STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SP 71 D

Rapport Delta Commissie, 3

Bijdragen van het Mathematisch Centrum

1960

BIJDRAGE II.4

DE WISKUNDIGE BEHANDELING VAN DE INVLOED VAN WINDVELDEN OP DE WATERSTANDEN IN DE NOORDZEE

INHOUDSOVERZICHT

0.1 Inhoudsoverzicht 121
0.2 Overzicht van de tabellen 122
0.3 Overzicht van de figuren 122
0.4 Overzicht van de gebruikte symbolen 123
0.5 Literatuur 124
0.6 Summary 126
0.7 Résumé 128

1.0 Samenstelling van de bijdrage 131
1.1 Inleidende fysisch-mathematische beschouwingen 131
1.2 Inhoud van de bijdrage 134
1.3 Auteurs en medewerkers 135

2.0 Algemene beschouwingen over het hydrodynamische probleem van de waterbeweging van de Noordzee 136
2.1 Inleiding 136
2.2 Het mathematische probleem 136
2.3 Reductie tot een probleem van Green 138
2.4 Bepaling van de functie van Green voor gebieden, die door ten hoogste twee rechten worden begrensd 140
2.5 Het stationaire geval 145
2.6 Het niet-stationaire geval 147

3.0 De invloed van enkele stationaire, niet-uniforme windvelden op een Noordzeemodel 149
3.1 Inleiding 149
3.2 Het mathematische probleem 152
3.3 Een bijzonder geval 152
3.4 Het model met uniforme diepte 153
3.5 Het model met exponentiële diepte 155
3.6 De oceaanvoorwaarde 157
3.7 Het probleem zonder aardrotatie 160
3.8 Numerieke toepassingen 162

4.0 Niet-stationaire windeffecten in een rechthoekige baai 166
4.1 Inleiding 166
4.2 Probleemstelling 168
4.3 Probleem van Green 171
4.4 Oplossing voor een uniform windveld 173
4.5 Kustvoorwaarde 174

4.6 Oceaanvoorwaarde 175
4.7 Het bijzondere geval $\Omega = 0$ 178
4.8 Benadering voor kleine Ω 178
4.9 Benadering voor grote Ω en kleine p 179
4.10 Numerieke toepassingen 182

0.2 OVERZICHT VAN DE TABELLEN

3.8.1 De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met uniforme diepte 162
3.8.2 Enkele ontwikkelingscoëfficiënten 163
3.8.3 De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte 163
3.8.4 De coëfficiënten van de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) bij het model met exponentiële diepte 164
3.8.5 De coëfficiënten van de absolute verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte 164
3.8.6 De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model zonder aardrotatie 166
4.10.1 Exponentieel windveld 183
4.10.2 Conversiefactoren 183
4.10.3 Het gedrag van ζ voor $y = 0$ 184
4.10.4 De verhoging in het midden van de zuidkust 184
4.10.5 Verloop van de maximale verhoging langs de zuidkust 185
4.10.6 De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie 185
4.10.7 Vergelijking van exacte en benaderde waarden voor enkele coëfficiënten 187
4.10.8 De bij $\bar{Z}(p)$ behorende polen 187
4.10.9 De verhoging in het midden van de zuidkust 188
4.10.10 De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie 189

0.3 OVERZICHT VAN DE FIGUREN

1.1.1 De Noordzee en het Kanaal 133
2.4.1 Twee tegengesteld gerichte, evenwijdige dipolen 141
2.4.2 Pool en dipoolstaart 141
2.4.3 Pool en ontbonden dipoolstaart 141
2.4.4 Dipoolspiegeling bij twee evenwijdige kusten 142
2.4.5 Dipoolspiegeling bij kust en daaraan evenwijdige oceaanrand 143
2.5.1 Lineair windveld boven een rechthoekige zee 146
3.1.1 Bodemprofiel van de Noordzee 151
3.8.1 De absolute verhoging aan de zuidkust ten gevolge van een lineair windveld bij het model met exponentiële diepte 165

4.10.1 De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een exponentieel windveld 182
4.10.2 Niveaulijnen in een rechthoekige baai ten gevolge van een exponentieel windveld . . 186
4.10.3 De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sprong-windveld . 188
4.10.4 De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sinusoïdaal windveld 190

0.4 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

A	$A = \alpha\Omega/\lambda$ (wordt slechts in de hoofdstukken 2.0 en 3.0 gebruikt);
c	$c = \sqrt{gh}$;
g	de versnelling van de zwaartekracht;
h	de diepte;
h_0	de diepte aan de zuidkust;
h_m	het harmonisch gemiddelde van de diepte;
p	de variabele van de Laplacetransformatie;
p_a	de atmosferische druk;
q	$q = (p^2 + \lambda p)^{\frac{1}{2}}$;
R	de rotatie van het windveld;
s	$s = \Omega p^{\frac{1}{2}}(p + \lambda)^{-\frac{1}{2}}$;
t	de tijd;
u, v	de componenten van de totale stroom, $u = \int_0^h u_z dz$, $v = \int_0^h v_z dz$;
u_z, v_z	de componenten van de horizontaal gerichte stroom op de diepte z;
U, V	de componenten van de schuifspanning, die ontstaat ten gevolge van de door de wind op het wateroppervlak uitgeoefende kracht;
U_0, U_1, U_2	de coëfficiënten van een lineair windveld, behorende bij U;
V_0, V_1, V_2	de coëfficiënten van een lineair windveld, behorende bij V;
U_z, V_z	de componenten van de schuifspanning, welke het water boven de diepte z uitoefent op het water beneden die diepte;
U_s, V_s	de componenten van de schuifspanning, welke door de wind op het wateroppervlak wordt uitgeoefend;
U_b, V_b	de componenten van de schuifspanning, welke het water op de bodem uitoefent;
v_s	de grootte van de windsnelheid aan het wateroppervlak;
x, y, z	cartesische coördinaten, waarbij het model bepaald is door $0 < x < a$, $0 < y < b$ en waarbij $z = 0$ het zee-oppervlak in de rusttoestand aangeeft, $z = h$ de bodem;
α	een coëfficiënt, welke de verandering van de diepte bepaalt (wordt in deze betekenis alleen in de hoofdstukken 2.0 en 3.0 gebruikt);
α	$\alpha = 1 - 2\,\gamma/\pi$ (wordt in deze betekenis alleen in hoofdstuk 4.0 gebruikt);
β	$\beta = \frac{1}{2} s\,\pi + qb$;
γ	$\operatorname{tg} \gamma = \Omega\,(p + \lambda)^{-1}$;
ζ	de verhoging van het water, gerekend vanaf de rusttoestand;
$\bar{\zeta}$	de Laplace-getransformeerde van ζ;
$\varkappa$	$\varkappa = (q^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}$;

λ	een wrijvingscoëfficiënt;
μ	$\mu = \pi^{-1}$ arctg (Ω/λ);
ϱ	de dichtheid van het zeewater, welke uniform wordt verondersteld ($\varrho = 1{,}027$ g/cm^3);
ϱ_a	de dichtheid van de lucht ($\varrho_a = 0{,}00125$ g/cm^3);
$\Phi(x, y)$	een stroomfunctie;
Ω	de coëfficiënt van Coriolis, $\Omega = 2\,\omega_a \sin\varphi$, waarbij ω_a de rotatiesnelheid van de aarde en φ de geografische breedte is.

0.5 LITERATUUR

De verwijzing in de tekst is aangegeven door [ ]

1. *S. Bergmann* and *M. Schiffer* — Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. New York, 1953.
2. *R. H. Corkan* — The levels in the North Sea. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A 242, 1950, 493–525.
3. *D. van Dantzig* — Mathematical problems raised by the flood disaster 1953. Proc. Int. Congr. of Math. Amsterdam, 1954.
4. *D. van Dantzig* — Enkele voorbeelden van berekening van waterbeweging onder invloed van wind. Versl. Kon. Ak. v. Wet. 65, 1956, nr. 3.
5. *D. van Dantzig* — Solutions of the equation of Helmholtz in an angle with vanishing directional derivatives along each side. Proc. Kon. Ak. v. Wet. A 61, 1958, 384–398. Ook Ind. Math. 20, 1958, 384–398.
6. *D. van Dantzig* — Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere. ZAMM 39, 1959, 169–179.
7. *Erdélyi et al.* — Tables of Integral Transforms I. New York, 1954.
8. *D. J. Hofsommer* — Free oscillations in a rotating semicircular bay. Rapport TW 47 Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
9. *H. Lamb* — Hydrodynamics, Cambridge, 1932.
10. *H. A. Lauwerier* — The motion of a shallow sea under influence of a non-stationary windfield. Rapport TW 31 Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
11. *H. A. Lauwerier* — The motion of a half-plane sea under influence of a non-stationary wind. Rapport TW 32 Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
12. *H. A. Lauwerier* — The influence of a disturbance upon an infinitely large shallow sea of constant depth. Rapport TW 35 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
13. *H. A. Lauwerier* — The windeffect in the Southern part of the North Sea du to a single storm and the influence of the Channel. Rapport TW 36 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
14. *H. A. Lauwerier* — The influence of a homogeneous wind upon an infinitely wide North Sea. Rapport TW 41 Math. Centrum, Amsterdam, 1957.
15. *H. A. Lauwerier* — Free motions in a rotating sea which has the form of a semi-infinite strip Rapport TW 46. Math. Centrum, Amsterdam, 1957.
16. *H. A. Lauwerier* — A Note on the problem of the sloping beach. Proc. Kon. Ak. v. Wet. A 62, 1959, 229–240. (Ook Ind. Math. 21, 229–240).
17. *H. A. Lauwerier* — Solutions of the equation of Helmholtz in an angle I. Proc. Kon. Ak. v. Wet. A 62, 475–488, 1959, (Ook Ind. Math. 21, 475–488).

18. *H. A. Lauwerier* On certain trigonometrical expansions. J. of Math. and Mech. Vol. 8, 419–432.

19. *H. A. Lauwerier* The influence of some stationary non-uniform windfields upon a sea having the form of a semi-infinite strip. Rapport TW 52 Math. Centrum, Amsterdam, 1958.

20. *H. A. Lauwerier* The influence of some stationary non-uniform windfields upon a rectangular bay with a uniform depth. Rapport TW 57 Math. Centrum, Amsterdam, 1959.

21. *H. A. Lauwerier* The influence of some stationary non-uniform windfields upon a rectangular bay with an exponential depth. Rapport TW 58 Math. Centrum, Amsterdam, 1959.

22. *H. A. Lauwerier* Non-stationary windeffects in a rectangular bay. Rapport TW 55 Math. Centrum, Amsterdam, 1959.

23. *M. J. Lighthill* Fourier analysis and generalised functions. Cambridge, 1958.

24. *P. M. Morse* and *H. Feshbach* Methods of theoretical physics, I, II. New York, 1953.

25. *N. I. Muskhelishvili* Singular integral equations. Groningen, 1953.

26. *J. Proudman* Dynamical oceanography. London, 1953.

27. *J. Proudman* Note on the dynamics of storm-surges. Month. Not. Royal Astr. Soc., Geoph. suppl. 7 nr. 1, 44–48, 1954.

28. *J. Proudman* Note on the dynamical theory of storm-surges. Arch. Met. Geoph. Biokl. 7, 344–351, 1954.

29. *J. R. Rossiter* The North Sea storm surge of 1 febr. 1953. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A 246, 371–400, 1954.

30. *W. F. Schalkwijk* A contribution to the study of storm surges on the Dutch coast. Meded. en Verh. K.N.M.I., 's-Gravenhage, 1947.

31. *J. C. Schönfeld* Vergelijkingen van een lange golfbeweging in twee dimensies. Intern Rapport Rijkswaterstaat, 's-Gravenhage, 1954.

32. *Staatscommissie-Zuiderzee* Verslag 1918–1926. 's-Gravenhage, 1926.

33. *G. W. Veltkamp* Een probleem in conforme afbeelding. Rapport TW 22 Math. Centrum Amsterdam, 1953.

34. *G. W. Veltkamp* De invloed van stationnaire windvelden op een zee van op delen constante diepte. Rapport TW 24 Math. Centrum, Amsterdam, 1953.

35. *G. W. Veltkamp* On Kelvin and Poincaré-waves in a strip. Rapport TW 37 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.

36. *G. W. Veltkamp* The behaviour of a solution of Helmholtz' equation near a confluence of boundary conditions, involving directional derivatives. Rapport TW 40 Math. Centrum, Amsterdam, 1956.

37. *M. P. H. Weenink* Bijdrage tot de theorie der opwaaiing in een baai of randzee bij een inhomogeen windveld. Meteorologisch Rapport Stormvloed 1 Februari 1953, K.N.M.I., 1e vervolg, 40–45, 's-Gravenhage, 1954.

38. *M. P. H. Weenink* A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly-enclosed sea, with special application to the southern coast of the North Sea. Diss., Utrecht, 1958.

0.6 SUMMARY

Mathematical study of the effect of wind upon the waterlevels of the North Sea

Chapter 2.0 deals with general considerations on the hydrodynamical problem of the motion of the North Sea.

The problem of determining the water level of the North Sea due to an atmospheric disturbance in the region of the North Sea has a meteorological and a hydrodynamical aspect. The meteorological side [1]) concerns the origin of a storm, its structure and the forces which it exerts on the surface of the sea. The hydrodynamical side concerns the motion of the water under influence of given tractive forces on the surface of the sea. The hydrodynamical problem has been extensively studied by the Department of Applied Mathematics of the Amsterdam Mathematical Centre and the following is an account of the work done by that department. In the present chapter the problem is considered from a general point of view. The results which are of special importance for the North Sea are discussed in the chapters 3.0 and 4.0 of the present contribution and in Contribution II.5.

An adequate mathematical treatment is only possible at the cost of a number of simplifications the majority of which hardly affect the final result. In the first place the hydrodynamical equations are simplified. The vertical component of the velocity of the stream is neglected, the equations are linearized, and the coefficient of Coriolis is assumed being constant. For the North Sea basin these simplifications are quite acceptable. In the second place the form of the basin is replaced by a simple mathematical model. This means that the influence of irregularities of the coast and of variations of the depth are neglected. The North Sea can be conveniently represented by a rectangle which is bounded on three sides by coasts and which borders on an infinitely deep ocean on the remaining side. This means that the influence of e.g. the Channel is neglected. The grand total of all simplifications cannot be neglected if it is required to know the exact elevation at a given time at a given spot. But by ignoring local circumstances they permit us to obtain a clear picture of the overall motion and elevation of the surface.

The rectangular model of the North Sea mentioned above suffers from two disadvantages. In the first place the leak of the Channel is neglected. However, a special study on this subject has been carried out by LAUWERIER [11]. In a later phase his results may be combined with those obtained for the rectangle. In the second place the assumption of a uniform depth is rather drastic. In reality the depth increases gradually in the direction of the ocean. However, as a first step toward the determination of the influence of a non-uniform depth, in 3.0 the stationary state of a sea with an exponentially increasing depth under a non-uniform windfield will be discussed.

The mathematical difficulties would be considerably reduced if the rotation of the earth also were negligible. However, it has been found time and again that the rotation is an essential feature of the problem which cannot be ignored.

With the simplifications discussed above the problem can be described by an elliptic partial differential equation with oblique boundary conditions. This type of problem has not yet been solved entirely. A number of partial results which were obtained at the Mathematical Centre are reported in this chapter, the division of which is as follows.

In 2.2 the basic equations are given, (6) and (7). By means of the Laplace transformation (8) they are converted to the form (9) and (10). Then for $\bar{\zeta}$, the Laplace transform of the elevation ζ, an inhomogeneous equation of Helmholtz (11) is obtained. The condition of the ocean boundary is of the simple form (13) which is a Dirichlet condition. The condition of the coast boundary (14) is of the oblique type, i.e. a linear relation between the normal derivative and the tangential derivative of $\bar{\zeta}$ at the coast. Only a few investigations of this kind of boundary problem exist. Hence it was necessary to carry out some fundamental research on this subject. Results of this research are given in 2.3 and 2.4. In 2.3 a few conclusions are drawn from Green's theorem. In 2.4 Green's function is obtained for some simple domains. Until now it has only been possible to find Green's function for domains which are bounded by at most two straight lines.

In 2.5 the stationary state is discussed. The mathematics are simple and solutions can be obtained without taking recourse to Green's function. An application to the rectangular model of the North Sea is added. For other investigations of the stationary state we refer to 3.0.

In 2.6 some reflections are given on the instationary case. Even in absence of a windfield, the water may be in motion. This leads to the problem of determining the eigenvalues of a sea basin which is solved for a strip-shaped (littoral) sea in this section. For the corresponding problem in the case of a rectangular sea we refer to Contribution II.5. Subsequently the influence of a windfield is considered. It has already been shown in 2.3 that knowledge of Green's function in principle allows the evaluation by quadratures of the Laplace transform $\bar{\zeta}$ of the elevation ζ. The undoing of this Laplace transformation, however, gives rise to considerable difficulties. This is illustrated by the simple case of an unbounded sea. The transformed elevation $\bar{\zeta}$ is readily obtained, but the inverse Laplace transformation gives intricate expressions for the elevation ζ even if the windfield is simple. For more details concerning the inverse Laplace transformation we refer to 4.0 in which the influence of an instationary windfield on the rectangular model of the North Sea is discussed.

In chapter 3.0 we shall study the influence of a non-uniform stationary windfield upon a rectangular model of the North Sea. In this model, which is described in Cartesian coordinates (x, y) by $0 < x < a$ and $0 < y < b$, the sides $x = 0$, $x = a$ and $y = 0$ represent coasts and $y = b$ represents the open end at the ocean. The depth h of the sea is assumed to be an exponential function of y, viz. $h = h_0 \exp(2\alpha y)$.

The numerical constants are chosen in accordance with the physical situation of the North Sea. We take

$$a = 400 \text{ km} \qquad b = 800 \text{ km}$$
$$\Omega/\lambda = 5$$
$$h_0 = 33 \text{ m} \qquad \alpha = \pi/(4b).$$

[1]) See Contribution I.

In this model the depth varies from 33 m at the coast $y = 0$ to 158 m at the ocean boundary (see figure 3.1.1). The harmonic mean h_m of the depth is 65 m. For the sake of simplicity the direction of the positive y-axis will be called the northern direction.

The longitudinal axis of the North Sea makes the slight deviation of some 24° with the geographic North. In the mathematical model the side $y = 0$ corresponds roughly to the Dutch coast and the middle $(\frac{1}{2}a, 0)$ roughly to the position of den Helder.

Therefore we have restricted ourselves mainly to the determination of the elevation at the south coast and in particular to that at the middle $(\frac{1}{2}a, 0)$.

In 3.1 we consider a non-uniform windfield, the surface stress of which is a linear function of x and y. This type of windfield is given by (2).

The elevation at the south coast due to this windfield is given in table 3.8.5 and is illustrated for each component separately in fig. 3.8.1.

The elevation at the middle $\zeta(\frac{1}{2}a, 0)$ in particular is given by (3). The same calculation is carried through for the simpler model with the uniform depth $h = h_m$. In this case the result (4) is obtained. In order to judge the influence of the rotation of the earth in both models the elevation is calculated with $\Omega = 0$. The results are given in (5) and (6).

From the results a number of conclusions can be drawn concerning the influence of the exponential depth (α) and the rotation of the earth (Ω).

1. For a uniform N–S wind the elevation at the south coast does not depend on the bottom profile nor on the rotation of the earth.
2. For a uniform W–E wind the influence of α and Ω upon the elevation at the south coast is rather large.
3. In this model the most unfavourable direction for a uniform wind as regards the elevation at the south coast is about 15° NNW.
4. The influence of α and Ω upon the contributions of the divergence terms U_1 and V_2 to the elevation at the south coast is rather small.
5. The influence of α and Ω upon the contributions of the rotation terms U_2 and V_1 to the elevation at the south coast is very marked.

In 3.2 the mathematical treatment starts from the differential equations of the stationary state, see formulae (1), (2) and (3), and the boundary conditions (5), (6), (7).

The discussion of the influence of the components V_0 and V_2 is very simple and is given in 3.3.

The general case is studied in 3.5. It appears that the stream and the elevation can be derived from a potential function $\Phi(x, y)$. This function satisfies the differential equation (2) of 3.5 and the boundary conditions (5) and (6) of 3.4. The solution (12) of 3.5 of this problem involves the determination of a set of coefficients c_n and a set d_n. The determination of the coefficients c_n is relatively easy whereas the determination of the d_n leads to considerable difficulties. 3.6 is entirely devoted to the latter problem. Once the coefficients c_n and d_n have been determined the elevation at the south coast follows easily from (23) and (24) in 3.5. The discussion of the simpler model with uniform depth $h = h_m$ is given in 3.4.

In chapter 4.0 we consider a mathematical model for the behaviour of the North Sea under a storm. The North Sea is represented by a rectangular bay of uniform depth which is bounded on three sides by coasts and which borders on an ocean on the fourth side. For the sake of simplicity the longest axis is assumed to coincide with the North-South direction. The southern border then corresponds with i.a. the Dutch coast and its middle roughly represents Den Helder. The influence of a storm is expressed through the stress it exerts on the surface of the sea. This stress (U, V) may be dependent on both the coordinates (x, y) and the time (t).

In the first instance this general case will be dealt with, but in the sequel the mathematical treatment will be elaborated for a uniform wind in North-South direction viz.

$$U = 0 \qquad V = V(t).$$

In the numerical applications we have chosen the data in such a way that they agree fairly well with the physical data of the North Sea. The applications are given more by way of illustration and do not constitute the goal of the investigation. Explicit results have been obtained for the following simple cases:

Exponential windfield;

Step-function windfield;

Sinusoidal windfield.

In all of these cases we have calculated in particular the elevation at the middle of the southern coast and its dependence on the rotation of the earth (Ω) and the bottom-friction (λ). Results are represented in the figures 4.10.1, 4.10.2, 4.10.3 and 4.10.4. For the exponential windfield lines of constant elevation in the bay for different times have been drawn in fig. 4.10.2. It is seen that this simple model of a windfield already is in good qualitative agreement with the lines obtained experimentally in a particular case. In these figures and in the accompanying tables we have used dimensionless quantities, in which the unit of time is about 1.4 h and the unit of length about 127 km. The above-mentioned windfields have been normalized in such a way, that the maximum of the windvelocity v_s is the same in all cases. The given values of the elevation can be reduced to meters by multiplication by a factor which varies quadratically with v_s. For a few cases this factor is given in table 4.10.2.

In this contribution we have indicated the means for extending the numerical applications at will. Obviously we should be cautious in drawing conclusions from the few numerical applications dealt with in this chapter. It has

already been set forth in chapter 1.0 that the obtained results only give a general insight in the motion of the water of the North Sea. This research gives rise to the following conclusions.

1. The rotation of the earth chiefly causes an East-West skewness of the sea surface. This skewness is slight at the southern coast, but increases in northern direction right up to the ocean. Moreover, Ω brings about a reduction of the maximum elevation.
2. For a suddenly rising storm (stepfunction windfield) the elevation at the southern coast rapidly increases and after some 12 hours has already attained about 90 % of its stationary value.
3. For a sinusoidal storm the elevation at the southern coast approximately equals the stationary elevation due to a stationary wind with an intensity corresponding to that of the wind occurring a certain constant time earlier.
4. The elevation at the southern coast due to a sinusoidal storm, can be considered as the sum of the quasi-stationary elevation (forced oscillation) and a damping term which is due to the lowest negative real eigenvalue.

0.7 RÉSUMÉ

L'étude mathématique de l'influence des champs de vent sur les niveaux d'eau dans la Mer du Nord

Le chapitre 2.0 traite de considérations générales sur le problème hydrodynamique du mouvement de la Mer du Nord.

Le problème de la détermination du niveau de la Mer du Nord dû à une perturbation atmosphérique dans la région de la Mer du Nord a des aspects météorologiques et hydrodynamiques. L'aspect météorologique [1]) concerne l'origine d'une tempête, sa structure, et les forces qui sont exercées de ce fait à la surface de la mer. L'aspect hydrodynamique concerne les mouvements de l'eau sous l'influence de forces tractives données le long de la surface de la mer. Le problème hydrodynamique est étudié en détail par la Section de Mathématiques Appliquées du Centre Mathématique d'Amsterdam, et cette partie du rapport donne un aperçu des résultats obtenus par la section. Dans le présent chapitre, le problème est considéré d'un point de vue général. Les résultats présentant un intérêt particulier pour la Mer du Nord sont commentés aux chapitres 3.0 et 4.0 de la contribution présente et à la Contribution II.5.

Un traitement mathématique adéquat n'est possible que par l'introduction d'un certain nombre de simplifications dont la plupart n'ont que peu d'influence sur le résultat final. En premier lieu, les équations hydrodynamiques sont simplifiées. La composante verticale de la vitesse est négligée; les équations sont rendues linéaires, et le coefficient Coriolis est supposé constant. Ces simplifications sont acceptables pour le bassin de la Mer du Nord. En second lieu, la forme du bassin est remplacée par un modèle mathématique simple. Ceci implique que les influences dues aux irrégularités de la côte et aux variations de profondeur sont négligées. La Mer du Nord peut être représentée par un rectangle bordé de côtes sur trois côtés, et dont le quatrième côté est limité par un océan de profondeur infinie. Cela signifie, par exemple, que l'on néglige l'influence de la Manche. Le total de toutes les simplifications ne peut être négligé, si l'on désire connaître exactement l'élévation à un temps donné et en un lieu donné. Mais en ne tenant pas compte de circonstances locales, les simplifications nous permettent d'obtenir une vision nette du mouvement de l'eau et de l'élévation de sa surface.

Le modèle rectangulaire ci-dessus choisi pour la Mer du Nord a deux inconvénients. Premièrement on néglige la fuite par la Manche. Cependant une recherche a été faite à cet égard par LAUWERIER [11]. A un stade ultérieur, ses résultats peuvent être combinés avec ceux obtenus pour le rectangle. Deuxièmement, il est assez radical de prendre une profondeur uniforme. En réalité la profondeur augmente continuellement en direction de l'océan. Au chapitre 3.0, cependant, on entreprend l'étude de l'influence d'une profondeur variable; on y discute l'état stationnaire d'une mer ayant une profondeur croissant exponentielle, sous l'influence d'une zone de vent non uniforme.

Les difficultés mathématiques seraient considérablement réduites, si la rotation de la terre pouvait être également négligée. Mais on a trouvé à plusieurs reprises que la rotation constitue un élément caractéristique du problème, que l'on ne peut manquer de prendre en considération.

Après avoir effectué les simplifications exprimées ci-dessus, le problème peut être défini par une équation différentielle partielle elliptique, avec des conditions de limite obliques. Ce type de problèmes n'est pas encore complètement résolu. Un certain nombre de résultats partiels obtenus au Centre Mathématique sont mentionnés dans ce chapitre, dont la division est la suivante:

En 2.2, on donne les équations de base (6) et (7). Au moyen de la transformation de Laplace (8), on leur donne la forme (9) et (10). Alors, on dérive pour ξ, la transformée de Laplace de l'élévation ζ, une équation inhomogène de Helmholtz (11). La condition le long de la limite de l'océan a la forme simple (13), c'est-à-dire que c'est une condition Dirichlet. La condition le long de la côte, (14), est du type oblique, c'est à dire qu'il y a une relation linéaire entre la dérivée normale et la dérivée tangentielle de ξ à la côte. Il n'y a que peu de recherches faites sur ce type de problèmes-limites. Il était donc nécessaire de procéder à un examen fondamental de ce sujet. Les résultats en sont donnés aux paragraphes 2.3 et 2.4. Au 2.3, on tire quelques conclusions du théorème de Green. En 2.4 on obtient une fonction de Green pour quelques domaines simples. Jusqu'alors il n'est apparu possible de trouver des fonctions de Green que pour des régions limitées par deux lignes droites au plus. Au paragraphe 2.5 on traite de l'état stationnaire. Les mathématiques en sont simples, et l'on peut trouver des solutions sans se servir des fonctions de Green. En 2.5, on donne encore une application au modèle rectangulaire de la Mer du Nord. Pour d'autres recherches sur l'état stationnaire, se reporter au chapitre 3.0.

En 2.6, quelques réflexions sur le cas non-stationnaire. Même en l'absence de zone de vent, l'eau peut être en mouvement. Ceci mène au problème de la détermination des valeurs propres d'un bassin maritime, problème résolu

[1]) Voir Contribution I.

dans ce paragraphe pour une mer (littorale) en forme de bande. Pour le problème correspondant, dans le cas d'un mer rectangulaire, se reporter à la Contribution II.5. On considère ensuite l'influence d'une zone de vent. On a déjà montré en 2.3 que lorsque la fonction de Green est connue, la transformée de Laplace $\bar{\zeta}$ de l'élévation ζ peut être déterminée en principe à l'aide de quadratures. Cependant, l'annulation de cette transformée de Laplace donne des difficultés considérables. Ceci est illustré par le cas simple d'une mer non limitée. L'élévation transformée $\bar{\zeta}$ est aisément trouvée, mais la transformation inverse, même si la zone de vent est simple, donne des expressions complexes pour l'élévation ζ. Pour plus de détails sur la transformation inverse, se reporter au chapitre 4.0, où l'on commente l'influence d'une zone de vent non stationnaire sur le modèle rectangulaire de la Mer du Nord.

Dans le chapitre 3.0 on étudiera l'influence d'une zone de vent stationnaire non-uniforme sur un modèle rectangulaire de la mer du Nord. Dans ce modèle, défini dans les coordonnées cartésiennes (x, y) par $0 < x < a$ et $0 < y < b$, les côtés $x = 0$, $x = a$ et $y = 0$ représentent les côtes, et $y = b$ représente le côté donnant sur l'océan. Pour la profondeur h, on prend une fonction exponentielle de y: $h = h_0 \exp(2\alpha y)$.

Les constantes numériques sont choisies conformément à la situation physique de la Mer du Nord. Nous prenons:

$$a = 400 \text{ km} \qquad b = 800 \text{ km}$$
$$\Omega/\lambda = 5$$
$$h_0 = 33 \text{ m} \qquad \alpha = \pi/(4b)$$

Dans ce modèle, la profondeur varie de 33 m à la côte $y = 0$, à 158 m en bordure de l'océan (voir figure 3.1.1). La moyenne harmonique h_m de la profondeur est de 65 m. Pour simplifier, la direction de l'axe positif y sera désigné comme direction du nord. En réalité, l'axe longitudinal de la Mer du Nord fait un faible angle d'environ 24° avec le nord géographique. Dans le modèle mathématique, le côté $y = 0$ correspond à grands traits à la côte des Pays-Bas, et le milieu $(\frac{1}{2}a, 0)$ à l'emplacement de Den Helder.

C'est pourquoi nous nous sommes bornés dans ce chapitre à la détermination de l'élévation sur la côte méridionale, et en particulier au point médian $(\frac{1}{2}a, 0)$. Nous considérons au 3.1 une zone de vent non-uniforme exerçant une tension glissante à la surface, qui est une fonction linéaire de x et de y. Ce type de zone de vent est donné par (2). L'élévation sur la côte méridionale par suite de cette zone de vent est donnée dans le tableau 3.8.5 et se trouve illustrée à la fig. 3.8.1 pour chacun des composants.

L'élévation au milieu ζ $(\frac{1}{2}a, 0)$ en particulier est donnée par (3). Le même calcul est effectué pour le modèle plus simple ayant une profondeur uniforme $h = h_m$. Pour ce cas on obtient pour résultat (4). Pour pouvoir se rendre compte de l'influence exercée par la rotation de la terre, l'élévation est également calculée pour $\Omega = 0$ dans les deux modèles. Les résultats en sont exprimés dans (5) et (6). Ces résultats permettent de tirer quelques conclusions au sujet de l'influence de la profondeur exponentielle (α) et de la rotation de la terre (Ω).

1. Pour un vent uniforme N–S, l'élévation sur la côte méridionale ne dépend ni du profil du fond ni de la rotation de la terre.

2. Pour un vent uniforme O–E, l'influence, sur l'élévation, de α et de Ω est assez importante.

3. La direction du vent la plus défavorable, pour un vent uniforme, en ce qui concerne l'élévation sur la côte méridionale est dans ce modèle d'environ 15° NNO.

4. L'influence de α et de Ω sur les contributions des termes de divergence U_1 et V_2 à l'élévation sur la côte méridionale est assez faible.

5. L'influence de α et de Ω sur les contributions des termes de rotation U_2 et V_1 à l'élévation sur la côte méridionale est très grande.

Au 3.2 le traitement mathématique part des équations différentielles de l'état stationnaire (1), (2) et (3), et des conditions-limites (5), (6) et (7).

La discussion de l'influence des composantes V_0 et V_2 est simple; elle est donnée au paragraphe 3.3.

Le cas général est examiné au paragraphe 3.5. Il apparaît que le courant et l'élévation peuvent être dérivés d'une fonction potentielle $\Phi(x, y)$. Cette fonction satisfait à l'équation différentielle (2) du 3.5 et aux conditions-limites (5) et (6) du 3.4. La solution (12) du 3.5 de ce problème exige la détermination d'un système de coefficients c_n et d'un système d_n. La détermination des coefficients c_n est relativement facile, alors que la détermination de d_n conduit à de notables difficultés.

Le paragraphe 3.6 est entièrement consacré à ce problème. Une fois déterminés les coefficients c_n et d_n, l'élévation sur la côte méridionale se déduit facilement de (23) et de (24) du 3.5. Le modèle plus simple, avec une profondeur uniforme $h = h_m$ est examiné au paragraphe 3.4.

Dans le chapitre 4.0 on considère un modéle mathématique pour le comportement de la Mer du Nord lors d'une tempête. La Mer du Nord est représentée par une baie rectangulaire ayant une profondeur uniforme et limitée sur trois côtés par des côtes, sur le quatrième coté par un océan. Pour simplifier, on admet que l'axe longitudinal coïncide avec la direction Nord-Sud. La limite méridionale correspond donc notamment à la côte des Pays-Bas, et le milieu de cette limite représente approximativement Den Helder. L'influence d'une tempête est introduite par la force glissante qui s'exerce à la surface de la mer. Cette force (U, V) peut dépendre autant des coordonnées (x, y) que du temps (t).

On traite en premier lieu le cas général, puis on traite mathématiquement le cas d'un vent uniforme de direction Nord-Sud, ou

$$U = 0, \; V = V(t).$$

Dans les applications numériques, les données ont été choisies de telle sorte qu'elles correspondent raisonnablement aux données physiques de la Mer du Nord. Ces applications sont surtout données comme illustrations et ne constituent pas le but de cette recherche. Des résultats explicites sont obtenus pour les cas simples suivants:

Zone de vent exponentielle;

Zone de vent fonction brusque unité;

Zone de vent sinusoïdale.

Dans tous ces cas, on a calculé en particulier l'élévation pour le milieu de la côte méridionale, et sa dépendance de la rotation de la terre (Ω) et de la friction sur le fond (λ). Les résultats en sont donnés dans les figures 4.10.1, 4.10.2, 4.10.3 et 4.10.4. Pour la zone de vent exponentielle, on a tracé dans la fig. 4.10.2 des lignes d'égale élévation dans la baie pour divers temps. On voit que ce modèle simple de zone de vent a déjà une bonne concordance qualitative avec les lignes obtenues dans un cas expérimental particulier. Dans ces figures et dans les tableaux correspondants on a utilisé des grandeurs sans dimension déterminée, où l'unité de temps est environ 1.4 h, et l'unité de longueur environ 127 km. Les zones de vent ci-dessus sont normalisées de telle façon que le maximum de la vitesse du vent v_s est le même dans tous les cas. Les valeurs données pour l'élévation peuvent être réduites en mètres par multiplication par un facteur variant quadratiquement avec v_s. Pour quelques cas ce facteur est donné au tableau 4.10.2.

Dans cette contribution on donne la méthode permettant d'étendre à volonté les applications numériques. Il est évident que l'on doit être prudent en tirant des conclusions du peu d'applications numériques traitées dans ce chapitre. On a déjà posé en principe au chapitre 1.0 que les résultats obtenus ne donnent qu'une vision globale du mouvement de l'eau dans la Mer du Nord. Cette étude conduit aux conclusions suivantes:

1. La rotation de la terre cause principalement une déviation Est-Ouest de la surface de la mer. Cette déviation est faible sur la côte méridionale, et croît vers le Nord jusqu'à l'océan. De plus, Ω entraîne une réduction de l'élévation maxima.

2. Lors d'une tempête surgissant brusquement (zone de vent brusque unité), l'élévation s'accroît rapidement sur la côte méridionale, et atteint déjà après environ 12 heures à peu près 90 % de sa valeur stationnaire.

3. Pour une tempête sinusoïdale, l'élévation sur la côte méridionale est approximativement égale à l'élévation stationnaire qui résulterait d'un vent stationnaire ayant une intensité correspondant à celle du vent pendant un certain temps constant antérieur.

4. L'élévation sur la côte méridionale par suite d'une tempête sinusoïdale peut être considérée comme la somme de l'élévation quasi-stationnaire (oscillation forcée) et d'un terme d'amortissement résultant de la plus basse valeur propre négative.

1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

1.1 Inleidende fysisch-mathematische beschouwingen

Om de samenhang te begrijpen tussen een atmosferische storing in het Noordzeegebied en de veranderingen van de waterhoogten aan de Nederlandse kust, moeten een meteorologisch en een hydrodynamisch probleem worden opgelost.

Het meteorologische probleem [1]) betreft het ontstaan van een storm, zijn structuur en de krachten, welke op het wateroppervlak worden uitgeoefend. Het hydrodynamische probleem betreft de waterbeweging in een horizontaal tweedimensionaal gebied onder invloed van een storm, waarbij de op het wateroppervlak door een windveld uitgeoefende krachten als bekend worden aangenomen.

Wij zullen ons hier slechts bezighouden met dit laatste probleem, dat door de Afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum is onderzocht. In deze inleiding worden van dit werk enkele aspecten besproken.

De gemiddelde snelheid van het water en de verhoging van de waterspiegel, die op iedere plaats van een zee met beperkte diepte (als de Noordzee) voorkomen, voldoen aan een stelsel van drie partiële differentiaalvergelijkingen, nl. twee bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking.

De bewegingsvergelijkingen leggen een verband tussen de krachten, die van de snelheid van het water afhankelijk zijn, nl. de traagheidskracht, de kracht van Coriolis en de weerstandskracht enerzijds en de uitwendige krachten, welke de invloed van de zwaartekracht en van het windveld op de waterbeweging aangeven, anderzijds (zie o.a. [32], § 121—§ 128). Voor de volledigheid zij hier nog vermeld, dat de traagheidskracht ontstaat bij toename of afname van de stroomsnelheid van het water; de kracht van Coriolis wordt teweeggebracht door de draaiing van de aarde, terwijl de weerstandskracht wordt veroorzaakt door de weerstand, die het water ondervindt van de bodem. De weerstandskracht en de kracht, die het windveld op het wateroppervlak uitoefent, worden in de vergelijkingen vervangen door krachten, die op de gehele verticale waterkolom werken (zie o.a. [32], § 31, § 54, § 149 en § 150). In verband met de beperkte diepte van de Noordzee is dit geoorloofd.

Ten slotte brengt de continuïteitsvergelijking tot uitdrukking, dat op ieder moment de totale hoeveelheid water, die in een bepaald volume binnenstroomt, gelijk is aan de hoeveelheid, die er uitstroomt.

Om oplossingen te verkrijgen van deze differentiaalvergelijkingen, is een aantal vereenvoudigingen noodzakelijk betreffende de waterbeweging en de vorm van het te beschouwen gebied, waarvan enkele een geringe invloed op de resultaten hebben.

Bij de opstelling van de differentiaalvergelijkingen kon de verticale component van de versnelling van het water verwaarloosd worden in vergelijking met de versnelling van de zwaartekracht omdat de veranderingen, die de waterspiegel in verticale zin als gevolg van de meteorologische effecten ondergaat, langzaam plaatsvinden. Als gevolg hiervan zijn de verticale snelheden klein ten opzichte van de horizontale snelheden.

Verder werd ook de viscositeit van het zeewater buiten beschouwing gelaten. Voorts zien we nog af van de veranderingen in de dichtheid van het zeewater en veronderstellen we, dat de bij de bodemwrijving behorende wrijvingscoëfficiënt λ en de Corioliscoëfficiënt Ω constant zijn. Bij de Noordzee zijn deze vereenvoudigingen zeker toelaatbaar, in aanmerking genomen de verlangde graad van nauwkeurigheid.

De volgende vereenvoudigingen zijn van ingrijpender aard:

1. De niet-lineaire weerstandstermen in de bewegingsvergelijkingen worden vervangen door lineaire termen. Deze weerstandskracht, die volgens de ervaring evenredig is met het kwadraat van de gemiddelde snelheid in een punt en omgekeerd evenredig is met de diepte, wordt dus vervangen door een term, die evenredig is met de snelheid, terwijl in het algemeen de diepte constant wordt verondersteld. Dan wordt verder de getallencoëfficiënt in deze term zo geschikt mogelijk gekozen.

Dank zij deze linearisatie geldt het superpositiebeginsel, hetgeen inhoudt, dat uit twee oplossingen van de differentiaalvergelijkingen door lineaire combinatie, som of verschil bij voorbeeld, nieuwe oplossingen afgeleid kunnen worden. We mogen dan de door storm en getij veroorzaakte verhoging opvatten als de som van het astronomische getij en het stormeffect (dit is de verhoging, welke zou optreden

---

[1]) Zie Bijdrage I.

bij afwezigheid van getij). Aangezien het astronomische getij een bekend verschijnsel is, kunnen we ons voor de berekening beperken tot een bestudering van alleen het stormeffect. In werkelijkheid treedt er ten gevolge van de niet-lineariteit van de bewegingsvergelijkingen een zekere wisselwerking tussen storm en getij op, zodat men bij het optellen van getijstand en stormeffect nog een zekere correctie zou moeten aanbrengen. Daar het verloop van de hoogwaterstanden van het astronomische getij langs de kust ook bekend is uit de getijtafels, vinden we dus met verwaarlozing van niet-lineaire effecten de totale verhoging, als de met behulp van de lineaire vergelijkingen berekende verhoging wordt opgeteld bij de voorspelde hoogwaterstand op de bepaalde dag.

De vereenvoudigde vergelijkingen zijn weergegeven in de formules (6) en (7) van 2.2. In plaats van de gemiddelde snelheidscomponenten zijn daar de componenten u,v van de totale stroom van bodem tot oppervlak in een punt ingevoerd.

De linearisatie biedt tevens de mogelijkheid om de invloed van de windkracht op het water componentsgewijze te berekenen. Voor iedere component moet dan de verhoging van het zee-oppervlak berekend worden, waarna deze verhogingen bij elkaar opgeteld moeten worden.

De vereenvoudigingen, welke de vorm van het zeebekken betreffen, zijn van nog ingrijpender aard.

2. Geen rekening wordt gehouden met onregelmatigheden van de kusten; deze worden vervangen door rechte lijnen. Voor de Noordzee betekent dit, dat o.a. afgezien wordt van de invloed van bij voorbeeld het Kanaal, het Kattegat en de riviermondingen.

3. Zoals reeds gezegd, worden ook diepteveranderingen in het algemeen verwaarloosd. De geleidelijke overgang van zee naar oceaan wordt hierbij vervangen door een abrupte overgang, waarbij de oceaan oneindig diep wordt aangenomen, zodat het oceaanniveau onveranderlijk is.

Om een indruk te geven van deze diepteveranderingen wordt opgemerkt, dat de gemiddelde diepte van het zuidelijke deel van de Noordzee tussen de Nederlandse en de Engelse kust ruim 35 m bedraagt, terwijl in een strook van 50 km breedte langs de Nederlandse kust deze diepte 20 à 25 m is, als de zeer ondiepe kuststrook van 5 km breedte buiten beschouwing wordt gelaten.

Deze relatief geringe diepte heeft tot gevolg, dat de wrijvingskrachten van dezelfde orde van grootte zijn als de traagheidskracht en de kracht van Coriolis. Hierdoor is de vervanging van de niet-lineaire weerstandsterm door een lineaire term, zonder verder rekening te houden met de verschillen tussen de hierop berustende oplossing en de exacte oplossing, in dit gebied minder toelaatbaar.

Het aansluitende noordelijk gelegen deel van de Noordzee heeft grotere diepten en hier zullen de weerstandskrachten van aanmerkelijk geringere betekenis zijn.

De genoemde vereenvoudigingen kunnen niet worden toegepast als men het zeeniveau op een gegeven ogenblik en op een gegeven plaats nauwkeurig wil kennen. Maar door af te zien van lokale gebeurtenissen, veroorloven zij ons desondanks een voldoend duidelijk beeld te verkrijgen van de globale waterbeweging en van de verandering in waterhoogte.

De Noordzee wordt derhalve vaak voorgesteld als een rechthoek met een constante diepte, aan drie zijden omgeven door ondoordringbare kusten en langs de vierde zijde grenzend aan een oneindig diepe oceaan. Een dergelijk „mathematisch model" van de realiteit wordt algemeen door hydrodynamici en oceanografen als zeer bruikbaar beschouwd.

In figuur 1.1.1 zijn de grenzen van het model aangegeven in de bestaande Noordzee. De afmetingen zijn globaal 800 km voor de lengte en ongeveer 400 km voor de breedte. Er werd dus een belangrijk groter gebied beschouwd dan het gebied tussen de Nederlandse en de Engelse kust, waarvan hierboven sprake was. De gemiddelde diepte (harmonisch gemiddelde) werd op 65 m gesteld.

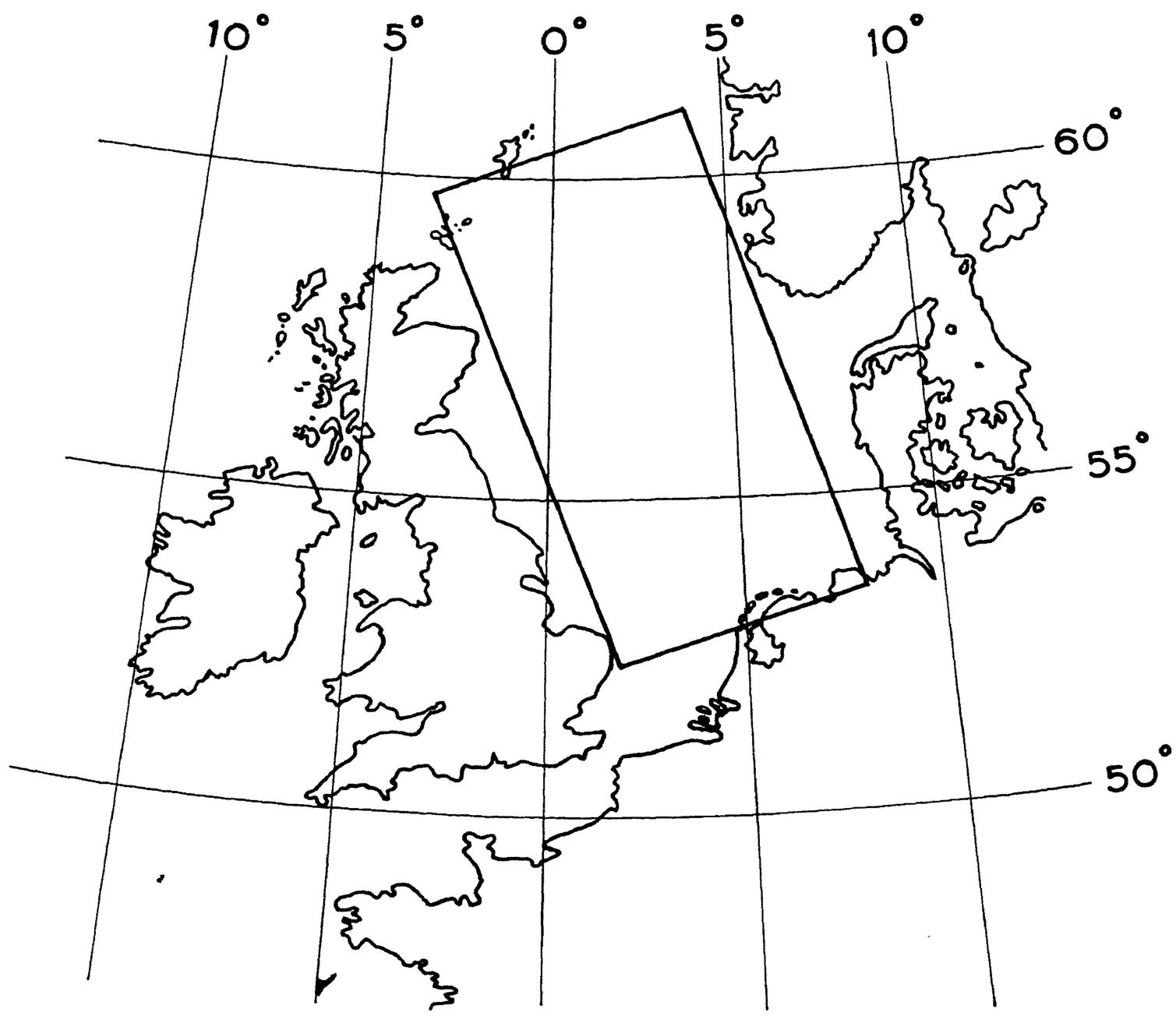
De grenzen van het model bepalen de randvoorwaarden, waardoor de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen nader bepaald worden. Langs de kusten moet de component van de snelheid loodrecht op de kust gelijk aan nul zijn, terwijl bij de overgang naar de oceaan de waterhoogte gelijk is aan die in de oceaan, die als bekend moet worden aangenomen.

Over dit model moeten nog drie opmerkingen worden gemaakt.

Voor de stormvloedstanden langs de kust is de invloed van het Kanaal, dat als een soort lek werkt, niet onbelangrijk. Over dit onderwerp is o.a. door het Mathematisch Centrum een onderzoek verricht, waarop we hier niet nader ingaan, maar waarvan verwacht mag worden, dat de resultaten in een later stadium gecombineerd zullen worden met het onderzoek over de afgesloten rechthoekige zee.

Aan de gerechtvaardigdheid van de veronderstelling van een constante diepte is een onderzoek gewijd, dat in 3.0 is weergegeven. Hoewel dit onderzoek slechts betrekking heeft op de stationaire toestand, welke op de duur bereikt wordt bij een wind, waarvan richting en intensiteit niet met de tijd veranderen, krijgt men hieruit toch wel een goede indruk van de verschillen tussen een zee met constante diepte en een zee, waarvan de diepte bij voorbeeld volgens een exponentiële wet in de richting van de oceaan toeneemt, terwijl ze constant is over de breedte van de strook.

Men zou kunnen overwegen ook de invloed van de aardrotatie te verwaarlozen. Bij herhaling is echter gevonden, dat deze rotatie, welke tot uitdrukking komt in de kracht van Coriolis, in ons probleem niet buiten beschouwing mag worden gelaten. Verwaarlozing is slechts mogelijk in omstandigheden, waarin de kracht van Coriolis zeer gering is, zoals in de tropische gebieden.



Figuur 1.1.1. De Noordzee en het Kanaal

In het algemeen is het fysische beeld van de invloed van de kracht van Coriolis en van de wrijving, die de waterbeweging ondervindt, als volgt. Bij een plotseling opstekende storm zal aanvankelijk de primaire werking van de wind daarin bestaan, dat de beweging van het water in de windrichting versneld wordt. Naarmate de snelheid toeneemt, wordt de invloed van de kracht van Coriolis en van de wrijvingskracht groter. Door de wrijving neemt echter de versnelling af, totdat bij aanhoudende storm een permanente stroom gaat optreden, waarbij de kracht, door de wind uitgeoefend, de weerstandskracht en de kracht van Coriolis met elkaar in evenwicht zijn. Als gevolg van de kracht van Coriolis gaat bovendien op het noordelijke halfrond de stroom naar rechts afwijken. Als de storm gaat liggen, zal na enige tijd de evenwichtstoestand van het begin weer optreden.

Volgens ervaring en in overeenstemming met de resultaten van de berekeningen is nu het verloop van de waterbeweging en de verhoging langs de kusten voor het geval van een storm in de lengterichting van het model van de Noordzee (dus een noordwesterstorm) als volgt.

Bij het begin van de storm zal het water, dat vanuit de oceaan in de Noordzee wordt gestuwd, als gevolg van de afwijking naar rechts aan de Engelse kust de grootste verhoging geven. De verhoging neemt naar het zuiden gaande toe, ze bereikt bij de Nederlandse kust haar grootste waarde in verband met het feit, dat deze kust een deel vormt van de zuidelijke afsluitingslijn van de rechthoek, die loodrecht staat op de windrichting. Na het zwakker worden van de storm stroomt het water als gevolg van de afwijking naar rechts voornamelijk langs de oostelijke zijde van de Noordzee weer terug. De verhoging langs de kusten van de Noordzee verplaatst zich dus achtereenvolgens langs de Engelse, Nederlandse, Duitse en Deense kust, dus tegen de wijzers van een uurwerk in, zoals ook met de stroming het geval is.

Als de storm lang genoeg aanhoudt, zal er een evenwichtstoestand kunnen ontstaan, waarna de waterstanden niet hoger worden. Bij stormen van korte duur wordt uiteraard de evenwichtstoestand niet bereikt. Dan zullen de hoogste waterstanden optreden in de afnemende periode van de storm, dus na het tijdstip van maximale windkrachten.

Vanuit wiskundig gezichtspunt is zelfs met de hiervoren vermelde vereenvoudigingen de behandeling van het probleem van de stormvloeden bijzonder moeilijk ten gevolge van de kracht van Coriolis. Het verdere uitgangspunt van de wiskundige behandeling zijn de vergelijkingen, die ontstaan, nadat de bekende Laplace-transformatie op de oorspronkelijke vergelijkingen is toegepast. In de nieuwe vergelijkingen komen geen partiële afgeleiden naar de tijd meer voor, maar wel naar de coördinaten van de plaats; de tijd is geëlimineerd. Na eliminatie van de snelheidscomponenten wordt hieruit voor de verhoging van de waterspiegel een niet-homogene, elliptische partiële differentiaalvergelijking van Helmholtz verkregen. De bekende term, die in deze vergelijking dan voorkomt, wordt bepaald door het windveld. De bij deze vergelijking behorende randvoorwaarden langs de kusten zijn echter van een weinig bekend type, namelijk zg. scheve randvoorwaarden. De randvoorwaarde aan de oceaanzijde is de beter bekende Dirichletvoorwaarde. Het eerstgenoemde type randvoorwaardeprobleem is nog niet in alle volledigheid opgelost. Desalniettemin zijn verscheidene partiële resultaten gevonden, waarvan in hoofdstuk 2.0 een overzicht wordt gegeven. De resultaten, die het belangrijkst zijn voor het Noordzeeprobleem, worden in 3.0 en 4.0 behandeld.

1.2 Inhoud van de bijdrage

Aan ieder van de hoofdstukken gaat een inleiding vooraf, waarin een meer gedetailleerde samenvatting van de inhoud en de resultaten van de berekeningen wordt gegeven. Voor nadere informatie wordt hiernaar verwezen.

In 2.0 worden algemene beschouwingen gegeven over het hydrodynamische probleem van de waterbeweging van de Noordzee. Eerst wordt dit probleem met de in 1.1 aangegeven vereenvoudigingen mathematisch geformuleerd. Ook ondanks deze vereenvoudigingen is het vraagstuk niet algemeen oplosbaar voor een willekeurig windveld. Dit kan alleen geschieden voor door één of twee rechten begrensde gebieden, bij voorbeeld het gebied binnen een rechte hoek, dat zich tot in het oneindige uitstrekt. Bij niet van de tijd afhankelijke windvelden (stationaire windvelden) treden zodanige wiskundige vereenvoudigingen op, dat het probleem kan worden opgelost (zie ook 3.0). Tevens wordt in dit hoofdstuk reeds het probleem van de bepaling van de vrije slingeringen van het water in een afgesloten gebied aan de hand van een eenvoudig model aan de orde gesteld. In Bijdrage II.5 wordt hierop uitvoeriger teruggekomen.

De wiskundige behandeling, die in dit hoofdstuk voor het algemene geval wordt aangegeven ter bepaling van de oplossingen van de niet-homogene vergelijking van Helmholtz, berust op de reductie tot het bekende probleem van Green en de nadere bepaling van de functie van Green, die aan de homogene vergelijking van Helmholtz moet voldoen met bepaalde randvoorwaarden. Bij deze methode moeten onder andere singuliere integraalvergelijkingen worden beschouwd. Ten slotte moet de in het begin toegepaste transformatie van Laplace weer ongedaan gemaakt worden.

De oplossing in het geval van het stationaire windveld verloopt op eenvoudiger wijze. Dan behoeft de transformatie van Laplace niet toegepast te worden, terwijl de verhoging moet voldoen aan de bekende niet-homogene differentiaalvergelijking van Laplace met bijbehorende randvoorwaarden. De volledige oplossing bestaat uit de som van een particuliere oplossing van de niet-homogene diffe-

rentiaalvergelijking en de oplossing van de homogene vergelijking, welke beide aan de randvoorwaarden moeten voldoen (zie nader 3.0).

In 3.0 wordt de invloed van een stationair, maar van plaats tot plaats veranderlijk, dus niet-uniform windveld, op het in figuur 1.1.1 aangegeven rechthoekige model van de Noordzee besproken. Voorts wordt verondersteld, dat de diepte in de richting van de oceaan volgens een exponentiële functie toeneemt, maar constant is over de breedte van de strook. Bij de wiskundige behandeling wordt het speciale geval van een lineair windveld beschouwd, waarbij dus de windkrachten in iedere richting van plaats tot plaats lineair veranderen.

Ter vergelijking zijn de berekeningen nog uitgevoerd voor een analoog model en een analoog windveld bij constante diepte van de zee, terwijl ook is nagegaan welke veranderingen in de resultaten optreden als de invloed van de aardrotatie wordt weggelaten.

Als bijzonder windveld wordt nog genoemd het geval, dat een stationaire wind alleen waait in de lengterichting van de rechthoek. Dit windveld is weer niet-uniform en kan dan zelfs een geheel willekeurige functie zijn van de coördinaat in de lengterichting. Dan is bij de stationaire toestand de gemiddelde stroomsnelheid in ieder punt van het gebied gelijk aan nul, zodat de stationaire opwaaiing onafhankelijk is van de weerstand en de aardrotatie. Deze opwaaiing kan met behulp van een eenvoudige formule bepaald worden.

Voor de volledigheid wordt nog opgemerkt, dat het water aan de oppervlakte in voortdurende beweging is, terwijl het aan de bodem in tegengestelde richting beweegt. De totale stroom over de gehele waterkolom is echter gelijk aan nul. In de berekeningen wordt steeds de totale stroom beschouwd.

In 4.0 worden voor het rechthoekige model van de Noordzee windvelden beschouwd, die niet stationair en dus met de tijd veranderlijk zijn. Aanvankelijk geschiedt de wiskundige behandeling voor het algemene windveld (zie ook 2.0), maar later wordt overgegaan op het speciale geval van een wind, die nu uniform en dus op een zelfde tijdstip voor het gehele gebied constant is. Bovendien waait hij in de lengterichting van het Noordzeemodel. De wiskundige behandeling van al deze gevallen berust uiteraard weer op de bepaling van oplossingen van de niet-homogene vergelijking van Helmholtz met randvoorwaarden.

Bij de numerieke toepassing is ter illustratie van de wiskundige methode getracht om voor dit geval zo goed mogelijk aan de fysische gegevens van de Noordzee aan te sluiten. Achtereenvolgens werden beschouwd windvelden, die respectievelijk op exponentiële en sinusoïdale wijze van de tijd afhangen.

Behalve het in 2.0 behandelde geval van een voortdurend constante wind in de lengterichting van het model wordt nog beschouwd het zg. sprong-windveld, waarbij vanaf een gegeven tijdstip een constante wind gaat waaien.

Bij al deze gevallen wordt in het bijzonder het verloop van de verhoging in het midden van de zuidkust van de rechthoek beschouwd. Deze zuidkust kan dan worden beschouwd samen te vallen met de Nederlandse kust; het midden ligt ongeveer bij Den Helder.

De praktische resultaten van deze berekeningen bevestigen het verloop van de waterstanden en stromen lang de kusten van de Noordzee, waarvan in 1.1 een fysisch inzicht is gegeven. Uiteraard verschaffen de gevonden resultaten bij dergelijke stormen alleen een globaal inzicht in de waterbeweging van de Noordzee, terwijl de invloed van het getij buiten beschouwing is gelaten.

1.3 Auteurs en medewerkers

Hoofdstuk 2.0, waarvan de grote lijnen door D. van Dantzig zijn aangegeven, is voltooid en aangevuld door H. A. Lauwerier met gebruikmaking van twee voordrachten welke D. van Dantzig resp. te Amsterdam [3] en te Saarbrücken [6] over het Noordzeeprobleem heeft gehouden.

Hoofdstuk 3.0 is geschreven door H. A. Lauwerier. Het is een samenvatting van de rapporten TW 57 en TW 58 van het Mathematisch Centrum [20, 21]. De berekeningen zijn uitgevoerd door de Afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

Hoofdstuk 4.0 is van de hand van H. A. Lauwerier en is een bewerking van een in het Engels geschreven rapport [19]. Bij de numerieke berekeningen en de technische verzorging werd veel hulp ondervonden van de medewerkers van de Rekenafdeling en van de Afdeling voor Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

2.0 ALGEMENE BESCHOUWINGEN OVER HET HYDRODYNAMISCHE PROBLEEM VAN DE WATERBEWEGING VAN DE NOORDZEE

2.1 Inleiding

In 2.2 wordt het probleem met de bovenbeschreven vereenvoudigingen mathematisch geformuleerd. De snelheid (u, v) en de verhoging ζ voldoen als functie van de drie variabelen x, y en t aan een stelsel van drie lineaire partiële differentiaalvergelijkingen (6) en (7) van 2.2. Met behulp van een Laplace-transformatie (8) van 2.2 kan de tijd geëlimineerd worden. Voor de Laplace-getransformeerde $\bar{\zeta}$ van de verhoging ζ kan dan een elliptische partiële differentiaalvergelijking van het Helmholtztype worden afgeleid, waarbij het rechterlid van het windveld afhangt. Zie (11) van 2.2. De randvoorwaarde aan de kust, (14) van 2.2, is een lineaire betrekking tussen de tangentiële en de normale afgeleide van $\bar{\zeta}$ en wordt wel aangeduid met de benaming van scheve randvoorwaarde. Bij afwezigheid van de aardrotatie is deze randvoorwaarde van het Neumanntype, d.w.z. dat de normale afgeleide wordt voorgeschreven. Het probleem van een elliptische partiële differentiaalvergelijking met een scheve randvoorwaarde is tot dusverre nog maar weinig onderzocht, zodat het nodig was op dit gebied ook enige onderzoekingen van meer fundamenteel wiskundige aard te verrichten.

In 2.3 worden als voorbeeld van een dergelijk onderzoek de verschillende consequenties van de toepassing van de bekende stelling van Green beschouwd. Met behulp hiervan kan de oplossing van het probleem voor een *willekeurig* windveld afgeleid worden uit die voor een zogenaamd *punt-windveld*, dat wil zeggen een functie van Green.

In 2.4 worden voor enkele eenvoudige gebieden de bijbehorende functies van Green bepaald. Dit probleem is in alle wiskundige strengheid slechts oplosbaar gebleken voor door hoogstens twee rechten begrensde gebieden, bij voorbeeld een rechte hoek. Ook in deze paragraaf zijn enkele beschouwingen van meer fundamentele aard opgenomen.

In 2.5 wordt het stationaire geval besproken. Hierbij treden dusdanige wiskundige vereenvoudigingen op, dat het probleem rechtstreeks zonder tussenkomst van een functie van Green kan worden opgelost. In het bijzonder wordt in deze paragraaf een toepassing op het rechthoekige Noordzeemodel gegeven. Verder gaande beschouwingen betreffende dit stationaire probleem vindt men in 3.0.

Ook bij het onderzoek van de vrije bewegingen of gedwongen slingeringen treden vereenvoudigingen op. Vooruitlopend op de algemene beschouwingen van de desbetreffende bijdrage[1]) wordt in het begin van 2.6 het probleem van de bepaling van de vrije slingeringen en in het bijzonder die van de eigenwaarden aan de hand van een eenvoudig model toegelicht. We keren nu weer terug tot het in de aanvang gestelde probleem. In het algemeen verloopt dus de behandeling hiervan in de volgende fasen. Met een Laplace-transformatie wordt de tijd geëlimineerd. Vervolgens wordt het probleem van Green opgelost. Hieruit kan dus voor een willekeurig windveld met behulp van integraties de Laplace-getransformeerde van de verhoging worden afgeleid.

De laatste fase bestaat uit het ongedaan maken van de Laplace-transformatie. Deze fase geeft doorgaans aanzienlijke moeilijkheden. In de tweede helft van genoemde bijdrage[1]) wordt dit aan de hand van een eenvoudig model nader toegelicht.

Voor verdere details betreffende de inverse Laplace-transformatie zij verwezen naar 4.0, waar in het bijzonder de invloed van een niet-stationair windveld op het rechthoekige Noordzeemodel wordt besproken.

2.2 Het mathematische probleem

De gelineariseerde bewegingsvergelijkingen zijn (zie bij voorbeeld [27]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} - \Omega v_z &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega u_z &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_a}{\partial y} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

[1]) Zie Bijdrage II.5.

Integratie van deze vergelijkingen met betrekking tot z levert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega v + gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= -\frac{h}{\varrho}\frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}(U_s - U_b) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega u + gh\frac{\partial \zeta}{\partial y} &= -\frac{h}{\varrho}\frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}(V_s - V_b), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

waarbij u, v de componenten van de totale stroom zijn, d.w.z. de integraal van de stroom van bodem tot oppervlak [1]). De grootte van de door de wind op het zee-oppervlak uitgeoefende kracht hangt met de windsnelheid samen volgens de semi-empirische wet (zie bij voorbeeld [26], blz. 135)

$$\sqrt{U_s^2 + V_s^2} = k\,\varrho_a\, v_s^2, \quad (3)$$

waarbij k een dimensieloze constante is, waarvoor doorgaans de waarde $k = 0{,}0025$ wordt aangenomen. We nemen aan, dat de door de zeebodem uitgeoefende kracht evenredig is met de totale stroom [28, 30]

$$\frac{1}{\varrho}U_b = \lambda u, \qquad \frac{1}{\varrho}V_b = \lambda v, \quad (4)$$

waarbij λ uniform en constant verondersteld wordt.

Stellen we ook nog

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{\varrho}U_s - \frac{h}{\varrho}\frac{\partial p_a}{\partial x} \\ V &= \frac{1}{\varrho}V_s - \frac{h}{\varrho}\frac{\partial p_a}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dan gaan de bewegingsvergelijkingen (2) met behulp van (4) en (5) over in de vorm (zie ook [31]):

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)u - \Omega v + gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)v + \Omega u + gh\frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Hieraan kunnen we de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

toevoegen (zie [26], Ch. 2).

Het stelsel (6) en (7) vormt het uitgangspunt voor de verdere onderzoekingen. Zoals in 2.1 reeds is besproken, nemen we aan, dat de grootheden λ, Ω en gh uniform en constant zijn, d.w.z. niet van de plaats en niet van de tijd afhangen.

Een kleine vereenvoudiging kan men nog aanbrengen door de eenheden zodanig te kiezen, dat $gh = 1$ is. In 4.2 wordt een voorbeeld gegeven van het gebruik van dimensieloze grootheden, waarbij o.a. dezelfde vereenvoudiging wordt bereikt.

We stellen het zeegebied voor door D, de rand door C, het kustgedeelte hiervan door C_k, het oceaangedeelte door C_o. De randvoorwaarden drukken uit, dat de normale component van de totale stroom langs C_k nul is en dat de verhoging ζ langs C_o continu is. Zoals in 2.1 besproken, nemen we aan dat het niveau van de oceaan onveranderlijk is, zodat we mogen veronderstellen dat $\zeta = 0$ is langs C_o.

We stellen ons voor, dat op een zeker tijdstip $t = 0$ de zee in rust is. We kunnen dan een Laplace-transformatie uitvoeren volgens:

$$\xi(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\zeta(x, y, t)\,dt, \quad (8)$$

en analoog voor u, v en U, V.

---

[1]) Engelse auteurs gebruiken doorgaans de gemiddelde stroom $(\bar{u}, \bar{v})$. Men heeft derhalve $u = h\bar{u}$ en $v = h\bar{v}$.

Het stelsel (6) en (7) gaat daarmede over in

$$\left.\begin{aligned}(p+\lambda)\,\bar{u} - \Omega\bar{v} + \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} &= \bar{U}\\ (p+\lambda)\,\bar{v} + \Omega\bar{u} + \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y} &= \bar{V}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

en

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + p\bar{\zeta} = 0. \tag{10}$$

Tot dit stelsel geraakt men ook indien voor (6) en (7) een oplossing gezocht wordt, waarbij de afhankelijk variabelen de tijd slechts in de factor e^{pt} bevatten. Dit is bij voorbeeld van belang bij het onderzoek naar de invloed van een exponentieel windveld (zie 4.0) of bij het onderzoek van de vrije en gedwongen slingeringen [1]).

Uit (9) en (10) volgt door eliminatie van $\bar{u}$ en $\bar{v}$ een inhomogene vergelijking van Helmholtz voor $\bar{\zeta}$

$$(\Delta - \varkappa^2)\,\bar{\zeta} = \bar{F}, \tag{11}$$

met

$$\bar{F} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}}{\partial y}\right) + \operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right). \tag{12}$$

Vaak noemt men $U_x + V_y$ de divergentie en $V_x - U_y$ de rotatie van het windveld.

De randvoorwaarden luiden in $\bar{\zeta}$ uitgedrukt

$$\bar{\zeta} = 0 \qquad \text{langs} \quad C_o, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n} + \operatorname{tg}\gamma\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial s} = \bar{f} \quad \text{langs} \quad C_k, \tag{14}$$

met

$$\bar{f} \overset{\text{def}}{=} \bar{W}_n + \operatorname{tg}\gamma\,\bar{W}_s,$$

waarbij W_n en W_s respectievelijk de normale component en de tangentiële component van de vector (U, V) voorstellen. Bij het doorlopen van C in positieve zin is n naar buiten gericht.

Voor $\bar{u}$ en voor $\bar{v}$ kan men een analoge vergelijking van Helmholtz afleiden. Deze onderscheiden zich van (11) alleen in het rechterlid.

De grootste moeilijkheden worden veroorzaakt door de „scheve" randvoorwaarde (14), dus door de Corioliskracht. Verder vloeien moeilijkheden voort uit de ingewikkelde vorm van $\varkappa$, die voor $\Omega = \lambda = 0$ eenvoudig p zou zijn. Men zou daarom willen proberen een storingsberekening uit te voeren met betrekking tot Ω. Dit kan echter alleen voor gebieden, die veel kleiner zijn dan de Noordzee. Ook maakt de Corioliskracht het onmogelijk de beweging van het water ééndimensionaal te maken, zelfs als men de Noordzee beschouwt als een oneindig lang kanaal. Daarvoor is de invloed van de dwarsbeweging te groot.

2.3 Reductie tot een probleem van Green

Voor de oplossing van de differentiaalvergelijking (11) van 2.2 met de randvoorwaarden (13) van 2.2 kunnen we in het algemeen gebruik maken van de stelling van Green.

Eenvoudigheidshalve nemen we aan, dat het gebied D enkelvoudig samenhangend is. We veronderstellen, dat de rand C stuksgewijs glad is en uit twee delen bestaat, C_o (oceaanbegrenzing) en C_k (kust), die ieder uit een eindig aantal stukken bestaan. Voor het volgende is noch het constant zijn van $\varkappa$ nodig, noch het stuksgewijs op C_k constant zijn van $\tau(s) = \operatorname{tg}\gamma$ van (14) van 2.2. De punten (x, y), (x_0, y_0) enz. worden kortweg aangeduid met P, P_0, enz. De afstand $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ tussen twee punten P_1, P_2 wordt aangegeven met $\varrho\,(P_1, P_2)$.

---

[1]) Zie Bijdrage II.5.

We beschouwen nu twee functies φ en ψ, welke met uitzondering van hoogstens één punt in D tweemaal continu differentieerbaar en aan de rand stuksgewijze glad zijn. Heeft bijvoorbeeld φ in A en ψ in B een logaritmische singulariteit van het type $-(2\pi)^{-1} \ln \varrho\,(P, P_0)$, dan geldt (zie [1], part B, Ch I):

$$\iint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \varkappa^2 \varphi\psi\right) dx\,dy =$$

$$-\iint_D \varphi\,(\Delta - \varkappa^2)\,\psi\,dx\,dy - \int_C \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\,ds + \varphi\,(B) \tag{1}$$

Omdat het linkerlid klaarblijkelijk symmetrisch is, vinden we na enige herleiding:

$$\psi\,(A) = \varphi\,(B) + \iint_D \psi\,(\Delta - \varkappa^2)\,\varphi\,dx\,dy - \iint_D \varphi\,(\Delta - \varkappa^2)\,\psi\,dx\,dy +$$

$$+ \int_{C_o} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,ds - \int_{C_o} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\,ds + \int_{C_k} \psi \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{ds}(\tau(s)\varphi)\right\} ds +$$

$$- \int_{C_k} \varphi \left\{\frac{\partial \psi}{\partial n} + \tau(s)\frac{\partial \psi}{\partial s}\right\} ds + \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial s}(\varphi\tau(s)\psi)\,ds. \tag{2}$$

Is nu $\psi\,(P) = \bar{\zeta}\,(P)$ een oplossing van (11), (13) en (14) van 2.2 en $\varphi\,(P) = G\,(P, P_0)$ een willekeurige functie, waarbij dus $A \equiv P_0$, en is B afwezig, dan volgt uit (2), mits $\varphi\tau\,\psi$ op C stuksgewijze glad is:

$$\bar{\zeta}\,(P_0) = -\iint_D G\,\bar{F}\,dx\,dy - \int_{C_k} G\,\bar{f}\,ds + \iint_D \bar{\zeta}\,(\Delta - \varkappa^2)\,G\,dx\,dy +$$

$$- \int_{C_0} G \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n}\,ds + \int_{C_k} \bar{\zeta} \left\{\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}(\tau(s)G)\right\} ds. \tag{3}$$

We kunnen nu een aantal gevallen onderscheiden.

A. Indien G een gegeneraliseerde functie van Green is, die dus voldoet aan

a. de homogene differentiaalvergelijking

$$(\Delta - \varkappa^2)\,G = 0 \text{ in } D \tag{4a}$$

b. de oceaanvoorwaarde

$$G = 0 \quad \text{langs } C_o \tag{4b}$$

c. de homogene *geadjungeerde* kustvoorwaarde

$$\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}(\tau(s)G) = 0 \quad \text{langs} \quad C_k \tag{4c}$$

dan volgt uit (3) een expliciete voorstelling van $\bar{\zeta}\,(P_0)$ door middel van kwadraturen.

B. In het geval echter, dat een functie G bekend is, die wel voldoet aan de differentiaalvergelijking (4a) en de oceaanvoorwaarde (4b), maar niet aan de kustvoorwaarde (4c), stelt (3) een voor $P \in C_k$ singuliere integraalvergelijking voor $\bar{\zeta}\,(P)$ langs de kust C_k voor.

C. In het geval, dat G bovendien op een deel van C_k aan de kustvoorwaarde voldoet, blijft een dergelijke vergelijking over voor de rest van C_k.

Deze singuliere integraalvergelijkingen kunnen met behulp van bekende methoden [25] door toepassing van de geadjungeerde integraaloperator veranderd worden in reguliere, waarna ze volgens klassieke methodes kunnen worden opgelost.

Men kan echter ook direct een reguliere integraalvergelijking krijgen, zij het een tweedimensionale, in het geval dat men een functie $G = G_0$ kan bepalen, die voldoet aan de beide randvoorwaarden (4b) en (4c) en aan de vergelijking van Laplace $\Delta G_0 = 0$ in plaats van aan (4a).

Voor het geval dat C_0 (dus ook C_k) een samenhangende boog is, heeft LAUWERIER [10] een dergelijke functie G_0 geconstrueerd door middel van een conforme afbeelding van D op een halfvlak, waarbij C_0 op de negatieve reële as wordt afgebeeld.

Gezien de bij de integraalvergelijkingen optredende complicaties is het van belang die gevallen te beschouwen, waarbij de functie van Green expliciet kan worden bepaald en hetzij met behulp van reeksontwikkelingen, hetzij door integraties kan worden gevonden. Dit nu is gelukt voor een aantal eenvoudige gebieden, welke door rechten en cirkelbogen worden begrensd.

De te bepalen functie van Green zal worden aangegeven met $G(P, P_0)$, waarbij de punten P en P_0 zijn verwisseld. Zowel ten opzichte van P als ten opzichte van P_0 voldoet zij dan aan de differentiaalvergelijking (4a) en aan de oceaanvoorwaarde (4b). Aan de kustvoorwaarde (4c) voldoet zij slechts wat betreft P_0, terwijl voor P de homogeen gemaakte voorwaarde (10) telt, of algemener:

$$\frac{\partial G}{\partial n} + \tau(s)\frac{\partial G}{\partial s} = 0 \quad \text{op} \quad C_k \tag{6}$$

De functie $G(P, P_0)$ is dus *niet* symmetrisch. In het hier beschouwde geval, waarbij $\tau(s) = \operatorname{tg}\gamma$ langs de kust constant is, verandert zij niet als de punten P en P_0 worden verwisseld en tegelijkertijd het teken van $\operatorname{tg}\gamma$, d.w.z. van Ω, wordt omgedraaid.

2.4 Bepaling van de functie van Green voor gebieden, die door ten hoogste twee rechten worden begrensd

2.4.1 *Gebieden, die door één rechte worden begrensd*

Een belangrijke bijdrage tot de theorie van het probleem van Green van de differentiaalvergelijking

$$(\Delta - \varkappa^2)\, G = 0 \tag{1}$$

met homogene scheve randvoorwaarden (verg. (14) van 2.2) werd door VELTKAMP geleverd in een kort intern rapport van het Mathematisch Centrum. De grondgedachten zijn als volgt.

De functie van Green $G(P, P_0)$, die in het gehele vlak voldoet aan de vergelijking (1), in het gegeven punt $P_0\,(x_0, y_0)$ een logaritmische singulariteit bezit en die in het oneindige verdwijnt, wordt gegeven door de Besselfunctie

$$\frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa\varrho) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa\varrho \operatorname{ch} u}\, du \tag{2}$$

Deze singulariteit zullen we, in aansluiting aan de theorie van de harmonische functies, een *pool* (in P_0) noemen. Door differentiatie in een gegeven richting naar de coördinaten van het punt P_0 ontstaat een *dipool*, door tweevoudige richtingsdifferentiatie een *quadrupool*, door k-voudige richtingsdifferentiatie een 2^k-pool. We beschouwen nu de richtingsdifferentiaaloperator

$$D_\alpha \overset{\text{def}}{=} \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y} \tag{3}$$

De operatoren D_α zijn voor alle waarden van α commutatief. Men ziet gemakkelijk in dat zij, als we ze alleen toepassen op de oplossingen van de vergelijking

$$(\Delta - \varkappa^2)\, w = 0$$

voldoen aan de identiteit

$$D_{\alpha-\gamma}\, D_\beta - D_{\beta-\gamma}\, D_\alpha = \varkappa^2 \sin(\alpha-\beta)\sin\gamma, \tag{4}$$

of ook aan

$$D_{\alpha+\beta}\, D_{\alpha-\beta} = D_\alpha{}^2 - \varkappa^2 \sin^2\beta. \tag{5}$$

Voor $\varkappa = 0$ is $D_{\alpha_1} \ldots D_{\alpha_k} = D_\alpha{}^k$, waarbij $\alpha = k^{-1}\sum_1^k \alpha_i$, zodat voor elke k slechts *een enkele* soort harmonische 2^k-polen bestaat. Voor $\varkappa \neq 0$ is dit echter niet meer het geval. Ten gevolge van (4) wordt langs de x-as aan de scheve randvoorwaarde $D_\beta f = 0$ voldaan, indien $f = D_{-\beta}\, g$ en als g als functie van y oneven is. Dan is nl. $g = 0$ voor $y = 0$, zodat ook $D_0{}^2 g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ langs de x-as, of volgens (4) eveneens $D_\beta\, D_{-\beta}\, g = 0$.

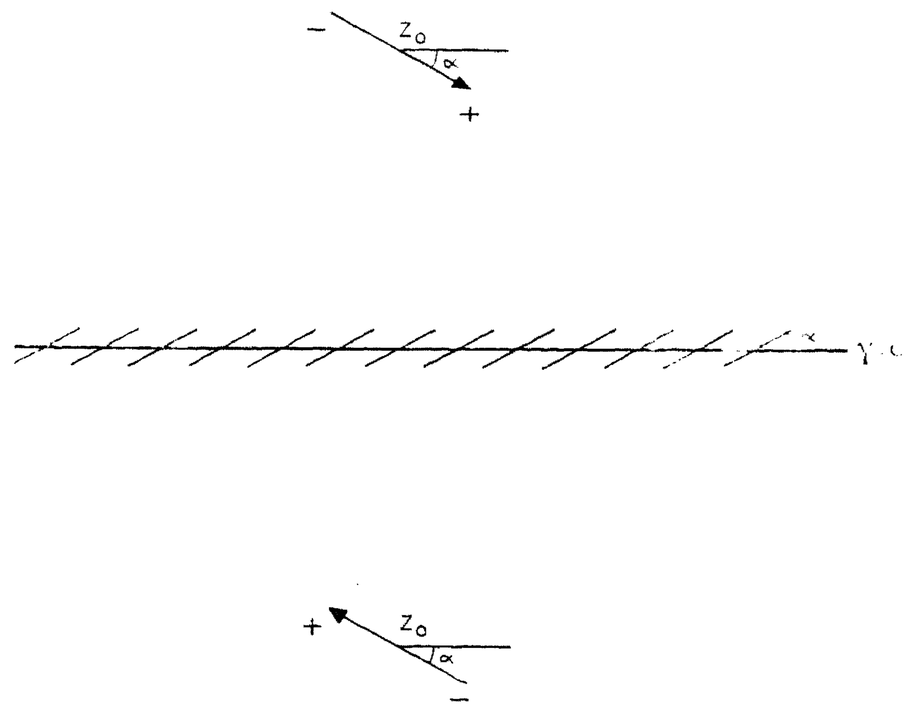
Ten einde een functie van Green voor (1) te vinden in het halve vlak $y > 0$ met een pool $P_0\ (x_0, y_0)$ die voldoet aan de randvoorwaarde

$$D_\alpha G = 0 \qquad \text{voor } y = 0 \tag{6}$$

stellen wij $\varrho^* = \{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2\}^{\frac{1}{2}}$ en $2\pi g = K_0(\varkappa\varrho) - K_0(\varkappa\varrho^*)$. Dan is g oneven in y; en dus voldoet

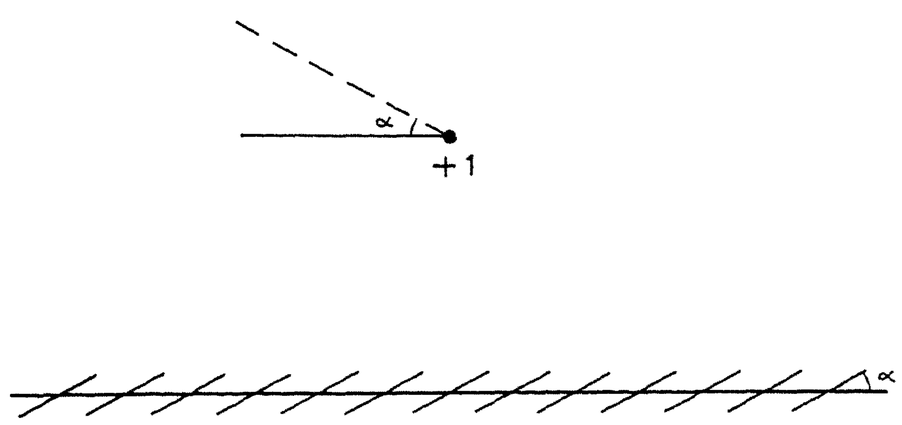
$$w = \frac{1}{2\pi} D_{-\alpha}\ (K_0(\varkappa\varrho) - K_0(\varkappa\varrho^*)) \tag{7}$$

zowel aan (1) als aan (6). Deze oplossing bestaat uit twee tegengesteld gerichte evenwijdige dipolen in de spiegelpunten P_0 en $P_0^*\ (x_0, -y_0)$, waarvan de richting ten opzichte van α gespiegeld is (zie figuur 2.4.1).

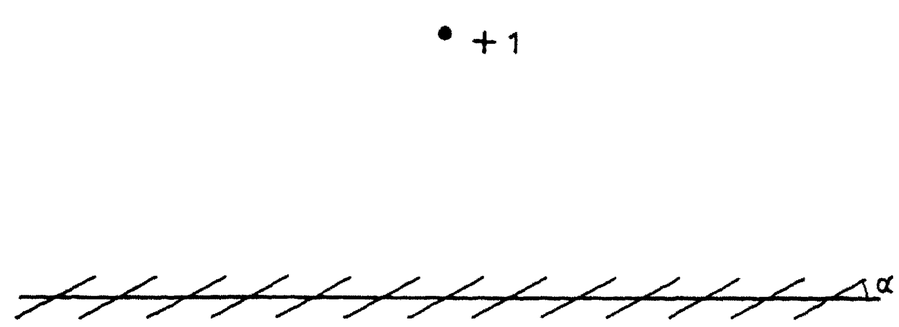


Figuur 2.4.1. Twee tegengesteld gerichte, evenwijdige dipolen

Aangezien deze oplossing voor *elke* pool P_0 voldoet aan de voorwaarde (6), mogen we P_0 voor alle $t > 0$ vervangen door $P_0^*\ (x_0 - t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$ en met betrekking tot t integreren. Dan verandert de dipool in P_0 in een bron en tevens verandert de dipool in P_0^* in een halve rechte in de richting α, die gelijkmatig belegd is met identieke en parallele dipolen. Worden deze dipolen ontbonden in componenten, loodrecht op en evenwijdig aan deze halve rechten, dan is de sterkte van eerstgenoemde componenten $\sin 2\alpha$, terwijl laatstgenoemde componenten reduceren tot een enkele bron in P_0^* met een sterkte $-\cos 2\alpha$ (figuren 2.4.2 en 2.4.3).



Figuur 2.4.2. Pool en dipoolstaart



Figuur 2.4.3. Pool en ontbonden dipoolstaart

De analytische vorm van deze oplossing wordt gegeven door:

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa\varrho) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(t+i\alpha)}{\operatorname{sh}(t-i\alpha)} e^{-\varkappa(y+y_0)\operatorname{ch} t - i\varkappa(x-x_0)\operatorname{sh} t}\, dt, \\ \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa\varrho) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varkappa|y-y_0|\operatorname{ch} t - i\varkappa(x-x_0)\operatorname{sh} t}\, dt \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dit resultaat werd langs enigszins andere weg eveneens afgeleid door LAUWERIER [10].

2.4.2 *Gebieden, die door twee evenwijdige rechten worden begrensd*

Met behulp van de in 2.4.1 gevonden oplossing kan nu ook de functie van Green worden gevonden voor een (naar beide zijden oneindig lange) parallele strook [10]. Voor de strook $|x| < a$ (een oneindig lang kanaal), waarbij

$$\frac{\partial G}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial G}{\partial y}\sin\gamma = 0 \qquad \text{voor } x = \pm a$$

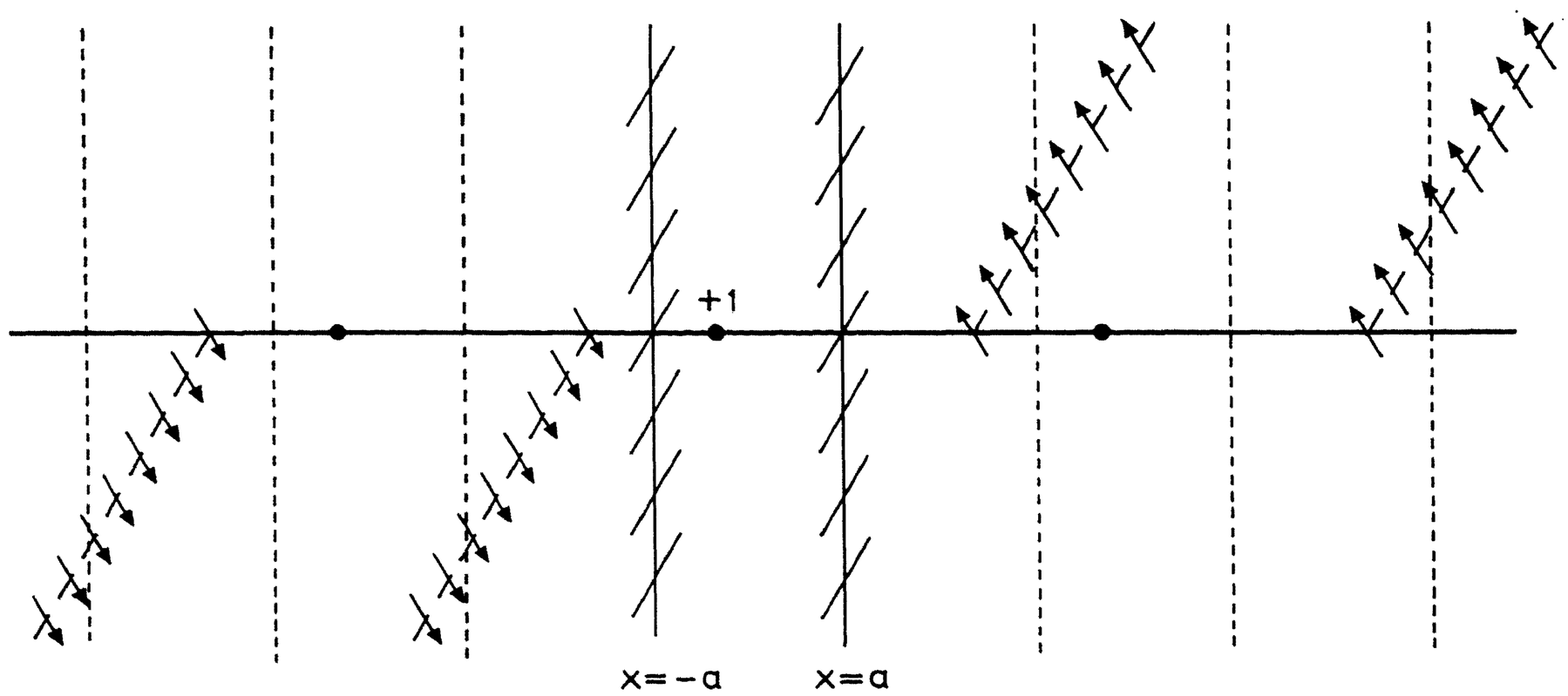
wordt

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa\varrho) + \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{ e^{-\varkappa(2a+x_0-x)\operatorname{ch}\eta} + e^{-\varkappa(2a-x_0+x)\operatorname{ch}\eta} +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}(\eta+i\gamma)}{\operatorname{ch}(\eta-i\gamma)} e^{\varkappa(x+x_0)\operatorname{ch}\eta} + \frac{\operatorname{ch}(\eta-i\gamma)}{\operatorname{ch}(\eta+i\gamma)} e^{-\varkappa(x+x_0)\operatorname{ch}\eta}\Big\} \frac{e^{-i\varkappa(y-y_0)\operatorname{sh}\eta}}{\operatorname{sh}(2\varkappa a\operatorname{ch}\eta)}\, d\eta, \quad (9)$$

waarvoor we ook kunnen schrijven (zie figuur 2.4.4):

$$G = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa(y-y_0)\operatorname{sh}\eta}\Big\{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-(-1)^n x_0 - 2na|\varkappa\operatorname{ch}\eta} \frac{\operatorname{ch}(\eta+i(-1)^n\gamma\operatorname{sgn} n)}{\operatorname{ch}(\eta+i\gamma\operatorname{sgn} n)}\Big\}\, d\eta \quad (10)$$



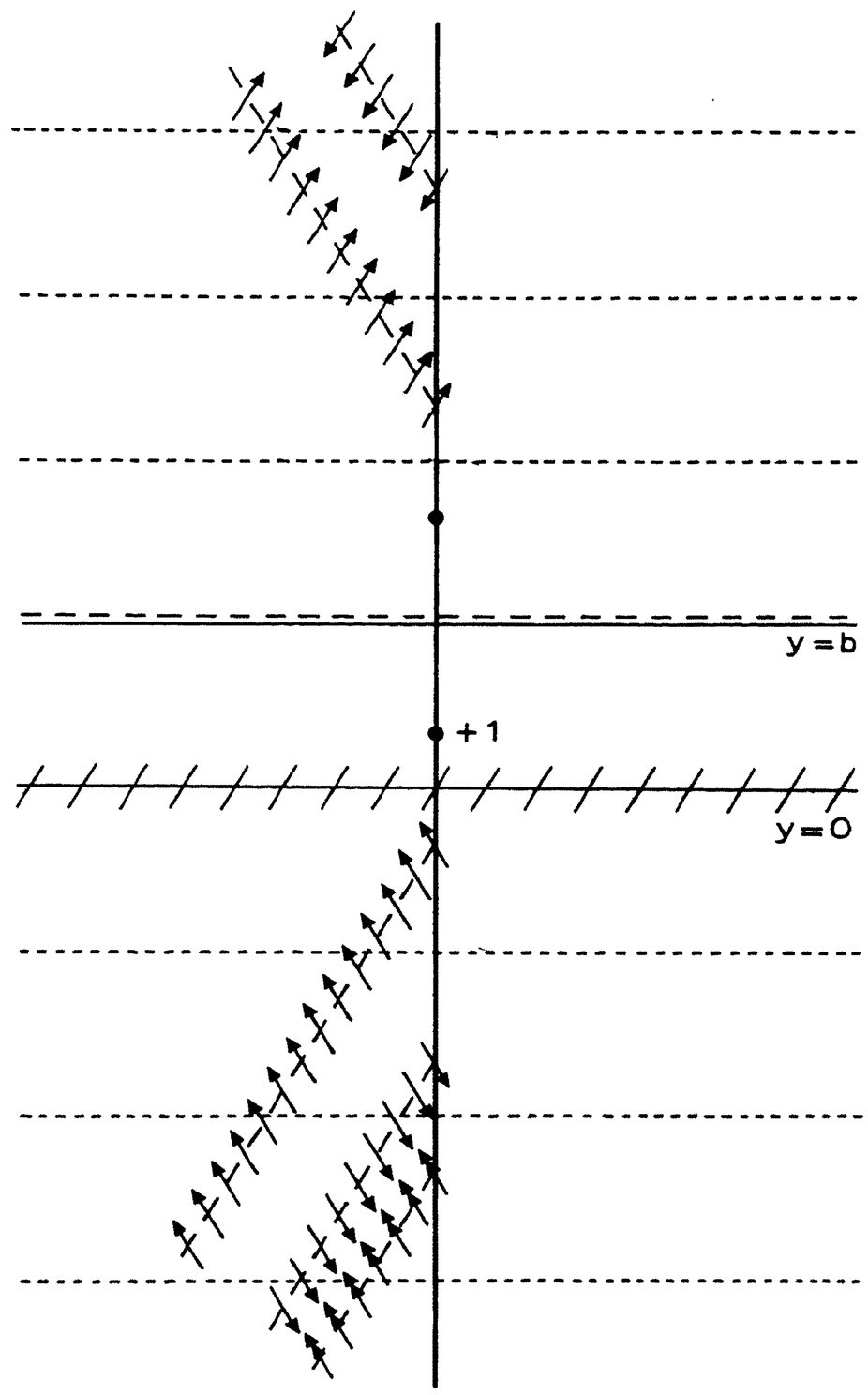
Figuur 2.4.4. Dipoolspiegeling bij twee evenwijdige kusten

De factoren $\operatorname{ch}(\eta\mp i\gamma)/\operatorname{ch}(\eta\pm i\gamma)$ veranderen een bron in een „dipoolstaart". Voor de strook $0 < y < b$ met $D_\alpha G = 0$ voor $y = 0$ en $G = 0$ voor $y = b$, zodat $y = 0$ een kust ($\alpha = \frac{1}{2}\pi + \gamma$) en $y = b$ de grens met een oceaan voorstelt, vindt LAUWERIER de oplossing:

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa\varrho) - \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa\varrho^*) +$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\varkappa(y-a)\operatorname{ch}\eta)\operatorname{sh}(\varkappa(y_0-a)\operatorname{ch}\eta)}{1 + \frac{\operatorname{sh}(\eta - i\gamma)}{\operatorname{sh}(\eta + i\gamma)} e^{2\varkappa a \operatorname{ch}\eta}} e^{-i\varkappa(x-x_0)\operatorname{sh}\eta} d\eta \tag{11}$$

die in figuur 2.4.5 is geschetst.



Figuur 2.4.5. Dipoolspiegeling bij kust en daaraan evenwijdige oceaanrand

2.4.3 *Hoekvormige gebieden*

Het probleem wordt essentieel moeilijker in het eenvoudigste geval, dat een hoekpunt in de rand aanwezig is, in het bijzonder in het geval, waarin D een hoekgebied is, bijv. in poolcoördinaten, gegeven door $r > 0$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. We zullen in dat geval de oplossingen van de vergelijking (1) beschouwen en in het bijzonder de functie van Green, welke voldoet aan de randvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned} r\frac{\partial G}{\partial r} - \operatorname{cotg}\gamma_1 \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= 0 \quad \text{voor} \quad \varphi = \varphi_1 \\ r\frac{\partial G}{\partial r} - \operatorname{cotg}\gamma_2 \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= 0 \quad \text{voor} \quad \varphi = \varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

hoewel we eigenlijk alleen de gevallen $\gamma_1 = \gamma_2$ (twee kusten) en $\operatorname{cotg}\gamma_1 = 0$ of $\operatorname{cotg}\gamma_2 = 0$ (één kust en een oceaanrand, in het laatste geval met de nevenvoorwaarde dat daar $w = 0$ moet zijn) nodig hebben.

Reeds in 1956 heeft VELTKAMP [36] het gedrag onderzocht van een voor $r \to 0$ eindig blijvende functie w in de omgeving van een hoekpunt, die in D is gedefinieerd en die hetzij voldoet aan de potentiaalvergelijking $\Delta w = 0$ (of algemener aan $\Delta w = O(r^{-2})$ voor $r \to 0$) en aan de randvoorwaarden (12) met w in plaats van G (voor het geval dat $\gamma_1 = \gamma_2$ moet r^{-2} vervangen worden door $r^{-2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$), of die voor $\varkappa \neq 0$ voldoet aan de bijzondere randvoorwaarden (12) met $\gamma_1 = \gamma_2$ of $\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$. Daar het nodig bleek vele gevallen te onderscheiden, was er weinig hoop langs deze weg verder te komen door beschouwing van hogere benaderingen.

Kort geleden zijn VAN DANTZIG [5] en LAUWERIER [17], onafhankelijk van elkaar, er in geslaagd het hoekprobleem volledig op te lossen. De methode van VAN DANTZIG berust in wezen op de oplossing van een functionaalvergelijking en zal hieronder worden geschetst. De methode van LAUWERIER berust op de oplossing van een gegeneraliseerd Hilbertprobleem.

Bij de eerste methode stelt men

$$G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa r \operatorname{sh} u} \{g_1(u + i\varphi) + g_2(-u + i\varphi)\}\, du, \tag{13}$$

waarbij $g_1(w)$ en $g_2(w)$ analytische functies van w zijn, welke in de twee stroken $\varphi_1 < \operatorname{Im} w < \varphi_0$ en $\varphi_0 < \operatorname{Im} w < \varphi_2$ holomorf zijn en op de rechte $\operatorname{Im} w = \varphi_0$ een door de logaritmische singulariteit in (r_0, φ_0) bepaalde discontinuïteit bezitten. Toepassing van de randvoorwaarden (12) levert voor g_1 en g_2 de functionaalvergelijkingen

$$\operatorname{ch}(u - i\gamma_j)\, g_1(u + i\varphi_j) = \operatorname{ch}(u + i\gamma_j)\, g_2(-u + i\varphi_j) \tag{14}$$

voor $j = 1$ en $j = 2$.

Dit stelsel heeft de particuliere oplossing

$$g_1(w) = g_2(w) = \Phi(w), \tag{15}$$

waarbij $\Phi(w)$ een in het gehele vlak meromorfe functie is, te weten

$$\Phi(w) = e(w - i\varphi_1, \gamma_2) \,/\, e(w - i\varphi_2, \gamma_1), \tag{16}$$

waarin $e(w, \gamma)$ voor $|\operatorname{Im} w| < \theta + \tfrac{1}{2}\pi - |\gamma|$ door

$$e(w, \gamma) \overset{\text{def}}{=} \exp \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos wt}{t} \frac{\operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{sh} \tfrac{1}{2}\pi t \operatorname{sh} \theta t}\, dt \tag{17}$$

met

$$\theta \overset{\text{def}}{=} \varphi_2 - \varphi_1 \tag{18}$$

gedefinieerd is en in het gehele vlak meromorf is.

Substitutie van (15) in (13) levert een oplossing van (1) en (12) welke, eventueel met uitzondering van $r = 0$, regulier is. Deze oplossing is nader bestudeerd door LAUWERIER [17]. Het blijkt, dat er slechts voor $-\tfrac{1}{2}\pi \leqq \gamma_2 < \gamma_1 \leqq \tfrac{1}{2}\pi$ een oplossing bestaat, welke in $r = 0$ regulier is.

Met behulp van de functie $\Phi(w)$ kan het probleem van Green gemakkelijk worden opgelost. Het heeft voordeel de gevallen $\gamma_1 \leqq \gamma_2$ en $\gamma_1 > \gamma_2$ apart te beschouwen. In het eerste geval stellen we

$$g_1(w) = g_2(w) = P(w)\, \Phi(w). \tag{19}$$

De functie $P(u)$ voldoet krachtens (14) aan de eenvoudiger functionaalvergelijkingen

$$P(i\varphi_j - u) = P(i\varphi_j + u) \tag{20}$$

en maakt een bekende sprong op de rechte $\operatorname{Im} w = \varphi_0$. Met behulp van de formules van Plemelj kan $P(w)$ bepaald worden. Het resultaat is ten slotte:

$$G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\varkappa s \operatorname{sh} u) \sin(\varkappa r_0 \operatorname{sh} u_0) \frac{\Phi(u + i\varphi)}{\Phi(u_0 + i\varphi_0)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sh} \nu(u_0 + i\varphi_0)}{\operatorname{ch} \nu(u_0 + i\varphi_0) - \operatorname{ch} \nu(u + i\varphi)}\, du\, du_0, \tag{21}$$

waarbij

$$\nu \overset{\text{def}}{=} \pi/\theta.$$

In het tweede geval stellen we

$$g_1(w) = -g_2(w) = i\,g(w), \tag{22}$$

waarna op analoge wijze het volgende resultaat wordt verkregen:

$$G(r, \varphi, r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\theta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\varkappa r \operatorname{sh} u) \cos(\varkappa r_0 \operatorname{sh} u_0) \frac{\Phi(u + i\varphi)}{\Phi(u_0 + i\varphi_0)} \cdot$$
$$\cdot \frac{\operatorname{sh} \nu(u + i\varphi)}{\operatorname{ch} \nu(u + i\varphi) - \operatorname{ch} \nu(u_0 + i\varphi_0)}\, du\, du_0. \tag{23}$$

De oplossing (21) is de enige, welke eindig blijkt in $r = 0$. Aan de oplossing (23) kan nog een overal in D reguliere oplossing worden toegevoegd. De oplossing (23) is de enige, welke voor $r = 0$ verdwijnt.

LAUWERIER [17] vindt voor $G(r, \varphi, r_0, \varphi_0)$ een andere uitdrukking, welke in verband met het in de aanvang van dit hoofdstuk besproken spiegelingsprincipe een interessante interpretatie toelaat. Het blijkt namelijk, dat bij herhaalde spiegelingen polen met een toenemend aantal dipoolstaarten geïnduceerd worden. Voor bijzonderheden zij verwezen naar de desbetreffende publikatie.

2.5 Het stationaire geval

Het stationaire geval is onderzocht door SCHALKWIJK [30] voor een uniform windveld, terwijl het geval van een op delen van de Noordzee uniforme wind onderzocht is door WEENINK [37]. Dit laatste onderzoek is daarna uitgebreid door VELTKAMP [34].

De grondvergelijkingen voor het stationaire geval luiden als volgt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda u - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \lambda v + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aangezien een tweedimensionaal vectorveld (U, V) altijd kan worden beschreven met behulp van twee potentialen P en Q, die resp. het divergentievrije deel en het rotatievrije deel bepalen,

$$U = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad V = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{2}$$

kan de oplossing in het geval van een afgesloten zee worden verkregen uit een complexe analytische functie L van $z = x + iy$. We vinden

$$\zeta = \operatorname{Re}\left(\frac{\Omega}{\lambda} + i\right)(L + P + iQ), \tag{3}$$

waarbij L voldoen moet aan de randvoorwaarde

$$P + \operatorname{Re} L = \text{constant} \tag{4}$$

langs de begrenzing C_k. Er zijn berekeningen uitgevoerd voor enkele circulaire windvelden boven een oceaan, die door een halfvlak wordt voorgesteld. In het geval van een zee met op delen constante diepte, vindt VELTKAMP [34], dat L vervangen moet worden door een op delen holomorfe functie en dat de formules van Plemelj aanleiding geven tot een singuliere integraalvergelijking langs de lijn, waar de diepte discontinu is. Indien een ondiepe baai (de Noordzee) grenst aan een oceaan (de Atlantische Oceaan) met een grote, doch eindige diepte, kan een iteratieproces worden toegepast, waarin de verhouding van de twee diepten wordt gebruikt.

Bij een rechthoekige baai, welke ongeveer twee maal zo lang als breed is, hetgeen ruwweg overeenkomt met de vorm van de Noordzee, is de functie welke de rechthoek op een halfvlak afbeeldt, een bijna ontaarde elliptische functie. Indien P en Q zodanig worden gekozen dat $P = 0$ op C_k, hetgeen altijd mogelijk is, blijkt de functie $L(z)$ bij de „zuidkust" bijna constant te zijn, namelijk

$$L \sim \tfrac{1}{2} i \cos \mu\pi \int_0^a \operatorname{cotg}^{2\mu} \frac{\pi t}{2a} \operatorname{sgn}\left(t - \tfrac{1}{2}a\right) V(t, b)\, dt, \tag{5}$$

waarin

$$\mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\lambda}. \tag{6}$$

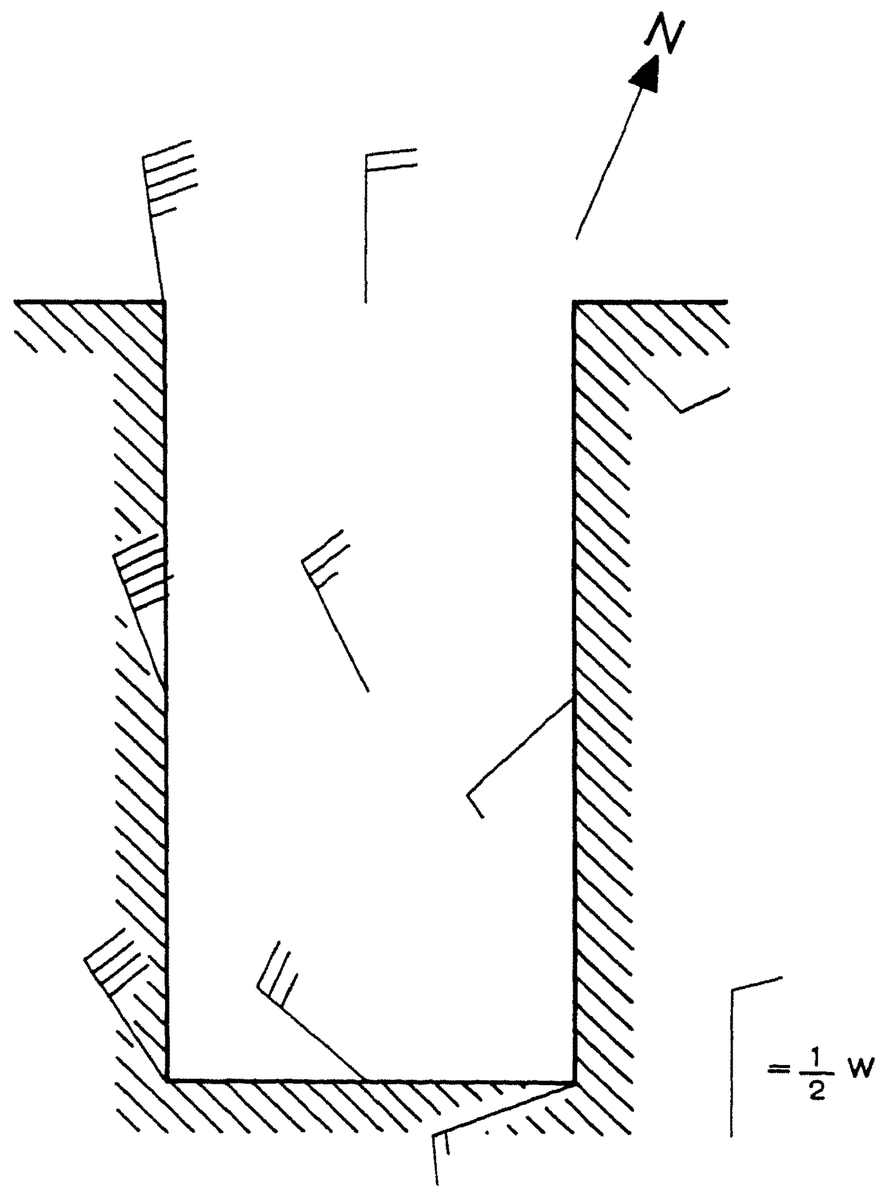
Met behulp hiervan kan ζ berekend worden in het midden $(\frac{1}{2} a, 0)$ van de zuidkust. Voor enkele typen windvelden zijn numerieke berekeningen uitgevoerd door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

In het geval van een lineair windveld (zie ook 3.1)

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{4} W\left(1 - \frac{2x}{a}\right) + W\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ V &= -W - \frac{5}{4} W\left(1 - \frac{2x}{a}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

met $b = 2a$, zoals geschetst is in figuur 2.5.1, wordt

$$gh\,\zeta = 1{,}20\, bW. \tag{8}$$



Figuur 2.5.1. Lineair windveld boven een rechthoekige zee

Bij het homogene windveld

$$\left.\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2} W \\ V &= -W \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

is daarentegen

$$gh\,\zeta = 1{,}105\,bW, \tag{10}$$

terwijl bij het veld

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -W \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

geldt

$$gh\,\zeta = bW. \tag{12}$$

We zien hieruit, dat de dwarscomponent $U = \frac{1}{2}\,W$ de verhoging van het zeeniveau in het punt $(\frac{1}{2}\,a, 0)$ ongeveer $10\frac{1}{2}$ % vergroot en dat de niet-homogeniteit daar nog eens ongeveer $9\frac{1}{2}$ % aan toevoegt.

LAUWERIER heeft, voortbouwend op het werk van VELTKAMP en WEENINK bij het stationaire probleem ook de invloed van een niet-uniforme diepte bestudeerd. In het bijzonder beschouwt hij het geval van een exponentiële toeneming van de diepte in de richting van de oceaan:

$$h = h_0 \exp 2\alpha y. \tag{13}$$

Hierbij heeft hij soortgelijke numerieke resultaten als hierboven afgeleid. Zijn resultaten zijn weergegeven in 3.0.

2.6 Het niet-stationaire geval

2.6.1 *Vrije bewegingen*

Het is in de eerste plaats van belang de vrije bewegingen van het zeegebied te kennen. Een beweging, waarbij u, v en ζ van de vorm

$$u = \bar{u}\,(x, y)\,e^{i\omega t}, \qquad v = \bar{v}\,(x, y)\,e^{i\omega t}, \qquad \zeta = \bar{\zeta}\,(x, y)\,e^{i\omega t}, \tag{1}$$

zijn, is bepaald door het stelsel van 2.2, waarbij $\bar{U} = \bar{V} = 0$ en $p = i\omega$. De amplitudefunctie $\bar{\zeta}$ van de verhoging voldoet dus aan een homogene Helmholtzvergelijking. Uit (11), (13) en (14) van 2.2 volgt:

$$(\Delta - \varkappa^2)\,\bar{\zeta} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n} + \frac{\Omega}{\lambda + i\omega}\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial s} = 0 \qquad \text{langs } C_k \tag{3}$$

en

$$\bar{\zeta} = 0 \qquad \text{langs } C_o \tag{4}$$

Slechts voor enkele zeer eenvoudige gebieden is het gelukt de vrije bewegingen expliciet te bepalen. Voor een cirkelvormig meer kan de oplossing gemakkelijk verkregen worden (zie [9] Ch 8, art. 209). Het geval van een zich naar beide zijden in het oneindige uitstrekkende strook, welke door een kust en een oceaan begrensd wordt, is behandeld door LAUWERIER [14]. In dat geval kunnen we voor C_k de x-as nemen en voor C_o de rechte $y = b$. Men ziet gemakkelijk in, dat $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{\zeta}$ niet van x afhangen, zodat (2), (3) en (4) zich vereenvoudigen tot:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \varkappa^2\right)\bar{\zeta} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dy} = 0 \qquad \text{voor} \qquad y = 0 \tag{6}$$

en

$$\bar{\zeta} = 0 \qquad \text{voor } y = b. \tag{7}$$

De vrije bewegingen, welke hierdoor bepaald zijn, hebben de vorm

$$\zeta\,(y, t) = e^{i\omega t}\,\cos\,(n + \tfrac{1}{2})\,\frac{\pi y}{b}, \tag{8}$$

waarbij $n = 0, 1, 2 \ldots$. De eigenwaarde ω volgt uit de betrekking

$$\varkappa^2 = -\,(n + \tfrac{1}{2})^2\,\frac{\pi^2}{b^2} \tag{9}$$

hetgeen een vergelijking van de derde graad in ω is. Men vindt zo voor elke waarde van n in het algemeen één negatief reële wortel en twee toegevoegd complexe wortels met een negatief reëel deel. Indien echter de wrijvingsterm λ afwezig is, is (9) slechts van de tweede graad in ω. In dat geval is de aperiodieke demping afwezig en is de vrije beweging een zuivere slingering waarbij $|\omega| > \Omega$. Ondanks zijn eenvoud vertoont dit model al enige karakteristieke elementen van het rechthoekige Noordzeemodel. LAUWERIER [15] heeft ook het model van een half-oneindige strook, welke aan drie zijden door kusten wordt begrensd, behandeld. Ook hier blijken de vrije bewegingen uiteen te vallen in aperiodiek gedempte en periodiek gedempte. Het rechthoekige model wordt in Bijdrage II.5 behandeld. Ten slotte heeft HOFSOMMER [8] nog het model beschouwd van een halve cirkel, waarvan het cirkeldeel een kust en het rechte deel een oceaanrand is.

2.6.2 *Gedwongen bewegingen*

Vervolgens beschouwen we de gedwongen beweging van de zee onder invloed van een gegeven windveld. De grootste moeilijkheid bij dit probleem bestaat in de uitvoering van de inverse Laplacetransformatie. Dit wordt o.a. reeds gedemonstreerd in het model van een zich naar alle zijden tot in het oneindige uitstrekkende zee [12]. In dit geval is de oplossing van het probleem van Green in overeenstemming met (2) van 2.4

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\varkappa \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right), \tag{10}$$

zodat volgens (3) van 2.3 de oplossing van (11) van 2.2 gegeven wordt door

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} K_0 \left(\varkappa \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \bar{F}(x_0, y_0, p)\, dx_0\, dy_0. \tag{11}$$

De inversie van de factor $K_0(\varkappa r)$, waarbij r de afstand tussen (x, y) en (x_0, y_0) aanduidt, wordt bemoeilijkt door de gecompliceerde vorm van $\varkappa$. In het eenvoudigste geval, als zowel de wrijving λ als de coëfficiënt van Coriolis Ω nul is, is $\varkappa = p$ en vindt men voor de inverse

$$K_0(\varkappa r) \doteqdot (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}\, \iota(t - r), \tag{12}$$

waarbij

$$\iota(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ voor } t > 0 \\ 0 \text{ voor } t < 0 \end{cases}$$

Indien de wrijving wel in aanmerking wordt genomen is

$$K_0(\varkappa r) \doteqdot e^{-\frac{1}{2}\lambda t} (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\tfrac{1}{2}\lambda \sqrt{t^2 - r^2}\right) \iota(t - r) \tag{13}$$

en ten slotte is in het algemene geval:

$$K_0(\varkappa r) \doteqdot \left\{ \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda t} - \tfrac{1}{2}\Omega\, e^{-\lambda t} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} J_1\left(\Omega (t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right) . \right.$$
$$\left. . \exp \frac{\frac{1}{2}\lambda r^2}{t + (t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi}\, d\varphi \right\} \iota(t - r). \tag{14}$$

Het produkt van de factor $K_0(\varkappa r)$ met $\bar{F}(x_0, y_0, p)$ kan nu met behulp van het convolutie-theorema geïnverteerd worden. In [12] worden in het bijzonder een aantal gevallen beschouwd, waarbij de uitdrukking voor $\bar{F}$ aequivalent is met een puntbron in de oorsprong, en waarbij de afhankelijkheid van de tijd het karakter van een sprongfunctie $\iota(t)$ heeft. We noemen o.a.

a. geen wind, een rotatie-symmetrisch drukveld;
b. een rotatie-symmetrisch wervelvrij veld;
c. een rotatie-symmetrisch wervelveld;
d. een dipoolveld met constante richting;
e. een willekeurig windveld van constante richting, dat, afgezien van een willekeurige tijdafhankelijke factor, een van de tijd onafhankelijk rotatie-symmetrische, maar overigens willekeurige verdeling heeft.

In een vroegere publikatie heeft LAUWERIER [11] het geval onderzocht van een op een halfvlak werkend uniform windveld, dat door een factor $X(t) = m^2 t e^{-mt}$ $(t > 0)$ van de tijd afhangt. Voor kleine waarden van t stijgt deze functie, bereikt daarna een maximum en neemt ten slotte weer af. De verhoging ζ aan de kust kan met elementaire middelen worden berekend en wordt gevonden uit de convolutie van de twee volgende functies

$$\varphi(t) = \sin\alpha\, X(t) - \Omega \cos\alpha \int_0^t e^{-\lambda\tau} X(t-\tau)\, d\tau \tag{15}$$

en

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\lambda t} I_0(\tfrac{1}{2}\lambda t) - \Omega\, e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\lambda t} J_1(\Omega\tau)\, I_0(\tfrac{1}{2}\lambda(t-\tau))\, d\tau. \tag{16}$$

Voor dit geval zijn numerieke berekeningen uitgevoerd, waaruit een goed overzicht wordt verkregen over de manier waarop de verhoging ζ afhangt van de hoek α tussen het windveld en de kust. Het blijkt, dat de maximale verhoging maximaal wordt voor ongeveer $\alpha = 170°$, zodat de verhoging aan de kust veel sterker afhangt van een wind, die evenwijdig aan de kust is, dan van een loodrecht invallende wind, een feit, dat van te voren wel duidelijk was. Nadat ζ maximaal is geworden, dempt deze functie langzaam met zwakke oscillaties uit; de periode van deze oscillaties is ongeveer $2\pi/\Omega$, hetgeen analytisch correspondeert met de singulariteiten van de Laplace-getransformeerde bij $-\lambda + i\Omega$. Het maximum van de verhoging komt veel later dan het maximum van het windveld. De grootte van het maximum van de verhoging hangt slechts weinig af van Ω, doch zeer sterk van α.

In de in de aanvang van deze paragraaf genoemde publikatie [14] is ook de invloed van enige eenvoudige uniforme windvelden op de verhoging aan de kust bestudeerd. Zowel voor een sprong-windveld van het type $X(t) = \iota(t)$ als voor een sprong-sinuswindveld $X(t) = \sin\omega t\, \iota(t)$ is een aantal expliciete resultaten afgeleid. Daar soortgelijke beschouwingen voor het *rechthoekige* Noordzeemodel in 4.0 gegeven zijn, zien wij er hier van af nader op details in te gaan.

Ten slotte willen we nog enkele opmerkingen maken betreffende het in 2.4.3 besproken hoekprobleem.

Het is bekend, dat de Noordzee in ruwe benadering de gedaante van een rechthoek heeft. Voor de Nederlandse kust zullen echter bij de meest voorkomende stormen noch de oostkust (Duitse Bocht, Denemarken, Kattegat, Noorwegen), noch de noordelijke rand (overgang naar de Atlantische Oceaan) een grote invloed hebben. Het model van een rechte hoek is dus niet zo erg slecht, vooral daar de invloed van een mathematische put (die de invloed van het Kanaal weergeeft, waarin de kracht van Coriolis wegens de kleine afmetingen kan worden verwaarloosd) reeds uitvoerig door LAUWERIER [13] is onderzocht.

Een depressie, welke zich over de Noordzee beweegt, wordt weergegeven door een verdeling van polen, die vrij dicht bij elkaar liggen langs de baan van het centrum van de depressie. Daarnaast hebben we de polen, die ontstaan door reflectie aan de kust en de daarmee samenhangende dipoolstaarten, die eveneens in beschouwing genomen moeten worden en die hier in de functies Φ voorkomen. De meeste moeilijkheden geeft de Laplace-inversie van de factoren Φ. Wegens de demping zullen de herhaalde reflecties nauwelijks meer bijdragen, tenzij het centrum van de depressie het singuliere hoekpunt rakelings voorbijtrekt. Dit zal slechts zelden gebeuren, maar kan toch niet geheel worden uitgesloten. De reflecties aan de Schotse en Engelse kust zullen waarschijnlijk wel niet verwaarloosd kunnen worden, in het bijzonder niet als de depressie zich tamelijk dicht onder deze kust en parallel er aan naar het zuiden beweegt of als dicht bij deze kust een sterke barometrische gradiënt bestaat. Beide verschijnselen traden bij de storm van 31 januari/1 februari 1953 in sterke mate op.

3.0 DE INVLOED VAN ENKELE STATIONAIRE, NIET-UNIFORME WINDVELDEN OP EEN NOORDZEEMODEL

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk onderzoeken we de invloed van een niet-uniform stationair windveld op het in 1.1 besproken rechthoekige model van de Noordzee. In Cartesische coördinaten (x, y) is dit model

bepaald door $0 < x < a$ en $0 < y < b$, waarbij $x = 0$, $x = a$ en $y = 0$ kusten zijn en $y = b$ de overgang tot de oceaan voorstelt.

In overeenstemming met het feit, dat bij de Noordzee de diepte in de richting van de oceaan sterk toeneemt, kiezen we in het hier te beschouwen mathematische model van de diepte h een exponentiële functie van y, namelijk:

$$h = h_0 \, e^{2\alpha y}. \tag{1}$$

We beschouwen in het bijzonder de invloed van een lineair windveld. Hieronder verstaan we een windveld, waarbij de schuifspanning (U, V) een lineaire functie van x en y is, te weten:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 + U_1\left(1 - \frac{2x}{a}\right) + U_2\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ V &= V_0 + V_1\left(1 - \frac{2x}{a}\right) + V_2\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

We denken het model gemakshalve noord–zuid gericht, zodat we bij voorbeeld $y = 0$ de zuidkust kunnen noemen. In werkelijkheid maakt de lengte-as van de Noordzee een hoek van ongeveer 24° met de geografische noord–zuid-richting. Aangezien het midden van de zuidkust ruwweg overeenkomt met de positie van Den Helder, hebben we ons in hoofdzaak bepaald tot de berekening van de verhoging aan de zuidkust, $\zeta\,(x, 0)$, en in het bijzonder tot die van het midden daarvan, $\zeta\,(\frac{1}{2}\,a, 0)$.

Bij de numerieke toepassing trachten we het mathematische model zo goed mogelijk aan de omstandigheden van de Noordzee aan te passen. Daartoe kiezen we de volgende getallenwaarden:

$$\begin{aligned} a &= 400 \text{ km} \\ b &= 800 \text{ km} \\ \Omega/\lambda &= 5 \\ h_m &= 65 \text{ m} \\ \sqrt{g\,h_m} &= 91 \text{ km/h} \\ \alpha &= \pi/4b \end{aligned}$$

Hierbij stelt h_m het harmonisch gemiddelde van de diepte voor. Volgens (1) neemt dan de diepte toe van 33 m aan de zuidkust tot ongeveer 158 m bij de oceaan (zie figuur 3.1.1). De resultaten van de berekeningen vindt men in tabel 3.8.5.

In figuur 3.8.1 is met behulp hiervan voor elke component afzonderlijk de verhoging aan de zuidkust geschetst. In het bijzonder geldt voor de verhoging in het midden:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g\, h_m\, \zeta\,(\tfrac{1}{2}\,a, 0) = \quad & 1{,}67\, U_0 + 0{,}71\, U_1 + 1{,}43\, U_2 + \\ & - 6{,}28\, V_0 - 2{,}72\, V_1 - 4{,}04\, V_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Ter vergelijking zijn dezelfde berekeningen uitgevoerd voor het eenvoudiger model met de uniforme diepte $h = h_m$. Dit leidt tot het resultaat:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g\, h_m\, \zeta\,(\tfrac{1}{2}\,a, 0) = \quad & 1{,}31\, U_0 + 0{,}64\, U_1 + 0{,}19\, U_2 + \\ & - 6{,}28\, V_0 - 0{,}74\, V_1 - 3{,}14\, V_2. \end{aligned} \tag{4}$$

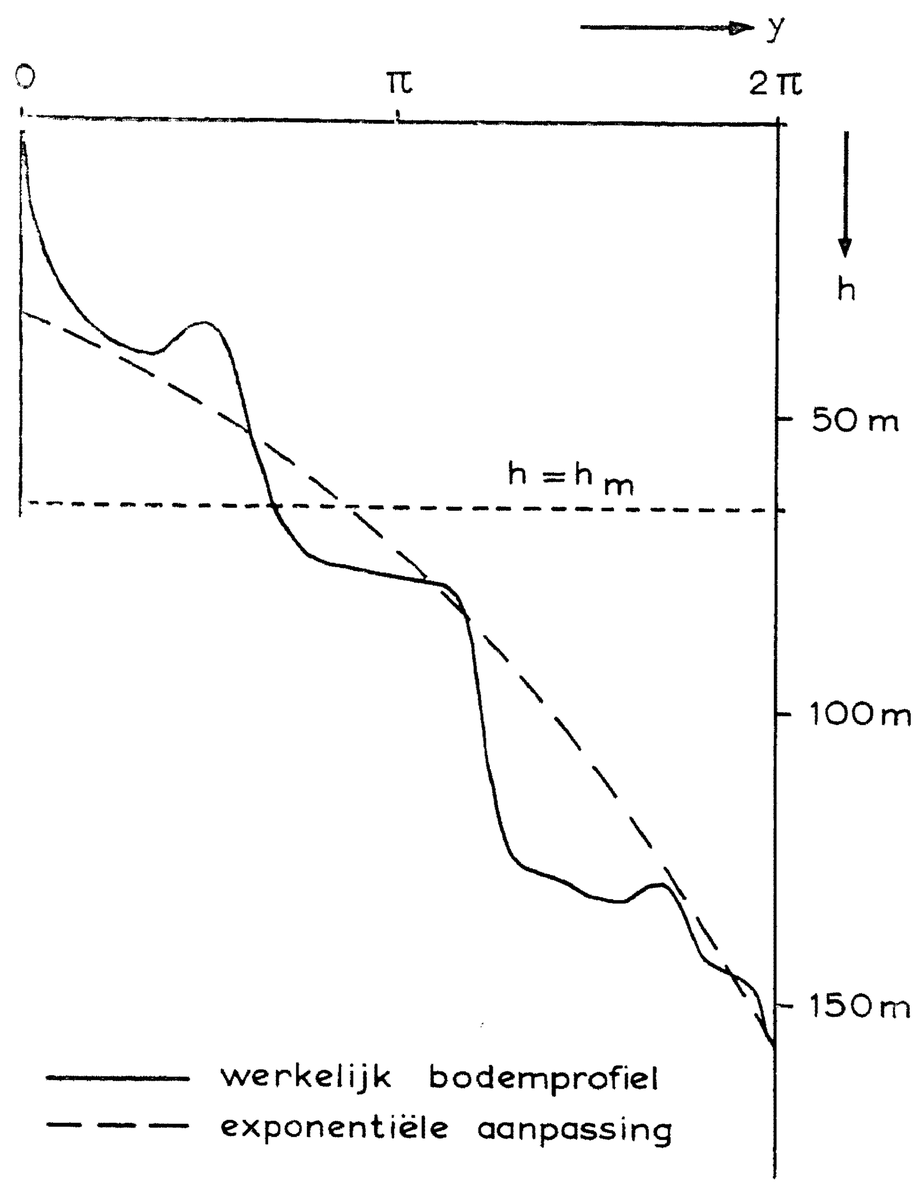
Om hierbij ook een indruk te krijgen van de invloed van de aardrotatie, zijn voor beide modellen de berekeningen nog eens uitgevoerd met $\Omega = 0$. De resultaten zijn:

Exponentiële diepte, geen aardrotatie

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g\, h_m\, \zeta\,(\tfrac{1}{2}\,a, 0) = \quad & 0{,}51\, U_1 + \\ & - 6{,}28\, V_0 \qquad - 4{,}04\, V_2; \end{aligned} \tag{5}$$

Uniforme diepte, geen aardrotatie

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} g\, h_m\, \zeta\,(\tfrac{1}{2}\,a, 0) = \quad & 0{,}26\, U_1 + \\ & - 6{,}28\, V_0 \qquad - 3{,}14\, V_2. \end{aligned} \tag{6}$$



Figuur 3.1.1. Bodemprofiel van de Noordzee

Het linkerlid van (3) en volgende geeft aan hoe de resultaten gewijzigd moeten worden, indien voor a en h_m andere getallenwaarden gekozen worden. Bij de gekozen getallenwaarden is:

$$\frac{\pi}{a} g\, h_m = 5{,}0 \,.\, 10^{-5} \text{ m/sec}^2. \tag{7}$$

Het verband tussen de schuifspanning en de windsnelheid op zeeniveau v_s is:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = 3{,}0 \,.\, 10^{-6}\, v_s^2 \text{ m}^2/\text{sec}^2. \tag{8}$$

De verhoging ζ vindt men aldus in meters.

Uit deze resultaten kan een aantal conclusies worden getrokken wat betreft de invloed van de niet-uniformiteit van de bodem (α) en de invloed van de draaiing van de aarde (Ω).

1. Bij een uniforme N-Z-wind hangt de verhoging aan de zuidkust niet af van bodemvariaties in de lengterichting en ook niet van de aardrotatie.
2. Bij een uniforme W-O-wind hebben α en vooral Ω een vrij grote invloed op de verhoging aan de zuidkust.
3. De voor een uniforme wind meest ongunstige richting wat betreft de verhoging aan de zuidkust wijkt ongeveer 15° naar het westen af van de noordelijke richting. Voor $\alpha = 0$ zou dit ca. 12° zijn.
4. De invloed van α en Ω op de bijdragen van de divergentietermen U_1 en V_2 tot de verhoging aan de zuidkust is matig.
5. De invloed van α en Ω op de bijdragen van de rotatietermen U_2 en V_1 tot de verhoging aan de zuidkust is aanzienlijk.

Dit hoofdstuk sluit aan bij vroegere onderzoekingen van SCHALKWIJK, VELTKAMP en WEENINK. SCHALKWIJK [30] beschouwt het model van een rechthoekige baai, waarbij zee en oceaan dezelfde uniforme diepte hebben. VELTKAMP [33] geeft van hetzelfde model een betere mathematische behandeling. Voorts beschouwt hij in een volgende publikatie [34] het geval, dat de oceaan een veel grotere diepte bezit dan de zee. In het bijzonder leidt VELTKAMP numerieke resultaten af voor o.a. de verhoging

aan de zuidkust ten gevolge van een lineair windveld. Hierbij vindt hij vrijwel dezelfde getallenwaarden als boven in (4). WEENINK [37] beschouwt een geval van een uniform windveld, dat zich slechts over een deel van het zeegebied uitstrekt. In zijn proefschrift behandelt WEENINK [38] o.a. het door ons beschouwde model met een op exponentiële wijze variërende diepte. Hierbij beperkt hij zich echter tot het in zijn vorige artikel vermelde type windveld.

In dit hoofdstuk worden de volgende punten behandeld.

In 3.2 wordt het probleem mathematisch geformuleerd, waarbij wordt uitgegaan van de in 2.2 gegeven algemene behandeling. De invloed van de componenten V_0 en V_2, welke zich wiskundig het gemakkelijkst laat behandelen, wordt besproken in 3.3. De invloed van de overige componenten wordt voor het model met uniforme diepte behandeld in 3.4 en voor het model met exponentiële diepte in 3.5. In beide gevallen kunnen de stroom en de verhoging afgeleid worden uit een potentiaal $\Phi(x, y)$, welke voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking (2) van 3.5 met de randvoorwaarden (5) en (6) van paragraaf 3.4. De oplossing (12) van 3.5 van dit probleem berust uiteindelijk op de bepaling van twee stelsels coëfficiënten c_n en d_n. De bepaling van de coëfficiënten c_n geeft geen moeilijkheden. Die van de coëfficiënten d_n daarentegen leidt tot aanzienlijke complicaties, welke in 3.6 behandeld worden. De verhoging aan de zuidkust kan met behulp van deze coëfficiënten gemakkelijk volgens (23) en (24) van 3.5 berekend worden. De numerieke toepassing wordt ten slotte in 3.8 behandeld.

3.2 Het mathematische probleem

Met inachtneming van de in 1.1 besproken vereenvoudigingen, waarbij echter de restrictie van de uniforme diepte is komen te vervallen, kan het probleem mathematisch geformuleerd worden met behulp van de differentiaalvergelijkingen (6) en (7) van 2.2, waarbij de termen met $\partial/\partial t$ in verband met de stationaire toestand afwezig zijn. Aldus heeft men:

$$\lambda u - \Omega v + gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} = U \tag{1}$$

$$\lambda v + \Omega u + gh\frac{\partial \zeta}{\partial y} = V \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Hierbij hangt h volgens (1) van 3.1 van y af. Het hiermede corresponderende harmonisch gemiddelde h_m is bepaald door

$$h_m = 2\,\alpha\, b\,(1 - e^{-2\alpha b})^{-1}\, h_0. \tag{4}$$

De randvoorwaarden zijn:

$$u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \text{ en } x = a, \tag{5}$$

$$v = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0, \tag{6}$$

$$\zeta = 0 \quad \text{voor} \quad y = b. \tag{7}$$

Het verband tussen de schuifspanning (U, V) en de windsnelheid op zeeniveau v_s is volgens (3) van 2.2 en (5) van 2.2:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = 3{,}0 \,.\, 10^{-6}\, v_s^2. \tag{8}$$

Een kleine vereenvoudiging wordt bereikt, indien x en y worden gemeten in eenheden van a/π. Dit betekent, dat formeel $a = \pi$ gesteld kan worden. De numerieke waarde van $g\, h_m$, welke 91 km/h bedraagt, moet in verband hiermede gewijzigd worden in $\pi\, g\, h_m/a$, of $5{,}0 \,.\, 10^{-3}$ m/sec^2.

3.3 Een bijzonder geval

Er bestaat een eenvoudige bijzondere oplossing van het in de vorige paragraaf gestelde probleem, waarbij de grootheden slechts van y afhangen. Dit is het geval voor het windveld

$$U = 0 \qquad V = V(y), \tag{1}$$

waarbij $V(y)$ een *willekeurige* functie van y is. We kunnen nu zelfs toelaten, dat λ, Ω en h op willekeurige wijze van y afhangen. De bedoelde oplossing is:

$$u = 0 \qquad v = 0 \tag{2}$$

en

$$g\,\zeta\,(x, y) = -\int_y^b h^{-1}(\eta)\,V(\eta)\,d\eta. \tag{3}$$

In dit geval is er bij de stationaire toestand geen stroom en de stationaire opwaaiing is onafhankelijk van λ en Ω. Is in het bijzonder V gelijk aan een constante V_0, dan volgt uit (3) voor de verhoging aan de zuidkust

$$g\,h_m\,\zeta\,(x, 0) = -b\,V_0. \tag{4}$$

Hetzelfde resultaat wordt klaarblijkelijk verkregen voor een model met de uniforme diepte $h = h_m$. Dit is dan ook de reden waarom het in de inleiding genoemde model met (1) van 3.1 vergeleken wordt met het model $h = h_m$.

Kiezen we voorts het lineaire windveld

$$U = 0 \qquad V = V_0 + V_2\,(1-y/b), \tag{5}$$

dan volgt uit (3):

$$g\,h_m\,\zeta\,(x, 0) = -b\,V_0 - b\,(1-y_m/b)\,V_2, \tag{6}$$

waarbij

$$y_m = b^{-1}\,h_m \int_0^b h^{-1}(\eta)\,\eta\,d\eta. \tag{7}$$

In het numerieke geval, waarbij h door (1) van 3.1 gegeven is, vinden we uit (6) en (7):

$$g\,h_m\,\zeta\,(x, 0) = -6{,}28\,V_0 - 4{,}04\,V_2. \tag{8}$$

Voor het model met uniforme diepte $h = h_m$ is:

$$g\,h_m\,\zeta\,(x, 0) = -6{,}28\,V_0 - 3{,}14\,V_2. \tag{9}$$

3.4 Het model met uniforme diepte

Op grond van (3) van 3.2 bestaat er een stroomfunctie $\Phi\,(x, y)$, waaruit u en v als volgt afgeleid kunnen worden:

$$\lambda u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad \lambda v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{1}$$

Aangezien de kust, bestaande uit de stukken $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, een stroomlijn is, mogen we daar $\Phi = 0$ kiezen.

Uit (1) en (2) van 3.2 volgt na eliminatie van ζ:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = R/\lambda \tag{2}$$

met

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{3}$$

Hierbij stelt R dus de rotatie van de windkracht voor. Bij de nu volgende behandeling is het essentieel, dat R een constante is. Dit is o.a. het geval bij een lineair windveld zoals (1) van 3.1. Het is, althans in deze paragraaf, niet nodig deze specialisatie te maken. Substitutie van (1) in (2) geeft voor Φ de partiële differentiaalvergelijking:

$$\Delta\,\Phi = R \tag{4}$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn:

$$\Phi = 0 \qquad \text{voor} \quad x = 0,\, x = \pi,\, y = 0 \tag{5}$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\Omega}{\lambda}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -U\,(x, b) \qquad \text{voor} \quad y = b. \tag{6}$$

De laatste voorwaarde volgt gemakkelijk uit (1) en (6) van 3.2 en (1).
Zoals in 2.1 besproken is, geeft de scheve randvoorwaarde (6) de grootste moeilijkheden.
Ter oplossing van het bovengenoemde probleem stellen we

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \Phi_1(x, y), \tag{7}$$

waarbij Φ_0 een particuliere oplossing van (4) is, welke aan de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = \pi$ voldoet. De functie Φ_1 voldoet dus aan de homogene vergelijking van Laplace, te weten $\Delta\Phi = 0$, en aan de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = \pi$. We kunnen Φ_1 opbouwen uit de elementaire oplossingen

$$\sin nx\, e^{\pm ny} \tag{8}$$

met $n = 1, 2, 3 \ldots$

Voor Φ_0 kunnen we gemakkelijk een geschikte functie vinden. We definiëren:

$$\varphi_0(x) = \tfrac{1}{2}\, x\,(\pi - x). \tag{9}$$

Dan is dus bijv.

$$\Phi_0 = -R\,\varphi_0(x).$$

We stellen dus:

$$\Phi(x, y) = -R\,\varphi_0(x) + \sum_1^\infty c_n \sin nx\, e^{-ny} - \sum_1^\infty d_n \sin nx\, e^{-n(b-y)}. \tag{10}$$

De coëfficiënten c_n en d_n moeten nu bepaald worden met behulp van de randvoorwaarde bij $y = 0$ (kustvoorwaarde) en die bij $y = b$ (oceaanvoorwaarde).

De kustvoorwaarde geeft:

$$\sum_1^\infty c_n \sin nx = R\,\varphi_0(x) + O(e^{-b}), \tag{11}$$

waarbij de ordeterm de bijdragen van de coëfficiënten d_n bevat. Hierbij treden de factoren e^{-nb} op, welke voor voldoend grote b zeer klein zijn. Hoewel we in dit theoretische deel nog niet de specialisatie $b = 2\pi$ willen doorvoeren, gaan we er van uit, dat b zo groot is, dat de ordeterm feitelijk weggelaten kan worden. We merken op, dat bij de numerieke toepassing $e^{-b} = 0{,}002$. Uit (11) volgt met verwaarlozing van de ordeterm:

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ even} \\ \dfrac{4R}{\pi n^3} & \text{voor } n \text{ oneven.} \end{cases} \tag{12}$$

De oceaanvoorwaarde (6) geeft met een analoge ordeterm:

$$\sum_1^\infty n\, d_n \left(\sin nx + \frac{\Omega}{\lambda}\cos nx\right) = U(x, b) - R\,\frac{\Omega}{\lambda}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) + O(e^{-b}). \tag{13}$$

Reeksontwikkelingen van het type (13) zijn behandeld door LAUWERIER [18]. We vermelden in het bijzonder het aldaar afgeleide resultaat, dat d_n het volgende asymptotische gedrag bezit:

$$d_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2-2\mu}} D' + \frac{1}{n^{2+2\mu}} D'' + O(n^{-4+2\mu}) \tag{14}$$

waarbij

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\lambda} \tag{15}$$

Op de oceaanvoorwaarde en op de berekening van de coëfficiënten d_n komen we in 3.7 nader terug.

We zullen in het bijzonder de verhoging aan de kust $y = 0$ bestuderen. Uit (1) van 3.2 volgt voor $y = 0$

$$gh\,\frac{\partial\zeta}{\partial x} = U(x, 0) + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{16}$$

zodat:

$$gh\,\{\zeta(x, 0) - \zeta(0, 0)\} = \int_0^x U(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\Phi(\xi, 0)\, d\xi \tag{17}$$

Substitutie van (10) geeft na enige herleiding:

$$gh\,\{\zeta\,(x,0)-\zeta\,(0,0)\}=\int_0^x U\,(\xi,0)\,d\xi-\sum_1^\infty c_n\,(1-\cos nx)+O\,(e^{-b}), \tag{18}$$

waarbij de coëfficiënten c_n door (12) gegeven zijn. Het blijkt uit deze betrekking, dat de *relatieve* verhoging aan de zuidkust vrijwel onafhankelijk is van b, d.w.z. van de positie van de oceaan. De absolute verhoging aan de zuidkust volgt door integratie van (2) van 3.2 langs de westkust:

$$gh\,\zeta\,(0,0)=-\int_0^b V\,(0,\eta)\,d\eta+\int_0^b \frac{\partial}{\partial x}\,\Phi\,(0,\eta)\,d\eta. \tag{19}$$

Substitutie van (10) geeft:

$$gh\,\zeta\,(0,0)=-\int_0^b V\,(0,\eta)\,d\eta-\tfrac{1}{2}\pi\,bR+\sum_1^\infty (c_n-d_n)+O\,(e^{-b}). \tag{20}$$

3.5 Het model met exponentiële diepte

De behandeling van dit model loopt vrijwel analoog aan die van het model met uniforme diepte. We voeren weer met behulp van (1) van 3.4 een stroomfunctie $\Phi\,(x,y)$ in, welke aan de kust nul is. Uit (1) en (2) van 3.2 volgt nu echter met inachtneming van (1) van 3.1:

$$\lambda\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2\alpha\,\lambda\,u-2\alpha\,\Omega v=R+2\alpha\,U, \tag{1}$$

waarbij R door (3) van 3.4 gegeven is.

Substitutie van (1) van 3.4 geeft:

$$\Lambda\,\Phi-2A\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}-2\alpha\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}=R+2\alpha\,U, \tag{2}$$

waarbij

$$A\overset{\text{def}}{=}\alpha\Omega/\lambda \tag{3}$$

De bijbehorende randvoorwaarden zijn als in 3.4:

$$\Phi=0 \qquad \text{voor} \quad x=0,\,x=\pi,\,y=0 \tag{4}$$

en

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\Omega}{\lambda}\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-\,U\,(x,b) \qquad \text{voor} \quad y=b. \tag{5}$$

Bij de behandeling van dit model gaan we uit van het lineaire windveld (2) van 3.1. Met weglating van de componenten V_0 en V_2, welke in 3.3 besproken zijn, is dus:

$$\left.\begin{aligned} U&=U_0+U_1\,(1-2x/\pi)+U_2\,(1-y/b)\\ V&=\qquad\;\; V_1\,(1-2x/\pi).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

De rotatie R is nu expliciet:

$$R=-\frac{2}{\pi}\,V_1+\frac{1}{b}\,U_2. \tag{7}$$

In overeenstemming met de in 3.4 gevolgde methodiek zoeken we eerst een eenvoudige particuliere oplossing $\Phi_0\,(x,y)$ van (2), welke aan de randvoorwaarden bij $x=0$ en $x=\pi$ voldoet. Deze oplossing kunnen we samenstellen uit de in (9) van 3.4 gedefinieerde functie $\varphi_0\,(x)$ en de volgende functie:

$$\varphi_1\,(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{\pi}{2A}\left(\frac{e^{2Ax}-1}{e^{2A\pi}-1}-\frac{x}{\pi}\right). \tag{8}$$

Hieronder vermelden we het resultaat bij substitutie in het linkerlid van (2):

$$\varphi_0(x) \to -(1 + A\pi) + 2Ax,$$

$$\varphi_1(x) \to 1,$$

$$x\,\varphi_1(x) \to \left(\frac{2\pi}{e^{2A\pi}-1} - \frac{1}{A}\right) + 3x + 2A\,\varphi_1(x),$$

$$y\,\varphi_1(x) \to y - 2\alpha\,\varphi_1(x).$$

Hieruit volgt dus voor $\Phi_0(x, y)$ de uitdrukking:

$$\Phi_0(x, y) = (R + 2\alpha\,U_0)\,\varphi_1 - \frac{2\alpha\,U_1}{A\pi}(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{2\alpha\,U_2}{A\,b}\Big\{(A\,(b-y) - \alpha x)\,\varphi_1 +$$

$$+ \frac{3\alpha}{2A}(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{\alpha}{A}\left(\frac{2A\pi}{e^{2A\pi}-1} - 1 + \frac{3}{2}A\pi\right)\varphi_1\Big\}. \tag{9}$$

De elementaire oplossingen van de bij (2) behorende homogene vergelijking zijn:

$$e^{Ax}\sin nx\,e^{(\alpha+\mu_n)y} \tag{10}$$

met $n = 1, 2, 3 \ldots$,
waarbij

$$\mu_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt{n^2 + A^2 + \alpha^2}. \tag{11}$$

We stellen nu naar analogie van (10) van 3.4:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + e^{Ax}\sum_1^\infty c_n \sin nx\,e^{-y(\mu_n-\alpha)} - e^{Ax}\sum_1^\infty d_n \sin nx\,e^{-(b-y)(\mu_n+\alpha)} \tag{12}$$

De kustvoorwaarde (4) bij $y = 0$ geeft:

$$\sum_1^\infty c_n \sin nx = -e^{-Ax}\,\Phi_0(x, 0) + O(e^{-b}), \tag{13}$$

zodat met weglating van de ordeterm:

$$c_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-A\xi}\sin n\xi\,\Phi_0(\xi, 0)\,d\xi. \tag{14}$$

Uit (14) en (9) kan gemakkelijk een expliciete uitdrukking voor c_n afgeleid worden. Daar deze uitdrukking alleen voor de numerieke toepassing van belang is, laten we hem weg en vermelden hier slechts het asymptotisch gedrag van c_n, namelijk

$$c_n = \frac{2}{\pi n^3}\{R + 2\alpha(U_0 + U_1 + U_2)\} +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{2e^{-A\pi}}{\pi n^3}\{R + 2\alpha(U_0 - U_1 + U_2)\} + O(n^{-5}). \tag{15}$$

De oceaanvoorwaarde (5) leidt tot een resultaat, dat in de volgende vorm gebracht kan worden:

$$\sum_1^\infty \frac{n\,d_n}{\mu_n - \alpha}\frac{d}{dx}\left\{e^{Ax}\left(-\cos nx + \frac{\Omega\mu_n}{\lambda n}\sin nx\right)\right\} =$$

$$= U(x, b) + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\Omega}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_0(x, b) + O(e^{-b}). \tag{16}$$

In sommige opzichten is de geïntegreerde vorm van (16) bruikbaarder, te weten

$$\sum_1^\infty D_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) = f(x) + O(e^{-b}), \tag{17}$$

met

$$D_n \overset{\text{def}}{=} \mu_n (\mu_n - \alpha)^{-1} d_n, \tag{18}$$

$$\theta_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda n}{\Omega \mu_n} \tag{19}$$

en

$$e^{Ax} f(x) = C + \frac{\lambda}{\Omega} \int_0^x U(\xi, b)\, d\xi + \Phi_0(x, b) + \frac{\lambda}{\Omega} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \Phi_0(\xi, b)\, d\xi, \tag{20}$$

waarbij C een integratieconstante is.

In 3.6 komen we uitvoeriger op de behandeling van de reeksen (16) en (17) terug. We vermelden hier alleen het asymptotisch gedrag van d_n, namelijk

$$d_n = \frac{(-1)^{n-1} D'}{n^{2-2\mu}} + O(n^{-3+2\mu}), \tag{21}$$

waarbij D' een constante is, en waarbij

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\lambda}. \tag{22}$$

Voor de relatieve verhoging aan de zuidkust volgt uit (1) van 3.2 als in de vorige paragraaf (zie (17) van 3.4):

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = \int_0^x U(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\xi, 0)\, d\xi. \tag{23}$$

Substitutie van (9) en (12) geeft de expliciete uitdrukking:

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = x(U_0 + U_2) + \frac{2}{\pi} U_1 \varphi_0(x) - \frac{2\alpha}{b} U_2 \int_0^x \varphi_1(\xi)\, d\xi +$$
$$- \sum_1^\infty (\mu_n - \alpha) c_n \int_0^x e^{A\xi} \sin n\xi\, d\xi + O(e^{-b}). \tag{24}$$

De absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) volgt door integratie van (2) van 3.2 langs de westkust (vergelijk (20) van 3.4):

$$gh_0 \zeta(0, 0) = -\int_0^b e^{-2\alpha\eta} V(0, \eta)\, d\eta + \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(0, \eta)\, d\eta. \tag{25}$$

Substitutie van (12) geeft de uitdrukking:

$$gh_0 \zeta(0, 0) = -\frac{1 - e^{-2\alpha b}}{2\alpha} V_1 + \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0(0, \eta)\, d\eta +$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{n}{\mu_n + \alpha} c_n - e^{-2\alpha b} \sum_1^\infty \frac{n}{\mu_n - \alpha} d_n + O(e^{-b}). \tag{26}$$

De substitutie van (9) hebben we nagelaten in verband met de bewerkelijkheid van deze vorm.

3.6 De oceaanvoorwaarde

We bespreken hier enige eigenschappen van de ontwikkeling

$$f(x) = \sum_1^\infty b_n (\sin nx + \theta_n \cos nx), \qquad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

welke optreedt in de oceaanvoorwaarde (13) van 3.4 en (17) van 3,5. Een uitvoerige behandeling van deze ontwikkeling wordt gegeven door LAUWERIER [18]. Hier beperken we ons tot enkele, voor dit onderzoek belangrijk zijnde eigenschappen.

We beschouwen eerst een ontwikkeling, waarbij θ_n niet van n afhangt. We kunnen dan (1) schrijven als

$$f(x) = \sum_1^\infty b_n \sin(nx + \mu\pi), \tag{2}$$

waarbij we veronderstellen dat $0 < \mu < \frac{1}{2}$. Het geval $-\frac{1}{2} < \mu < 0$ volgt gemakkelijk hieruit met behulp van de transformatie $x \to \pi - x$. Indien of $\mu = 0$ of $\mu = \frac{1}{2}$ reduceert de ontwikkeling zich tot een zuivere sinus- of cosinusreeks.

Een belangrijk speciaal geval van (2) kan gemakkelijk als volgt verkregen worden. We gaan uit van de machtreeksontwikkeling

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^\beta = \sum_0^\infty e_n(\beta)\, s^n. \tag{3}$$

De eerste coëfficiënten zijn:

$$e_0(\beta) = 1 \qquad e_1(\beta) = 2\beta \qquad e_2(\beta) = 2\beta^2, \ldots$$

Voorts bestaat de recurrente betrekking:

$$n\, e_n(\beta) = 2\beta\, e_{n-1}(\beta) + (n-2)\, e_{n-2}(\beta),$$

geldig voor $n \geqq 2$.

Men kan afleiden, dat voor $n \to \infty$ de coëfficiënt $e_n(\beta)$ zich gedraagt als

$$e_n(\beta) = \frac{2^\beta}{\Gamma(\beta)\, n^{1-\beta}} + \frac{(-1)^n\, 2^{-\beta}}{\Gamma(-\beta)\, n^{1+\beta}} + O(n^{-3+\beta}), \tag{4}$$

mits $0 < \beta < 1$.

Stelt men in (3) nu $\beta = -2\mu$ en $s = e^{ix}$ dan volgt na enige herleiding, dat

$$\sum_0^\infty e_n(-2\mu) \sin(nx + \mu\pi) = 0, \tag{5}$$

hetgeen ook als

$$\sin \mu\pi = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} e_n(2\mu) \sin(nx + \mu\pi) \tag{6}$$

geschreven kan worden.

Op soortgelijke wijze kan uit (3) het volgende resultaat worden afgeleid:

$$\int_0^\pi (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t)^{1-2\mu} \sin(nt + \mu\pi)\, dt = 0 \tag{7}$$

voor $n = 1, 2, 3 \ldots$

De functie $k_0(x) = (\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)^{1-2\mu}$ is de eerste van het stelsel functies $k_m(x)$, welke biorthogonaal zijn met betrekking tot het stelsel $\sin(nx + \mu\pi)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Zonder bewijs vermelden we dat de overige orthogonale functies bepaald zijn door

$$k_m(x) = 2 \operatorname{cotg}^{2\mu} \tfrac{1}{2}x \sum_1^m e_{m-j}(-2\mu) \sin jx, \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \tag{8}$$

De orthogonaliteit wordt dan uitgedrukt door

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi k_m(t) \sin(nt + \mu\pi)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{9}$$

Met behulp van het biorthogonale stelsel $k_m(x)$ kan voor de coëfficiënten van de ontwikkeling (2) een expliciete uitdrukking worden gegeven, namelijk

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi k_n(t) f(t)\, dt. \tag{10}$$

Zonder bewijs vermelden we de asymptotische voorstelling van b_n. Deze is:

$$b_n = -\frac{e_n(-2\mu)}{\pi}\int_0^\pi (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t)^{1-2\mu} f(t)\,dt + \frac{B'}{n^{1+2\mu}} + O(n^{-3+2\mu}), \tag{11}$$

waarbij B' een constante is.

In het algemeen is de ontwikkeling (2) dus langzaam convergent, waarbij b_n de subharmonische orde $1-2\mu$ bezit. Is echter

$$\int_0^\pi (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t)^{1-2\mu} f(t)\,dt = 0, \tag{12}$$

dan heeft b_n de hyperharmonische orde $1 + 2\mu$.

Met behulp van (6) en (11) kan nog het volgende bijzondere geval worden afgeleid:

$$\tfrac{1}{2}\pi - x = \sum_1^\infty g_n \sin(nx + \mu\pi), \tag{13}$$

waarbij

$$g_n = -\frac{e_n(-2\mu)}{\pi}\int_0^\pi (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t)^{1-2\mu}(\tfrac{1}{2}\pi - t)\,dt + \frac{e_n(1-2\mu)}{n\cos\mu\pi}. \tag{14}$$

We komen nu tot de bespreking van de oceaanvoorwaarde (13) van 3.4.

Met weglating van de ordeterm kan deze voorwaarde geschreven worden als:

$$\sum_1^\infty n\,d_n \sin(nx + \mu\pi) = U(x, b)\cos\mu\pi - R(\tfrac{1}{2}\pi - x)\sin\mu\pi, \tag{15}$$

waarbij μ door (15) van 3.4 bepaald is.

Aangezien het rechterlid van (15) een lineaire functie van x is, kan met behulp van (6) en (13) voor d_n gemakkelijk een expliciete uitdrukking worden afgeleid. Men vindt:

$$d_n = -\frac{\lambda\, e_n(-2\mu)}{\Omega\, n} U_0 + \left(\frac{2\lambda}{\pi\Omega} U_1 - R\right)\frac{g_n \sin\mu\pi}{n}. \tag{16}$$

Aangezien uiteindelijk blijkens (20) van 3.4 alleen de berekening van $\sum_1^\infty d_n$ nodig is, moeten slechts drie uitdrukkingen bepaald worden, te weten:

$$\int_0^\pi (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t)^{1-2\mu}(\tfrac{1}{2}\pi - t)\,dt, \tag{17}$$

$$\sum_1^\infty n^{-1} e_n(-2\mu) \quad \text{en} \quad \sum_1^\infty n^{-2} e_n(1-2\mu). \tag{18}$$

Hierbij kan alleen voor de eerste som een eenvoudige analytische uitdrukking afgeleid worden, namelijk:

$$\sum_1^\infty n^{-1} e_n(-2\mu) = \psi(\tfrac{1}{2}) - \psi(\tfrac{1}{2} + \mu), \tag{19}$$

waarbij

$$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \Gamma'(x) / \Gamma(x).$$

De eigenschappen van de algemenere ontwikkeling (1) kunnen gemakkelijk uit die van (2) afgeleid worden, indien θ_n nagenoeg constant is.

We nemen aan dat

$$\theta_n = \theta + O(n^{-2}) \tag{20}$$

en dat $\theta > 0$ is. Het geval $\theta < 0$ kan hieruit weer afgeleid worden met behulp van de transformatie $x \to \pi - x$. We kunnen nu (1) schrijven als:

$$\sum_1^\infty b_n(\sin nx + \theta\cos nx) = f_1(x) \tag{21}$$

met

$$f_1(x) = f(x) - \sum_1^\infty b_n(\theta_n - \theta)\cos nx. \tag{22}$$

Op (21) kan bijvoorbeeld het resultaat (11) toegepast worden. Nu is $f_1(x)$ weliswaar in $x = \pi$ enigszins singulier, maar de invloed hiervan is slechts in de hogere termen van de asymptotische ontwikkeling (11) merkbaar. Dan is

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1} B}{n^{1-2\mu}} + \frac{B'}{n^{1+2\mu}} + \ldots, \tag{23}$$

waarbij B en B' van $f(x)$ afhangende constanten zijn.

We bespreken ten slotte de toepassing van het bovenstaande op de oceaanvoorwaarde (17) van 3.9. Hierbij is aan de voorwaarde (20) voldaan, hetgeen in feite de reden is, dat (17) van 3.5 te verkiezen is boven (16) van 3.5. Bij de toepassing van (23) op (17) van 3.5 moet men bedenken, dat de integratieconstante C in (20) van 3.5 zodanig is, dat $B = 0$. Dan heeft men:

$$D_n = \frac{(-1)^{n-1} D'}{n^{2-2\mu}} + O(n^{2-2\mu}), \tag{24}$$

waaruit met een iets slechtere ordeterm (21) van 3.5 volgt.

Het resultaat (24) is van groot belang voor de numerieke bepaling van de coëfficiënten d_n van (12) van 3.5. We zullen op deze numerieke bepaling hier niet verder ingaan maar volstaan met te verwijzen naar een soortgelijke behandeling in 4.6.

3.7 Het probleem zonder aardrotatie

Om een indruk te krijgen van de invloed van de aardrotatie, is het van belang het model met $\Omega = 0$ te beschouwen. In de mathematische behandeling, welke analoog is aan die van het algemene geval $\Omega \neq 0$, treden aanzienlijke vereenvoudigingen op. In grote lijnen verloopt deze als volgt. De stroomfunctie $\Phi(x, y)$ is bepaald door

$$\Delta\Phi - 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} = R + 2\alpha U, \tag{1}$$

met de randvoorwaarden

$$\Phi = 0 \qquad \text{voor} \quad x = 0, x = \pi, y = 0 \tag{2}$$

en

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -U(x, b) \qquad \text{voor} \quad y = b. \tag{3}$$

In overeenstemming met (12) en (9) van 3.5 stellen we:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \sum_1^\infty c_n \sin nx\, e^{-y(\mu_n - \alpha)} - \sum_1^\infty d_n \sin nx\, e^{-(b-y)(\mu_n + \alpha)}, \tag{4}$$

waarbij nu

$$\mu_n = \sqrt{n^2 + \alpha^2} \tag{5}$$

en

$$\Phi_0(x, y) = -\left\{ R + 2\alpha U_0 + \frac{2}{3}\alpha \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) U_1 + 2\alpha \left(1 - \frac{y}{b}\right) U_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2\alpha^2}{3b} (\varphi_0(x) + \tfrac{1}{2}\pi^2) \right\} \varphi_0(x). \tag{6}$$

De kustvoorwaarde bij $y = 0$ geeft in overeenstemming met (13) van 3.5:

$$\sum_1^\infty c_n \sin nx = -\Phi_0(x, 0) + O(e^{-b}). \tag{7}$$

Ten behoeve van de berekening van de coëfficiënten merken we op, dat

$$\int_0^\pi \varphi_0(x) \sin nx\, dx = \{ 1 - (-1)^n \} n^{-5}, \tag{8}$$

$$\int_0^\pi \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \varphi_0(x) \sin nx\, dx = 3 \{ 1 + (-1)^n \} n^{-3}, \tag{9}$$

$$\int_0^\pi \{ \varphi^2{}_0(x) + \tfrac{1}{2}\pi^2 \varphi_0(x) \} \sin nx\, dx = 6 \{ 1 - (-1)^n \} n^{-5} \tag{10}$$

Met behulp hiervan volgt gemakkelijk, dat met verwaarlozing van de termen van de orde e^{-b}:

$$\left.\begin{aligned} c_n &= \frac{8\alpha}{\pi n^3} U_1 && \text{voor even } n, \\ c_n &= \frac{8\alpha}{\pi n^3} U_0 - \frac{8}{\pi^2 n^3} V_1 + \left\{\left(2\alpha + \frac{1}{b}\right) \frac{4}{\pi n^3} + \frac{16\alpha^2}{b\pi n^5}\right\} U_2 && \text{voor oneven } n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

De oceaanvoorwaarde (3) geeft:

$$\sum_1^\infty (\mu_n + \alpha)\, d_n \sin nx = U_0 + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) U_1 + \frac{2\alpha}{b} \varphi_0(x)\, U_2 + O(e^{-b}), \tag{12}$$

waaruit gemakkelijk volgt, dat

$$\left.\begin{aligned} (\mu_n + \alpha)\, d_n &= \frac{4}{\pi n} U_1 && \text{voor even } n, \\ (\mu_n + \alpha)\, d_n &= \frac{4}{\pi n} U_0 + \frac{8\alpha}{b\pi n^3} U_2 && \text{voor oneven } n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Voor de relatieve verhoging aan de zuidkust luidt het aequivalent van (24) van 3.5:

$$gh_0 \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = x(U_0 + U_2) + \frac{2}{\pi} U_1 \varphi_0(x) + \frac{2\alpha}{b} U_2 \int_0^x \varphi_0(\xi)\, d\xi + \\ - \sum_1^\infty \frac{\mu_n - \alpha}{n} c_n (1 - \cos nx) + O(e^{-b}). \tag{14}$$

Voor de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) geldt de uitdrukking (26) van 3.5. Het blijkt mogelijk voor de verhoging in het midden van de zuidkust een zeer eenvoudige uitdrukking te vinden. Uit (26) van 3.5 en (14) volgt na enige herleiding

$$gh_0\, \zeta(\tfrac{1}{2}\pi, 0) = \tfrac{1}{2}\pi (U_0 + \tfrac{1}{2} U_1 + U_2) + \frac{\alpha\pi^3}{24b} U_2 + \\ - \frac{1 - e^{-2\alpha b}}{2\alpha} \left\{ \alpha\pi\, U_0 + \frac{1}{3}\alpha\pi\, U_1 + \left(\frac{\pi}{2b} + \alpha\pi + \frac{\alpha^2\pi^3}{6b}\right) U_2 \right\} + \\ + \frac{\alpha\pi}{b} \int_0^b e^{-2\alpha\eta} \eta\, d\eta\, U_2 + \sum_1^\infty \frac{\mu_n - \alpha}{n} c_n \cos \tfrac{1}{2} n\pi - e^{-2\alpha b} \sum_1^\infty \frac{\mu_n + \alpha}{n} d_n + O(e^{-b}). \tag{15}$$

Substitutie van (11) en (13) leidt ten slotte tot

$$gh_0\, \zeta(\tfrac{1}{2}\pi, 0) = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{8\alpha}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\mu_n - \alpha}{n^4} \cos \tfrac{1}{2} n\pi \right\} U_1 + O(e^{-b}). \tag{16}$$

Wij zien dus, dat in het midden van de zuidkust de bijdrage van de componenten U_0, U_2 en V_1 verdwijnt.

3.8 Numerieke toepassingen

3.8.1 *Het model met uniforme diepte*

Uit (18) en (12) van 3.4 volgt voor de relatieve verhoging aan de zuidkust:

$$gh_m \{ \zeta(x, 0) - \zeta(0, 0) \} = xU_0 + \left(x - \frac{x^2}{\pi}\right) U_1 + xU_2 - \frac{4R}{\pi} \Sigma' \frac{1 - \cos nx}{n^3} \tag{1}$$

waarbij Σ' de sommatie over oneven waarden van n aanduidt. Schrijven we:

$$gh_m\{\zeta(x, 0) - \zeta(0, 0)\} = C_0U_0 + C_1U_1 + C_2U_2 + D_0V_0 + D_1V_1 + D_2V_2, \tag{2}$$

waarin volledigheidshalve ook de bijdrage van de in 3.3 besproken componenten V_0 en V_2 is opgenomen, dan kan uit (1) de volgende tabel worden afgeleid.

Tabel 3.8.1
De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met uniforme diepte

$8x/\pi$	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2
0	0	0	0	0	0	0
1	0,39	0,34	0,37	0	0,10	0
2	0,78	0,59	0,71	0	0,30	0
3	1,18	0,74	1,04	0	0,56	0
4	1,57	0,78	1,36	0	0,85	0
5	1,96	0,74	1,68	0	1,14	0
6	2,36	0,59	2,01	0	1,40	0
7	2,75	0,34	2,35	0	1,61	0
8	3,14	0	2,73	0	1,64	0

Uit (20) van 3.4 volgt voor de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0):

$$gh_m \zeta(0,0) = -\tfrac{1}{2}\pi U_2 + \sum_1^\infty (c_n - d_n). \tag{3}$$

De reeks $\sum_1^\infty c_n$ kan gemakkelijk gesommeerd worden. Men vindt:

$$\sum_1^\infty c_n = 1{,}339\, R. \tag{4}$$

De berekening van de reeks $\sum_1^\infty d_n$ is beschreven in 3.6. Uit (16) van 3.6 volgt:

$$\sum_1^\infty d_n = -\frac{1}{5} U_0 \sum_1^\infty n^{-1} e_n(-2\mu) + \left(\frac{2}{5\pi} U_1 - R\right) \sin \mu\pi \sum_1^\infty n^{-1} g_n, \tag{5}$$

waarbij $\mu = \pi^{-1} \operatorname{arctg} 5 = 0{,}473$.

Uit (19) van 3.6 volgt:

$$-\sum_1^\infty n^{-1} e_n(-2\mu) = \psi(0{,}973) - \psi(\tfrac{1}{2}) = 1{,}278 \tag{6}$$

Uit (14) van 3.6 volgt:

$$\sin \mu\pi \sum_1^\infty n^{-1} g_n = -G \sum_1^\infty n^{-1} e_n(-2\mu) + 5 \sum_1^\infty n^{-2} e_n(1 - 2\mu), \tag{7}$$

waarbij

$$G = \pi^{-1} \sin \mu\pi \int_0^\pi (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t)^{1-2\mu} (\tfrac{1}{2}\pi - t)\, dt.$$

Numerieke integratie geeft $G = -0{,}169$.

De reeks $\sum_1^\infty n^{-2} e_n (1 - 2\mu)$ kan rechtstreeks berekend worden. We vinden hiervoor de waarde 0,275.

Ten slotte is dan

$$\sum_1^\infty d_n = 0{,}256\, U_0 + 1{,}160\,(0{,}127\, U_1 - R). \tag{8}$$

Substitutie van (4) en (8) in (3) geeft uiteindelijk

$$-gh_m\, \zeta\,(0{,}0) = 0{,}26\, U_0 + 0{,}15\, U_1 + 1{,}17\, U_2 + 6{,}28\, V_0 + 1{,}59\, V_1 + 3{,}14\, V_2, \tag{9}$$

waarbij ter wille van de volledigheid ook de bijdrage van de in 3.3 besproken componenten V_0 en V_2 opgenomen is.

Uit tabel 3.8.1 en formule (9) kan men o.a. de verhoging in het midden van de zuidkust bepalen. De uitdrukking hiervoor is gegeven door formule (4) van 3.1.

3.8.2 *Het model met exponentiële diepte*

Voor de relatieve verhoging aan de zuidkust geldt de uitdrukking (24) van 3.5, die we hier nogmaals, zonder de ordeterm, opschrijven:

$$gh_0 \{ \zeta\,(x, 0) - \zeta\,(0, 0) \} = xU_0 + \left(x - \frac{x^2}{\pi}\right) U_1 + xU_2 + \\ - \frac{2\alpha}{b}\, U_2 \int_0^x \varphi_1(\xi)\, d\xi - \sum_1^\infty (\mu_n - \alpha)\, c_n \int_0^x e^{A\xi} \sin n\xi\, d\xi. \tag{10}$$

De coëfficiënten c_n kunnen met behulp van (14) en (9) van 3.5 berekend worden. Zij zijn lineaire uitdrukkingen in U_0, U_1, U_2, V_1, waarvan de respectieve factoren in tabel 3.8.2 voor enige waarden van n gegeven zijn.

Tabel 3.8.2
Enkele ontwikkelingscoëfficiënten

c_k	U_0	U_1	U_2	V_1
c_1	0,094	0,017	0,154	— 0,239
c_2	0,014	0,016	0,022	— 0,036
c_3	0,006	0,004	0,010	— 0,016
c_4	0,002	0,003	0,003	— 0,005
c_5	0,001	0,001	0,002	— 0,004

De integralen in het rechterlid van (10) kunnen in elementaire functies uitgedrukt worden en zijn aldus gemakkelijk te berekenen. Schrijven we naar analogie van (2)

$$gh_0 \{\zeta\,(x, 0) - \zeta\,(0{,}0)\} = C_0U_0 + C_1U_1 + C_2U_2 + D_0V_0 + D_1V_1 + D_2V_2, \tag{11}$$

dan kan tabel 3.8.3 samengesteld worden.

Tabel 3.8.3
De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte

$8x/\pi$	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2
0	0	0	0	0	0	0
1	0,37	0,33	0,36	0	0,05	0
2	0,70	0,54	0,66	0	0,21	0
3	1,02	0,66	0,93	0	0,40	0
4	1,33	0,69	1,21	0	0,62	0
5	1,63	0,64	1,46	0	0,86	0
6	1,93	0,52	1,73	0	1,06	0
7	2,24	0,29	1,99	0	1,31	0
8	2,59	— 0,04	2,33	0	1,40	0

Voor de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) geldt de uitdrukking (26) van 3.5 of kortheidshalve

$$gh_0\,\zeta\,(0{,}0) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}, \tag{12}$$

waarbij

$$\mathrm{I} = -\frac{1-e^{-2\alpha b}}{2\alpha}\,V_1 + \int_0^b e^{-2\alpha\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi_0\,(0,\eta)\,d\eta,$$

$$\mathrm{II} = \sum_1^\infty \frac{n}{\mu_n+\alpha}\,c_n$$

en

$$\mathrm{III} = -\,e^{-2\alpha b}\sum_1^\infty \frac{n}{\mu_n-\alpha}\,d_n.$$

Noch de berekening van I, noch die van II geeft moeilijkheden. De berekening van III berust op de bepaling van de coëfficiënten d_n. Deze is uitgevoerd op analoge wijze als in 4.6, zodat we op deze plaats van een gedetailleerde bespreking afzien. We merken hierbij op, dat bij de numerieke berekening van III veel gemak is ondervonden van de asymptotische ontwikkeling (24) van 3.6. De resultaten van deze berekeningen zijn weergegeven in tabel 3.8.4. We zien hieruit, dat de bijdrage van de term III zeer klein is.

Tabel 3.8.4

De coëfficiënten van de absolute verhoging in het hoekpunt (0,0) bij het model met exponentiële diepte

	U_0	U_1	U_2	V_1
I	— 0,58	— 0,34	— 0,67	— 1,68
II	0,10	0,04	0,17	— 0,26
III	— 0,01	— 0,01	0,01	— 0,05

Hieruit volgt dus met gebruikmaking van (12):

$$-gh_0\,\zeta\,(0{,}0) = 0{,}49\,U_0 + 0{,}31\,U_1 + 0{,}49\,U_2 + 3{,}17\,V_0 + 1{,}99\,V_1 + 2{,}04\,V_2, \tag{13}$$

waarin de bijdrage van de componenten V_0 en V_2 opgenomen is.

Uit tabel 3.8.3 en formule (13) volgt de absolute verhoging in de overige punten aan de zuidkust. In tabel 3.8.5 geven we de absolute verhoging volgens

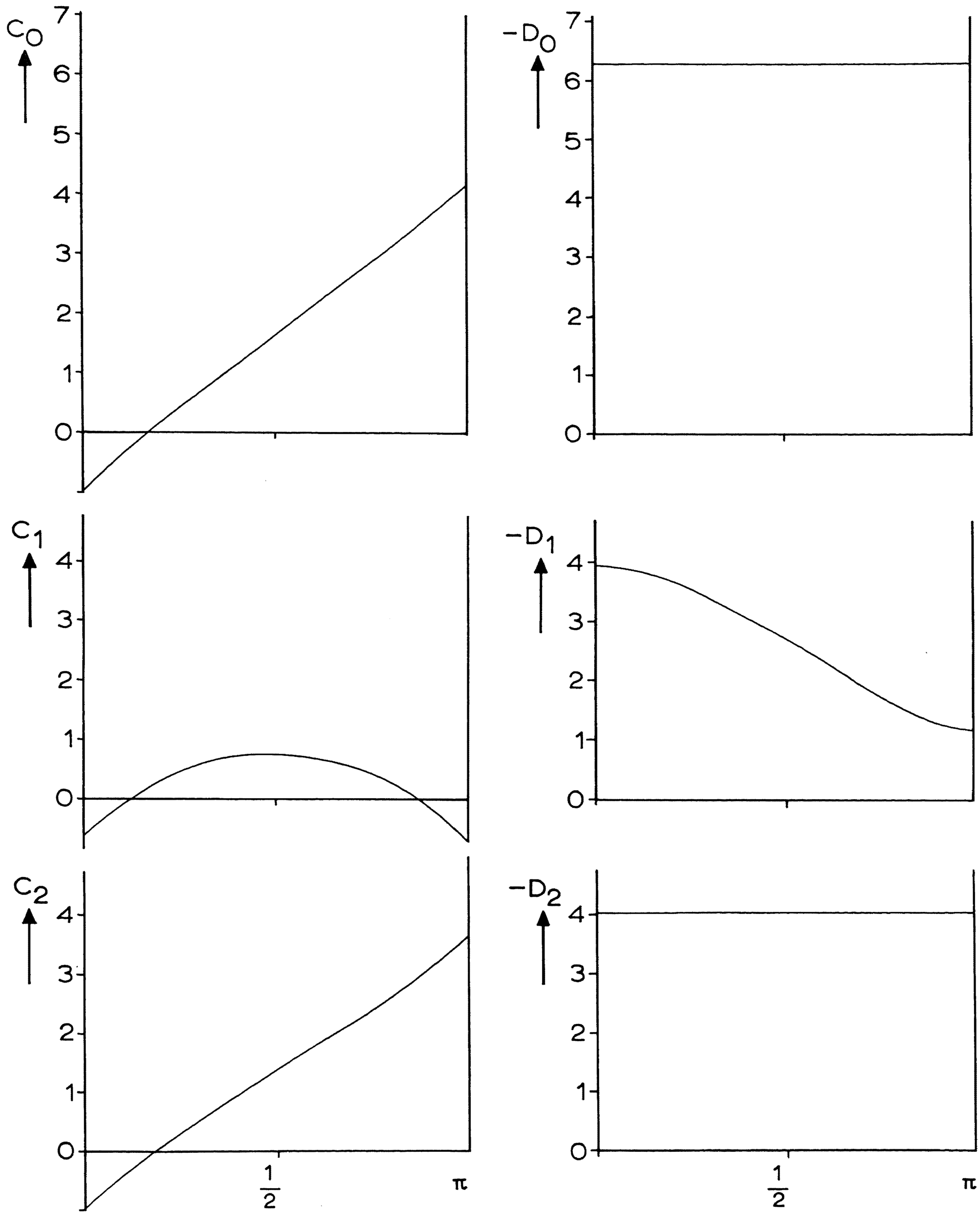
$$gh_m\,\zeta\,(x,0) = C_0U_0 + C_1U_1 + C_2U_2 + D_0V_0 + D_1V_1 + D_2V_2. \tag{14}$$

Tabel 3.8.5

De coëfficiënten van de absolute verhoging aan de zuidkust bij het model met exponentiële diepte

$8x/\pi$	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2
0	—0,97	—0,61	—0,97	—6,28	—3,95	—4,04
1	—0,24	0,04	—0,26	—6,28	—3,85	—4,04
2	0,42	0,46	0,34	—6,28	—3,53	—4,04
3	1,05	0,69	0,88	—6,28	—3,15	—4,04
4	1,67	0,71	1,43	—6,28	—2,72	—4,04
5	2,26	0,65	1,92	—6,28	—2,24	—4,04
6	2,86	0,42	2,46	—6,28	—1,84	—4,04
7	3,47	—0,04	2,97	—6,28	—1,35	—4,04
8	4,16	—0,69	3,65	—6,28	—1,17	—4,04

Een grafische illustratie van tabel 3.8.5 wordt gegeven in figuur 3.8.1



Figuur 3.8.1. De absolute verhoging aan de zuidkust ten gevolge van een lineair windveld bij het model met exponentiële diepte

3.8.3 *Het model zonder aardrotatie*

De relatieve verhoging aan de zuidkust volgt uit (14) van 3.7 of, met weglating van de ordeterm:

$$gh_0 \{\zeta(x, 0) - \zeta(0, 0)\} = x(U_0 + U_2) + x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) U_1 + \\ + \frac{\alpha}{b}\left(\frac{1}{2}\pi x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) - \sum_1^\infty \frac{\mu_n - \alpha}{n} c_n (1 - \cos nx), \qquad (15)$$

waarbij c_n door (11) van 3.7 bepaald is. Hieruit kan de met de tabellen 3.8.1 en 3.8.3 overeenkomende tabel 3.8.6 afgeleid worden.

Tabel 3.8.6

De coëfficiënten van de relatieve verhoging aan de zuidkust bij het model zonder aardrotatie

$8x/\pi$	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2
0	0	0	0	0	0	0
1	0,36	0,32	0,35	0	0,09	0
2	0,68	0,54	0,63	0	0,27	0
3	0,98	0,67	0,88	0	0,50	0
4	1,28	0,71	1,14	0	0,75	0
5	1,58	0,67	1,40	0	1,00	0
6	1,88	0,54	1,65	0	1,23	0
7	2,20	0,32	1,93	0	1,41	0
8	2,56	0	2,28	0	1,50	0

De absolute verhoging volgt het eenvoudigst uit formule (16) van 3.1 namelijk

$$gh_0\, \zeta(\tfrac{1}{2}\pi, 0) = 0{,}26\, U_1 - 3{,}17\, V_0 - 2{,}04\, V_2, \qquad (16)$$

waarbij weer de bijdrage van de componenten V_0 en V_2 opgenomen is. In (5) van 3.1 is het aequivalent van deze uitdrukking met de factor gh_m gegeven.

Indien zowel $\Omega = 0$ als $\alpha = 0$ geeft formule (16) van 3.7 het resultaat:

$$gh_m\, \zeta(\tfrac{1}{2}\pi, 0) = 0{,}26\, U_1 - 6{,}28\, V_0 - 3{,}14\, V_2\,. \qquad (17)$$

4.0 NIET-STATIONAIRE WINDEFFECTEN IN EEN RECHTHOEKIGE BAAI

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk beschouwen we een mathematisch model voor het gedrag van de Noordzee bij een storm. De Noordzee wordt hierbij voorgesteld door een rechthoekige baai, welke aan drie zijden door kusten begrensd is en aan de vierde zijde in een oceaan overgaat. In dit model nemen we aan, dat de baai overal dezelfde diepte heeft (vgl. 1.1). Evenals in 3.0 denken we de lengteas van de baai gemakshalve noord–zuid gericht. De zuidelijke zijde van de rechthoek correspondeert dan met o.a. de Nederlandse kust en het midden van deze zijde komt dan ruwweg overeen met de positie van Den Helder. Een storm wordt beschreven door een gegeven schuifspanning (U, V) aan het wateroppervlak, welke van de plaats (x, y) en de tijd t kan afhangen.

De wiskundige behandeling betreft aanvankelijk dit algemene geval en wordt later nader uitgewerkt voor het geval van een uniforme wind in noord–zuid-richting, namelijk:

$$U = 0 \qquad V = V(t). \qquad (1)$$

Bij de numerieke toepassing hebben we getracht zo goed mogelijk aan de fysische gegevens van de Noordzee aan te sluiten (vgl. 3.1). Deze toepassing is niet zozeer het doel van het onderzoek dan wel een illustratie van de wiskundige methode. In het bijzonder hebben wij een aantal expliciete resultaten verkregen in de volgende eenvoudige gevallen:

exponentieel windveld $U = 0,\ V = -0{,}27\,(e^{0{,}12t} - 0{,}2\, e^{0{,}18t})$, (2)

sprong-windveld $U = 0,\ V = -1 \qquad (t > 0)$, (3)

sinuswindveld $U = 0,\ V = -\sin 0{,}1t \qquad (t > 0)$. (4)

In al deze gevallen is in het bijzonder het verloop van de verhoging in het midden van de zuidkust berekend en is hierbij de invloed van de draaiing van de aarde (Ω) en de wrijvingsconstante (λ) nagegaan. De resultaten zijn weergegeven in de figuren 4.10.1, 4.10.3 en 4.10.4. Voor het geval van een exponentieel windveld is in figuur 4.10.2 een aantal momentopnamen van de rechthoekige baai gegeven, waarbij telkens enige niveaulijnen geschetst zijn. Opmerkelijk is, dat reeds bij dit zeer eenvoudige model van een windveld althans kwalitatief het werkelijk verloop van de niveaulijnen goed weergegeven wordt. De in deze grafieken en de bijbehorende tabellen gegeven getallen betreffen dimensieloze grootheden. Hierbij staat de tijd in eenheden van ongeveer 1,4 uur en de lengte in eenheden van ongeveer 127 km. De windvelden zijn zodanig genormeerd, dat bij de bovengenoemde drie gevallen de maximaal optredende windsnelheid v_s dezelfde is. Om uit de voor de verhoging ζ gegeven getallen een resultaat in meters af te leiden, moeten deze getallen met een van v_s kwadratisch afhankelijke factor vermenigvuldigd worden, welke voor enkele gevallen in tabel 4.10.1 gegeven is.

In dit hoofdstuk zijn de middelen aangegeven om de numerieke toepassingen naar believen uit te breiden. Het spreekt vanzelf, dat de op grond van de hier gegeven numerieke toepassingen te trekken conclusies met voorzichtigheid dienen te worden beschouwd. Zoals reeds in 1.1 is uiteengezet, verschaffen de gevonden resultaten ons slechts een globaal inzicht in de waterbeweging van de Noordzee.

De uitkomsten van deze studie geven aanleiding tot de volgende conclusies:

1. De invloed van de aardrotatie Ω uit zich hoofdzakelijk in een oost–west-scheefheid van het wateroppervlak. Deze scheefheid is aan de zuidkust zeer gering en neemt in noordelijke richting toe tot dicht bij de oceaan. Voorts bewerkstelligt Ω aan de zuidkust een verlaging van de maximale opwaaiing.
2. Bij een plotseling opstekende storm (sprong-windveld) neemt de verhoging aan de zuidkust snel toe, zodat na ongeveer 12 uur de verhoging reeds 90% van de stationaire opwaaiing bedraagt.
3. Bij een storm van het sinustype kan de verhoging aan de zuidkust redelijk beschreven worden door de bij de windsterkte van het ogenblik behorende stationaire verhoging, welke een zekere vaste tijd later zou optreden.
4. Bij een storm van het sinustype kan de verhoging aan de zuidkust opgevat worden als de som van de kwasi-stationaire opwaaiing (opgedrongen slingering) en een van de laagste negatief-reële eigenwaarde afkomstige dempingsterm.

In dit hoofdstuk worden de volgende punten behandeld:

In 4.2 wordt het probleem mathematisch beschreven met behulp van de vereenvoudigde hydrodynamische vergelijkingen voor de stroom (u, v) en de verhoging ζ. Met behulp van een Laplacetransformatie wordt de tijd hieruit verwijderd. Eliminatie van de stroom leidt tot een Helmholtzvergelijking voor $\bar{\zeta}$, de Laplace-getransformeerde van de verhoging, met een gemengde randvoorwaarde. Dit probleem kan teruggebracht worden tot een probleem van Green. Aangezien voor een rechthoekige baai de functie van Green niet op expliciete wijze kan worden bepaald, terwijl dit voor een oneindig lange strook wel mogelijk is, wordt ter oplossing van het gestelde probleem de volgende weg ingeslagen.

Met behulp van de functie van Green voor een oneindig lange strook, welke in 4.3 bepaald wordt, is het mogelijk de Laplace-getransformeerde van de verhoging $\bar{\zeta}_0$ in de strook te vinden. De Laplacegetransformeerde van de verhoging $\bar{\zeta}$ in de rechthoekige baai schrijven we als

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = \bar{\zeta}_0(x, y, p) + \bar{\zeta}_1(x, y, p) \tag{5}$$

De functie $\bar{\zeta}_1$ is een lineaire combinatie van vrije bewegingen in de strook, namelijk twee Kelvingolven en twee stelsels Poincarégolven.

In 4.4 wordt deze methode nader uitgewerkt voor het uniforme windveld (1). In dit geval kan $\bar{\zeta}_0$ gemakkelijk rechtstreeks bepaald worden. De coëfficiënten A_j en B_j ($j = 0, 1, 2 \ldots$) van de Kelvin- en Poincarégolven, waaruit $\bar{\zeta}_1$ samengesteld is, kunnen met behulp van de randvoorwaarde aan de zuidelijke rand (kustvoorwaarde) en die aan de noordelijke rand (oceaanvoorwaarde) bepaald worden.

De kustvoorwaarde wordt besproken in 4.5 en leidt tot een stelsel lineaire betrekkingen I.

De oceaanvoorwaarde wordt besproken in 4.6 en leidt tot een soortgelijk stelsel II. Het probleem is nu teruggebracht tot de bepaling van de coëfficiënten uit I en II, waarna nog een inverse Laplacetransformatie moet worden uitgevoerd.

Voor kleine waarden van Ω zijn deze stelsels in 4.8 opgelost. Dit leidt o.a. tot een eenvoudige benaderde uitdrukking voor ζ aan de zuidkust (zie (12) van 4.8). Het blijkt hierbij, dat op de lengteas van de baai de invloed van Ω een effect van de tweede orde is, zodat er in eerste instantie een symmetrische scheefheid van de zeespiegel om deze as ontstaat. Het limietgeval $\Omega = 0$, dat van eenvoudige aard is, is zelfstandig in 4.7 behandeld. Voor de toepassing op de Noordzee heeft dit slechts enige kwalitatieve betekenis omdat de coëfficiënt van Coriolis voor de Noordzee eerder groot dan klein genoemd kan worden.

In 4.9 wordt daarom een benadering afgeleid als $\Omega >> p$. Hoewel een mathematisch streng bewijs ontbreekt, lijkt de veronderstelling gewettigd, dat met deze benadering, na de inverse Laplace-transformatie, een resultaat wordt verkregen, dat de toestand gedurende en na het hoogtepunt van de storm goed beschrijft.

In 4.10.1. wordt een numerieke toepassing gegeven voor het exponentiële windveld (2). In dit geval zijn de stelsels I en II exact opgelost. Aangezien hierbij de inverse Laplace-transformatie niet uitgevoerd behoeft te worden, zijn de uiteindelijk verkregen numerieke resultaten voor $\zeta\ (x, y, t)$ eveneens exact.

In 4.10.2 en 4.10.3 waarbij respectievelijk de windvelden (3) en (4) behandeld worden, is gebruik gemaakt van de in 4.9 afgeleide benadering voor ζ in het midden van de zuidkust. Met behulp van een inverse Laplace-transformatie, welke hier onontbeerlijk is, zijn de bovenbeschreven numerieke resultaten afgeleid.

4.2 Probleemstelling

De mathematische beschrijving van het rechthoekige Noordzeemodel wordt gegeven door differentiaalvergelijkingen (6) en (7) van 2.2, namelijk

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) u - \Omega v + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) v + \Omega u + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

met de randvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = a \\ v &= 0 \quad \text{voor} \quad y = 0 \\ \zeta &= 0 \quad \text{voor} \quad y = b. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Het verband tussen de componenten U, V van de windkracht en de windsnelheid aan het zeeoppervlak is volgens (3) en (5) van 2.2:

$$\sqrt{U^2 + V^2} = k \frac{\varrho_a}{\varrho} v_s^2. \quad (3)$$

Bij het hier beschouwde model kunnen met voordeel op de volgende wijze dimensieloze grootheden worden ingevoerd:

$$\left.\begin{aligned} (x, y) &\to \pi^{-1} a\,(x, y) & t &\to \pi^{-1} a c^{-1} t \\ (u, v) &\to hc\,(u, v) & \zeta &\to h\zeta \\ (U, V) &\to \pi a^{-1} hc^2\,(U, V) & b &\to \pi^{-1} ab. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aangezien we voortaan uitsluitend dimensieloze grootheden zullen gebruiken, voeren we hiervoor geen aparte notatie in. Substitutie van de dimensieloze grootheden (4) in (1) en (2) geeft de differentiaalvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)u-\Omega v+\frac{\partial\zeta}{\partial x}&=U\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)v+\Omega u+\frac{\partial\zeta}{\partial y}&=V\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}&=0,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

en de randvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned}u&=0 \quad \text{voor} \quad x=0 \quad \text{en} \quad x=\pi\\ v&=0 \quad \text{voor} \quad y=0\\ \zeta&=0 \quad \text{voor} \quad y=b\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

De betrekking (3) wordt met dimensieloze U en V:

$$\sqrt{U^2+V^2}=\frac{k\varrho_a a}{\pi\varrho h c^2}\,v_s{}^2 \tag{7}$$

In de numerieke toepassing nemen we:

$$\begin{aligned}a&=400\text{ km} & \Omega&=0{,}43\text{ h}^{-1}\\ b&=800\text{ km} & \lambda&=0{,}09\text{ h}^{-1}\\ h&=65\text{ m} & c&=91\text{ km/h.}\end{aligned}$$

Voorts is:

$$\varrho_a/\varrho=1{,}21\,.\,10^{-3}\ \text{en}\ k=0{,}0025.$$

Substitutie van deze getallenwaarden in (4) geeft o.a. een tijdschaal van 1,4 uur. De numerieke grootte van de in (5) en (6) optredende dimensieloze constanten is met een geringe afronding:

$$\Omega=0{,}6 \qquad \lambda=0{,}12 \qquad b=2\pi. \tag{8}$$

De betrekking (7) wordt met bovenstaande getallen:

$$\sqrt{U^2+V^2}=0{,}93\,.\,10^{-5}\,v_s{}^2, \tag{9}$$

indien v_s in m/sec wordt gemeten.

De eerste stap tot de oplossing van het stelsel (5) met de randvoorwaarden (6) bestaat uit de eliminatie van de tijdvariabele met behulp van de Laplace-transformatie (8) van 2.2:

$$\bar{\zeta}\,(x,y,p)\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty e^{-pt}\,\zeta\,(x,y,t)\,dt \quad \text{enz.} \tag{10}$$

De vergelijkingen (5) gaan over in:

$$\left.\begin{aligned}(p+\lambda)\,\bar{u}-\Omega\bar{v}+\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x}&=\bar{U}\\ (p+\lambda)\,\bar{v}+\Omega\bar{u}+\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}&=\bar{V}\\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+p\bar{\zeta}&=0.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Eliminatie van $\bar{u}$ en $\bar{v}$ leidt in overeenstemming met (11) van 2.2 tot de inhomogene Helmholtz-vergelijking:

$$(\Delta-\varkappa^2)\,\bar{\zeta}=\bar{F}\,(x,y,p), \tag{12}$$

met

$$\bar{F}\,(x,y,p)=\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}\right)+\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial x}-\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right), \tag{13}$$

waarin

$$\operatorname{tg}\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega}{p+\lambda}. \tag{14}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen van (11) volgt:

$$p^{-1}\varkappa^2\bar{u} = -\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} + \operatorname{tg}\gamma\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}\right) + (\bar{U} + \operatorname{tg}\gamma\,\bar{V}) \tag{15}$$

en

$$p^{-1}\varkappa^2\bar{v} = -\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y} - \operatorname{tg}\gamma\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x}\right) + (\bar{V} - \operatorname{tg}\gamma\,\bar{U}). \tag{16}$$

Hieruit vloeien de volgende randvoorwaarden voort (vgl. (14) van 2.2):

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} + \operatorname{tg}\gamma\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y} = \bar{U} + \operatorname{tg}\gamma\,\bar{V} \qquad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi \tag{17}$$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y} - \operatorname{tg}\gamma\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{V} - \operatorname{tg}\gamma\,\bar{U} \qquad \text{voor} \quad y = 0 \tag{18}$$

De oceaanvoorwaarde is eenvoudig (vgl. (13) van 2.2):

$$\bar{\zeta} = 0. \tag{19}$$

Uit (12) en hetzij (15), hetzij (16) kan een inhomogene Helmholtzvergelijking voor $\bar{u}$ en $\bar{v}$ afgeleid worden, namelijk

$$(\Delta - \varkappa^2)\,\bar{u} = \bar{F}_1(x, y, p), \qquad (\Delta - \varkappa^2)\,\bar{v} = \bar{F}_2(x, y, p), \tag{20}$$

waarbij

$$\bar{F}_1(x, y, p) = (p+\lambda)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} - \frac{\partial\bar{V}}{\partial x}\right) - p\,(\bar{U} + \operatorname{tg}\gamma\,\bar{V}) \tag{21}$$

en

$$\bar{F}_2(x, y, p) = (p+\lambda)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} - \frac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right) - p\,(\bar{V} - \operatorname{tg}\gamma\,\bar{U}). \tag{22}$$

De vergelijkingen (11) kunnen ook op andere wijze ontstaan. Indien men namelijk een oplossing zoekt, waarbij de afhankelijkheid van de tijd uitsluitend bestaat in een exponentiële factor $\exp(pt)$, dan kan men stellen:

$$\zeta(x, y, t) = \bar{\zeta}(x, y, p)\,e^{pt}, \tag{23}$$

en overeenkomstig voor u, v, U en V. Substitutie in (5) leidt aldus tot het stelsel (11). Op deze wijze kan voor (12) met de randvoorwaarden (17), (18) en (19) een aantal particuliere oplossingen gevonden worden, welke niet meer aan een inverse Laplace-transformatie onderworpen moeten worden. Daar bij deze methode ook U en V de factor $\exp(pt)$ bevatten, kan slechts voor zeer speciale windvelden een oplossing verkregen worden. In 4.10.1 zal hierop nader worden ingegaan.

Zoals in 2.0 besproken is en zoals in het bijzonder in 2.3 nader uiteengezet is, vereist de algemene oplossing van het probleem (12) met de randvoorwaarden (17), (18) en (19) de voorafgaande oplossing van het probleem van Green. In enkele bijzondere gevallen, met name bij een uniform windveld is een meer rechtstreekse oplossingsmethode mogelijk en kunnen we het probleem van Green buiten beschouwing laten. In 4.4 zullen we hierop nader terugkomen.

Het is echter niet mogelijk gebleken om voor de rechthoek $0 < x < \pi$, $0 < y < b$ het probleem van Green expliciet op te lossen. Het lukt wel voor de oneindig lange strook $0 < x < \pi$, $-\infty < y < \infty$ (vgl. 2.4) met de gehomogeniseerde randvoorwaarden (17). Het betreffende probleem van Green zal in de volgende paragraaf opgelost worden. Met behulp van de gevonden functie van Green kan het probleem (12) met de inhomogene randvoorwaarden (17) zonder moeite opgelost worden. We noemen de gevonden oplossing $\bar{\zeta}_0(x, y, p)$. De oplossing van het probleem (12) voor de rechthoek schrijven we in de vorm:

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = \bar{\zeta}_0(x, y, p) + \bar{\zeta}_1(x, y, p). \tag{24}$$

De functie $\bar{\zeta}_1(x, y, p)$ voldoet dus aan een homogene vergelijking van Helmholtz en aan homogene randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = \pi$ en kan derhalve opgebouwd worden uit de bij de oneindig lange strook behorende Kelvin- en Poincarégolven. Zijn A_0 en B_0 de coëfficiënten van de op- en neergaande Kelvingolf en A_j en B_j ($j = 1, 2, 3 \ldots$) die van de Poincarégolven, dan leidt de kustvoorwaarde (18) tot lineaire betrekkingen van het type

$$A_j = \Phi_j(B_0, B_1, B_2 \ldots) \qquad j = 0, 1, 2 \ldots \tag{25}$$

en de oceaanvoorwaarde (19) tot lineaire betrekkingen van het type

$$B_j = \Psi_j(A_0, A_1, A_2 \ldots) \qquad j = 0, 1, 2 \ldots \tag{26}$$

De coëfficiënten kunnen uit deze twee stelsels betrekkingen, bijvoorbeeld met behulp van een iteratieve methode, opgelost worden. We merken nog op dat, indien b groot is, de betrekkingen (25) en (26) overgaan in

$$A_j = \Phi_j(B_0) + O(e^{-b}) \tag{27}$$

en

$$B_j = \Psi_j(A_0) + O(e^{-b}) \tag{28}$$

voor $j = 0, 1, 2 \ldots$. In de toepassing op de Noordzee is de ordeterm $O(e^{-b})$ verwaarloosbaar.

4.3 Probleem van Green

Het in de voorafgaande paragraaf genoemde probleem van Green voor de oneindige strook $0 < x < \pi$ luidt expliciet [1]):

$$(\Delta - \varkappa^2)\, G(x, y, \xi, \eta, \gamma) = -\delta(x-\xi)(y-\eta) \tag{1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi. \tag{2}$$

Voorts verlangen we, dat voor $|y| \to \infty$ de functie van Green van de orde $O(\exp - \varepsilon |y|)$ is, waarbij ε een willekeurig kleine positieve constante is.

Uit de stelling van Green volgt gemakkelijk de symmetriebetrekking

$$G(x, y, \xi, \eta, \gamma) = G(\xi, \eta, x, y, -\gamma). \tag{3}$$

Zodra G bekend is, volgt $\bar{\zeta}_0(x, y)$ weer met behulp van dezelfde stelling van Green, nl.

$$\bar{\zeta}_0(x, y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} G(x, y, \xi, \eta, \gamma)\, \bar{F}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \\ - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 0, \eta, \gamma)\, \bar{f}(0, \eta)\, d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \pi, \eta, \gamma)\, \bar{f}(\pi, \eta)\, d\eta, \tag{4}$$

waarbij

$$\bar{f}(x, y) = \bar{U}(x, y) + \operatorname{tg}\gamma\, \bar{V}(x, y).$$

Substitutie van (13) van 4.2 en partiële integratie geeft een wat eenvoudiger uitdrukking, nl.:

$$\bar{\zeta}_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} \left\{ \bar{U}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial}{\partial \eta}\right) G + \bar{V}\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial}{\partial \xi}\right) G \right\} d\xi\, d\eta. \tag{5}$$

We zullen hier G niet systematisch afleiden, maar op de volgende enigszins heuristische wijze een bruikbare voorstelling van G aangeven.

De bij (1) en (2) behorende Kelvingolven hebben de gedaante:

$$\exp \pm (sx - qy). \tag{6}$$

De bij (1) en (2) behorende Poincarégolven hebben de gedaante:

$$\left.\begin{array}{ll} (\sin nx + \theta_n \cos nx)\, e^{-\nu_n y} & n = 1, 2 \ldots \\ (\sin nx - \theta \cos nx)\, e^{\nu_n y} & n = 1, 2 \ldots, \end{array}\right\} \tag{7}$$

---

[1]) Voor dit gebruik van de deltafunctie vergelijke men [23] en [24] Ch 7.

waarbij

$$\nu_n^2 = n^2 + \varkappa^2 \qquad \text{en} \qquad \theta_n = \frac{n(p+\lambda)}{\nu_n \Omega}. \tag{8}$$

In verband met (3) proberen we G als volgt voor te stellen:

$$G = C\, e^{s(x+\xi-\pi)-q(y-\eta)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\sin nx + \theta_n \cos nx)(\sin n\xi + \theta_n \cos n\xi)\, e^{-\nu_n (y-\eta)} \qquad \text{voor} \quad y > \eta \tag{9}$$

en

$$G = C\, e^{-s(x+\xi-\pi)+q(y-\eta)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\sin nx - \theta_n \cos nx)(\sin n\xi - \theta_n \cos n\xi)\, e^{-\nu_n (\eta-y)} \qquad \text{voor} \quad y < \eta \tag{10}$$

De continuïteit van G bij $y = \eta$ vereist

$$C \operatorname{sh} s(x+\xi-\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n C_n \sin n(x+\xi) = 0, \tag{11}$$

zodat

$$\theta_n C_n = \frac{2n \operatorname{sh} s\pi}{\pi(n^2+s^2)}\, C. \tag{12}$$

We controleren nu of met deze coëfficiënten C_n en een geschikt gekozen C aan (1) voldaan wordt. Substitutie van (9) en (10) in (1) geeft met toepassing van differentiatie in gegeneraliseerde zin (zie [23] ch 2 en 5):

$$(\Delta - \varkappa^2)\, G = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} G(y>\eta) - \frac{\partial}{\partial y} G(y<\eta) \right\} \delta(y-\eta) =$$

$$= \left\{ -2qC \operatorname{ch} s(x+\xi-\pi) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n C_n (\sin nx \sin n\xi + \theta_n^2 \cos nx \cos n\xi) \right\} \delta(y-\eta).$$

Daar door differentiatie uit (11) volgt, dat

$$2qC \operatorname{ch} s(x+\xi-\pi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \theta_n^2 C_n \cos n(x+\xi) = 0$$

leidt de bovenstaande substitutie tot het rechterlid:

$$\left\{ -2\varkappa^2 s^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+s^2)\, \nu_n^{-1} C_n \sin nx \sin n\xi \right\} \delta(y-\eta).$$

Met behulp van (12) wordt dit:

$$-\frac{4\varkappa^2 \operatorname{sh} s\pi}{\pi p \Omega}\, C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin n\xi \right) \delta(y-\eta) = -\frac{2\varkappa^2 \operatorname{sh} s\pi}{p\Omega}\, C\, \delta(x-\xi)\, \delta(y-\eta).$$

Het blijkt dus, dat voor

$$C = \frac{p\Omega}{2\varkappa^2 \operatorname{sh} s\pi} \tag{13}$$

aan alle eisen voldaan is. Uit (12) volgt dan:

$$C_n = \frac{s^2}{\pi \varkappa^2} \frac{\nu_n}{n^2+s^2}. \tag{14}$$

Substitutie van (13) en (14) in (9) en (10) geeft de expliciete uitdrukking:

$$G(x, y, \xi, \eta, \gamma) = \frac{p\Omega}{2\varkappa^2 \operatorname{sh} s\pi} e^{\sigma\{s(x+\xi-\pi)-q(y-\eta)\}} +$$

$$+ \frac{s^2}{\pi\varkappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{n^2+s^2} (\sin nx + \sigma\theta_n \cos nx)(\sin n\xi + \sigma\theta_n \cos n\xi)\, e^{-\nu_n |y-\eta|}, \tag{15}$$

waarbij

$$\sigma = \operatorname{sgn}(y-\eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{y-\eta}{|y-\eta|}$$

4.4 Oplossing voor een uniform windveld

Indien het windveld uniform is, d.w.z. niet van de plaats afhangt, is het niet nodig van de in de vorige paragraaf afgeleide functie van Green gebruik te maken. We kunnen namelijk op eenvoudige wijze rechtstreeks het probleem voor een oneindig lange strook oplossen. We beschouwen in het bijzonder het uniforme windveld

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= V(t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Het probleem (12) van 4.2 met de randvoorwaarden (17), (18) en (19) van 4.2 vereenvoudigt zich met (1) tot

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varkappa^2\right) \bar{\zeta} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = \operatorname{tg}\gamma\, \bar{V} \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{V} \quad \text{voor} \quad y = 0, \tag{4}$$

$$\bar{\zeta} = 0 \quad \text{voor} \quad y = b. \tag{5}$$

Bij de oplossing $\bar{\zeta}_0$ van dit probleem voor de oneindig lange strook $0 < x < \pi$, waarbij alleen de randvoorwaarden (3) gelden, mogen we veronderstellen, dat $\bar{\zeta}_0$ alleen van x afhangt. Men verifieert gemakkelijk, dat aan (2) en (3) voldaan wordt door

$$\bar{\zeta}_0(x) = -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\varkappa} \frac{\operatorname{sh}\varkappa(\frac{1}{2}\pi - x)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\varkappa\pi} \bar{V}. \tag{6}$$

Uit (15) en (16) van 4.2 volgt dan voor de componenten van de totale stroom:

$$\bar{u}_0(x) = \frac{p \operatorname{tg}\gamma}{\varkappa^2} \left\{1 - \frac{\operatorname{ch}\varkappa(\frac{1}{2}\pi - x)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\varkappa\pi}\right\} \bar{V}, \tag{7}$$

en

$$\bar{v}_0(x) = \frac{p}{\varkappa^2} \left\{1 + \operatorname{tg}^2\gamma \frac{\operatorname{ch}\varkappa(\frac{1}{2}\pi - x)}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\varkappa\pi}\right\} \bar{V}. \tag{8}$$

In overeenstemming met (24) van 4.2 stellen we nu:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_0(x) + \bar{u}_1(x, y) \\ \bar{v} &= \bar{v}_0(x) + \bar{v}_1(x, y) \\ \bar{\zeta} &= \bar{\zeta}_0(x) + \bar{\zeta}_1(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

waarbij $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ en $\bar{\zeta}_1$ lineaire combinaties van Kelvin- en Poincarégolven zijn. Voor $\bar{\zeta}_1$ zijn deze vrije

golfbewegingen door (6) en (7) van 4.3 gegeven. Met behulp hiervan en met de overeenkomstige vormen voor $\bar{u}_1$ en $\bar{v}_1$ stellen we:

$$\bar{u}_1(x,y) = \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \nu_n^{-1} (n^2 + s^2) A_n \sin nx \, e^{-\nu_n y} + \\ - \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \nu_n^{-1} (n^2 + s^2) B_n \sin nx \, e^{-\nu_n (b-y)}, \tag{10}$$

$$\bar{v}_1(x,y) = s\,\Omega^{-1} A_0 \operatorname{ch}(s(x-\tfrac{1}{2}\pi) - qy) + s\,\Omega^{-1} B_0 \operatorname{sh}(s(x-\tfrac{1}{2}\pi) - qy) + \\ + \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos nx + \alpha_n \sin nx) e^{-\nu_n y} + \\ + \Omega^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\cos nx - \alpha_n \sin nx) e^{-\nu_n (b-y)}, \tag{11}$$

$$\bar{\zeta}_1(x,y) = A_0 \operatorname{sh}(s(x-\tfrac{1}{2}\pi) - qy) + B_0 \operatorname{ch}(s(x-\tfrac{1}{2}\pi) - qy) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} A_n (\sin nx + \theta_n \cos nx) e^{-\nu_n y} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) e^{-\nu_n (b-y)}, \tag{12}$$

waarbij

$$\alpha_n \overset{\text{def}}{=} \frac{p\Omega}{n\nu_n}. \tag{13}$$

Ten slotte moet aan de randvoorwaarden bij $y = 0$ en $y = b$ voldaan worden. De kustvoorwaarde (4) geeft met behulp van (11):

$$sA_0 \operatorname{ch} s(x-\tfrac{1}{2}\pi) + sB_0 \operatorname{sh} s(x-\tfrac{1}{2}\pi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos nx + \alpha_n \sin nx) + \Omega\, \bar{v}_0(x) + O(e^{-b}) = 0, \tag{14}$$

waarbij de ordeterm $O(e^{-b})$ de bijdrage vormt van de termen met de coëfficiënten B_n, $n = 1, 2, 3 \ldots$, d.w.z. de Poincarégolven bij de oceaan. Voor voldoend grote b kan deze bijdrage verwaarloosd worden. Deze voorwaarde zal in 4.5 nader bestudeerd worden.

De oceaanvoorwaarde (5) geeft met behulp van (12):

$$A_0 \operatorname{sh}(s(x-\tfrac{1}{2}\pi) - qb) + B_0 \operatorname{ch}(s(x-\tfrac{1}{2}\pi) - qb) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) + \bar{\zeta}_0(x) + O(e^{-b}) = 0, \tag{15}$$

waarbij de ordeterm $O(e^{-b})$ de bijdrage vormt van de Poincarégolven bij de kust $y = 0$. Ook deze term kan voor voldoend grote b verwaarloosd worden. Deze voorwaarde zal in 4.6 behandeld worden.

In de navolgende behandeling zullen we $\bar{V} = -1$ kiezen, hetgeen zonder verlies van algemeenheid mogelijk is. Deze keuze komt overeen met het windveld:

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -\delta(t), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

d.w.z. een windstoot uit noordelijke richting op het tijdstip $t = 0$.

4.5 Kustvoorwaarde

De voorwaarde (14) van 4.4 leidt tot een stelsel lineaire vergelijkingen van de vorm (25) of (27) van 4.2. In verband met het feit, dat $\alpha_n = O(n^{-2})$ voor $n \to \infty$ kan een dergelijk stelsel gemakkelijk worden verkregen door het linkerlid van (14) van 4.4 in het interval $(0, \pi)$ in een cosinusreeks te ontwikkelen en de coëfficiënten hiervan gelijk aan nul te stellen. We voeren eerst de volgende notaties in:

$$s_m = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \cos mx \, e^{-s(x-\frac{1}{2}\pi)} \, dx \tag{1}$$

$$\Gamma_{mn} = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \cos mx \sin nx \, dx \tag{2}$$

$$v_m = 2\pi^{-1} \int_0^\pi \cos mx \, \bar{v}_0(x) \, dx, \tag{3}$$

voor $m = 0, 1, 2 \ldots$.

Men leidt gemakkelijk de volgende formules af:

$$\left.\begin{array}{lll} m & \text{even} & s_m = 4\pi^{-1} s (m^2 + s^2)^{-1} \operatorname{sh} \frac{1}{2} s\pi \\ m & \text{oneven} & s_m = 4\pi^{-1} s (m^2 + s^2)^{-1} \operatorname{ch} \frac{1}{2} s\pi \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{lll} m + n & \text{even} & \Gamma_{mn} = 0 \\ m + n & \text{oneven} & \Gamma_{mn} = 4\pi^{-1} n (n^2 - m^2)^{-1} \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{lll} & & v_0 = -2p \, \varkappa^{-2} (1 + \operatorname{tg}^2\gamma \, (\tfrac{1}{2}\varkappa\pi)^{-1} \operatorname{th} \tfrac{1}{2}\varkappa\pi) \\ m & \text{even} & v_m = -2p \, (m^2 + \varkappa^2)^{-1} \operatorname{tg}^2\gamma \, (\tfrac{1}{2}\varkappa\pi)^{-1} \operatorname{th} \tfrac{1}{2}\varkappa\pi \\ m & \text{oneven} & v_m = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Vermenigvuldigen we nu beide leden van (14) van 4.4 met $\cos mx$ ($m = 0, 1, 2 \ldots$) en integreren we tussen 0 en π, dan vinden we bij verwaarlozing van de ordeterm:

$$\left.\begin{array}{lll} & & s_0 s A_0 = \qquad\qquad - \Omega \, v_0 - \Sigma_1 \Gamma_{0n} \alpha_n A_n \\ m & \text{even} & A_m = - s_m s A_0 - \Omega \, v_m - \Sigma_1 \Gamma_{mn} \alpha_n A_n \\ m & \text{oneven} & A_m = s_m s B_0 \qquad\qquad - \Sigma_2 \Gamma_{mn} \alpha_n A_n, \end{array}\right\} \tag{7}$$

waarbij, zowel hier als later, Σ_1 een sommatie over oneven indices 1, 3, 5 ... en Σ_2 een over even indices 2, 4, 6 ... voorstelt. Uit het stelsel (7) kunnen de coëfficiënten A_n ($n = 0, 1, 2 \ldots$) vrij gemakkelijk met behulp van een iteratief proces in B_0 uitgedrukt worden. Aldus leidt (7) tot een stelsel van de vorm (28) van 4.2.

We kunnen de betrekking (14) van 4.4 ook als volgt schrijven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = \alpha(x). \tag{8}$$

Daarbij is, wederom met weglating van de ordeterm

$$-\alpha(x) = sA_0 \operatorname{ch} s(x - \tfrac{1}{2}\pi) + sB_0 \operatorname{sh} s(x - \tfrac{1}{2}\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \sin nx + \Omega \bar{v}_0(x). \tag{9}$$

Uit (8) volgt de asymptotische voorstelling van A_n:

$$A_n = -2\pi^{-1} \{\alpha'(0) + (-1)^{n-1} \alpha'(\pi)\} n^{-2} + O(n^{-4}). \tag{10}$$

We schrijven dit in de volgende vorm:

$$A_n \approx \{A' + (-1)^{n-1} A''\} n^{-2}. \tag{11}$$

De betekenis van dit resultaat met betrekking tot het gedrag van $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{\zeta}$ in de hoekpunten (0, 0) en (π, 0) volgt door beschouwing van de reeksen met de coëfficiënten A_n in (10), (11) en (12) van 4.4. Zonder moeite zien we, dat $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{\zeta}$ daar continu zijn.

4.6 Oceaanvoorwaarde

De voorwaarde (15) van 4.4 leidt tot een soortgelijk stelsel lineaire vergelijkingen als de kustvoorwaarde (14) van 4.4. Het dan verkregen stelsel is van de vorm (26) of (28) van 4.2. We herhalen nog even de voorwaarde (15) van 4.4. Met weglating van de ordeterm is

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) = \varphi(x), \tag{1}$$

waarin

$$-\varphi(x) = A_0 \operatorname{sh}(s(x - \tfrac{1}{2}\pi) - qb) + B_0 \operatorname{ch}(s(x - \tfrac{1}{2}\pi) - qb) + \bar{\zeta}_0(x). \tag{2}$$

Ontwikkelingen van het type (1) zijn elders uitvoerig bestudeerd [18]. Enkele aldaar verkregen resultaten zullen hieronder zonder bewijs medegedeeld worden. We merken eerst nog op, dat voor $n \to \infty$:

$$\theta_n = \theta + O(n^{-2}), \tag{3}$$

waarbij

$$\theta = (p + \lambda) / \Omega = \operatorname{cotg} \gamma. \tag{4}$$

De eigenschappen van de ontwikkeling (1) zijn daarom sterk verwant aan die van de eenvoudiger ontwikkeling

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (\sin nx - \theta \cos nx) = \beta(x), \qquad 0 < x < \pi. \tag{5}$$

We zullen ons eerst met deze reeksontwikkeling bezighouden.

De ontwikkeling (5) is eenduidig en de coëfficiënt b_n heeft voor $n \to \infty$ het volgende gedrag:

$$b_n = Bn^{-1+\alpha} + (-1)^{n-1} B' n^{-1-\alpha} + B'' n^{-3+\alpha} + \ldots \tag{6}$$

waarbij

$$\alpha = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} \theta = 1 - 2\pi^{-1}\gamma. \tag{7}$$

Voor B heeft men de expliciete uitdrukking:

$$B = -\frac{2^\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha\pi}{\pi\, \Gamma(\alpha)} \int_0^\pi (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)^{\alpha-1}\, \beta(x)\, dx. \tag{8}$$

Volgens (6) en (8) convergeert de reeks (5) vrij langzaam, namelijk subharmonisch. Indien $B = 0$ is, is de convergentie evenwel van hyperharmonische orde. De functies, aan het stelsel $\sin nx - \theta \cos nx$ met $n = 1, 2, \ldots$ biorthogonaal toegevoegd, zijn betrekkelijk eenvoudig en bestaan uit een product van een trigonometrische som en de factor $(\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)^{\alpha-1}$.

Voor ons is slechts de eerste functie van dit biorthogonale stelsel van belang, namelijk, $(\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)^{\alpha-1}$ zelf. Hiervoor geldt:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha\pi}{\pi} \int_0^\pi (\sin nx - \theta \cos nx)(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)^{\alpha-1}\, dx = \begin{cases} 0 & n \geqq 1 \\ -1 & n = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Bij deze beschouwingen hebben we ons nog niet uitgelaten over de functie $\beta(x)$. Het is voor de meeste gevallen voldoende, dat $\beta(x)$ een in $(0, \pi)$ continue afgeleide bezit.

De eigenschappen van de ontwikkeling (1) kunnen we hieruit afleiden, indien we stellen:

$$B_n = n\, b_n, \qquad \beta(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_n - \theta)\, b_n \cos nx. \tag{10}$$

In het bijzonder geldt de asymptotische voorstelling (6) nl.:

$$B_n = Bn^\alpha + (-1)^{n-1} B' n^{-\alpha} + B'' n^{-2+\alpha} + \ldots \tag{11}$$

waarbij B, B', B'' nu andere constanten zijn.

We zullen nu laten zien, dat het mathematische model vereist, dat $B = 0$ is. Dit brengt met zich mee, dat aan $\varphi(x)$ een bepaalde voorwaarde opgelegd wordt, te weten

$$\int_0^\pi h_0(x)\, \varphi(x)\, dx = 0, \tag{12}$$

waarbij $h_0(x)$ orthogonaal is ten opzichte van alle functies van het stelsel $\sin nx - \theta_n \cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$. Deze orthogonaliteitsbetrekking leidt dan uiteindelijk tot een lineaire betrekking tussen A_0 en B_0.

Men ziet gemakkelijk in, dat eventuele singulariteiten van het model slechts bij de hoekpunten $(0, b)$ en (π, b) kunnen voorkomen. Uit (12) van 4.4 en (11) volgt, dat voor het hoekpunt $(0, b)$ in lokale poolcoördinaten (r, φ), bepaald door:

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = b - r \sin \varphi, \tag{13}$$

$$\xi(x, y) = B \sec \tfrac{1}{2}\alpha\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\alpha} \exp i(nre^{i\varphi} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi) \right\} + O(1), \tag{14}$$

zodat voor $r \to 0$:

$$\bar{\zeta}(x, y) = B\Gamma(\alpha) \sec \tfrac{1}{2}\alpha\pi \, r^{-\alpha} \sin \alpha\varphi + O(1). \tag{15}$$

Het blijkt dus, dat een oplossing met $B \neq 0$ zou leiden tot een discontinuïteit voor $\bar{\zeta}$ in het hoekpunt $(0, b)$, hetgeen niet met de fysische realiteit overeenkomt. Derhalve is dus $B = 0$. Op overeenkomstige wijze blijken ook $\bar{u}$ en $\bar{v}$ in dit hoekpunt nu continu te zijn. We onderzoeken vervolgens het hoekpunt (π, b). In lokale poolcoördinaten (r, φ), bepaald door

$$x = \pi - r \cos \varphi, \qquad y = b - r \sin \varphi, \tag{16}$$

heeft men weer voor $r \to 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(x, y) &= \text{constante} - B' \sec \tfrac{1}{2}\alpha\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} \exp - i\,(nre^{-i\varphi} + \tfrac{1}{2}\alpha\pi) + O(r) = \\ &= \text{constante} + B'\,\Gamma(-\alpha) \sec \tfrac{1}{2}\alpha\pi \, r^{\alpha} \sin \alpha\varphi + O(r). \end{aligned} \tag{17}$$

In dit hoekpunt is $\bar{\zeta}$ dus continu. De afgeleiden van $\bar{\zeta}$ naar x en y zijn dit echter niet, hetgeen betekent, dat de stroming in dit punt discontinu is. Hieraan valt niets meer te veranderen en dit feit moet dan ook beschouwd worden als inhaerent te zijn aan het gekozen model, te weten een ondiepe zee, welke plotseling in een „oneindig diepe" oceaan overgaat. We staan nu voor de taak, uit (1) een stelsel betrekkingen van het type (26) van 4.2 af te leiden, zoals we dit voor de kustvoorwaarde gedaan hebben. Praktisch stuit dit op moeilijkheden in verband met de uit (11) voortvloeiende langzame convergentie. In de in dit hoofdstuk beschouwde numerieke toepassing is deze moeilijkheid als volgt opgelost. We stellen:

$$B_n = (-1)^{n-1} B' n^{-\alpha} + B'' n^{-2+\alpha} + (-1)^{n-1} B''' n^{-2-\alpha} + n E_n \tag{18}$$

en

$$\theta_n = \theta - \varepsilon_n, \tag{19}$$

waarbij dus E_n en ε_n als kleine correcties beschouwd kunnen worden. Daarmee kan (1) geschreven worden als:

$$\left.\begin{aligned} & B' \{\Psi(\pi - x, 1+\alpha) + \theta\,\Phi(\pi - x, 1+\alpha) + E'\} + \\ & + B'' \{\Psi(x, 3-\alpha) \quad - \theta\,\Phi(x, 3-\alpha) \quad + E''\} + \\ & + B''' \{\Psi(\pi - x, 3+\alpha) + \theta\,\Phi(\pi - x, 3+\alpha) + E'''\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\sin nx - \theta_n \cos nx) = \varphi(x), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

waarbij

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, s) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cos nx, \\ \Psi(x, s) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sin nx, \\ E' &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1-\alpha} \varepsilon_n \cos nx, \\ E'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3+\alpha} \varepsilon_n \cos nx, \\ E''' &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3-\alpha} \varepsilon_n \cos nx. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

In de praktijk breken we de laatste reeks in het linkerlid van (20) af bij de j^e term. Voor x kiezen we daarna $j + 4$ waarden, welke even zovele lineaire vergelijkingen opleveren. Daaruit kunnen B_0, E_1, $E_2 \ldots E_j$, B', B'', B''' worden bepaald, d.w.z. lineair uitgedrukt in A_0.

Op het hier beschreven proces zijn nog wel enkele niet essentieel verschillende varianten mogelijk. We merken op, dat bij dit proces de reeksen Φ en Ψ gemakkelijk sommeerbaar zijn en dat de reeksen E', E'', E''' vrij snel convergeren.

In de te maken numerieke toepassing zullen we $j = 3$ kiezen, terwijl voor x de volgende waarden gesubstitueerd zullen worden:

$$x = 0, \pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi. \tag{22}$$

4.7 Het bijzondere geval $\Omega = 0$

In het speciale geval, dat $\Omega = 0$ is, kan een oplossing van het gestelde probleem gemakkelijk langs directe weg verkregen worden. Indien evenals in (16) van 4.4:

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -\delta(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

luidt de oplossing van (12) van 4.2 met (17), (18) en (19) van 4.2:

$$\bar{u} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{p+\lambda}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch} q(b-y)}{\operatorname{ch} qb}\right\} \quad (3)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\operatorname{sh} q(b-y)}{q \operatorname{ch} qb} \quad (4)$$

Vergelijken we dit met de algemene uitdrukkingen (10) van 4.4 e.v., dan blijkt gemakkelijk dat door specialisatie de bovenstaande uitdrukkingen afgeleid kunnen worden, indien voor $\Omega \to 0$ de volgende limietovergangen in acht genomen worden:

$$\left.\begin{aligned} &A_n \Omega^{-1} \to 0 \qquad B_n \Omega^{-1} \to 0 \qquad \text{voor} \quad n \geqq 1 \\ &A_0 \to q^{-1} \qquad B_0 \to q^{-1} \operatorname{th} qb. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Voor later gebruik geven we nog de waarde van $\bar{\zeta}$ aan de kust $y = 0$:

$$\bar{\zeta}(x, 0, p) = q^{-1} \operatorname{th} qb. \quad (6)$$

4.8 Benadering voor kleine Ω

Indien Ω klein is, kunnen we heel geschikt $\bar{u}$, $\bar{v}$ en $\bar{\zeta}$ naar opklimmende machten van Ω ontwikkelen. We zullen ons hier alleen met de laagste termen bezighouden. Overigens zijn aan de bepaling van de latere termen geen essentiële moeilijkheden verbonden.

Een oppervlakkige beschouwing van de kustvoorwaarde (14) van 4.4 en de oceaanvoorwaarde (15) van 4.4 leert al, dat voor $\Omega \to 0$:

$$\left.\begin{aligned} & & A_0 &= O(1) & B_0 &= O(1) \\ & n = \text{even} & A_n &= O(\Omega^3) & B_n &= O(\Omega^3) \\ & n = \text{oneven} & A_n &= O(\Omega^2) & B_n &= O(\Omega^2). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

We merken op, dat

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= p\Omega(n^2+q^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \{1 + O(\Omega^2)\} \\ \nu_n &= \qquad (n^2+q^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \{1 + O(\Omega^2)\} \\ \theta_n &= n(p+\lambda)\Omega^{-1}(n^2+q^2)^{-\frac{1}{2}} \{1 + O(\Omega^2)\}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Uit (4) en (6) van 4.5 volgt:

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= 2\{1 + O(\Omega^2)\} \\ \nu_0 &= -2(p+\lambda)^{-1}\{1 + O(\Omega^2)\}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Met behulp van deze schattingen volgt uit het stelsel (7) van 4.5 met weglating van de ordeterm $O(e^{-b})$:

$$A_0 = q^{-1}\{1 + O(\Omega^2)\} \quad (4)$$

en voor oneven n

$$A_n = \frac{4s^2}{\pi n^2} B_0 \{1 + O(\Omega^2)\} \quad (5)$$

We beschouwen vervolgens de oceaanvoorwaarde (15) van 4.4. Deze leidt met behulp van bovenstaande schattingen tot:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+q^2)^{-\frac{1}{2}} B_n \cos nx = \operatorname{tg}\gamma \{ s(x - \tfrac{1}{2}\pi) \operatorname{ch} qb - \operatorname{sh} qb \} A_0 + \\ &- \operatorname{tg}\gamma \{ s(x - \tfrac{1}{2}\pi) \operatorname{sh} qb - \operatorname{ch} qb \} B_0 - \operatorname{tg}^2\gamma\, q^{-1} \operatorname{sech} \tfrac{1}{2}q\pi \operatorname{sh} q(x - \tfrac{1}{2}\pi) + O(\Omega^3) \end{aligned} \quad (6)$$

Daar linker- en rechterlid in het interval $(0, \pi)$ gemiddeld nul zijn, volgt hieruit, dat

$$B_0 = q^{-1} \operatorname{th} qb \{ 1 + O(\Omega^2) \}. \tag{7}$$

Voorts kunnen we hieruit gemakkelijk afleiden, dat voor oneven n:

$$B_n = -\frac{4s^2}{\pi q^2}\left(\frac{\sqrt{n^2+q^2}}{n^2 \operatorname{ch} qb} - \frac{1}{\sqrt{n^2+q^2}}\right)\{ 1 + O(\Omega) \}. \tag{8}$$

Met behulp van (4), (5), (7) en (8) vinden we bijvoorbeeld voor $\bar{\zeta}(x, y)$ uit (6) en (12) van 4.4:

$$\bar{\zeta}(x, y) = \frac{\operatorname{sh} q(b-y)}{q \operatorname{ch} qb} +$$

$$+ \operatorname{tg} \gamma \left\{ -\frac{\operatorname{sh} q(x - \frac{1}{2}\pi)}{q \operatorname{ch} \frac{1}{2}q\pi} + \frac{(x - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{ch} q(b-y)}{\operatorname{ch} qb} + \frac{4}{\pi} q \operatorname{th} qb \, \Sigma_1 \frac{\cos nx \, e^{-y\sqrt{n^2+q^2}}}{n^2 \sqrt{n^2+q^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\pi} \Sigma_1 \left(\frac{1}{n^2 \operatorname{ch} qb} - \frac{1}{n^2+q^2} \right) \cos nx \, e^{-(b-y)\sqrt{n^2+q^2}} \right\} + O(\Omega^2) + O(e^{-b}). \tag{9}$$

In het bijzonder volgt hieruit voor $x = \frac{1}{2}\pi$:

$$\bar{\zeta}(\tfrac{1}{2}\pi, y) = \frac{\operatorname{sh} q(b-y)}{q \operatorname{ch} qb} + O(\Omega^2) + O(e^{-b}), \tag{10}$$

zodat dus de invloed van Ω op de waarde van $\bar{\zeta}$ op de as $x = \frac{1}{2}\pi$ een *tweede-orde-effect* is. De invloed van de draaiing van de aarde leidt dus in eerste instantie tot een symmetrische scheefheid van de zeespiegel om de noord–zuid-as. In formulevorm:

$$\bar{\zeta}(x, y) + \bar{\zeta}(\pi - x, y) = 2\,\bar{\zeta}(\tfrac{1}{2}\pi, y) + O(\Omega^2) + O(e^{-b}). \tag{11}$$

Voor ons is in het bijzonder de waarde van $\bar{\zeta}$ van belang aan de kust $y = 0$. Uit (9) volgt weer:

$$\bar{\zeta}(x, 0) = q^{-1} \operatorname{th} qb + \operatorname{tg} \gamma \left\{ -\frac{\operatorname{sh} q(x - \frac{1}{2}\pi)}{q \operatorname{ch} \frac{1}{2}q\pi} + (x - \tfrac{1}{2}\pi) + \frac{4}{\pi} q \operatorname{th} qb \, \Sigma_1 \frac{\cos nx}{n^2 \sqrt{n^2+q^2}} \right\}$$

$$+ O(\Omega^2) + O(e^{-b}). \tag{12}$$

4.9 Benadering voor grote Ω en kleine p

In de toepassing op de Noordzee is Ω relatief groot, zodat de beschouwingen van de vorige paragraaf ten hoogste een kwalitatieve betekenis hebben. Ten einde voor grote waarden van Ω verder te kunnen komen, kunnen we verschillende wegen inslaan. We kunnen trachten $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\zeta}$ te ontwikkelen voor *grote* waarden van de Laplace-variabele p. Indien het gelukt termsgewijze de terugtransformatie naar de tijd t uit te voeren, vinden we een ontwikkeling voor *kleine* waarden van t. De betekenis hiervan is twijfelachtig, aangezien dit min of meer betekent, dat we het verloop van $\zeta(x, y, t)$ kennen voor slechts die waarden van t, waarvoor de storm nog in zijn beginstadium is. Aan de andere kant kunnen we $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\zeta}$ voor *kleine* waarden van p ontwikkelen, hetgeen leidt tot de toestand, waarbij de storm al afgelopen is. We vermoeden dat we op deze wijze voor een ontwikkeling van $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\zeta}$ voor *matige* waarden van p toch nog een bruikbaar resultaat vinden. Immers, de schatting van de coëfficiënten A_n en B_n, welke we hier zullen afleiden, berust in wezen op het feit, dat Ω groot is ten opzichte van de combinatie $p + \lambda$. Hierbij is dus het geval ingesloten, dat p zelf klein is. We vermoeden dat hierdoor na de inverse Laplace-transformatie een resultaat wordt verkregen, dat de toestand beschrijft waarin de storm op zijn hoogtepunt is en ook de toestand daarna. Een exact bewijs daarvoor is echter nog niet gegeven.

Beschouwen we nog eens het oorspronkelijke probleem (12) van 4.2 enz., dan zien we, dat $\bar{\zeta}$ in wezen van de twee parameters θ en $\varkappa$ afhangt. Daar

$$\varkappa^2 = s^2(1 + \theta^2), \tag{1}$$

kunnen we ook θ en s als onafhankelijke parameters beschouwen. We doen nu dit laatste en we zullen hierbij veronderstellen, dat θ klein en s noch bijzonder groot, noch bijzonder klein is. Aldus is:

$$\alpha_n = \frac{s^2}{n\sqrt{n^2+s^2}}\,\theta\left\{1 + O(\theta^2)\right\}, \tag{2}$$

en uit (6) van 4.5 volgt voor even m inclusief $m = 0$:

$$\Omega\, v_m = \theta\, s_m^{-1} \operatorname{sech} \tfrac{1}{2}s\pi \left\{ 1 + O(\theta^2) \right\}. \tag{3}$$

Vooruitlopend op een resultaat, dat we straks zullen afleiden, nl.:

$$B_0 = O(\theta^{-1}), \tag{4}$$

volgt nu gemakkelijk uit het stelsel (7) van 4.5:

$$A_0 = \theta^{-1} s^{-1} \operatorname{sech} \tfrac{1}{2}s\pi \left\{ 1 + O(\theta) \right\}, \tag{5}$$

voor oneven index:

$$A_n = s_n\, sB_0 \left\{ 1 + O(\theta) \right\} \tag{6}$$

en voor even index:

$$A_n = O(1). \tag{7}$$

We beschouwen vervolgens de oceaanvoorwaarde (15) van 4.4. We zullen hierbij uitgaan van de veronderstelling, dat θ klein en θb (of qb) matig is. Men heeft dan voor $\theta \to 0$ wederom met weglating van de ordeterm $O(e^{-b})$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n (\sin nx - \theta \cos nx) = \beta(x), \tag{8}$$

waarbij

$$\beta(x) = -A_0 \operatorname{sh}\left\{ s(x - \tfrac{1}{2}\pi) - qb \right\} - B_0 \operatorname{ch}\left\{ s(x - \tfrac{1}{2}\pi) - qb \right\} +$$
$$+ \theta^{-1} s^{-1} \operatorname{sech} \tfrac{1}{2}s\pi \operatorname{sh} s(x - \tfrac{1}{2}\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_n - \theta)\, n^{-1} B_n \cos nx + O(\theta). \tag{9}$$

In 4.6 is gebleken, dat $\beta(x)$ aan de voorwaarde

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)^{\alpha - 1}\, \beta(x)\, dx = 0 \tag{10}$$

dient te voldoen, waarbij α door (7) van 4.6 gegeven is. Daar voor $\theta \to 0$ ook $\alpha \to 0$ betekent de voorwaarde (10) in de limiet, dat

$$\beta(0) = 0.$$

Gemakkelijk blijkt dat voor $n \geqq 1$:

$$B_n = O(\theta^{-1}).$$

Uit (9) volgt dus voor $\theta \to 0$:

$$A_0 \operatorname{sh} \beta - B_0 \operatorname{ch} \beta = \theta^{-1} s^{-1} \operatorname{th} \tfrac{1}{2}s\pi + O(1), \tag{11}$$

waarbij β gedefinieerd is als

$$\beta = \tfrac{1}{2}s\pi + qb. \tag{12}$$

Uit (5) volgt voor B_0:

$$B_0 = \frac{\operatorname{sh} \beta - \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}s\pi}{q \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}s\pi} + O(1). \tag{13}$$

Met gebruikmaking van de gevonden uitdrukkingen voor A_0 en B_0 volgt uit (8) en (9) na enig rekenwerk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} B_n \sin nx = \frac{(\operatorname{ch} qb - 1) \operatorname{sh} sx}{q \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}s\pi} + O(1),$$

zodat

$$B_n = \frac{4(\operatorname{ch} qb - 1) \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}s\pi}{\pi q \operatorname{ch} \beta} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{n^2 + s^2} + O(1). \tag{14}$$

Met behulp van de gevonden benaderingen kan nu een benadering voor bijv. $\bar{\zeta}(x, y)$ afgeleid worden. We zullen ons beperken tot de waarde van $\bar{\zeta}$ aan de kust $y = 0$, aangezien deze voor ons het belangrijkste is. Na enig gereken blijkt dat voor $\theta \to 0$:

$$\bar{\zeta}(x, 0) = \frac{\operatorname{sh}\beta - \operatorname{sh}\frac{1}{2}s\pi}{q \operatorname{ch}\beta \operatorname{ch}\frac{1}{2}s\pi}\{\operatorname{ch} s(x - \tfrac{1}{2}\pi) + \Sigma_1 n^{-1} s\, s_n \sin nx\} + O(1). \tag{15}$$

Nu volgt uit (1) en (4) van 4.5, dat

$$\operatorname{sh} s(x - \tfrac{1}{2}\pi) = -\Sigma_1 s_n \cos nx,$$

zodat

$$\operatorname{ch}\tfrac{1}{2}s\pi - \operatorname{ch} s(x - \tfrac{1}{2}\pi) = \Sigma_1 n^{-1} s\, s_n \sin nx.$$

Hiermede vereenvoudigt (15) zich tot

$$\bar{\zeta}(x, 0) = \frac{\operatorname{sh}\beta - \operatorname{sh}\frac{1}{2}s\pi}{q \operatorname{ch}\beta} + O(1) \tag{16}$$

Ter vergemakkelijking zullen we de gevonden benadering van $\bar{\zeta}(x, 0)$ met $\bar{Z}(p)$ aanduiden, d.w.z.

$$\bar{Z}(p) \overset{\text{def}}{=} q^{-1}(\operatorname{th}\beta - \operatorname{sech}\beta \operatorname{sh}\tfrac{1}{2}s\pi). \tag{17}$$

Uit (16) blijkt wederom, dat in eerste instantie de verhoging aan de kust $y = 0$ niet van Ω afhangt.

Tot dusverre zijn we uitgegaan van het windveld $U = 0$, $V = -\delta(t)$. Vervangen we hier de deltafunctie door een willekeurige tijdfunctie, d.w.z.

$$U = 0 \qquad V = V(t), \tag{18}$$

dan is dus, steeds in dezelfde benadering,

$$\bar{\zeta}(x, 0) = -\bar{V}(p)\,\bar{Z}(p), \tag{19}$$

en ten slotte met de inverse Laplace-transformatie:

$$\zeta(x, 0, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{pt}\,\bar{V}(p)\,\bar{Z}(p)\,dp, \tag{20}$$

waarbij L een in het rechterhalfvlak gelegen verticale integratieweg is. Het rechterlid van (20) kan met residu-rekening berekend worden. In de eerste plaats kunnen er polen van $\bar{V}(p)$ zijn. Interessanter zijn echter de polen van $\bar{Z}(p)$. Deze analytische functie, welke in de oorsprong regulier is en waarbij

$$\bar{Z}(0) = b,$$

heeft polen, welke volgen uit $\operatorname{ch}\beta = 0$, d.w.z.

$$s(\tfrac{1}{2}\pi + \theta b) = \pm(m + \tfrac{1}{2})\pi i \tag{21}$$

voor $m = 0, 1, 2 \ldots$.

Voor elke waarde van m zijn er aldus drie polen, één reëel en in het interval $(-\lambda, 0)$ en twee toegevoegd complex met negatief reëel deel.

Deze polen komen kwalitatief overeen met de eigenwaarden van het model. De afwijkingen zullen des te groter zijn naarmate de benadering (16) minder goed is. Aangezien de benadering het beste is als $|\theta|$ zo klein mogelijk is, kunnen we feitelijk alleen overeenstemming verwachten voor de bij $m = 0$ behorende polen, welke het dichtste bij de oorsprong liggen. In het bijzonder is dit het geval voor de bij $m = 0$ behorende negatief reële pool. Hierop komen we bij de numerieke toepassing terug.

De benadering (16) kan ook op de volgende wijze geïnterpreteerd worden. Schrijven we:

$$\bar{Z}(p) = q^{-1}\{1 - (e^{s\pi} - 1)e^{-\beta} - 2e^{-2\beta} + (e^{s\pi} - 1)e^{-3\beta} + \ldots\}, \tag{22}$$

dan stelt de eerste term in het rechterlid de rechtstreekse verstoring aan de kust $y = 0$ voor. De tweede term stelt de van de oceaan uitgaande storing voor, welke na b (dimensieloze) tijdeenheden aan de kust $y = 0$ arriveert. De derde term stelt de reflectie voor van de rechtstreekse verstoring aan de kust $y = 0$ ten opzichte van de oceaan. Deze secundaire storing doet zich pas gelden na $2b$ tijdeenheden, enz.

Indien $\Omega = 0$ is, gaat (16) over in:

$$\bar{\zeta}(x, 0) = q^{-1} \operatorname{th} qb. \tag{23}$$

Volgens (6) van 4.7 is dit voor dit geval de exacte uitdrukking.

Ten slotte vermelden we nog het speciale geval $\lambda = 0$. Dan is

$$\bar{Z}(p) \to p^{-1}\{ \operatorname{th}(\tfrac{1}{2}\Omega\pi + pb) - \operatorname{sech}(\tfrac{1}{2}\Omega\pi + pb) \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}\Omega\pi \}. \tag{24}$$

De Laplace-inverse hiervan is:

$$Z(t) = \iota(t) - 2 \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}\Omega\pi\, \iota(t-b) - 2e^{-\Omega\pi}\, \iota(t-2b) + 2 \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}\Omega\pi\, \iota(t-3b) + \ldots, \tag{25}$$

waarbij met $\iota(t)$ de sprongfunctie

$$\iota(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

bedoeld wordt.

4.10 Numerieke toepassingen

4.10.1 *Exponentieel windveld*

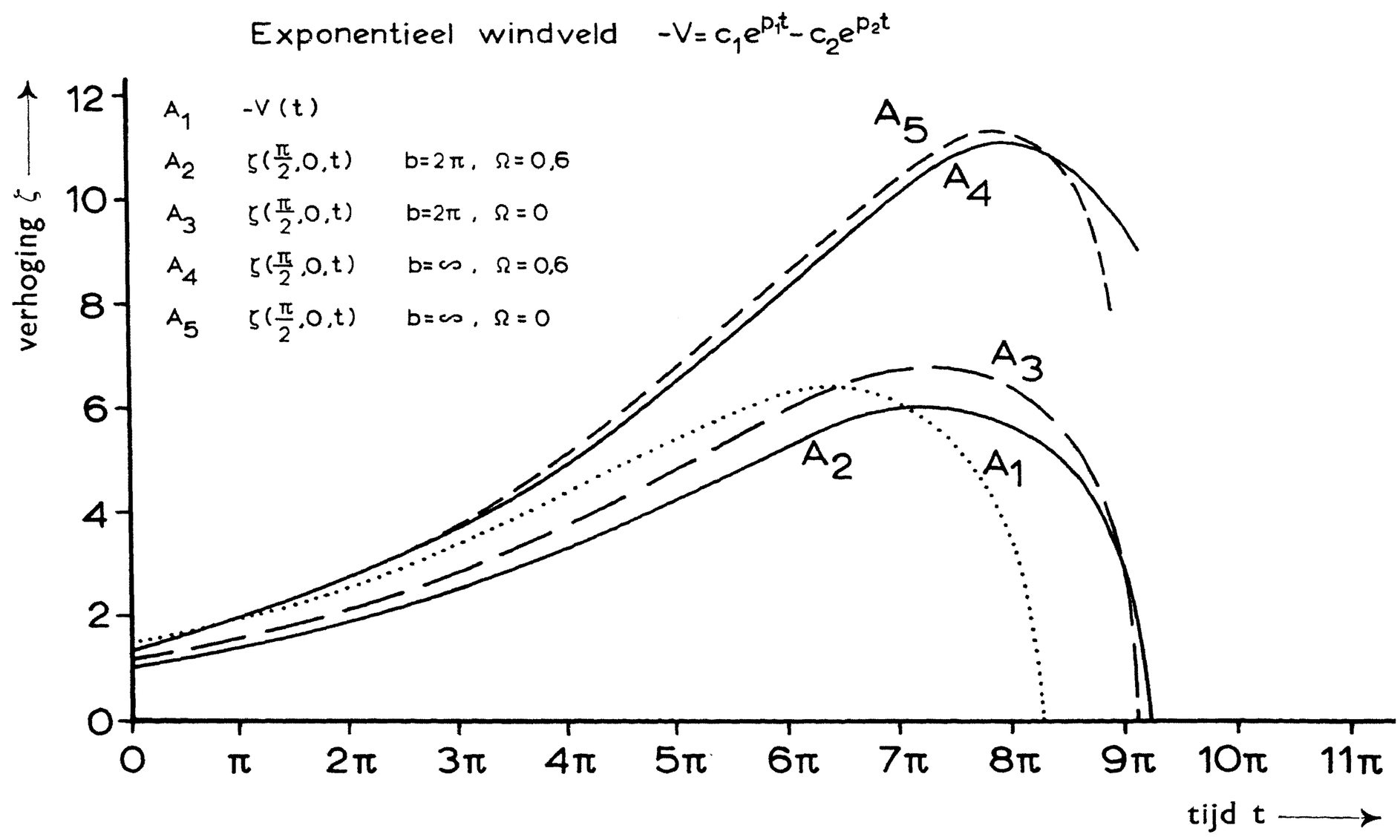
We maken nu de volgende numerieke toepassing:

$$\Omega = 0{,}6 \qquad \lambda = 0{,}12 \qquad b = 2\pi$$

en

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= -0{,}27\,(e^{0{,}12t} - 0{,}2\, e^{0{,}18t}). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbij hebben we dus een exponentieel windveld gekozen van het in 4.2 beschreven type. De getallenfactoren zijn hierbij vrij willekeurig. We hebben er echter wel voor gezorgd, dat dit windveld een kwalitatief beeld geeft van een opkomende en later weer afnemende storm. Voorts is er voor gezorgd, dat $|V_{max}| = 1$. Enkele getallenwaarden staan vermeld in tabel 4.10.1, zie ook figuur 4.10.1. (π tijdseenheden komen overeen met 4,4 uur).



Figuur 4.10.1. De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een exponentieel windveld

Tabel 4.10.1
Exponentieel windveld

t	$-V$	t	$-V$
0	0,22	5π	0,85
π	0,30	6π	0,98
2π	0,40	7π	0,95
3π	0,54	8π	0,53
4π	0,70	9π	— 0,73

Het maximum treedt op voor $t = 20{,}1$. De wind slaat om van richting voor $t = 26{,}8$. Tot aan dit tijdstip kunnen we spreken van een noordenwind, welke langzaam zijn maximum bereikt en daarna vrij snel afneemt. Voorbij $t = 26{,}8$ gaat de wind over in een zodanig snel in intensiteit toenemende zuidenwind, dat het model al spoedig zinloos wordt. In de berekeningen zullen we dan ook niet verder mogen gaan dan tot $t = 9\pi$. Dit is overigens een essentieel bezwaar van het gebruik van een dergelijk exponentieel windveld. Het enorme voordeel is, dat we hierbij de gecompliceerde inverse Laplace-transformatie vermijden.

We werken bij deze numerieke toepassing met dimensieloze grootheden. Zoals in 4.2 is opgemerkt, wordt de tijd gemeten in eenheden van 1,4 uur en ζ in eenheden van 65 meter. Om nu op grond van (9) van 4.2 aan een maximale windsterkte van v_s m/sec meteen voor ζ een uitkomst in meters te kunnen verbinden, handelen we als volgt. We gaan steeds uit van een maximale windsterkte, welke dimensieloos gelijk aan 1 is, d.w.z.

$$\{ \sqrt{U^2 + V^2} \}_{max} = 1. \tag{2}$$

Aan de hierbij behorende (dimensieloze) verhoging ζ voegen we dan een conversiefactor toe welke de in tabel 4.10.2 gegeven grootte heeft.

Tabel 4.10.2
Conversiefactoren

Maximale windsterkte in m/sec	Conversiefactor
29	0,50
30	0,54
35	0,75
41	1,00

We berekenen nu de coëfficiënten A_n en B_n voor enige waarden van n. Uit het stelsel (7) van 4.5 volgt vrij gemakkelijk met slechts enkele iteraties:

$$\begin{array}{llll}
p = 0{,}12 & A_0 = & 4{,}805 & - \; 0{,}022\, B_0 \\
 & A_1 = & & 0{,}239\, B_0 \\
 & A_2 = & -0{,}005 & + \; 0{,}007\, B_0 \\
 & A_3 = & & 0{,}031\, B_0 \\
 & A_4 = & -0{,}001 & + \; 0{,}002\, B_0 \\
 & A_5 = & & 0{,}001\, B_0 \\
p = 0{,}18 & A_0 = & 3{,}390 & - \; 0{,}035\, B_0 \\
 & A_1 = & & 0{,}289\, B_0 \\
 & A_2 = & -0{,}009 & + \; 0{,}013\, B_0 \\
 & A_3 = & & 0{,}038\, B_0 \\
 & A_4 = & -0{,}002 & + \; 0{,}003\, B_0 \\
 & A_5 = & & 0{,}014\, B_0
\end{array}$$

Met behulp van de in 4.6 beschreven methode vinden we met niet al te veel moeite voor $p = 0{,}12$ in de eerste plaats:

$$B_0 = -0{,}954 \; + \; 0{,}913\, A_0.$$

De coëfficiënten A_0 en B_0 zijn nu bekend, nl.

$$A_0 = 4{,}731 \qquad B_0 = 3{,}366.$$

Voorts vinden we:

$$\begin{aligned} B' &= 0{,}930 & E_1 &= 0{,}116 \\ B'' &= 0{,}033 & E_2 &= 0{,}006 \\ B''' &= -0{,}232 & E_3 &= 0{,}014. \end{aligned}$$

In verband met (18) van 4.6 vinden we ten slotte:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0{,}805 & B_1 &= 0{,}847 \\ A_2 &= 0{,}019 & B_2 &= -0{,}721 \\ A_3 &= 0{,}104 & B_3 &= 0{,}710 \\ A_4 &= 0{,}006 & B_4 &= -0{,}654 \\ A_5 &= 0{,}037 & B_5 &= 0{,}628. \end{aligned}$$

Voor $p = 0{,}18$ vinden we op soortgelijke wijze:

$$\begin{aligned} A &= 3{,}294 & B &= 2{,}702 \\ A_1 &= 0{,}782 & B_1 &= 0{,}846 \\ A_2 &= 0{,}026 & B_2 &= -0{,}674 \\ A_3 &= 0{,}103 & B_3 &= 0{,}669 \\ A_4 &= 0{,}006 & B_4 &= -0{,}657 \\ A_5 &= 0{,}038 & B_5 &= 0{,}615. \end{aligned}$$

Met behulp van de gevonden waarden voor de coëfficiënten zijn we in staat $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ en $\bar{\zeta}(x, y)$ voor een willekeurige combinatie (x, y) en voor de twee waarden $p = 0{,}12$ en $p = 0{,}18$ te berekenen. Uit (23) van 4.2 volgt aldus voor bij voorbeeld $\zeta(x, y, t)$, dat

$$\zeta(x, y, t) = 0{,}27\,(\bar{\zeta}(x, y, p_1)\, e^{p_1 t} - 0{,}2\, \bar{\zeta}(x, y, p_2)\, e^{p_2 t}). \tag{3}$$

In de eerste plaats zullen we het gedrag van ζ aan de kust $y = 0$ nagaan. Uit (6) en (12) van 4.4 volgen voor enige waarden aan deze kust $x = 0\,(\pi/8)\,\pi$ de in tabel 4.10.3 gegeven waarden voor $\bar{\zeta}$.

Tabel 4.10.3
Het gedrag van $\bar{\zeta}$ voor $y = 0$

x	$\bar{\zeta}(x, 0, p_1)$	$\bar{\zeta}(x, 0, p_2)$
0	4,44	3,80
1. $\pi/8$	4,40	3,76
2. $\pi/8$	4,33	3,67
3. $\pi/8$	4,23	3,56
4. $\pi/8$	4,14	3,46
5. $\pi/8$	4,05	3,35
6. $\pi/8$	3,97	3,25
7. $\pi/8$	3,90	3,17
π	3,86	3,14

Voor het punt $x = \frac{1}{2}\pi$ vinden we dan met behulp van (3) (zie figuur 4.10.1) de waarden van tabel 4.10.4.

Tabel 4.10.4
De verhoging in het midden van de zuidkust

t	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$	t	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$
0	0,93	$5\,\pi$	4,22
π	1,30	$6\,\pi$	5,19
$2\,\pi$	1,80	$7\,\pi$	5,90
$3\,\pi$	2,45	$8\,\pi$	5,61
$4\,\pi$	3,26	$9\,\pi$	2,99

Voor de andere punten aan de kust is het resultaat maar weinig anders. Interessant is hierbij hoe de maximale verhoging in een vast punt van de plaats aan de kust afhangt. Dit blijkt uit tabel 4.10.5.

Tabel 4.10.5
Verloop van de maximale verhoging langs de zuidkust

x	ζ_{max}	x	ζ_{max}
0	6,05	$5.\pi/8$	5,88
$1.\pi/8$	6,04	$6.\pi/8$	5,85
$2.\pi/8$	6,00	$7.\pi/8$	5,84
$3.\pi/8$	5,99	π	5,83
$4.\pi/8$	5,90		

Hierin wordt weer duidelijk de ten gevolge van de Corioliskracht optredende scheefheid gedemonstreerd. Zoals reeds is gebleken, is deze scheefheid aan de kust $y = 0$ het geringst. Men kan op dezelfde wijze vinden, dat het maximum voor $x = 0$ iets eerder optreedt dan voor $x = \pi$, hetgeen overeenkomt met een in positieve zin rondlopende vloedgolf.

Voor de aan de kust $y = 0$ optredende verhoging ten gevolge van een uniform *stationair* windveld $U = 0$, $V = -1$ zouden we $\zeta\,(x, 0) = 2\pi$ gevonden hebben. Deze waarde ligt maar weinig boven die van ζ_{max} uit tabel 4.10.5. Voegen we nu aan het windveld (1) op elk moment de er bij behorende stationaire waarde van $\zeta\,(x, 0)$ toe, dan ontstaat een curve $\zeta = -2\pi\, V(t)$, welke blijkens figuur 4.10.1 maar weinig van de boven voor $x = \frac{1}{2}\pi$ berekende verhoging afwijkt. Het belangrijkste verschil is, dat de twee curven horizontaal verschoven lijken te zijn. We komen hierop nog nader terug.

De invloed van Ω blijkt vooral indien we het speciale geval $\Omega = 0$ beschouwen. Dan is volgens 4.7:

$$\zeta\,(x, 0, t) = 0{,}27\left(\frac{\text{th}\,2\pi q_1}{q_1}\,e^{p_1 t} - 0{,}2\,\frac{\text{th}\,2\pi q_2}{q_2}\,e^{p_2 t}\right) \tag{4}$$

Hierbij is q_1^{-1} th $2\pi q_1 = 4{,}64$ en q_2^{-1} th $2\pi q_2 = 3{,}86$. Het windeffect aan de kust wordt hiermede (zie figuur 4.10.1):

Tabel 4.10.6
De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie

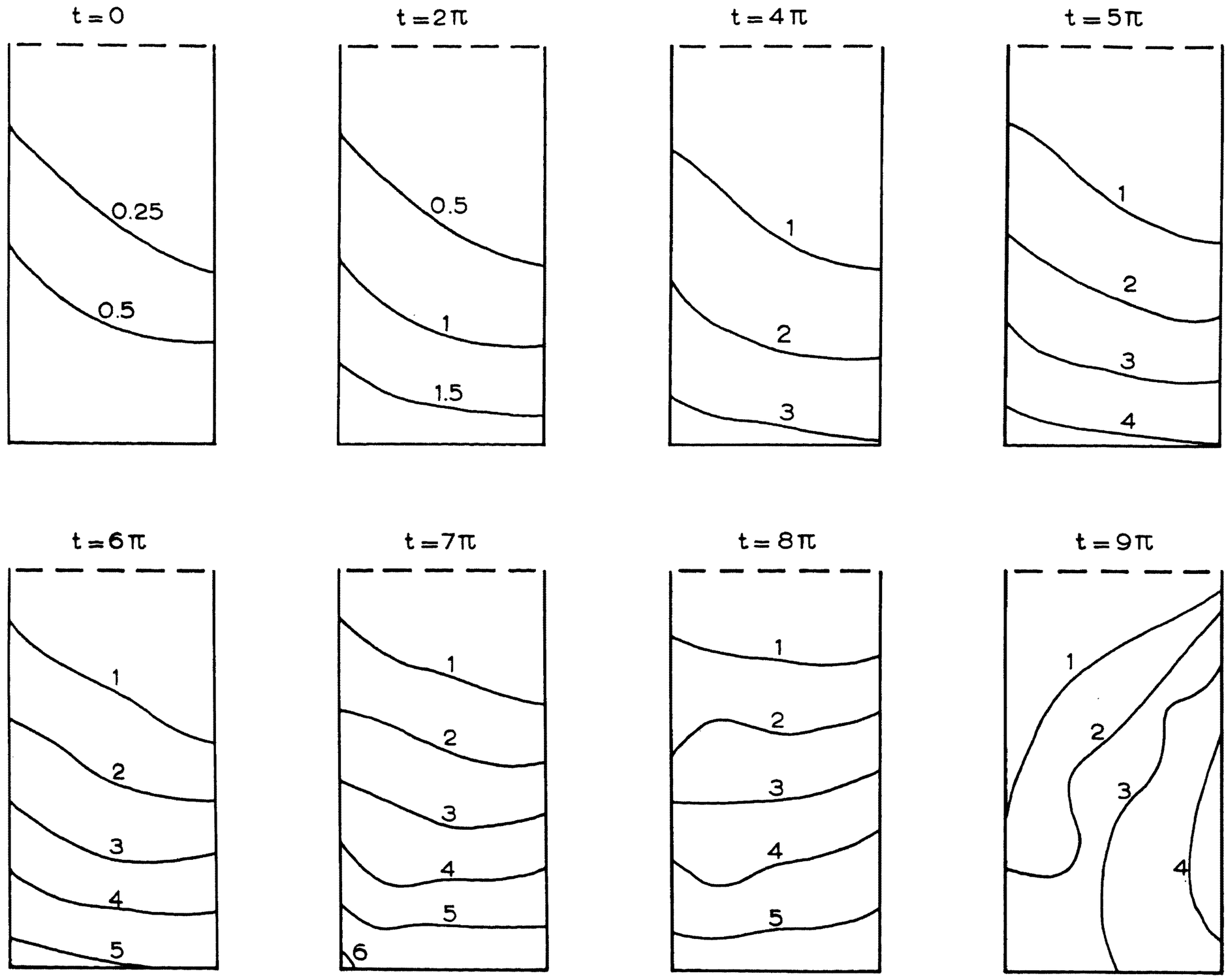
t	$\zeta\,(\Omega = 0)$	t	$\zeta\,(\Omega = 0)$
0	1,05	$5\,\pi$	4,73
π	1,46	$6\,\pi$	5,83
$2\,\pi$	2,02	$7\,\pi$	6,63
$3\,\pi$	2,75	$8\,\pi$	6,36
$4\,\pi$	3,66	$9\,\pi$	3,45

Deze waarden liggen wat hoger dan die voor $\Omega \neq 0$, hetgeen zou kunnen duiden op een soort dempende invloed van het Corioliseffect. In figuur 4.10.1 is de verhoging aan de kust in het punt $x = \frac{1}{2}\pi$ onder de verschillende omstandigheden geschetst:

A1 geeft de op de bovenbeschreven quasi-stationaire wijze uit het windveld V afgeleide verhoging $-2\pi\, V$;
A2 geeft ζ voor $\Omega = 0{,}6$;
A3 geeft ζ voor $\Omega = 0$;
A4 geeft ζ voor $\Omega = 0{,}6$, indien de oceaan naar het oneindige verplaatst, d.w.z. weggelaten is;
A5 geeft hetzelfde, maar dan met $\Omega = 0$.

We hebben ten slotte voor een aantal over de gehele zee verspreide punten de waarden van $\zeta\,(x, y, t)$ op verschillende tijdstippen berekend. Uit het verkregen numerieke materiaal zijn nu in figuur 4.10.2

enige momentopnamen samengesteld, waarin telkens enige niveaulijnen geschetst zijn. De bij deze niveaulijnen behorende getallen spreken voor zich zelf. Als de maximale wind 41 m/sec bedraagt, zodat de conversiefactor 1 is, dan kunnen we deze getallen als verhogingen in centimeters interpreteren. Duidelijk blijkt uit deze serie plaatjes, hoe de scheefheid van het wateroppervlak in positieve y-richting toeneemt. Opmerkelijk is voorts, dat reeds dit zeer eenvoudige model van een windveld althans kwalitatief het werkelijke verloop van de niveaulijnen vrij goed weergeeft (vgl. [2, 29]).



Figuur 4.10.2. Niveaulijnen in een rechthoekige baai ten gevolge van een exponentieel windveld

4.10.2 *Sprong-windveld*

We beschouwen nu het volgende windveld:

$$\left.\begin{array}{lll} U = & 0 & \\ V = & 0 & \text{voor} \quad t < 0 \\ V = & -1 & \text{voor} \quad t > 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

We gaan nu uit van de in 4.9 afgeleide benadering voor de Laplace-getransformeerde van $\zeta\,(x, 0, t)$. Aangezien deze benadering het beste is voor $x = \frac{1}{2}\pi$ zullen we hierbij steeds spreken over de verhoging in het punt $x = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$. Met een goede benadering is dus met inachtneming van het windveld (4):

$$\bar{\zeta}\,(\tfrac{1}{2}\pi, 0) \approx p^{-1}\,\bar{Z}\,(p), \qquad (5)$$

waarbij $\bar{Z}\,(p)$ door (17) van 4.9 is bepaald.

Voordat we met (5) verder gaan, willen we eerst een indruk geven van de aard van de in 4.9 voor A_n, B_n gegeven benaderingen. In de vorige paragraaf zijn voor $p = 0{,}12$ en voor $p = 0{,}18$, wat we matige waarden zouden kunnen noemen, de exacte waarden van deze coëfficiënten afgeleid. Men ziet ze in tabel 4.10.7 te zamen met de uit (5), (6) en (13) van 4.9 volgende benaderingen.

Tabel 4.10.7
Vergelijking van exacte en benaderde waarden voor enkele coëfficiënten

	$p = 0{,}12$		$p = 0{,}18$	
	exact	benadering	exact	benadering
B_0	3,37	3,32	2,71	2,69
A_0	4,73	4,79	3,30	3,37
A_1	0,81	0,79	0,78	0,78
A_2	0,02	0,00	0,03	0,00
A_3	0,10	0,10	0,10	0,10
A_4	0,01	0,00	0,01	0,00
A_5	0,04	0,04	0,04	0,04

De benadering blijkt dus, althans in deze gevallen, zeer goed te zijn. De verwachting is gewettigd, dat voor kleinere waarden van p de overeenstemming nog beter is.

We vergelijken ook nog even de waarden van $\overline{Z}(p_1)$ en $\overline{Z}(p_2)$ met de overeenkomstige exacte waarden:

	$p = 0{,}12$		$p = 0{,}18$	
	exact	benadering	exact	benadering
$\overline{Z}(p)$	4,144	4,087	3,459	3,439

Ook hier is de overeenstemming zeer bevredigend.

We keren nu weer terug tot (5). De inverse transformatie kan hier gemakkelijk met behulp van residurekening worden uitgevoerd.

Het windveld levert de pool $p = 0$. Hierbij behoort het residu $b = 2\pi$ hetgeen de bij de *stationaire* wind $V = -1$ behorende stationaire verhoging is. Vervolgens berekenen we de bij $\overline{Z}(p)$ behorende polen. Uit (21) van 4.9 volgen voor $m = 0, 1, 2$ en 3 de drietallen polen c_m, $a_m \pm ib_m$:

Tabel 4.10.8
De bij $\overline{Z}(p)$ behorende polen

m	c_m	$a_m \pm ib_m$
0	— 0,0744	— 0,233 $\pm$ i 0,216
1	— 0,115	— 0,213 $\pm$ i 0,736
2	— 0,118	— 0,211 $\pm$ i 1,241
3	— 0,119	— 0,210 $\pm$ i 1,744

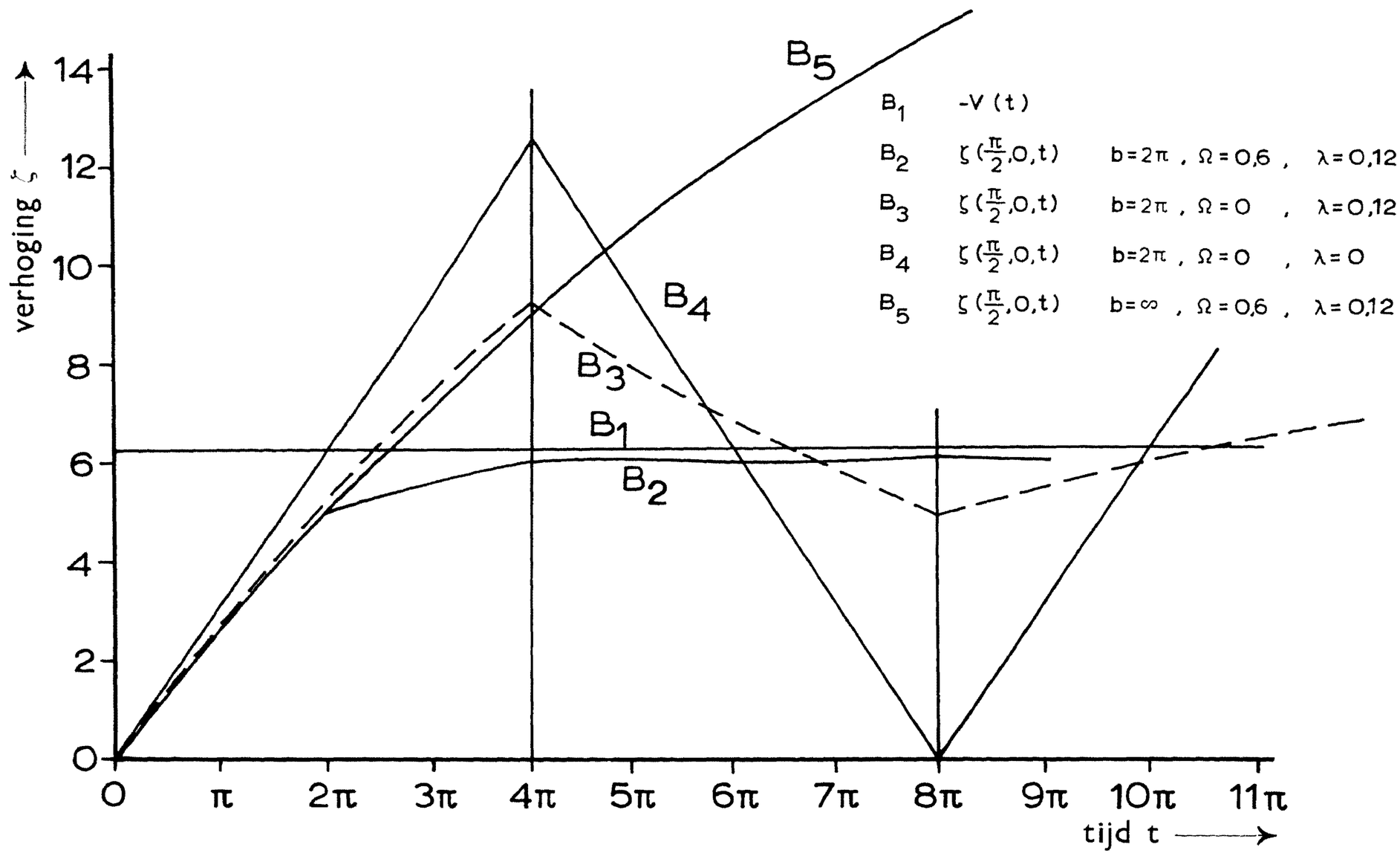
Uit (5) volgt nu (we vervangen het $\approx$ teken maar door het $=$ teken):

$$\zeta(\tfrac{1}{2}\pi, 0, t) = b + \sum_m \{ C_m e^{c_m t} + \mathrm{Re}\,(A_m + iB_m)\, e^{(a_m + ib_m)t} \}, \tag{6}$$

waarbij A_m, B_m enz. niets te maken hebben met de vroeger optredende coëfficiënten, maar de volgende getallenwaarden hebben:

$A_0 = -4{,}59$ $\quad A_1 = -0{,}26$ $\quad A_2 = -0{,}24$
$B_0 = 2{,}95$ $\quad B_1 = 0{,}84$ $\quad B_2 = -0{,}16$
$C_0 = -0{,}77$ $\quad C_1 = -0{,}01$ $\quad C_2 = -0{,}00.$

Sprong-windveld $-V = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$



Figuur 4.10.3. De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sprong-windveld

Uit (6) volgt dan tabel 4.10.9 (zie ook figuur 4.10.3).

Tabel 4.10.9
De verhoging in het midden van de zuidkust

t	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$	t	$\zeta(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$
0	0	6π	6,15
π	2,79	7π	6,15
2π	5,06	8π	6,16
3π	5,73	9π	6,18
4π	6,07	10π	6,20
5π	6,18	∞	6,28

Zoals we zien, wijkt na een aanvangsperiode van ongeveer 4π of 18 uur de verhoging minder dan 4% van de stationaire waarde af.

Ter vergelijking hebben we ook het speciale geval $\Omega = 0$ berekend. Dan is exact:

$$\zeta(\tfrac{1}{2}\pi, 0, p) = \frac{\operatorname{th} 2\pi q}{pq} = \frac{1}{pq}(1 - 2e^{-4\pi q} + 2e^{-8\pi q} - \ldots). \tag{7}$$

Met behulp van [7], formule (26) blz. 233 en formule (36) blz. 249, kan men de volgende formules afleiden:

$$\frac{1}{pq} \doteqdot te^{-\frac{1}{2}\lambda t}\{I_0(\tfrac{1}{2}\lambda t) + I_1(\tfrac{1}{2}\lambda t)\} \qquad \frac{1}{pq}e^{-cq} \doteqdot \int_c^t e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau} I_0(\tfrac{1}{2}\lambda\sqrt{\tau^2 - c^2})\, d\tau \text{ voor } t > c.$$

Hiermede kan de inversie van (7) gemakkelijk uitgevoerd worden. Aldus vindt men (zie figuur 4.10.3) de waarden van tabel 4.10.10.

Tabel 4.10.10
De verhoging aan de zuidkust bij afwezigheid van aardrotatie

t	$\zeta\,(\Omega = 0)$	t	$\zeta\,(\Omega = 0)$
0	0	$6\,\pi$	6,88
π	2,87	$7\,\pi$	5,90
$2\,\pi$	5,29	$8\,\pi$	4,94
$3\,\pi$	7,37	$9\,\pi$	5,45
$4\,\pi$	9,17	$10\,\pi$	5,97
$5\,\pi$	7,97	∞	6,28

Ook hier blijkt weer duidelijk de dempende invloed van Ω. In figuur 4.10.3 zijn ook nog een paar andere gevallen getekend:

B1 geeft de stationaire verhoging 2π;

B2 geeft $\zeta\,(\frac{1}{2}\pi, 0, t)$ voor $\Omega = 0{,}6$ als boven beschreven;

B3 geeft hetzelfde voor $\Omega = 0$;

B4 geeft het allereenvoudigste geval $\Omega = 0$ en $\lambda = 0$;

B5 geeft ten slotte een schets van het in B2 beschouwde geval, indien de zee en het windveld zich tot in het oneindige zouden uitstrekken ($b \to \infty$).

4.10.3 *Sinuswindveld*

De beste en tevens mathematisch gemakkelijk hanteerbare voorstelling van een opkomende en weer wegstervende storm wordt wellicht geleverd door de sinusfunctie. We stellen weer, dat op $t = 0$ alles in rust is en dat dan het volgende windveld optreedt:

$$\left.\begin{aligned} &U = 0 \\ &V = 0 \quad \text{voor} \quad t < 0 \\ &V = -\sin \omega t \quad \text{voor} \quad t > 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bij wijze van illustratie nemen we $\omega = 0{,}1$ hetgeen betekent, dat er gedurende een tijdsinterval van 10π (halve periode) noordenwind is met een maximum $|\,V\,| = 1$ ten tijde $t = 5\pi$ (ongeveer 22 uur). Nu is

$$\bar{\zeta}\,(\tfrac{1}{2}\pi, 0) \approx \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\,\bar{Z}\,(p). \tag{9}$$

Inversie geeft als in de vorige subparagraaf

$$\zeta\,(\tfrac{1}{2}\pi, 0, t) = \mathrm{Im}\,\{\, e^{i\omega t}\, Z\,(\tfrac{1}{2}\pi, i\omega)\,\} + \text{residuen van } Z. \tag{10}$$

Substitutie van de getallenwaarden geeft (zie figuur 4.10.4)

$$\zeta\,(\tfrac{1}{2}\pi, 0, t) = (5{,}42 \sin \omega t - 2{,}18 \cos \omega t) + 0{,}37\, e^{-0{,}074t} + \ldots \tag{11}$$

De bijdragen van de andere polen blijken wel verwaarloosd te kunnen worden. Dit is een belangrijk resultaat. Het blijkt dus, dat de verhoging in hoofdzaak bepaald wordt door

a. de kwasi-stationaire toestand nl. de eerste term in het rechterlid van (10);

b. de bijdrage van de laagste *negatief-reële* eigenwaarde.

Het vermoeden lijkt gewettigd, dat deze eigenschap van algemene aard is en niet het resultaat is van het toevallig beschouwde numerieke geval.

We kunnen bij (10) nog enige verbeteringen aanbrengen. We zouden de benadering $Z\,(\frac{1}{2}\pi, i\omega)$ desgewenst kunnen vervangen door een exacte waarde. Dit brengt natuurlijk weer de bepaling van de coëfficiënten A_n en B_n voor $p = i\omega$ met zich mee. Voorts kan de eigenwaarde — 0,074 van de *benadering*

gecorrigeerd worden. Hoewel de berekening niet uitgevoerd is, valt te verwachten, dat de overeenkomstige eigenwaarde van het model hiervan slechts zeer weinig zal verschillen.

Het spreekt vanzelf, dat we slechts het tijdsinterval $0 < t < 10\pi$ beschouwen. Hiervoor zijn in figuur 4.10.4 behalve de grafiek van (11) ook nog enige andere gevallen beschouwd.

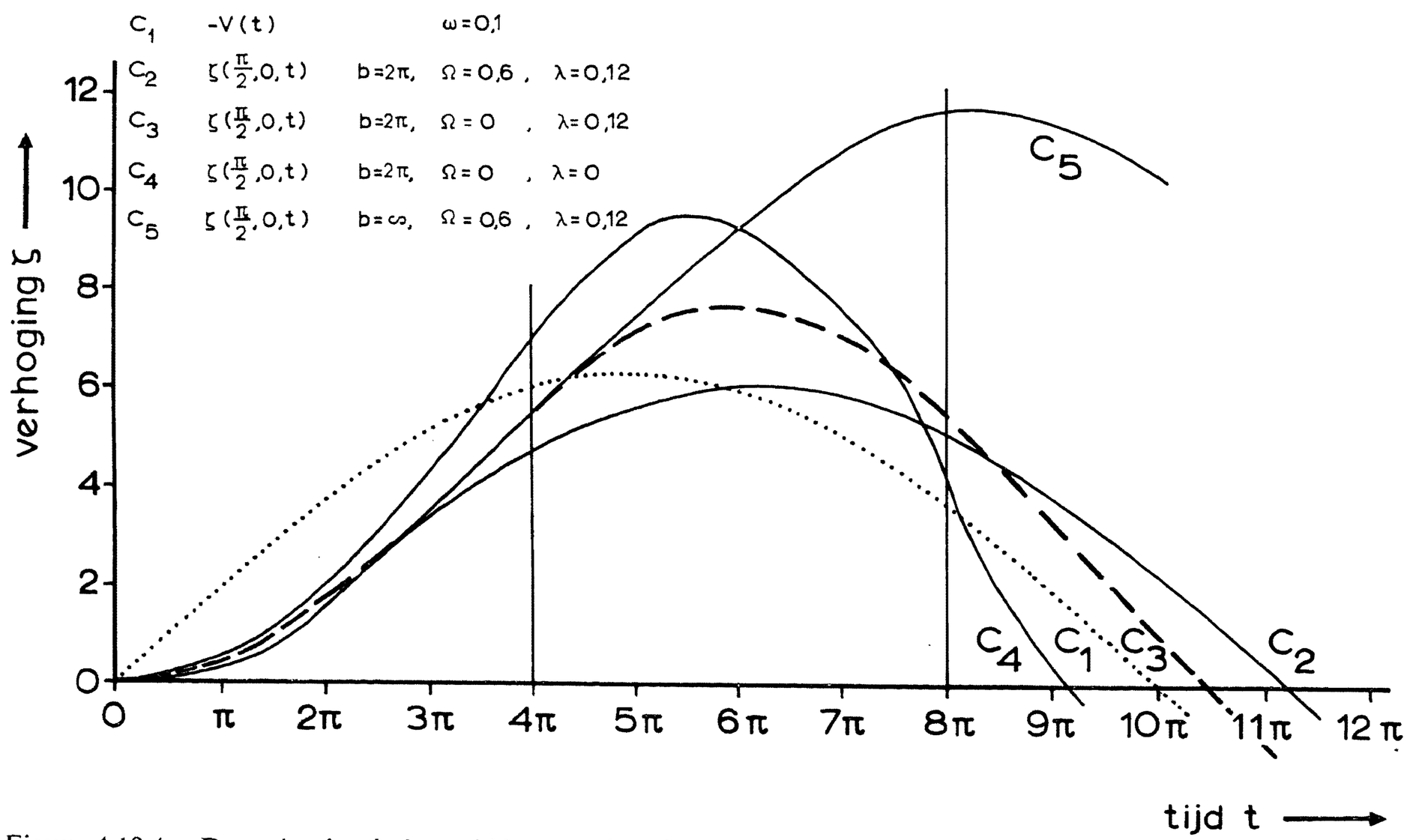
Is $\Omega = 0$ dan heeft men exact

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}\pi, 0\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{\operatorname{th} 2\pi q}{q}. \tag{12}$$

De bij $q^{-1} \operatorname{th} 2\pi q$ behorende polen leveren residuen welke, op het eerste paar na, wel verwaarloosd kunnen worden. Men vindt dan:

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}\pi, 0, t\right) = (6{,}96 \sin \omega t - 1{,}33 \cos \omega t) + e^{-0{,}06\, t}(1{,}32 \cos 0{,}243\, t - 2{,}05 \sin 0{,}243\, t). \tag{13}$$

Sinus - windveld $\quad -V(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \sin \omega t & t>0 \end{cases}$



Figuur 4.10.4. De verhoging in het midden van de zuidkust ten gevolge van een sinusoïdaal windveld

In figuur 4.10.4 vindt men evenals in figuur 4.10.3:

C1 de stationaire verhoging $2\pi \sin \omega t$;
C2 de verhoging $\zeta\left(\tfrac{1}{2}\pi, 0, t\right)$ volgens (11);
C3 hetzelfde voor $\Omega = 0$ volgens (13);
C4 het eenvoudigste geval $\Omega = \lambda = 0$;
C5 een schets van het met C2 overeenkomende geval voor $b = \infty$.

Het is interessant de voor de verschillende gevallen geldende maximale verhogingen onderling te vergelijken:

C1 $\quad \zeta_{max} = 6{,}28$;
C2 $\quad \zeta_{max} = 5{,}91$;
C3 $\quad \zeta_{max} = 7{,}61$;
C4 $\quad \zeta_{max} = 9{,}37$.