428		1		0		0	
-9	x_3	7,857		0		0		1	
z_j-c_j		-113,572	-4,714	0	-0,428	0	-1,357	0	-3,143

Omdat in de laatste regel van deze tabel geen positieve getallen meer staan, levert deze tabel de optimale oplossing, in verband hiermee is het niet nodig de tabel volledig in te vullen (zie blanco hokjes in de laatste tabel).

Bij de berekening van een simplex tableau doet men er altijd goed aan eerst de getallen in de laatste regel te berekenen. Als in de laatste regel van het rekenschema alle getallen niet-positief zijn, dan maakt deze overweging veel rekenwerk overbodig.

Het optimale produktieschema luidt:

$x_1 = 7,143$

$x_2 = 0$

$x_3 = 7,857$

$x_4 = 0$.

De optimale (maximale) winst bedraagt $-(-113,572) = 113,572$.

Voorbeeld 2.4.2. (Leergang Besliskunde, hoofdstuk 12, J. Kriens, Lineaire programmering, Mathematisch Centrum).

In een fabriek wil men de vervaardiging van een legering ter hand nemen, welke minstens 18% koper moet bevatten. Voor de fabricering kunnen vier verschillende grondstoffen A, B, C en D gebruikt worden, welke men in willekeurige verhoudingen kan mengen. De grondstoffen B en C mogen niet meer dan 20% van de legering uitmaken. Aan de legering worden geen verdere chemische of physische eisen gesteld. In de volgende tabel is opgegeven, hoeveel procent koper

in ieder grondstof aanwezig is en wat de kosten zijn per ton.

grondstof	percentage koper	kosten per ton
A	51	40
B	11	20
C	14	24
D	36	30

Vind de legering, die aan de gestelde eisen voldoet en het goedkoopst is.

Oplossing:

Laat 1 ton legering x_1 ton A, x_2 ton B, x_3 ton C en x_4 ton D bevatten.

De kosten van zo'n mengsel bedragen

$$40x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 30x_4 \qquad (2.4.2)$$

Er moet voldaan zijn aan de bijvoorwaarden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 51x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 36x_4 &\geq 18 \\ 100x_1 + 100\,x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (2.4.3)$$

Men kan zich het invoeren van een artificial variabele besparen, door de tweede bijvoorwaarde te schrijven als

$$49x_1 + 89x_2 + 86x_3 + 64x_4 \leq 82.$$

Immers de legering mag hoogstens 82% aan andere stoffen dan koper bevatten. Het percentage aan andere stoffen dan koper is bij de grondstoffen resp. 49, 89, 86 en 64.

Voer nu twee verschilvariabelen x_5 en x_6 en de artificial variabele u_1 in.

Ons probleem wordt nu:

Minimaliseer $z_0 = 40x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 30x_4 + Mu_1$ onder

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + u_1 &= 1 \\ 49x_1 + 89x_2 + 86x_3 + 64x_4 + x_5 &= 82 \\ 100x_1 + 100x_3 + x_6 &= 20 \\ u_1 > 0,\ x_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,6). & \end{aligned}$$

Triviale oplossing

			M	0	0	40	20	24	30
C_B	B	x_0	u_1	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	x_4
M	u_1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	x_5	82	0	1	0	49	89	86	64
0	x_6	20	0	0	1	0	100	100	0 ←
z_j-c_j		M	0	0	0	M-40	M-20	M-24	M-30

↑

Eerste verbeterde oplossing

			M	0	0	40	20	24	30
C_B	B	x_0	u_1	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	x_4
M	u_1	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1 ←
0	x_5	64,2	0	1	-0,89	49	0	-3	64
20	x_2	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
z_j-c_j		+4 +0,8M	0	0	+0,2 -0,01M	-40 +M	0	-4	-30 +M

↑

Eindoplossing

			M	0	0	40	20	24	30
C_B	B	x_0	u_1	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	x_4
30	x_4	0,80	1	0	-0,01	1	0	0	1
0	x_5	13	-64	1	-0,25	-15	0	-3	0
20	x_2	0,20	0	0	0,01	0	1	1	0
z_j-c_j		+28	+30 -M	0	-0,1	-10	0	-4	0

Deze laatste tabel bevat de optimale oplossing, omdat vanaf de u_1 kolom alle getallen z_j-c_j 0 zijn.

Optimale oplossing is: $u_1 = x_6 = x_1 = x_3 = 0$

$x_4 = 0{,}80 \quad x_5 = 13 \quad x_2 = 0{,}20;\ z_0 = 28$

Omdat $u_1=0$ is deze oplossing ook de optimale oplossing van het door (2.4.2) en (2.4.3) gegeven probleem.

De goedkoopste methode om 1 ton koperlegering te maken is dus het mengen van 0,20 ton B en 0,80 ton D. Het kopergehalte is dan 18+13= 31% en kosten zijn 28.

opgave 2.4.3. Minimaliseer $z= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$

onder de bijvoorwaarden

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

antwoord: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 0$, de minimumwaarde van de objectfunctie is -15.

Opgave 2.4.4. Ga na of het volgende stelsel bijvoorwaarden een toegelaten oplossing heeft.

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 12$$
$$2x_1 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 \geq 10$$
$$3x_1 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 \leq 8$$

aanwijzing: definieer op het gebied dat door de bijvoorwaarden wordt bepaald de functie z=0 en minimaliseer deze functie volgens de Simplexmethode.

antwoord: De voorwaarden zijn strijdig. In de eindoplossing verschijnt de artificial variabele als basisvariabele met een positieve waarde.

§5. Het duale probleem

Zoals wij weten heeft het L.P.-probleem de volgende vorm:
Bepaal het maximum of minimum van de functie

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.5.1)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{ \leq = \geq \} b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \qquad (2.5.2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.5.3)$$

Door eventuele vermenigvuldiging met -1 hebben we er steeds voor gezorgd dat de getallen b_i niet-negatief zijn.
Door $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ door $\sum_{j=1}^{n} - a_{ij} x_j \leq - b_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$
door $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ èn $\sum_{j=1}^{n} - a_{ij} x_j \leq - b_i$ te vervangen kan men elk L.P.-probleem in de volgende vorm brengen:
Bepaal het maximum of het minimum van de functie

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.5.4)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq d_i \qquad (i=1,\ldots,t)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.5.5)$$

De getallen d_i zullen nu iha niet allen niet-negatief zijn. Evenzo kan men elk L.P.-probleem als volgt formuleren:
Bepaal het maximum of het minimum van de functie

$$z = \sum_{J=1}^{n} c_J x_J \qquad (2.5.6)$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j \geq g_i \quad (i=1,\ldots,s)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.5.7)$$

Ook voor de getallen g_i geldt dat er iha negatieve getallen onder voorkomen.

Bij elk L.P.-probleem kan men een verschillend, doch sterk verwant L.P.-probleem definiëren, het z.g.n. <u>duale probleem</u>. Het L.P.-probleem, waarvan we de duale nemen, heet het oorspronkelijke probleem. Het verdient vaak om o.a. rekentechnische aspecten de voorkeur om i.p.v. het oorspronkelijke probleem het duale probleem op te lossen. Om het duale probleem van een L.P.-probleem te definiëren, brengen we het L.P.-probleem in de volgende vorm:

Bepaal het maximum van

$$z = \vec{c}\,\vec{x}$$

onder de bijvoorwaarden

$$D\,\vec{x} \leq \vec{d}$$
$$\vec{x} \geq \vec{0} \qquad (2.5.8)$$

Nu is het duale probleem gedefinieerd als:

Bepaal het minimum van

$$Z = \vec{d}'\,\vec{w}$$

onder de bijvoorwaarden

$$D'\,\vec{w} \geq \vec{c}'$$
$$\vec{w} \geq \vec{0} \qquad (2.5.9)$$

Merk op dat $\vec{d}$ en $\vec{c}$ negatieve componenten kunnen bezitten.
Men kan $D'\vec{w} \geq \vec{c}'$ ook als $\vec{w}'D \quad \vec{c}$ schrijven.

De problemen (2.5.8) en (2.5.9) zijn verschillend, doch nauw met elkaar verbonden. We zullen aantonen dat wanneer we één van deze twee problemen oplossen, we direct een oplossing voor het andere probleem kunnen geven. We zullen eerst enkele uiterlijke overeenkomsten van (2.5.8) en (2.5.9) aantonen.
Men ziet direct dat in (2.5.8) en (2.5.9) dezelfde coëfficiënten optreden, maar in een andere volgorde. Ten overvloede merken we op dat de accenten in (2.5.9) de gespiegelde aanduiden.
Als D een m × n matrix is, dus $\vec{x}$ dan een n-component vektor, dan is D' een n × m matrix en $\vec{w}$ een m-component vektor.

Stelling 2.5.1. De duale van (2.5.9) is (2.5.8).

Bewijs: Om dit aan te tonen schrijven we (2.5.9) als

maximaliseer $\quad -Z = -\vec{d}'\,\vec{w}$

onder

$$(-D')\vec{w} \leq -\vec{c}'$$
$$\vec{w} \geq \vec{0} \qquad (2.5.10)$$

Nemen we van dit probleem nu de duale dan vinden we:

minimaliseer $\quad y = -\vec{c}\,\vec{x}$

onder

$$-D\vec{x} \geq -\vec{d}$$
$$\vec{x} \geq \vec{0} \qquad (2.5.11)$$

(2.5.11) is ook te schrijven als

maximaliseer $\quad z = \vec{c}\,\vec{x}$

onder

$$D\vec{x} \leq \vec{d}$$
$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Hetgeen probleem (2.5.8) is, waarmee aangetoond is dat de duale van het duale probleem het oorspronkelijke probleem is.

Stelling 2.5.2. Als $\vec{x}_0$ een toegelaten oplossing is van probleem (2.5.8) en $\vec{w}_0$ een toegelaten oplossing van probleem (2.5.9) dan geldt: $\vec{c}\,\vec{x}_0 \leq \vec{d}'\,\vec{w}_0$.

Bewijs: Uit (2.5.8) volgt: $\vec{w}_0' D \vec{x}_0 \leq \vec{w}_0' \vec{d}$ (2.5.12)

terwijl uit (2.5.9) volgt: $\vec{w}_0' D \vec{x}_0 \geq \vec{c}\ \vec{x}_0$ (2.5.13)

Combineer (2.5.12) en (2.5.13), dit geeft

$$\vec{c}\ \vec{x}_0 \leq \vec{d}' \vec{w}_0.$$

Gevolg: $z \leq Z$ voor elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ en elke toegelaten oplossing $\vec{w}$.

Stelling 2.5.3. Als $\vec{x}^*$ een toegelaten oplossing is van (2.5.8) en $\vec{w}^*$ een toegelaten oplossing van (2.5.9) en er geldt $\vec{c}\ \vec{x}^* = \vec{d}'\ \vec{w}^*$, dan zijn $\vec{x}^*$ en $\vec{w}^*$ optimale oplossingen van (2.5.8) resp. (2.5.9).

Bewijs: Uit stelling (2.5.2) volgt dat voor iedere toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (2.5.8) gedlt:

$$\vec{c}\ \vec{x} \leq \vec{d}' \vec{w}^* = \vec{c}\ \vec{x}^* \qquad (2.5.14)$$

(2.5.14) impliceert dat $\vec{x}^*$ optimaal is voor (2.5.8).

Evenzo volgt uit stelling 2.5.2. voor elke toegelaten $\vec{w}$

$$\vec{d}' \vec{w}^* = \vec{c}\ \vec{x}^* \leq \vec{d}' \vec{w}.$$

dus $\vec{w}^*$ is optimaal voor (2.5.9).

Stelling 2.5.4. Wanneer één van de problemen (2.5.8), (2.5.9) een optimale oplossing bezit, dan heeft het andere probleem ook een optimale oplossing. Verder geldt dat voor elke optimale oplossing $\vec{x}^*$ van (2.5.8) een optimale oplossing $\vec{w}^*$ van (2.5.9) kan worden bepaald en wel zodat $\vec{c}\ \vec{x}^* = \vec{d}'\ \vec{w}^*$, en omgekeerd.

Bewijs: Uit stelling 2.5.1 volgt dat het voldoende is om aan te tonen dat wanneer (2.5.8) een optimale oplossing bezit, dat dan ook (2.5.9) een optimale oplossing heeft.

Stel dus (2.5.8) bezit een optimale oplossing.

Om (2.5.8) op te lossen voegen we verschilvariabelen toe.

We krijgen dan

$$\text{maximaliseer} \qquad z = \vec{c}\,\vec{x} + \vec{0}\,\vec{x}_v$$

onder

$$D\,\vec{x} + I\,\vec{x}_v = \vec{d}. \qquad (2.5.16)$$

$$\vec{x} > \vec{0}$$

$$\vec{x}_v \geq \vec{0}.$$

Er geldt nu echter dat componenten van $\vec{d}$ negatief kunnen zijn. Niettemin kunnen we de Simplex-methode toepassen. (zie opmerking 2 op blz. 102). Als $d_j < 0$, dan voegen we artificial u_j met coëfficient -1 toe en geven deze c-waarde $\underline{-M}$ (we $\underline{\text{maximaliseren}}$ de kriteriumfunctie)

Stel $d_j < 0$ voor $j=j_1,\ldots,j_s$. We lossen dan volgens de Simplex-methode het volgende probleem op.

Bepaal maximum van

$$z = \vec{c}\,\vec{x} + \vec{0}.\vec{x}_v - M \sum_{r=1}^{s} u_{jr}$$

onder

$$D\,\vec{x} + I\,\vec{x}_v + H\,\vec{u} = \vec{d} \qquad (2.5.17)$$

$$\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{u} \geq \vec{0}.$$

met $H = (-\vec{e}_{j1},\ldots,-\vec{e}_{js})$

Als we dit laatste probleem oplossen, dan vinden we een toegelaten basisoplossing $\vec{x}_B$ voor (2.5.16).

Daar $\vec{x}_B$ optimaal is, hebben we $z_j - c_j \geq 0$ voor alle j, (we maximaliseren), i.h.b. voor de kolomvektoren $\vec{d}_j$ van D. Stel D is m × n matrix.

Dan is $\vec{c}_B\,B^{-1}\,\vec{d}_j - c_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.5.18)$

of

$$\vec{c}_B\,B^{-1}\,(\vec{d}_1,\ldots,\vec{d}_n) \geq (c_1,\ldots,c_n)$$

of

$$\vec{c}_B\,B^{-1}\,D \geq \vec{c}. \qquad (2.5.19)$$

Stel nu $\vec{w}^{*\prime} = \vec{c}_B.B^{-1}$, dan volgt uit (2.5.9) dat $\vec{w}^{*\prime}$ een oplossing is voor het duale probleem (2.5.9). Wanneer we de getallen $z_j - c_j$ in de eindoplossing voor de verschilvariabelen beschouwen, dan zien we direct dat $\vec{w}^{*\prime} = \vec{c}_B\,B^{-1}$ toegelaten is.

Voor elke verschilvariabele geldt c-waarde is nul, dus

$$\vec{c}_B\, B^{-1}\, \vec{e}_i - 0 \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m)$$

of

$$\vec{c}_B\, B^{-1}\, I \geq \vec{0}, \qquad (2.5.20)$$

dus

$$\vec{c}_B\, B^{-1} \geq \vec{0}$$

We tonen tenslotte aan dat $\vec{w}^{*}$ een optimale toegelaten oplossing is voor probleem (2.5.9).

Er geldt $\vec{w}^{*'}\, \vec{d} = \vec{c}_B\, B^{-1}\, \vec{d} = \vec{c}_B\, \vec{x}_B$.

Nu zegt stelling 2.5.3. ons dat $\vec{w}^{*'}$ optimaal is.

We zien dus wanneer B de basismatrix behorende bij een optimale basisoplossing van het oorspronkelijke probleem en $\vec{c}_B$ bevat de c-waarden van de basisvariabelen, dat dan $\vec{w}^{*} = \vec{c}_B\, B^{-1}$ een optimale oplossing is van het duale probleem, tevens geldt dat de optimale waarden van de kriteriumfuncties gelijk zijn, dus

max z = min Z.

Opmerking Wanneer we het probleem (2.3.8) hebben opgelost met de Simplex-methode dan kunnen we direct uit de eindtabel een optimale oplossing van het duale probleem (2.3.9) aflezen. Een optimale oplossing voor het duale probleem is $\vec{w} = \vec{c}_B\, B^{-1}$, nu is $w_j = \vec{c}_B\, B^{-1}\, \vec{e}_j$ $(j=1,\ldots,m)$ of te wel $w_j = z_{n+j} = z_{n+j} - c_{n+j}$. Dus een optimale oplossing voor het duale probleem staat in de (z_j-c_j) - rij van de eindtabel onder de kolommen van de verschilvariabelen. Dus w_j staat in het (z_j-c_j)-hokje onder de kolom met hoofd x_{n+i} van de verschilvariabele x_{n+i}.

Wanneer we het duale probleem (2.5.9) oplossen dan verdient het de voorkeur in de formulering $\min Z = \vec{d}'\, \vec{w}$ te vervangen door $\max -Z = (-\vec{d}')\, \vec{w}$, dit heeft het voordeel dat dan in de eindtabel de elementen uit de (z_j-c_j)-rij onder de kolommen behorende bij de verschilvariabelen dan direct een optimale oplossing vormen voor het oorspronkelijke probleem, en niet met -1 vermenigvuldigd behoeven te worden hetgeen zou moeten gebeuren wanneer we in de formulering

van het duale probleem min $Z = \vec{d}' \vec{w}$ gehandhaafd hadden. Dit ziet men eenvoudig in, wanneer men bedenkt dat bij het maximaliseren van de kriteriumfunctie het optimaliteitskriterium $z_j - c_j \geq 0$, alle j is en bij het minimaliseren $z_j - c_j \leq 0$, alle j.

Opmerking: Het aantal stappen nodig om een optimale oplossing voor een L.P.-probleem te verkrijgen is afhankelijk met het aantal bijvoorwaarden. We zien dus dat het aanbeveling verdient om van een L.P.-probleem de duale op te lossen, wanneer het betreffende L.P.-probleem veel bijvoorwaarden en weinig beslissingsvariabelen bevat.

Stel dat we besloten hebben een L.P.-probleem op te lossen door middel van zijn duale. Nadat we de duale van het probleem gegevormd hebben kunnen er componenten van $\vec{c}'$ zijn die negatief zijn. Ofschoon we dan ook de Simplex-methode kunnen toepassen (blz. 102) is toch de gebruikelijke gang van zaken om elke component van deze vektor niet-negatief te maken, dit is zelfs vereist wil men het probleem m.b.v. een computer oplossen. We zullen nu nagaan wat de invloed is van een dergelijke transformatie. We doen dit voor de formulering (2.5.8).

Stelling 2.5.5. Gegeven het L.P.-probleem max $z = \vec{c} \vec{x}$ onder $D \vec{x} \leq \vec{d}$, $\vec{x} \geq 0$. Stel dit probleem bezit een optimale oplossing. Laten $d_k < 0$ $(k=k_1,\ldots,k_s)$. Vermenigvuldig de bijvoorwaardeb met $d_k < 0$ met -1. Los nu het L.P.probleem onder de zo verkregen nieuwe bijvoorwaarden op volgens de Simplex-methode. Nu kan in de eindtabel voor dit laatste probleem een optimale oplossing voor het duale probleem worden afgelezen.
De elementen in de (z_j-c_j)-rij staande onder de kolommen behorende bij de verschilvariabelen vormen een optimale oplossing voor het duale probleem.

Bewijs: Het oorspronkelijke probleem is max $z = \vec{c} \vec{x}$ onder $D \vec{x} \leq \vec{d}$, $\vec{x} \geq 0$. D is m×n matrix. Nu is $d_k < 0$ $(k=k_1,\ldots,k_s)$. Vermenigvuldig de ongelijkheden $k_1,\ldots,k_s$ met -1. Dit geeft een nieuw doch gelijkwaardig stelsel bijvoorwaarden. Na invoeren van verschil-

variabelen verkrijgen we het volgende probleem:

$$\max z = \vec{c}\,\vec{x}$$

onder

$$D^{*}\,\vec{x} + E\,\vec{x}_v = \vec{d}^{*} \qquad (2.3.21)$$

$$\vec{x},\ \vec{x}_v \geq \vec{0}$$

waarbij $\vec{d}^{*} \geq \vec{0}$ en E vektoren van de vorm $+\vec{e}_i$ en $-\vec{e}_i$ bevat.
Voegen we direct aan het oorspronkelijke probleem $\max z = \vec{c}\,\vec{x}$ onder $D\,\vec{x} \leq \vec{d}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ verschilvariabelen toe, dan krijgen we:

$$\max z = \vec{c}\,\vec{x}$$

onder

$$D\,\vec{x} + I\,\vec{x}_v = \vec{d} \qquad (2.3.22)$$

$$\vec{x},\ \vec{x}_v \geq \vec{0}$$

Bij elke basismatrix B voor probleem (2.3.21) is een basismatrix $\bar{B}$ voor probleem (2.3.22) aan te geven, waarbij $\bar{B}$ alleen van B verschilt in die rijen waarvoor $d_k < 0$. $\bar{B}$ verkrijgt men uit B door de rijen $k_1, \ldots, k_s$ van B met -1 te vermenigvuldigen. Men gaat b.v. $B^{-1}B = I$ direct na dat B^{-1} en $\bar{B}^{-1}$ alleen in die kolommen k verschillen waarvoor $d_k < 0$.
Als een toegelaten basisoplossing van (2.3.22) behorende bij de basismatrix $\bar{B}$ optimaal is, dan wordt een optimale oplossing voor de duale gegeven door $\vec{c}_B\,\bar{B}^{-1}$. Wanneer B een basismatrix is behorende bij een optimale basisoplossing voor (2.3.21) dan is de basisoplossing die bij $\bar{B}$ hoort optimaal voor (2.3.22). (ga na)
We lossen probleem (2.3.21) op. Uit de eindtabel voor dit probleem vinden we $\vec{c}_B\,B^{-1}$. Nu kunnen we onmiddellijk $\vec{c}_B\,\bar{B}^{-1}$ uit $\vec{c}_B\,B^{-1}$ bepalen, vermenigvuldig de componenten $k = k_1, \ldots, k_s$ van $\vec{c}_B\,B^{-1}$ met -1. Dus $\vec{c}_B\,\bar{B}^{-1}$ is een optimale oplossing voor het duale probleem en we zullen nu laten zien dat in de eindtabel van (2.3.1) de elementen in de $(z_j - c_j)$-rij staande onder de kolommen behorende bij de verschilvariabelen een optimale oplossing voor het duale probleem vormen.
Immers voor de indices i met $d_i \geq 0$ geldt:

$$z_{n+i} - c_i = z_{n+i} = \vec{c}_B B^{-1} \vec{e}_i = \vec{c}_B \bar{B}^{-1} \vec{e}_i$$

en voor de indices i met $d_i < 0$:

$$z_{n+i} = \vec{c}_B B^{-1}(-\vec{e}_i) = \vec{c}_B \circ \bar{B}^{-1} \vec{e}_i$$

Dus $$\vec{c}_B \bar{B}^{-1} = (z_{n+1}, \circ\circ\circ, z_{n+m})$$

Om van een L.P.-probleem de duale te vormen, hebben we het eerst in de vorm (2.5.8) gebracht, en we zullen nu laten zien dat we voor elk L.P.-probleem direct de duale kunnen aangeven zonder eerst het probleem om te buigen in de vorm (2.3.8).
Daartoe de volgende stellingen:

<u>Stelling 2.5.6.</u> Zij het volgende L.P.-probleem gegeven:

$$\text{maximaliseer} \quad z = \vec{c}\,\vec{x} \tag{2.3.23}$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq d_i \qquad (i=1,\circ\circ\circ,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \geq d_i \qquad (i=m_1+1,\circ\circ\circ,m) \tag{2.3.24}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\circ\circ\circ,n)$$

dan wordt de duale van dit probleem gegeven door:

$$\text{minimaliseer } z = \vec{d}'\,\vec{w}$$

onder

$$D'\,\vec{w} \geq \vec{c}'$$

met $$w_i \geq 0 \quad (i=1,\circ\circ\circ,m_1)$$
$$w_i \leq 0 \quad (i=m_1+1,\circ\circ\circ,m)$$

<u>Bewijs</u>: Het probleem (2.3.23)-(2.3.24) is hetzelfde als

$$\text{maximaliseer } z = \vec{c}\,\vec{x}$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq d_i \qquad (i=1,\circ\circ\circ,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} -d_{ij} x_j \leq -d_i \qquad (i=m_1+1,\circ\circ\circ,m) \tag{2.3.25}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\circ\circ\circ,n)$$

De duale van het oorspronkelijke probleem wordt dus gegeven door:

minimaliseer

$$Z = \sum_{i=1}^{m_1} d_i v_i + \sum_{i=m_1+1}^{m} - d_i v_i \qquad (2.3.26)$$

onder

$$\sum_{i=1}^{m_1} d_{ij} v_i + \sum_{i=m_1+1}^{m} - d_{ij} v_i \geq c_j \quad (j=1,\ldots,n)$$

$$v_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m)$$

Stel nu $w_i = v_i$ $(i=1,\ldots,m_1)$, $w_i = -v_i$ $(i=m_1+1,\ldots,m)$

(2.3.26) wordt nu

minimaliseer $\quad z = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$

onder

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geq c_j \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.3.27)$$

$$w_i \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$w_i \leq 0 \qquad (i=m_1+1,\ldots,m).$$

Hetgeen te bewijzen was.

Het hoeft geen betoog dat we bij het oplossen van (2.3.27) w_i door $w_i' = - w_i$ $(i=m_1+1,\ldots,m)$ vervangen.

<u>Stelling 2.5.7</u> Zij het volgende L.P.-probleem gegeven:

maximaliseer

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq d_i \quad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j = d_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m) \qquad (2.3.28)$$

dan wordt de duale van dit probleem gegeven door

minimaliseer

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$$

onder

$$D' \vec{w} \geq \vec{c}'$$

$$w_i \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$-\infty < w_i < +\infty \qquad (i=m_1+1,\ldots,m)$$

Bewijs: Schrijf (2.3.28) als

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq d_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq d_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} -d_{ij} x_j \leq -d_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

De duale van het oorspronkelijke probleem wordt dus gegeven door

minimaliseer

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i v_i + \sum_{i=m_1+1}^{m} -d_i v_{m-m_1+i}$$

onder

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} v_i + \sum_{i=m_1+1}^{m} -d_{ij} v_{m-m_1+i} \geq c_j \qquad (j=1,\ldots,n)$$

$$v_i \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m+m_1) \qquad (2.3.29)$$

Stel nu $w_i = v_i \qquad (i=1,\ldots,m_1)$,

$$w_i = v_i - v_{m-m_1+i} \qquad (i=m_1+1,\ldots,m)$$

(2.3.29) wordt nu:

minimaliseer

$$Z = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$$

onder

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geq c_j \qquad (j=1,\ldots,n)$$

$$w_i \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$-\infty < w_i < +\infty \qquad (i=m_1+1,\ldots,m)$$

Hetgeen te bewijzen viel. We merken op dat wanneer we dit laatste probleem oplossen we w_i vervangen door $w_i = w_i' - w_i''$ $(i=m_1+1,\ldots,m)$, waarbij $w_i' = \begin{cases} w_i & w_i \geq 0 \\ 0 & w_i \leq 0 \end{cases}$ als en $w_i'' = \begin{cases} -w_i & w_i < 0 \\ 0 & w_i \geq 0 \end{cases}$

We vatten de stellingen 2.5.6 en 2.5.7 samen tot:

Stelling 2.5.8 Gegeven het L.P.-probleem

maximaliseer

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,\ldots,m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n)$$

Het duale probleem wordt gegeven door

minimaliseer

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

onder

$A' \vec{w} \geq \vec{c}'$

$w_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m_1)$

$w_i \leq 0 \quad (i=m_1+1,\ldots,m_1+m_2)$

$-\infty < w_i < \infty \quad (i=m_1+m_2+1,\ldots,m)$

Gevolg: Wanneer het oorspronkelijke probleem de vorm maximaliseer $z = \vec{c}\,\vec{x}$ onder $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ heeft, dan wordt de duale gegeven door

minimaliseer $Z = \vec{b}'\,\vec{w}$

onder

$A'\vec{w} \geq c'$

$-\infty < w_i < \infty$, alle i.

Voorbeeld: Gegeven het L.P.-probleem

minimaliseer $x_2 - x_1$

onder

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$

$$2x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

We zullen dit probleem m.b.v. de duale oplossen.

Minimaliseer $x_2 - x_1$ is het zelfde als maximaliseer $x_1 - x_2$.

Het duale probleem wordt gegeven door

minimaliseer $3w_1 + w_2 - 2w_3$

onder

$$w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1$$

$$w_1 - 2w_2 - w_3 \geq -1$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

$$w_3 \leq 0.$$

Door $w_1 - 2w_2 - w_3 \geq -1$ met -1 te vermenigvuldigen en $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ en $v_3 = -w_3$ te stellen brengen we het duale probleem in de volgende vorm:

minimaliseer $3v_1 + v_2 + 2v_3$

onder

$$v_1 + v_2 - 2v_3 \geq 1$$

$$-v_1 + 2v_2 - v_3 \leq 1$$

$$v_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,3)$$

Bij het oplossen van dit probleem zullen we de kriteriumfunctie maximaliseren. Na het invoeren van de verschilvariabelen v_4 en v_5 en de artificial u_1 gaan we op het volgende probleem de Simplex-methode toepassen:

maximaliseer $-3v_1 - v_2 - 2v_3 - Mu_1$

onder

$$v_1 + v_2 - 2v_3 - v_4 + u_1 = 1$$

$$-v_1 + 2v_2 - v_3 + v_5 = 1$$

$$v_i \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,5)$$

$$u_1 \geq 0$$

Triviale oplossing

			-M	0	-3	-1	-2	0
C_B	B	x_0	u_1	v_5	v_1	v_2	v_3	v_4
-M	u_1	1	1	0	1	1	-2	-1
0	v_5	1	0	1	-1	2	-1	0
z_j-c_j		-M	0	0	-M+3	-M+1	-2M+2	M

← ↑ kleinste $z_j-c_j < 0$

Eerste verbeterde oplossing

			-M	0	-3	-1	-2	0
C_B	B	x_0	u_1	v_5	v_1	v_2	v_3	v_4
-M	u_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-1
-1	v_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
$z_j - c_j$		$-\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}M+3\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}M+2\frac{1}{2}$	M

← ↑

Eindoplossing

C_B	B	x_0	v_5	v_1	v_2	v_3	v_4
-3	v_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	-1	-2/3
-1	v_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	-1	-1/3
$z_j - c_j$		-5/3	2/3	0	0	6	7/3

Stelling 2.5.9. Gegeven het L.P.-probleem

$$\text{maximalideer} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{onder } D\vec{x} \leq \vec{d} \tag{2.5.30}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, k)$$

$$-\infty < x_j < \infty \quad (j = k+1, \ldots, n)$$

Het duale probleem wordt gegeven door

$$\text{minimaliseer } Z = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$$

$$\text{onder } \sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{2.5.31}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i = c_j \quad (j = k+1, \ldots, n)$$

$$w_i \geq 0 \quad (i = 1, \quad , m)$$

Bewijs: Stel $x_j^* = \begin{cases} x_j \text{ als } x_j \geq 0 \\ 0 \text{ als } x_j < 0 \end{cases}$, $x_j^{**} = \begin{cases} -x_j \text{ als } x_j < 0 \\ 0 \text{ als } x_j \geq 0 \end{cases}$

$$(j = k+1, \ldots, m)$$

Door x_j te vervangen door $x_j^* - x_j^{**}$ kunnen we het oorspronkelijke prolbleem schrijven als:

$$\max z = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{j=k+1}^{n} - c_j x_j^{**}$$

$$\text{onder } \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_j + \sum_{j=k+1}^{n} d_{ij} x_j^* + \sum_{j=k+1}^{n} - d_{ij} x_j^{**} \leq d_i$$

$$(i = 1, \ldots, m)$$

$$x_j, x_j^*, x_j^{**} \geq 0.$$

De duale wordt gegeven door:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$$

$$\text{onder} \sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geq c_j \qquad (j = 1, \ldots k)$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geq c_j \qquad (j = k+1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} -d_{ij} w_i \geq -c_j \qquad (j = k+1, \ldots, n)$$

$$w_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m)$$

$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geq c_j$ en $\sum_{i=1}^{m} -d_{ij} w_i \geq -c_j$ is hetzelfde als

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_j = c_j.$$

Waarmee aangetoond is dat de duale van (2.5.30) gelijk aan (2.5.31) is.

We hebben reeds aangetoond (stelling 2.5.4) dat wanneer het oorspronkelijke L.P.-probleem een optimale oplossing bezit, dat dan ook de duale een optimale oplossing heeft. We zullen nu nagaan wat er aan de hand is wanneer één der problemen een onbegrensde oplossing bezit.

Stelling 2.5.8. Als het oorspronkelijke L.P.-probleem een onbegrensde oplossing heeft dan heeft de duale geen toegelaten oplossing.

Bewijs: Schrijf het oorspronkelijke probleem in de vorm (2.5.8). Voor elke toegelaten oplossing $\vec{w}$ van de duale (2.5.9) geldt:

$$\max z \leq \vec{d}'\vec{w}$$

Nu is max z = ∞, dit betekent dat de duale geen toegelaten oplossing bezit.

Opmerking: Wanneer het oorspronkelijke probleem geen oplossing bezit, mag men niet concluderen dat de duale dan een onbegrensde oplossing heeft. Het kan zijn dat beide problemen geen oplossing bezitten, zoals het volgende voorbeeld aantoont.

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$+x_1 - x_2 \leq -1$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

De duale is:

$$\min Z = -w_1$$

$$w_1 - w_2 \geq +3$$

$$-w_1 + w_2 \geq 4$$

$$w_1, w_2 \geq 0.$$

Voor beide problemen zijn de bijvoorwaarden strijdig. (ga na)

Laat een L.P.-probleem in de vorm (2.5.8) gegeven zijn, waarbij D een m × n-matrix is. Een optimale oplossing voor probleem (2.5.8) behoeft niet meer dan m variabelen ongelijk aan nul te bezitten (zie blz. 75). Als dit probleem d.m.v. de duale opgelost wordt, dan wordt een optimale oplossing voor (2.5.8) gegeven door $\vec{x}' = \vec{d}_B' \bar{B}^{-1}$, waarbij $\bar{B}$ een basis is die behoort bij een optimale basisoplossing van de duale en $\vec{d}_B$ de d-waarden bevat die behoren bij de basisvariabelen uit $\bar{B}$. Daar $\bar{B}$ een n × n matrix is kan $\vec{x}' = \vec{d}_B' \bar{B}^{-1}$ hoogstens n componenten ongelijk aan nul bezitten. In het algemeen gebruiken we de duale formulering alleen als n < m. In dit geval vinden we dan uit de eindtabel van de oplossing van de duale de n waarden van de x_j. De waarden van de verschilvariabelen x_{n+i} toegevoegd aan (2.5.8) om gelijkheden te verkrijgen,

kunnen we niet direct uit de eindtabel bepalen, wel kan men ze uitrekenen door de waarde van de x_j in (2.5.8) in te vullen. We zullen aantonen dat de oplossing van de duale ons inlichtingen verschaft over de verschilvariabelen x_{n+i}. Als w_i in de optimale basisoplossing is van de duale, dan geldt voor de corresponderende optimale oplossing $\vec{x}' = \vec{d}_B{}'\bar{B}^{-1}$ van het oorspronkelijke probleem, dat voor deze oplossing in de i^{de} ongelijkheid het gelijkheidsteken geldt, d.w.z. $x_{n+i} = 0$.
Stel we lossen (2.5.8) op d.m.v. de duale. Laat nu $n > m$ zijn. We zullen aantonen dat in dit geval voor $\vec{x}' = \vec{d}_B{}'\bar{B}^{-1}$ geldt dat niet meer dan m componenten ongelijk aan nul zijn, hoewel $r(\bar{B}) = n$. Daar $n > m$, zal de optimale basisoplossing van de duale minstens $n - m$ verschilvariabelen w_{m+j} bevatten. Er geldt nu als w_{m+i} als basisvariabele optreedt dat dan de component x_i van $\vec{x}' = \vec{d}_B{}'\bar{B}^{-1}$ nul is.
We geven nu, uitgedrukt in de formulering van het oorspronkelijke probleem, de volgende stellingen:

Stelling 2.5.9a. Als een verschilvariabele x_{n+i} die is toegevoegd aan de i^{de} bijvoorwaarde van (2.5.8) in een optimale basisoplossing (waarbij de basismatrix B behoort) verschijnt, dan geldt voor de corresponderende optimale oplossing $\vec{w}' = \vec{c}_B B^{-1}$ van de duale dat $w_i = 0$.

Stelling 2.5.9b. Als de variabele x_j optreedt in een optimale basisoplossing van (2.5.8), dan geldt voor de corresponderende optimale oplossing $\vec{w}' = \vec{c}_B B^{-1}$ van de duale dat $w_{m+j} = 0$, d.w.z. voor deze oplossing $\vec{w}'$ geldt in de j^{de} duale ongelijkheid het gelijkheidsteken.

Bewijs: a) Daar x_{n+i} in de optimale basisoplossing is geldt
$z_{n+i} - c_{n+i} = 0$ (zie blz. 77)
Nu is $c_{n+i} = 0$, daar x_{n+i} een verschilvariabele is.

$$\text{Dus } 0 = z_{n+i} - c_{n+i} = z_{n+i} = \vec{c}_B B^{-1}\vec{e}_i = (\vec{c}_B B^{-1} J)_i =$$
$$= (\vec{c}_B B^{-1})_i = w_i \text{ (zie definitie } z_j \text{ op blz. 77).}$$

b) Laat $\vec{d}_j$ de kolomvektor van D zijn behorende bij x_j. x_j is in de optimale basisoplossing, dus $z_j - c_j = 0$.

$z_j - c_j = \vec{c}_B B^{-1}\vec{d}_j - c_j = \vec{w}'\vec{d}_j - c_j = 0$, of te wel $\vec{w}'\vec{d}_j = c_j$, d.w.z. in de j^{de} ongelijkheid geldt voor $\vec{w}' = \vec{c}_B B^{-1}$ het gelijkheidsteken.

Opmerking: Men kan aantonen dat deze twee stellingen ook gelden als het oorspronkelijke probleem niet de vorm (2.5.8) bezit.

We zullen nu twee stellingen geven, die op de stellingen 2.5.9a en 2.5.9b lijken, doch er verschillend van zijn. Aan de ene kant zijn deze stellingen iets sterker, maar aan de andere kant iets zwakker.

Stelling 2.5.10a. Als een verschilvariabele x_{n+i} toegevoegd aan de i^{de} bijvoorwaarde van (2.5.8) ongelijk aan nul is in een optimale oplossing, dan is $w_i = 0$ in elke optimale oplossing van (2.5.9). Omgekeerd, als $w_i \neq 0$ in een optimale oplossing van (2.5.9) dan is $x_{n+i} = 0$ in elke optimale oplossing van (2.5.8). Door kan worden samengevat tot $w_i x_{n+i} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ voor elk paar optimale oplossingen van (2.5.8) en (2.5.9).

Bewijs: Voegen we aan de bijvoorwaarden van (2.5.8) verschilvariabelen toe, dan krijgen we:

$$D\vec{x} + I\vec{x}_v = \vec{d} \qquad (2.5.32)$$

Vermenigvuldig met $\vec{w}' \geqq \vec{0}$, dit geeft

$$\vec{w}'D\vec{x} + \vec{w}'I\vec{x}_v = \vec{w}'\vec{d} \qquad (2.5.33)$$

Als $[\vec{x},\vec{x}_v]$ een optimale oplossing is voor het oorspronkelijke probleem en $\vec{w}$ een optimale oplossing voor de duale, dan geldt $\vec{c}\vec{x} = \vec{d}'\vec{w}$ op grond van max z = min Z.

Omdat $\vec{x} \geqq \vec{0}$ kunnen we de bijvoorwaarde $\vec{w}'D \geqq \vec{c}$ uit (2.5.9) ook schrijven als $\vec{c}\vec{x} \leqq \vec{w}'D\vec{x}$. Daar $\vec{w}'\vec{x}_v \geqq 0$ geldt:

$$\vec{c}\vec{x} \leqq \vec{w}'D\vec{x} \leqq \vec{w}'D\vec{x} + \vec{w}'\vec{x}_v = \vec{w}'\vec{d} \qquad (2.5.34)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.5.33)$$

Nu is $\vec{c}\vec{x} = \vec{w}'\vec{d}$, waardoor uit (2.5.34) volgt:

$$\vec{w}'\vec{x}_v = \sum_{i=1}^{m} w_i x_{n+i} = 0$$

of

$w_i x_{n+i} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, immers $w_i \geq 0$, $x_{n+i} \geq 0$.

Dus als $x_{n+i} \neq 0$ voor een optimale oplossing van (2.5.8) dan is $w_i = 0$ voor elke optimale oplossing van (2.5.9). Als $w_i \neq 0$ voor een optimale oplossing van (2.5.9), dan is $x_{n+i} = 0$ voor elke optimale oplossing van (2.5.8).
We moeten dus in deze stelling aannemen $x_{n+i} \neq 0$ voor minstens één optimale oplossing van (2.5.8) om aan te tonen $w_i = 0$ voor elke optimale oplossing van (2.5.9), doch we behoeven niet te eisen dat de optimale oplossing een basisoplossing is.

Stelling 2.5.10b. Laat $\vec{x}$ een optimale oplossing zijn van (2.5.8) en $\vec{w}_v$ de waarden bevatten van de verschilvariabelen behorende bij een optimale oplossing van (2.5.9), dan geldt

$$\vec{x}'\vec{w}_v = 0 \quad \text{of} \quad x_j w_{m+j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Bewijs: Analoog aan vorige. Voeg nu aan de bijvoorwaarden van (2.5.9) verschilvariabelen toe.

Duaal simplex algorithme

Gegeven een L.P.-probleem max $z = \vec{c}\vec{x}$ onder $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$, waarbij voor de m × n-matrix A geldt: $r(A) = r(A_b) = m$. $A\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j$. Elk m-tal lineair onafhankelijke kolomvektoren van A vormt een basis B. Bij elke basis B behoort een basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$, de variabelen x_j die niet in $\vec{x}_B$ voorkomen hebben de waarde nul. Tevens is voor iedere kolomvektor $\vec{a}_j$ van A een getal z_j bij elke basis B gedefinieerd als $z_j = \vec{c}_B \cdot B^{-1}\vec{a}_j$, waarbij $\vec{c}_B$ de c-waarden bevat van de variabelen x_j uit $\vec{x}_B$. Voor elke vektor $\vec{a}_k$ uit B geldt $z_k = c_k$. We zien dus dat de getallen $z_j - c_j$ alléén afhangen van de $\vec{a}_j$ en de c_j, niet van $\vec{b}$. We weten dat een toege-

laten basisoplossing met $z_j - c_j \geq 0$, alle j, een optimale oplossing is.

I.h.a. zal niet elke basisoplossing met $z_j - c_j \geq 0$, alle j, toegelaten zijn. Er zijn slechts eindig veel basisoplossingen.

Als we nu eens de bovenstaande feiten nader beschouwen dan opent zich een mogelijkheid om op een andere wijze dan de Simplex-methode het L.P.-probleem op te lossen.

Wanneer we beginnen met een niet-toegelaten basisoplossing waarvoor $z_j - c_j \geq 0$, alle j en we uit deze oplossing door een basisvektor te vervangen een andere basisoplossing kunnen bepalen met ook $z_j - c_j \geq 0$, alle j dan zullen we in een eindig aantal stappen een optimale basisoplossing voor het L.P.-probleem verkrijgen, aangenomen dat geen enkele basis herhaald wordt. Het is mogelijk m.b.v. de dualiteitstheorie zo'n algorithme op te stellen. Er bestaan verschillende afleidingen, we zullen de eenvoudigste geven.

Laat het L.P.-probleem in de standaardvorm voor de toepassing van de Simplex-methode gebracht zijn, d.w.z.:

$$\begin{aligned} &\max\ z = \vec{c}\vec{x} \\ &\text{onder } A\vec{x} = \vec{b} \qquad (2.3.35) \\ &\vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned}$$

waarbij voor de m × n-matrix A geldt $r(A) = r(A_b) = m$.

De duale van dit probleem is

$$\begin{aligned} &\min\ Z = \vec{w}'\vec{b} \\ &\text{onder } \vec{w}'A \geq \vec{c} \qquad (2.3.36) \end{aligned}$$

We weten uit stelling 2.5.6 dat de variabelen w_i elke reële waarde mogen aannemen.

Voor elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (2.3.35) en elke oplossing $\vec{w}$ van (2.3.36) geldt:

Uit (2.3.35): $\vec{w}'A\vec{x} = \vec{w}'\vec{b}$

Uit (2.3.36): $\vec{w}'A\vec{x} \geq \vec{c}\vec{x}$

Dus voor elke toegelaten oplossing $\vec{x}$ van (2.3.35) en elke oplossing $\vec{w}$ van (2.3.36) geldt:

$$\vec{c}\vec{x} \leq \vec{w}'\vec{b} \qquad (2.3.37)$$

Als nu voor een toegelaten oplossing $\vec{x}_0$ van (2.3.35) en een oplossing $\vec{w}_0$ van (2.3.36) geldt: $\vec{c}\vec{x}_0 = \vec{d}'\vec{w}_0$ dan is $\vec{x}_0$ optimaal voor (2.5.35) en $\vec{w}_0$ optimaal voor (2.3.36) (ga na!)
Laat $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m)$ een basismatrix van A zijn zodat $\vec{w}' = \vec{c}_B B^{-1}$ een oplossing van (2.3.36) is, d.w.z. $\vec{w}'A = \vec{c}_B B^{-1} A \geq \vec{c}$.
Dan geldt voor de basisoplossing $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$ van (2.3.35) dat $z_j - c_j \geq 0$, alle j.
Dit volgt direct uit $\vec{c}_B B^{-1} A \geq \vec{c}$. Immers $\vec{c}_B B^{-1} A \geq \vec{c}$ is ook te schrijven als:

$$\vec{c}_B B^{-1}\vec{a}_j \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\text{of } z_j - c_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Als $\vec{x}_B \geq \vec{0}$, dan is $\vec{x}_B$ optimaal voor (2.3.35) en tevens is dan $\vec{w}'$ een optimale oplossing voor (2.3.36), omdat

$$\min Z = \max z = \vec{c}_B\vec{x}_B = \vec{c}_B B^{-1}\vec{b} = \vec{w}'\vec{b}.$$

Als $\vec{x}_B$ negatieve componenten bezit dan willen we een basisoplossing $\vec{x}_B{}^*$ construeren, ook met alle $z_j - c_j \geq 0$, zodat deze optimaal is. We zullen nu een algorithme afleiden door uit te gaan van $\vec{w}' = \vec{c}_B B^{-1}$ een vektor $\vec{w}^{*\prime} = \vec{c}_B{}^* B^{*-1}$ te construeren, die ook voldoet aan $\vec{w}^{*\prime} A \geq \vec{c}$. Dan geldt voor de basisoplossing $\vec{x}_B{}^* = B^{*-1}\vec{b}$ dat alle $z_j^* - c_j \geq 0$, en voor deze $\vec{x}_B{}^*$ kan gelden $\vec{x}_B{}^* \geq \vec{0}$. We nemen aan dat de component x_{Br} van $\vec{x}_B$ negatief is.
We zullen de rijen van B^{-1} aangeven met $\vec{\beta}^j$. Nu volgt uit $B^{-1}B = J$

$$\vec{\beta}^j\vec{b}_i = \delta_{ij} \quad (i,j = 1, \ldots, m), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (2.5.38)$$

Voor elke x_{Bi} van $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$ geldt:

$$x_{Bi} = \vec{\beta}^i\vec{b} \qquad (2.5.39)$$

We weten dat $\vec{y}_j$ gedefinieerd is als $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$ (blz. 76) dus

$$\vec{\beta}^r\vec{y}_j = y_{rj} \qquad (2.5.40)$$

Voer nu de vektor $\vec{w}^*$ in:

$$\vec{w}^{*\prime} = \vec{w}' - \theta\vec{\beta}^r \qquad (2.5.41)$$

De waarde van de kriteriumfunctie van (2.3.36) wordt gegeven door:

$$Z^* = \vec{w}'\vec{b} - \theta\vec{\beta}^r\vec{b} = \vec{w}'\vec{b} - \theta x_{Br} \qquad (2.5.42)$$

Uit (2.5.42) volgt: $Z^* \leq Z = \vec{w}'\vec{b}$ als $\theta \leq 0$, immers $x_{Br} < 0$. We zullen θ nu zo bepalen dat $\vec{w}^{*\prime}$ een oplossing is van (2.3.36) en te schrijven is als $\vec{w}^{*\prime} = \vec{c}_B{}^*B^{*-1}$.

Nu is $\vec{w}^{*\prime}\vec{b}_i = \vec{w}'\vec{b}_i - \theta\vec{\beta}_r\vec{b}_i = c_{Bi} - \theta\delta_{ir}$.

Hieruit volgt:

$$\vec{w}^{*\prime}\vec{b}_i = c_{Bi} \quad (i \neq r)$$

$$\vec{w}^{*\prime}\vec{b}_r = c_{Br} - \theta \geq c_{Br} \quad \text{als } \theta \leq 0. \qquad (2.5.43)$$

Voor elke $\vec{a}_j$ niet in B geldt:

$$\vec{w}^{*\prime}\vec{a}_j = \vec{w}'\vec{a}_j - \theta\vec{\beta}^r\vec{a}_j \qquad (2.5.44)$$

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1) $\vec{\beta}^r\vec{a}_j = y_{rj} \geq 0$ voor elke $\vec{a}_j$ niet in B, dan is $\vec{w}^{*\prime}\vec{a}_j \geq c_j$ voor alle $\theta \leq 0$. We kunnen nu voor θ een willekeurig groot negatief getal nemen en $\vec{w}^*$ blijft een oplossing van de duale. Dus de duale bezit een onbegrensde oplossing, hetgeen inhoudt dat het oorspronkelijke probleem geen oplossing heeft.

2) $\vec{\beta}^r\vec{a}_j = y_{rj} < 0$ voor tenminste één j.
Uit (2.5.43) en (2.5.44) volgt dat $\vec{w}^*$ een oplossing is van (2.5.36) als $\vec{w}^{*\prime}\vec{a}_j \geq c_j$ voor elke $\vec{a}_j$ niet in B. Neem $\theta \leq 0$. Nu volgt uit (2.5.44) dat er gelden moet:

$$\vec{w}'\vec{a}_j - \theta y_{rj} \geq c_j \quad \text{voor elke } y_{rj} < 0.$$

We zien dus dat θ voldoen moet aan:

$$0 \geq \theta \geq \frac{\vec{w}'\vec{a}_j - c_j}{y_{rj}} \quad , \; y_{rj} < 0 \qquad (2.5.45)$$

Wanneer θ hieraan voldoet dan is $\vec{w}^{**}$ een oplossing van (2.3.36). We willen echter $\vec{w}^{**}$ schrijven als $\vec{w}^{**'} = \vec{c}_B{}^* B^{*-1}$ met B^* een basis voor A. Neem daartoe

$$\theta = \max_j \frac{\vec{w}'\vec{a}_j - c_j}{y_{rj}} \quad , \; y_{rj} < 0. \qquad (2.5.46)$$

Bedenken we dat $\vec{w}' = \vec{c}_B B^{-1}$ dan zien we dat $\vec{w}'\vec{a}_j = \vec{c}_B B^{-1}\vec{a}_j = z_j$.
Dus (2.5.46) is ook te schrijven als:

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \quad , \; y_{rj} < 0 \qquad (2.5.47)$$

Daar $y_{rk} \neq 0$ is $B^* = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{l-1}, \vec{a}_k, \vec{b}_{l+1}, \ldots, \vec{b}_m)$ een basis van A (stelling 2.2.5) en nu is $\vec{w}^{**'} = \vec{c}_B B^{*-1}$.

Immers voor $\vec{w}^{**}$ geldt:

$$\begin{aligned} \vec{w}^{**'}\vec{b}_i &= c_{Bi} \quad i \neq r \\ \vec{w}^{**'}\vec{a}_k &= \vec{w}'\vec{a}_k - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \cdot y_{rk} = c_k \end{aligned} \qquad (2.5.48)$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned} \vec{w}^{**'}\vec{b}_r &\geq c_{Br} \\ \vec{w}^{**'}\vec{a}_j &\geq c_j, \; \vec{a}_j \text{ niet in B}, \; j \neq k. \end{aligned} \qquad (2.5.49)$$

Nu is (2.5.48) te schrijven als $\vec{w}^{**'} = \vec{c}_B{}^* B^{*-1}$.

Dus voor de basisoplossing van (2.3.35) $\vec{x}_B{}^* = B^{*-1}\vec{b}$ geldt $z_j^* - c_j \geq 0$, alle j. Als $\vec{x}_B{}^*$ nog negatieve componenten bevat dan herhalen we het voorgaande. In een eindig aantal stappen zullen we dan de optimale oplossing bereiken, mits geen cycling optreedt, het-

geen theoretisch mogelijk is maar in de praktijk zelden optreedt. Uit de afleiding van het algorithme ziet men dat de naam duaal simplex algorithme enigszins misleidend is, bij de werkelijke berekeningen is het duale probleem niet nodig, maar bij de afleiding van algorithme maken we gebruik van de dualiteitstheorie.

We geven nu het duale simplex algorithme om het L.P.-probleem (2.5.35) op te lossen.
We beginnen met een basisoplossing waarvan één of meer $x_{Bi} < 0$ maar alle $z_j - c_j \geq 0$. Evenals bij de Simplexmethode gaan we van de ene basisoplossing naar een andere door bij elke stap een vektor uit de basis te vervangen.
Daartoe de volgende twee kriteria (merk op dat de volgorde de omgekeerde is van die bij de Simplex-methode):

I. <u>Vektor die verwijderd wordt.</u>

Bepaal $x_{Br} = \min_i \{x_{Bi}, x_{Bi} < 0\}$ (2.5.50)

De vektor $\vec{b}_r$ wordt uit de basis verwijderd.

II. <u>Vektor die de basis inkomt.</u> De vektor $\vec{a}_k$ die $\vec{b}_r$ vervangt wordt bepaald uit:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}, y_{rj} < 0\} \qquad (2.5.51)$$

Het tableau dat we gebruiken om de berekeningen uit te voeren is hetzelfde als bij de Simplexmethode. De transformatieformules om uit het ene tableau het volgende te bepalen zijn hetzelfde als die bij de Simplexmethode. Alleen de kriteria zijn verschillend. Het optimaliteitskriterium is vervuld als alle $x_{Bi} \geq 0$.

Men kan zich afvragen hoe we kunnen bepalen of een L.P.-probleem een onbegrensde oplossing bezit, als we het duale simplex algorithme toepassen. Dit is eenvoudig, immers als het oorspronkelijke probleem een onbegrensde oplossing bezit dan heeft het duale probleem geen oplossing, dus we kunnen dan nooit een basisoplossing voor (2.3.35) vinden met $z_j - c_j \geq 0$, alle j.

Daar het i.h.a. moeilijk is om een basisoplossing voor (2.3.35) te vinden met $z_j - c_j \geq 0$, alle j is het lastig om m.b.v. dit algorithme een L.P.-probleem op te lossen.
Niettemin treden er nog weleens L.P.-problemen op waarbij men direct een basisoplossing met alle $z_j - c_j \geq 0$ ter beschikking heeft Ook in discrete programmering (hoofdstuk 3) zal dit algorithme worden toegepast.
We zullen nu enkele gevallen aangeven waar het duale simplex algorithme soms toegepast kan worden.
In praktijkproblemen komt het vaak voor dat men niet alleen geïnteresseerd is in de oplossing van het gegeven probleem, maar ook graag wil weten hoe de oplossing verandert als bepaalde parameters uit het probleem veranderd worden, dus b.v. als één of meer van de getallen c_i of b_i gewijzigd worden. Ook komt het vaak voor dat men achteraf aan het probleem nog een extra bijvoorwaarde toevoegt. In vele gevallen is het niet noodzakelijk het probleem opnieuw op te lossen, men kan in een klein aantal stappen, soms m.b.v. het duale simplex algorithme, de nieuwe oplossing bepalen. Als de aard van het probleem door veranderingen sterk beïnvloed wordt is het beter het probleem van het begin af aan opnieuw op te lossen.
We zullen enkele voorbeelden geven.
Laat $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}$ een optimale basisoplossing zijn van het L.P.-probleem $\max z = \vec{c}\vec{x}$ onder $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$. Stel nu dat we enkele componenten van $\vec{b}$ willen veranderen. We zullen de invloed hiervan op de optimale oplossing nagaan. Als volgt kan men eenvoudig tot uitdrukking brengen dat er componenten van $\vec{b}$ veranderd worden: vervang $\vec{b}$ door $\vec{b}^{*} = \vec{b} + \phi\vec{r}$, met $\vec{r}$ een aangegeven, doch willekeurige vektor en ϕ een niet-negatief reëel getal. We zullen nu de grootste waarde van ϕ bepalen zodat de basisoplossing die bij B behoort toegelaten is.
Beschouw daartoe: $\vec{x}_B^{*} = B^{-1}\vec{b}^{*} = B^{-1}\vec{b} + \phi B^{-1}\vec{r} = \vec{x}_B + \phi\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma} = B^{-1}\vec{r}$.
De getallen $z_j - c_j$ zijn onafhankelijk van $\vec{b}$, dus als alle $\gamma_i \geq 0$, dan blijft $\vec{x}_B^{*}$ een optimale toegelaten basisoplossing, hoe groot men ϕ ook neemt. Als echter één of meer $\gamma_i < 0$ dan worden getallen x_{Bi}^{*} nul voor $\theta = \theta_c$ waarbij

$$\theta_c = -\frac{x_{Bv}}{\gamma_v} = \min_i -\frac{x_{Bi}}{\gamma_i}\ ,\ \gamma_i < 0.$$

Als $\theta > \theta_c$ dan is $\vec{x}_B^{**}$ een niet-toegelaten basisoplossing, maar met alle $z_j - c_j \geq 0$. Dus als θ een waarde groter dan θ_c bezit dan kunnen we het duale simplex algorithme toepassen om voor het nieuwe L.P.-probleem een optimale basisoplossing te bepalen.

We beschouwen nu het geval dat men een bijvoorwaarde aan een L.P.-probleem toevoegt, nadat het probleem opgelost is.
Laat een L.P.-probleem gegeven zijn en stel dat het gebracht is in de standaardvorm max $z = \vec{c}\vec{x}$ onder $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$, waarbij voor de $m \times n$-matrix A geldt $r(A) = r(Ab) = m$.
Zij B de basismatrix die behoort bij een optimale basisoplossing van dit probleem. Aan het gegeven L.P.-probleem voegen we nu een bijvoorwaarde toe, waarbij we aannemen dat er in de bijvoorwaarde geen nieuwe variabelen optreden.
In het verkregen nieuwe probleem maximaliseren we dezelfde kriteriumfunctie z als in het gegeven probleem. Voor het nieuwe probleem ligt de maximumwaarde van z in elk geval niet hoger dan het maximum van z voor het eerst gegeven probleem. Immers de nieuwe optimale oplossing voldoet zowel aan de eerste m bijvoorwaarden als aan de toegevoegde bijvoorwaarde, en is dus een oplossing van het oude probleem. We kunnen nu concluderen dat de optimale oplossing van het oude probleem een optimale oplossing is van het nieuwe probleem, als de oplossing aan de toegevoegde bijvoorwaarde voldoet.
Voldoet de oplossing er niet aan, dan moeten we een nieuwe optimale oplossing bepalen.
Een $(m + 1) \times (m + 1)$ basismatrix B_1 voor het nieuwe probleem met de toegevoegde bijvoorwaarde is:

$$B_1 = \begin{bmatrix} B & \vec{0} \\ \vec{\alpha} & \pm 1 \end{bmatrix}$$

waarbij B de optimale basis is van het oude probleem.
De laatste kolom van B_1 bevat de vektor behorende bij de verschilvariabele òf artificial toegevoegd aan de nieuwe bijvoorwaarde, $\vec{\alpha}$ is de rijvektor die de coëfficiënten uit de toegevoegde bijvoorwaarde bevat, behorende bij de basisvariabelen van B.
Nu is (zie blz. 33)

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \vec{0} \\ \mp\alpha\vec{B}^{-1} & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Voor het nieuwe probleem hebben de vektoren $\vec{y}_j$ bij de basis B_1 de vorm: $|\vec{y}_j, \delta_j|$, waarbij $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j$ en δ_j een reëel getal.
Als de toegevoegde bijvoorwaarde een ongelijkheid is dan is de toegevoegde variabele een verschilvariabele dan blijven de getallen $z_j - c_j$ behorende bij de optimale B ongewijzigd, immers de c-waarde van een verschilvariabele is nul. De waarde van de verschilvariabele is negatief, omdat de oorspronkelijke optimale oplossing niet aan de toegevoegde bijvoorwaarde voldoet. We hebben dus voor het nieuwe probleem een basisoplossing waarvan één component negatief en alle $z_j - c_j \geq 0$. We kunnen dus het duale simplex algorithme toepassen om een optimale oplossing te verkrijgen.
Als de toegevoegde bijvoorwaarde een gelijkheid is, dan voegen we er een artificial aan toe. Als voor de oorspronkelijke optimale basisoplossing de artificial een negatieve waarde aanneemt dan geven we de artificial c-waarde nul en passen het duale simplex algorithme toe om de artificial uit de basis te verwijderen en een optimale oplossing voor het nieuwe probleem te verkrijgen. Is de waarde van de artificial positief, dan geven we de artificial c-waarde -M (merk op dat de $z_j - c_j$ nu veranderen) en gebruiken de standaard simplex-methode.

We zullen nu nog een numeriek voorbeeld van het duale simplex algorithme geven.
Het duale simplex algorithme kunnen we altijd toepassen als het L.P.-probleem in de volgende vorm te brengen is:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0$$

en minstens één $b_i > 0$ en alle $c_j \leq 0$.

Voeg verschilvariabelen toe, dit geeft

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_j, x_{n+i} \geq 0.$$

$B = -I$ is een basis, $\vec{x}_B = -\vec{b}$ waarvan minstens één component negatief en $z_j = \vec{c}_B \vec{y}_j$ is nul voor elke kolomvektor van A daar $\vec{c}_B = \vec{0}$. Dus $z_j - c_j = -c_j > 0$ voor elke $\vec{a}_j$ van A (en natuurlijk $z_j - c_j = 0$ voor kolomvektoren van I).

We kunnen dus direct het duale simplex algorithme toepassen.

$$\max z = -3x_1 - x_2$$

onder

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Na toevoegen van verschilvariabelen

$$\max z = -3x_1 - x_2$$

onder

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1.$$

Neem als basis $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

De bijbehorende basisoplossing is $\vec{x}_B = (-1,-2)$, met $x_{B1} = x_3$, $x_{B2} = x_4$.

Verder geldt $z_1 - c_1 = -c_1 = 3$, $z_2 - c_2 = 1$.
Daar B = -I geldt voor de begintabel $\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j = -\vec{a}_j$.

Triviale oplossing.

		-3	-1		0	0	
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	-1	-1	-1	1	0	
0	x_4	-2	-2	-3	0	1	←
$z_j - c_j$	✕	0	3	1	0	0	
				↑			

We bepalen eerst de vektor die de basis uitgaat.
Dit door (2.5.50) toe te passen, hetgeen geeft dat de kolomvektor behorende bij x_4 de basis uitgaat. Immers $x_{B2} = -2$ is de meest negatieve x_{Bi}. Beschouw nu alle $y_{2j} < 0$. Deel dan $z_j - c_j$ door y_{2j}. Het grootste quotiënt bepaalt de vektor die de basis inkomt.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max\{\frac{z_1 - c_1}{y_{21}} = -\frac{3}{2}, \frac{z_2 - c_2}{y_{22}} = -\frac{1}{3}\} = -\frac{1}{3}.$$

Dus $\vec{a}_2$ komt de basis in.
De transformatieformules om de nieuwe tabel te bepalen zijn die gegeven op blz. 91.

Eerste verbeterde oplossing.

			-3	-1	0	0
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$
-1	x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$
z_j-c_j		$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$

In deze tabel alleen $x_{B1} = x_3 = -\frac{1}{3} < 0$.
$\vec{a}_3$ gaat de basis uit en wordt vervangen door $\vec{a}_4$ omdat

$$\max\left(\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}, \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}}\right) = -1.$$

Eindoplossing.

			-3	-1	0	0
$\vec{c}_B$	B	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_4	1	1	0	-3	1
-1	x_2	1	1	1	-1	0
z_j-c_j		-1	2	0	1	0

In deze tabel zijn alle $x_{Bi} \geq 0$. Dus een optimale basisoplossing $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, $x_2 = 1$ is gevonden.
We kunnen ook direct een optimale oplossing voor het duale probleem uit deze tabel aflezen, nl. $w_1 = 1$ en $w_2 = 0$.

errata

pagina	regel	
16	17	staat: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ lees: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $(i = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m)$.
17	20	staat: $-z = -\sum x_j x_j$ lees: $-z = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
19	17,18	staat: $x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ $(i = 1, \ldots, m_1)$
		$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = m_1 + 1, \ldots, m)$
		lees: $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 1, \ldots, m_1)$
		$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ $(i = m_1 + 1, \ldots, m)$.
20	8	staat: $x_{n+i} \leq 0$ lees: $x_{n+i} \geq 0$.
20	13,14	zelfde fout als op pg. 19, regel 17,18.
21	19	staat: $x_{n+i}^{(3)}$ lees: $x_{n+i}^{(2)}$.
25	15	staat: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n + m)$
		lees: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.
27	15	staat: vermenigvuldigt lees: vermenigvuldigd.
34	17	staat: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < r$ lees: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq r$.
39	7	lees: voor (2.2.52): $\vec{c} = \sum_{i=1}^{r-1} (\gamma_i - \frac{a_i}{a_r} \gamma_r) \vec{a}_i +$ $+ \frac{\gamma_r}{a_r} \vec{b}$.

errata 2

pagina	regel	
39	22	lees : voor (2.2.53): $\vec{b}_{v-1} = \sum_{i=1}^{u-1} \delta_i \vec{a}_i + \delta \vec{b}_v$.
45	24	staat: 1) deel de eerst volgende ... lees: 1) deel de eerste vergelijking.
48	20	staat: We zien dus als ... lees: We zien dus dat ...
50	12	staat: 2) is een gevolg van 1) lees: 2) bewijs analoog aan 1).
53	25	staat: $X_4 = \{\vec{x} \mid \vec{c}\,\vec{x} < z\}$ lees: $X_4 = \{\vec{x} \mid \vec{c}\,\vec{x} \leq z\}$.
54	2	staat: $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \frac{\varepsilon}{Z} \frac{\vec{c}^1}{|\vec{c}|}$ lees: $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\vec{c}^1}{|\vec{c}|}$
54	3,5	vervang $\frac{\varepsilon}{Z}$ door $\frac{\varepsilon}{2}$.
55	21	staat: convext lees: convex.
55	32	lees : voor (2.2.100): $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq = \geq\} b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.
56	3	staat: $\vec{a}^i = (A_{i1}, \ldots, a_{in})$ lees: $\vec{a}^i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$.
57	11	staat: polyhydroon. lees (ook op volgende blz.): polyhedron.
57	22	staat: X in zijn geheel bevat is lees: X in zijn geheel bevat is in één der open halfruimten voortgebracht door het hypervlak.
61	11	staat: $|\vec{n}_k\,\vec{w}_k| \leq n_k|\,|\vec{w}_k|$ lees: $|\vec{n}_k\,\vec{w}_k| \leq |\vec{n}_k|\,|\vec{w}_k|$.
61	16	staat: $r = 2|\,w|$ lees: $r = 2|\,\vec{w}|$.
62	9	staat: uit het bewijs volgt ... lees: men ziet eenvoudig in ...
63	12	staat: $S = \{\vec{x} \mid \vec{\epsilon}\,\vec{x} = z\}$ lees: $S = \{\vec{x} \mid \vec{c}\,\vec{x} = z\}$.
66	4	staat: leggen lees: liggen.

errata 3

pagina	regel	
66	14	staat: Zodat $\vec{c}\,\vec{v}^{x} = z^{x}$ en $\vec{c}\,\vec{v} = z^{x}$ lees: zodat $\vec{c}\,\vec{v}^{x} = z^{x}$
85	4	staat: $x_j^{x} \geq \vec{0}$ lees: $x_j^{x} \geq 0$.
85	13	staat: van basisvektoren, ... lees: van basisvektoren uniek is, ...
108	13,14	staat: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m_1)$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (1 = m_1 + 1, \ldots, m)$
		lees: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$
108	22	staat: Elk L.P-probleem .... lees: Elk L.P-probleem met enkel ongelijkheden als bijvoorwaarden ....
109	5	staat: verschilvariabelen en artificials toe lees: verschilvariabelen. toe
110	6	staat: elk hoekpunt n ... lees: elk hoekpunt minstens n .... na blz. 112 komen aantal ongenummerde blz. Nummer de blz. van §4 als blz. 113 t/m 124.
116	8	staat: $z_j + c_j$ lees: $z_j - c_j$.
122	15	staat: $100x_1 + 100x_3 \leq 20$ lees: $100x_2 + 100x_3 \leq 20$
122	28	staat: $100x_1 + 100x_3 + x_6 = 20$ lees: $100x_2 + 100x_3 + x_6 = 20$
123	23	staat: $z_j - c_j$ 0 lees: $z_j - c_j \leq 0$.
124	24	staat: De voorwaarden zijn strijdig. lees: De voorwaarden zijn niet strijdig, doch bezitten geen toegelaten oplossing.
126	26	staat: $\vec{w}'$ D $\vec{c}$ lees: $\vec{w}'$ D $\geq \vec{c}$.

errata 4

pagina	regel	
130	17	staat: (2.3.8) lees: (2.5.8)
130	19	staat: (2.3.9) lees: (2.5.9)
132 t/m 135		staat: (2.3.21), ... , (2.3.29) lees: (2.5.21), ... , (2.5.29)
138		Voeg na eindtabel toe: Een optimale oplossing voor het oorspronkelijke probleem is dus $x_1 = 7/3$, $x_2 = 2/3$. Verifieer dit door het oorspronkelijke probleem grafisch op te lossen.
139	2	staat: maximalideer lees: maximaliseer.
149	29	staat: (2.3.35) lees: (2.5.35).
150	34	staat: $\theta = \theta_c$ lees: $\phi = \phi_c$
151	1,2,3	staat: θ, θ_c lees: ϕ, ϕ_c.
7		Ga na dat men aan (1.18) de volgende bijvoorwaarden toevoegen moet: $200\,(x_1 - 1) + 100x_2 \leq 749$ $200\,x_1 + 100(x_2 - 1) \leq 749$ of te wel men kan volstaan met $200x_1 + 100x_2 \leq 849$ (aanwijzing: deze voorwaarde garandeert ons dat er geen schepen van type i ingezet worden, waarop geen enkele passagier vervoerd wordt).