

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 391 (SP 107)

Een indelingsprobleem

door

Jac.M. Anthonisse



december 1967

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Summary

A branch and bound algorithm is given to solve the following problem:

To each pair of elements (i,j) from a set $X = \{1, \dots, n\}$ a number

r_{ij} with $r_{ij} \geq 0$, $r_{ij} = r_{ji}$ and $r_{ii} = 0$ has been assigned.

Find a prescribed number of disjoint subsets $P_1, \dots, P_m$ from X , such that

$$X = \bigcup_{h=1}^m P_h,$$

and $z = \sum_{h=1}^m z_h$ is minimized,

where

$$z_h = \sum_{i < j} (r_{ij} | i \in P_h, j \in P_h).$$

Experiments indicate that an optimal solution is usually found in a small number of iterations, but the verification may be rather time consuming.

The algorithm may be used to find the minimum value of m for which a partitioning of X with $z = t$ exists. The algorithm appears to be efficient for finding this 'chromatic number of a graph'.

Probleemstelling

Een voorbeeld van het te bespreken type indelingsproblemen wordt gevonden bij het samenstellen van college roosters. Bij het verdelen van de colleges over de beschikbare uren zal er onder meer naar worden gestreefd dat colleges die voor nagenoeg hetzelfde gehoor zijn bestemd tijdens verschillende uren worden gegeven. Om verschillende indelingen van de colleges met elkaar te vergelijken is een criterium nodig. Een mogelijk criterium is het aantal hoor-uren dat verloren gaat als twee colleges tegelijkertijd worden gegeven en er studenten zijn die beide colleges zouden willen volgen. Is dit criterium gekozen dan zal worden gezocht naar een indeling waarvoor het criterium minimaal is, een dergelijke indeling heet optimaal.

Zij $X = \{1, \dots, n\}$ de verzameling in te delen colleges (elk college duurt 1 uur), laten m uren beschikbaar zijn, zij P_h de verzameling colleges die tijdens het h -de uur worden gegeven ($h = 1, \dots, m$), rij r_{ij} = het aantal studenten dat zowel college i als college j wil volgen ($1 \leq i \neq j \leq n$) en rij $r_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Een oplossing van het nu te formuleren mathematische probleem bepaalt dan een indeling van de colleges die, in zekere zin, optimaal is.

Aan elk paar (i, j) ($1 \leq i, j \leq n$) elementen uit een verzameling $X = \{1, \dots, n\}$ is een getal r_{ij} met $r_{ij} \geq 0$, $r_{ij} = r_{ji}$ en $r_{ii} = 0$ toegevoegd.

Bepaal een voorgeschreven aantal disjuncte deelverzamelingen $P_1, \dots, P_m$ van X zó, dat

$$X = \bigcup_{h=1}^m P_h \quad (1)$$

en

$$z = \sum_{h=1}^m z_h \quad \text{minimaal} \quad (2)$$

waarbij

$$z_h = \sum_{i < j} (r_{ij} | i \in P_h, j \in P_h) \quad (h = 1, \dots, m). \quad (3)$$

