SA

stichting
mathematisch
centrum

MC

SA

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK SW 4/70 SEPTEMBER

D. WABEKE en C. VAN EEDEN
HANDLEIDING VOOR DE TOETS VAN WILCOXON

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

Inleiding

De toets van WILCOXON is de meest gebruikte "verdelingsvrije" toets voor het probleem van twee steekproeven. "Verdelingsvrij" wil zeggen, dat geen onderstellingen gemaakt worden over de vorm van de verdelingen, die aan de twee te vergelijken steekproeven ten grondslag liggen. Dit is het belangrijkste verschil tussen deze toets en de toets van STUDENT voor twee steekproeven, daar de laatsgenoemde toets alleen van toepassing is op steekproeven uit normale verdelingen met gelijke spreidingen, hetgeen de toepasbaarheid aanzienlijk beperkt.
Het eerste deel van dit rapport verscheen voor het eerst in 1955 (als rapport nr S176) en is bedoeld als een, duidelijk ook voor niet-statistici bruikbare, handleiding voor de toets van Wilcoxon voor twee steekproeven: berekening van de toetsingsgrootheid W, overschrijdingskansen, kritieke gebieden, enz.
Het tweede deel verscheen in hetzelfde jaar (onder hetzelfde nummer) en bevat aanwijzingen voor de berekening van de verdeling van W onder bepaalde omstandigheden, waarvoor de inhoud van deel 1 geen uitsluitsel geeft.
De huidige uitgave betreft een enigszins herziene versie van deze beide rapporten (S 176 (M 65 en M 65A). De verbeteringen zijn van de hand van drs. L. DE HAAN.
Een globale kennis van de gang van zaken bij het toetsen van hypothesen wordt verondersteld.

Amsterdam, 1970.

Deel 1. De toets van Wilcoxon, algemeen gedeelte

1.1 Het waarnemings materiaal en de getoetste hypothese

Het waarnemingsmateriaal bestaat uit twee onafhankelijke steekproeven

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \text{ en } y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

terwijl de te toetsen hypothese H_0 inhoudt, dat deze steekproeven uit dezelfde populatie afkomstig zijn.

Men kan dit ook als volgt formuleren: gegeven is, dat

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ onafhankelijke waarnemingen zijn van een stochastische grootheid $\underline{x}$ *)
$y_1, y_2, \ldots, y_n$ onafhankelijke waarnemingen zijn van een stochastische grootheid $\underline{y}$,

terwijl tevens de x-waarnemingen onafhankelijk van de y-waarnemingen zijn. De getoetste hypothese H_0 houdt nu in, dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling bezitten.

Voorbeeld 1 (zie ook blz. 4 en blz. 18)

Men wil de treksterkte van twee partijen metaaldraden vergelijken en men neemt daartoe uit partij A een steekproef van m = 8 draden en uit B een van n = 6 draden. Men bepaalt van deze draden de treksterkte en men verkrijgt de volgende uitkomsten:

A: 62,9 68,1 64,6 67,9 65,3 67,4 66,9 67,2;
B: 68,2 66,3 65,2 65,4 68,0 67,5.

*) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, hetgeen gewoonlijk blijkt uit het feit, dat bij herhaalde waarnemingen onder dezelfde omstandigheden verschillende uitkomsten verkregen worden. Stochastische grootheden worden door onderstreepte letters aangegeven; dezelfde letters, niet onderstreept, worden vaak gebruikt voor waarden, die zij aan kunnen nemen of aangenomen hebben.

Deze twee reeksen waarnemingen (die in eenzelfde, niet ter zake doende, eenheid zijn uitgedrukt) komen nu overeen met de beide steekproeven $x_1, x_2, \ldots, x_m$ resp. $y_1, y_2, \ldots, y_n$. De getoetste hypothese kan men nu als volgt interpreteren: de draden van de beide partijen zijn gelijkwaardig wat hun treksterkte betreft.

Opmerking 1: Men kan ook de hypothese toetsten, dat de verdeling van $\underline{y}$ wel dezelfde vorm heeft als die van $\underline{x}$, maar dat de eerstgenoemde over een bepaalde afstand d verschoven is. Dan hebben $\underline{x} + d$ en $\underline{y}$ dezelfde verdeling, hetgeen men toetst door de toets toe te passen op $x_1 + d, x_2 + d, \ldots, x_m + d$ en $y_1, y_2, \ldots, y_n$. De verdere beschrijving van de toets geven wij voor $d = 0$; zij geldt geheel analoog voor $d \neq 0$.

1.2 Wanneer leidt de toets tot verwerping van H_0?

De toets leidt met grote waarschijnlijkheid tot verwerping van H_0, indien de kans, dat $\underline{x}$ een grotere waarde aanneemt dan $\underline{y}$ ongelijk is aan de kans, dat $\underline{x}$ een kleinere waarde aanneemt dan $\underline{y}$. In formule:

$$(1) \qquad P[\underline{x} > \underline{y}] \neq P[\underline{x} < \underline{y}].$$

In practische bewoordingen kan men dit uitdrukken door te zeggen dat $\underline{x}$ systematisch grotere, resp. systematisch kleinere waarden aanneemt dan $\underline{y}$, hetgeen echter niet betekent, dat $\underline{x}$ altijd grotere resp. kleinere waarden dan $\underline{y}$ aanneemt.
De ongelijkheid (1) is o.a. vervuld als de verdelingen van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ dezelfde vorm hebben, maar ten opzichte van elkaar verschoven zijn en ook (voor positieve stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$) als $\underline{x}$ en $c.\underline{y}$ dezelfde verdeling hebben waarbij c een positief getal is, ongelijk aan 1.

De kans op verwerping van H_0 neemt in dit geval toe met toenemende m en n en nadert tot 1, indien men deze aantallen beide onbegrensd laat toenemen.

Opmerking 2: Als H_0 juist is dan geldt:

(2) $P[\underline{x} > \underline{y}] = P[\underline{x} < \underline{y}]$.

Als echter $P[\underline{x} > \underline{y}] = P[\underline{x} < \underline{y}]$ dan behoeft H_0 niet vervuld te zijn; aan (2) is nl. b.v. voldaan als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ beide symmetrisch ten opzichte van 0 verdeeld zijn met verschillende spreidingen.

1.3 Berekening van de toetsingsgrootheid W

De toetsingsgrootheid $\underline{W}$ is gelijk aan twee maal het aantal paren waarnemingen (x_i, y_j), waarvoor $x_i > y_j$ is, vermeerderd met het aantal paren (x_k, y_l) waarvoor $x_k = y_l$ is. *)

Het is duidelijk, dat $\underline{W}$ een kleine waarde aan zal nemen, indien de x-waarden overwegend kleiner zijn dan de y-waarden, een grote, indien het omgekeerde het geval is en een intermediaire waarde, indien geen van deze beide situaties zich voordoet.

De berekening van W (de door $\underline{W}$ in een bepaald geval aangenomen waarde) kan op velerlei wijzen uitgevoerd worden. Eén der in de practijk zeer handig gebleken methoden demonstreren wij aan de hand van voorbeeld 1. De hieronder beschreven werkzaamheden zijn voor dat voorbeeld in schema 1 uitgevoerd. De beschreven werkwijze ondergaat enige kleine, later te vermelden wijzigingen, indien er gelijke waarnemingen zijn, hetgeen bij dit voorbeeld niet het geval is.

1. Rangschik de waarden $y_1, y_2, \ldots, y_n$ naar opklimmende grootte in de tweede kolom van een schema, beginnende op de tweede regel en telkens één regel overslaande.
2. Nummer de regels in kolom (1) van 0 tot 2n. Het nummer in iedere regel is dan gelijk aan twee maal het aantal y-waarden in vorige regels, vermeerderd met het aantal y-waarden in de betrokken regel.
3. Noteer vervolgens de waarden $x_1, x_2, \ldots, x_m$ op de regels tussen die y-waarden, waar zij tussenin liggen.

---

*) Gewoonlijk wordt voor de toets van WILCOXON de toetsingsgrootheid $\underline{U} = \frac{1}{2}\underline{W}$ gebruikt. Om gebroken getallen te vermijden, wordt hier $\underline{W}$ ingevoerd.

4. De bijdrage tot W van iedere regel waarop een x voorkomt, wordt in kolom (4) genoteerd; deze wordt verkregen door het aantal x-waarden in kolom (3) te vermenigvuldigen met het in dezelfde regels staande getal in kolom (1).
5. Door sommeren van de bedragen in kolom (4) krijgen wij de bij deze steekproeven behorende waarde van W.

Schema 1

Berekening van W bij voorbeeld 1

(1)	(2)	(3)	(4)
	waarnemingen van		bij-drage tot W
	y	x	
0		62,9 64,6	0
1	65,2		
2		65,3	2
3	65,4		
4			
5	66,3		
6		66,9 67,2 67,4	18
7	67,5		
8		67,9	8
9	68,0		
10		68,1	10
11	68,2		
12			
totaal	n = 6	m = 8	W = 38

Opgemerkt kan nog worden, dat het in het algemeen het eenvoudigst is, de kleinste van de twee steekproeven als y-waarden te beschouwen (d.w.z. in kolom (2) te zetten).

Voorbeeld 2 (weinig gelijke waarnemingen, zie ook blz. 8)

Door een wijziging in het productieproces kunnen weerstanden sneller gefabriceerd worden. Men heeft nu 2 partijen weerstanden (één volgens het oude ($\underline{x}$) en één volgens het nieuwe procédé gefabriceerd ($\underline{y}$)) en men wil onderzoeken of de electrische weerstand voor de beide partijen verschillend is. Hiertoe neemt men van beide partijen een steekproef en men meet de weerstanden van de exemplaren daarvan. De resultaten zijn (in Ohm):

1e steekproef ($\underline{x}$):	147	150	150	153	148	144	155	151	146	151
2e steekproef ($\underline{y}$):	140	145	147	147	138	144	149	150		

De te toetsen hypothese H_0, kan nu als volgt geïnterpreteerd worden.
De twee partijen weerstanden zijn, wat hun weerstand betreft gelijkwaardig.

De berekening van de toetsingsgrootheid W, gaat, nu er slechts kleine groepjes van gelijke waarnemingen optreden, nagenoeg analoog aan voorbeeld 1 (zie schema 2).

1. Rangschik de waarden $y_1, y_2, \dots, y_n$ naar opklimmende grootte in de tweede kolom van een schema, beginnende op de tweede regel en telkens een regel overslaand. Gelijke waarnemingen komen op dezelfde regel.
2. Noteer in kolom (3) de x-waarden, die niet gelijk zijn aan een y-waarde, op de regel tussen de y-waarden waar zij tussen in liggen, en noteer de x-waarden die wel gelijk zijn aan een y-waarde op dezelfde regel als die y-waarde.
3. De getallen in kolom (1) verkrijgt men nu door voor iedere regel twee maal het aantal y-waarden erboven te nemen, vermeerderd met het aantal y-waarden op dezelfde regel. Op de laatste regel in kolom (1) komt dan het getal 2n te staan (contrôle).
4. De bijdrage tot W van iedere regel waarop een x voorkomt, wordt in kolom (4) genoteerd. Deze wordt verkregen door het aantal x-waarnemingen in kolom (3) met het getal in kolom (1), dat op dezelfde regel staat, te vermenigvuldigen.
5. Door sommeren van de bedragen in kolom (4) krijgen wij de waarde van W.
6. In kolom (5) noteren wij de aantallen gelijke waarnemingen in iedere

regel. Door sommatie moeten wij het totale aantal waarnemingen krijgen ($N = n + m$).

7. De derdemachten van de getallen in kolom (5) noteren wij in kolom (6); wij sommeren deze derdemachten en noemen hun som D.

De kolommen (5) en (6) hebben wij vooralsnog niet nodig doch in een der volgende paragrafen zal het nut van deze kolommen blijken.

Schema 2

Berekening van W bij voorbeeld 2

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	waarnemingen van		bijdrage tot W	aantallen gelijken(t)	t^3
	y	x			
0					
1	138			1	1
2					
3	140			1	1
4					
5	144	144	5	2	8
6					
7	145			1	1
8		146	8	1	1
10	147 147	147	10	3	27
12		148	12	1	1
13	149			1	1
14					
15	150	150 150	30	3	27
16		151 151 153 155	64	2 1 1	8 1 1
totaal	n = 8	m = 10	W = 129	N = 18	D = 78

<u>Voorbeeld 3</u> (weinig gelijke waarnemingen, zie ook blz. 22)

In dit voorbeeld stelt $\underline{x}$ de lengte van de mannen van een bepaalde bevolkingsgroep voor, en $\underline{y}$ de lengte van vrouwen van dezelfde groep (lengte in meters). Zowel van $\underline{x}$ als van $\underline{y}$ zijn een aantal waarnemingen verricht.

<u>Waarnemingen</u>

$\underline{x}$:	1,72	1,68	1,77	1,73	1,68	1,59	1,73	1,81	1,74	1,88
	1,75	1,72	1,79	1,82	1,64					
$\underline{y}$:	1,56	1,65	1,62	1,69	1,74	1,74	1,65	1,65	1,74	1,53
	1,89	1,68	1,66	1,63	1,72	1,63	1,67	1,66	1,83	1,61

Men wil nu onderzoeken of in deze bevolking de lengte van de mannen systematisch verschilt van de lengte van de vrouwen.

De nulhypothese H_0 luidt:

De mannen en de vrouwen van deze bevolkingsgroep verschillen niet systematisch in lengte.

De berekening van W gaat analoog aan voorbeeld 2, (zie schema 3).

Schema 3

Berekening van W bij voorbeeld 3

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	waarnemingen van		bij-drage tot W	aantal-len ge-lijken(t)	t^3
	y	x			
1	1,53			1	1
2					
3	1,56			1	1
4		1,59	4	1	1
5	1,61			1	1
6					
7	1,62			1	1
8					
8+2=10	1,63 1,63			2	8
12		1,64	12	1	1
12+3=15	1,65 1,65 1,65			3	27
18					
18+2=20	1,66 1,66			2	8
22					
23	1,67			1	1
24					
25	1,68	1,68 1,68	50	3	27
26					
27	1,69			1	1
28					
29	1,72	1,72 1,72	58	3	27
30		1,73 1,73	60	2	8
30+3=33	1,74 1,74 1,74	1,74	33	4	64
36		1,75 1,77 1,79 1,81 1,82	180	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1
37	1,83			1	1
38		1,88	38	1	1
39	1,89			1	1
40					
totaal	n = 20	n = 15	W = 435	N = 35	D = 185

Voorbeeld 4 (veel gelijke waarnemingen: geclassificeerde waarnemingen, zie ook blz. 24)

Gemeten is de tijd s in seconden nodig voor een bepaalde psychologische test. Het waarnemingsmateriaal bestaat uit:

waarnemingen bij personen van 30-44 jaar $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
en
waarnemingen bij personen van 45-60 jaar $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Men wil onderzoeken of de tijdsduur afhangt van de leeftijd van de preofpersonen. De hypothese H_0 luidt nu:

De tijdsduur is onafhankelijk van de leeftijd van de proefpersonen en verschilt dus niet systematisch voor de beide groepen. Het materiaal is geclassificeerd als aangegeven in tabel 1.

Tabel 1

Tijdsduur (in seconden) van een psychologische test bij personen van 30-44 resp. 45-60 jaar.

klasse indeling voor s	aantal waarnemingen van x	van y
120 - 149	7	1
150 - 179	12	1
180 - 209	15	7
210 - 239	21	8
240 - 269	13	4
270 - 299	11	11
300 - 329	11	6
330 - 359	5	6
360 - 289	2	2
390 - 419	3	5

Uit deze tabel ziet men dus b.v. dat 7 personen tussen 30 en 44 jaar voor deze test een tijd nodig hadden die ligt tussen 120 en 149 seconden, etc.

Nu in de waarnemingen groepen van betrekkelijk veel gelijken voorkomen, gaat de bovenbeschreven methode ter berekening van W over in de volgende (zie schema 4):

1. Noteer in kolom (2) (zonder regels over te slaan) het aantal waarnemingen van $\underline{y}$, dat in de verschillende klassen valt.
2. Noteer in kolom (3) het aantal waarnemingen van $\underline{x}$ in die klassen.
3. In kolom (1) noteert men nu op iedere regel twee maal het aantal y-waarnemingen, dat boven die regel staat, vermeerderd met éénmaal het aantal y-waarnemingen, dat op dezelfde regel staat.

   Een snelle wijze van berekenen van deze aantallen is de volgende:

Op de eerste regel komt dus	1
Op de tweede regel komt	1 + 1 + 1 = 3
Op de derde regel komt	3 + 1 + 7 = 11
Op de vierde regel komt	11 + 7 + 8 = 26
enz.	

   In schema 4 geven de pijlen de optellingen aan. In de onderste regel moet twee maal het aantal y-waarnemingen komen te staan (102 = 2 × 51).
4. Vermenigvuldig nu de getallen in kolom (1) en (3) met elkaar en noteer het product in kolom (4); tel de producten op. Dit geeft W = 3482. Indien men over een rekenmachine beschikt, krijgt men W direct door accumulatief vermenigvuldigen, zonder dat dus voor iedere regel het resultaat van de vermenigvuldiging genoteerd behoeft te worden.
5. Noteer in kolom (5) en (6) de waarden van t en t^3 en bepaal de totalen N = n + m en D.

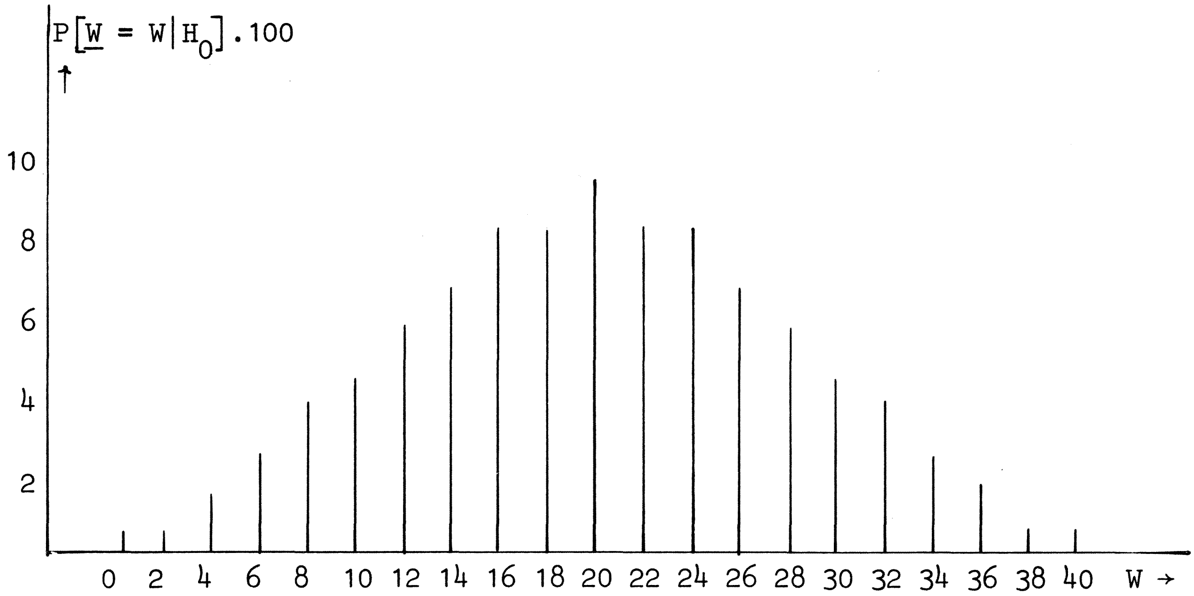
Schema 4

Berekening van W bij voorbeeld 4 (geclassificeerde waarnemingen)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
klasse indeling van s		waarnemingen van		bij- drage tot W	aantal- len ge- lijken(t)	t^3
		y	x			
120-149	1	1	7	1× 7= 7	8	512
150-179	3	1	12	3×12= 36	13	2197
180-209	11	7	15	11×15= 165	22	10648
210-239	26	8	21	26×21= 546	29	24389
240-269	38	4	13	38×13= 494	17	4913
270-299	53	11	11	53×11= 583	22	10648
300-329	70	6	11	70×11= 770	17	4913
330-359	82	6	5	82× 5= 410	11	1331
360-389	90	2	2	90× 2= 180	4	64
390-419	97	5	3	97× 3= 291	8	512
	102	n = 51	m = 100	W =3482	N = 151	D=60127

1.4 De verdeling van $\underline{W}$ onder de getoetste hypothese H_0

Indien de hypothese H_0 juist is, dus als de twee steekproeven uit dezelfde verdeling afkomstig zijn, kan de verdeling van de toetsingsgrootheid $\underline{W}$ berekend worden. Voor $m = 4$ en $n = 5$ b.v. en voor het geval er onder de waarnemingen geen gelijken voorkomen, ziet de verdeling van $\underline{W}$ er uit als in de onderstaande figuur.



figuur 1

De verdeling van $\underline{W}$ onder de hypothese H_0 voor $m = 4$ en $n = 5$ (geen gelijke waarnemingen).

Op de X-as zijn de waarden, die $\underline{W}$ aan kan nemen, uitgezet en op de Y-as, de kans dat $\underline{W}$ de betreffende waarde aanneemt als H_0 juist is. Bijvoorbeeld:

$$P[\underline{W} = 12|H_0] = 0{,}06.$$

Dit betekent: de kans dat $\underline{W}$ de waarde 12 aanneemt, indien H_0 juist is, is gelijk aan 0,06.

$$P[\underline{W} \geq 36|H_0] = P[\underline{W} = 36|H_0] + P[\underline{W} = 38|H_0] + P[\underline{W} = 40|H_0] =$$
$$= 0{,}0159 + 0{,}0079 + 0{,}0079 = 0{,}0317.$$

Dit betekent: de kans dat $\underline{W}$ een waarde 36 of groter aanneemt, als H_0 juist is, is gelijk aan 0,0317.

Eigenschappen van de verdeling van $\underline{W}$ indien H_0 juist is

1. De verdeling van $\underline{W}$ is discreet, want $\underline{W}$ kan alleen gehele waarden aannemen.
2. De verdeling van $\underline{W}$ is in het algemeen niet symmetrisch, behalve,
   a) als m = n, of
   b) als de omvang *) van de 1e groep gelijke waarnemingen gelijk is aan die van de laatste, de omvang van de tweede groep gelijk is aan die van de op één na laatste, enz. Stellen wij het aantal waarnemingen dat de kleinste waargenomen waarde bezit voor door t_1 het aantal dat de op één na kleinste waarde bezit door t_2, etc., en worden er in het totaal k verschillende waarden aangenomen, dan houdt deze voorwaarde dus in dat

$$t_1 = t_k,\ t_2 = t_{k-1} \text{ enz.}$$

   In het bijzonder is de verdeling dus symmetrisch als er geen gelijke waarnemingen zijn.
3. De verwachting (het theoretisch gemiddelde) μ, van de verdeling van $\underline{W}$ is gelijk aan het product der steekproefgrootten $\mu = mn$.
4. De variantie van de verdeling van $\underline{W}$ wordt gegeven door:

$$\sigma^2 = \frac{mn(N^3-D)}{3N(N-1)}.$$

   Bevatten de beide steekproeven geen gelijke waarnemingen dan wordt D = N en dan is dus

$$N^3 - D = N^3 - N = N(N-1)(N+1)$$

   en in dit geval wordt de variantie

---
*) het aantal elementen.

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} mn\ (N+1) \text{ (geen gelijke waarnemingen).}$$

1.5 Kritieke zones en overschrijdingskansen (algemene beschouwingen)

Wij zagen reeds in par. 1.3 dat de toetsingsgrootheid $\underline{W}$ een kleine waarde aan zal nemen, indien de x-waarden overwegend kleiner zijn dan de y-waarden en een grote waarde indien het omgekeerde het geval is.

Wenst men nu de hypothese H_0 te toetsen tegen de alternatieve hypothese, inhoudende dat $\underline{x}$ systematisch groter òf kleiner is dan $\underline{y}$, d.w.z. tegen de alternatieve hypothese

$$H:\ P[\underline{x} > \underline{y}] \neq P[\underline{x} < \underline{y}],$$

dan kiest men een tweezijdige kritieke zone Z voor W, bestaande uit grote èn kleine waarden van W. Wil men de hypothese H_0 alleen toetsen tegen de alternatieve hypothese dat $\underline{x}$ systematisch groter is dan $\underline{y}$, dus tegen de alternatieve hypothese

$$H_1:\ P[\underline{x} > \underline{y}] > P[\underline{x} < \underline{y}],$$

dan kiest men een rechtséénzijdige kritieke zone Z_r bestaande uit grote waarden van W. Een linkséénzijdige kritieke zone Z_l gebruikt men als men H_0 wil toetsen tegen de alternatieve hypothese

$$H_2:\ P[\underline{x} > \underline{y}] < P[\underline{x} < \underline{y}].$$

Wordt een waarde W gevonden, die in de gebruikte kritieke zone ligt, dan wordt H_0 verworpen. Ook indien H_0 juist is, kan dit gebeuren, hetgeen dan een ten onrechte verwerpen van H_0 inhoudt. De kans op dit ten onrechte verwerpen wordt de <u>onbetrouwbaarheid</u> van de kritieke zone (of ook: van de toets) genoemd en de kritieke zone wordt zo gekozen, dat deze onbetrouwbaarheid niet groter is dan een van te voren gegeven grens α, de <u>onbetrouwbaarheidsdrempel</u>.

Wordt H_0 verworpen omdat W in een rechter-kritieke zone valt (dus "te groot" is), dan trekt men de conclusie, dat:

$$P[\underline{x} > \underline{y}] > P[\underline{x} < \underline{y}],$$

of, in practische bewoordingen, dat $\underline{x}$ systematisch hogere waarden aanneemt dan $\underline{y}$. Bij een waarde in een linker-kritieke zone is dit juist andersom.

Het resultaat van een toets kan nog iets vollediger uitgedrukt worden door de overschrijdingskans op te geven.
Een algemen definitie van een overschrijdingskans luidt: de onbetrouwbaarheid van de kleinste kritieke zone, die de gevonden waarde van $\underline{W}$ nog juist bevat. Daarbij worden dan ook kritieke zones met een onbetrouwbaarheid > α in de beschouwing betrokken.

Voor de rechts- (resp. links-) éénzijdige toets wordt de overschrijdingskans met k_r (resp. k_l) aangeduid en de definitie komt neer op: de kans op het optreden, onder de hypothese H_0 van een minstens even grote (resp. hoogstens even grote) waarde als de werkelijke gevondene.
In het tweezijdige geval wordt het symbool k gebruikt.
In vele practijkgevallen kan men volstaan met voor k twee maal de kleinste éénzijdige overschrijdingskans van de gevonden waarde van $\underline{W}$ te nemen. (Vergelijk echter ook deel 2 van dit rapport.) Het vinden van een overschrijdingskans $\leq \alpha$ is equivalent met het vinden van een waarde van W in de kritieke zone.

Opmerking 3: De keuze tussen één- en tweezijdige toetsen wordt in par. 1.8 behandeld. Vooreerst bespreken wij hoe de kritieke zones en overschrijdingskansen, zowel één- als tweezijdig, bepaald kunnen worden.

1.6 Tabellen voor kritieke zones en overschrijdingskansen

De tabellen voor overschrijdingskansen en kritieke zones, die aan dit rapport zijn toegevoegd (Tabel I en II, zie blz.42 tot en met 54) gelden voor het geval er geen gelijke waarnemingen zijn. De verdeling van $\underline{W}$ onder de hypothese H_0 is dan symmetrisch. (zie par. 1.4), zodat slechts de helft opgenomen behoeft te worden. Hiervoor is de linkerhelft gekozen. Meer gedetailleerde tabellen vindt men in het boek van Bradley [1].

a. Linkseenzijdig toetsen (alternatieve hypothese H_z: $\underline{y}$ is systematisch kleiner dan $\underline{x}$)

1) Als $m \leq 10$ en $n \leq 10$ is, is tabel I te gebruiken, die voor $m \leq n \leq 10$ de linkseenzijdige overschrijdingskans van de uit de waarnemingen berekende waarde van W geeft. Voor $n < m \leq 10$ vindt men de linker overschrijdingskans, door in de tabel m en n te verwisselen.

2) Als m en n niet beide kleiner dan of gelijk aan 10 zijn en $m + n \leq 40$ is, is tabel II te gebruiken. Deze tabel geeft geen overschrijdingskansen maar slechts linkerkritische waarden W_l van W behorende bij drie eenzijdige onbetrouwbaarheidsdrempels nl.:

$$\alpha = 0{,}01;\ \alpha = 0{,}025 \text{ en } \alpha = 0{,}05\ ^{*)}$$

Voor $n > 10$ en $m \leq 4$ vindt men voor elk van de drie waarden van α de linkerkritieke waarde W_l van W in de tabel. Dit betekent, dat de linkerkritieke zone Z_l met de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel bestaat uit alle waarden van W kleiner of gelijk aan W_l.
Voor $m > n$ vindt men de linkerkritieke waarde door in de tabel m en n te verwisselen.

b. Rechtseenzijdig toetsen (alternatieve hypothese H_z: $\underline{x}$ is systematisch kleiner dan $\underline{y}$)

1) Als $m \leq 10$ en $n \leq 10$ tabel I op de volgende manier gebruiken: de rechtseenzijdige overschrijdingskans van de gevonden waarde W is gelijk aan de linkseenzijdige overschrijdingskans van $2mn - W$.

2) Als m en n niet beide kleiner of gelijk aan 10 zijn tabel II op de volgende manier gebruiken: voor de rechterkritieke waarde W_r bij een bepaalde onbetrouwbaarheidsdrempel α geldt

$$W_r = 2mn - W_l,$$

---

*) Deze kritieke waarden zijn gedeeltelijk berekend met behulp van de exacte verdeling van $\underline{W}$, gedeeltelijk met behulp van de benadering met de normale verdeling (zie par. 1.7). De benaderde waarden zijn in de tabel onderstreept.

waarbij W_l volgens a2) bepaald kan worden.

c. Tweezijdig toetsen (alternatieve hypothese H_z: $\underline{x}$ is systematisch kleiner of groter dan $\underline{y}$)

1) De tweezijdige overschrijdingskans is exact gelijk aan twee maal de kleinste eenzijdige overschrijdingskans.

2) De tweezijdige kritieke zone is te berekenen voor $\alpha = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}05$ en $\alpha = 0{,}10$ en wordt verkregen door de kritieke zones Z_l en Z_r behorende bij de onbetrouwbaarheidsdrempel $\frac{\alpha}{2}$ samen te nemen.

Toetsen wij b.v. tweezijdig met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 dan wordt H_0 verworpen als de gevonden waarde van $W \geqq W_r$ en als $W \leqq W_l$ is, waarbij W_r (resp. W_l) de rechter (resp. linker) kritieke waarden, behorende bij $\alpha = 0{,}025$, is. Toetsen wij linksééenzijdig met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05, dan wordt H_0 verworpen als $W \leqq W_l$ (de linkerkritieke waarde, behorende bij $\alpha = 0{,}05$) is. Analoog voor rechtsééenzijdig toetsen.

Opmerking 4: De tabellen I en II gelden strikt genomen alleen als er geen gelijke waarnemingen zijn, maar zij geven voor het geval van weinig gelijke waarnemingen veelal een goede benadering.

Opmerking 5: In tabel I staan meer decimalen opgenomen dan voor toepassing van de toets noodzakelijk is. Gewoonlijk kan men daarbij zonder bezwaar met 2 of 3 decimalen volstaan. Het opnemen van meer decimalen is uitsluitend uitgevoerd, om in voorkomende gevallen de tabellen ook voor andere doeleinden, waarbij een grotere precisie nodig is, geschikt te maken.

Wij kunnen nu de voorbeelden 1 en 2 nader uitwerken.

Voorbeeld 1

Bij dit voorbeeld was: $m = 8$, $n = 6$ en $W = 38$.
Wij toetsen tweezijdig en kiezen als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0{,}05$. In tabel I zoeken wij in de tabel met $n = 8$ en $m = 6$ (N.B. m en n zijn in de tabellen verwisselbaar, zie boven) de éénzijdige overschrijdingskans bij de regel $W = 38$. Deze bedraagt: 0,29. De tweezijdige overschrijdings-

kans van $W = 38$ is dus gelijk aan 0,58.

De tweezijdige overschrijdingskans is hier dus groter dan de onbetrouwbaarheidsdrempel α, en wij kunnen H_0, inhoudende dat de draden van beide partijen, wat hun treksterkte betreft, equivalent zijn, dus niet verwerpen.

Voorbeeld 2

Voor de onbetrouwbaarheid van de toets nemen wij weer $\alpha = 0{,}05$. Hoewel bij dit voorbeeld enkele gelijke waarnemingen voorkomen maken wij toch gebruik van tabel I, daar de aantallen gelijken slechts klein zijn. Het getal $W = 129$ is groter dan $mn = 80$, dus berekenen wij $W' = 2 \times 80 - 129 = 31$. Deze waarde komt in de tabel niet voor, echter wel de waarden 30 en 32. Wij nemen nu als benadering van de éénzijdige overschrijdingskans van $W' = 31$ het gemiddelde van de éénzijdige overschrijdingskans van $W = 30$ en $W = 32$. De tweezijdige overschrijdingskans van $W' = 31$ is dus gelijk aan de som van de éénzijdige overschrijdingskansen van $W = 30$ en $W = 32$:

$$k = 0{,}013 + 0{,}017 = 0{,}03$$

Deze overschrijdingskans is kleiner dan $\alpha = 0{,}05$ en wij kunnen dus H_0 verwerpen. Wij concluderen dus dat de weerstanden, gefabriceerd volgens de twee procédé's, systematisch verschillen en daar $W > mn$ liggen de waarden van de volgens het oude procédé gefabriceerde weerstanden systematisch hoger dan de anderen.

Voorbeeld 5 (weinig gelijke waarnemingen)

Ter vergelijking van het gehalte aan stof S in het bloed van gezonde en aan ziekte A lijdende mannen heeft men de volgende gegevens verzameld (de waarnemingen zijn reeds in volgorde van opklimmende grootte gerangschikt).

Gehalte S bij gezonde mannen ($\underline{x}$):
9,4 9,9 10,0 10,2 10,5 10,6 11,2 11,7 11,8 12,4 12,6
13,6 13,8 15,1.

Gehalte S bij mannen die aan A lijden ($\underline{y}$):
10,1 11,4 12,6 12,9 14,7 15,5 15,8 16,2.

De getoetste hypothese houdt in, dat het gehalte aan S in het bloed bij lijders aan A niet systematisch verschilt van dit gehalte bij gezonden, hetgeen dus betekent, dat de ziekte A dit gehalte niet beïnvloed. Bij berekening vinden wij: W = 51 (de lezer controlere deze uitkomst).
Wij toetsen tweezijdig met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05. In tabel II zoeken wij de linker kritieke waarde van W op voor m = 8 en n = 14 en $\alpha = 0{,}025$ (éénzijdig); deze bedraagt: $W_1 = 52$. De gevonden waarde van W is dus kleiner dan W_1.
Conclusie: Lijders aan ziekte A hebben een systematisch hoger gehalte aan S in het bloed dan gezonden.

Opmerking 6: Bij $\alpha = 0{,}01$ (éénzijdig) en m = 8 en n = 14 vinden wij $W_1 = 44$. Aangezien de gevonden waarde van W groter is dan 44, is de tweezijdige overschrijdingskans $k > 0{,}02$.
Dus:

$$0{,}02 < k < 0{,}05.$$

1.7 Benadering voor kritieke zones en overschrijdingskansen

Als m en n groot zijn en onderling niet te veel verschillen en als bovendien de groepen gelijke waarnemingen niet te veel in omvang verschillen kan men gebruik maken van het feit dat de grootheid $\underline{W}$, als de hypothese H_0 juist is, bij benadering normaal verdeeld is met gemiddelde

$$\mu = mn$$

en variantie

$$\sigma^2 = \frac{mn(N^3-D)}{3N(N-1)} \qquad \text{(zie par. 1.4).}$$

De linkséénzijdige overschrijdingskans is dan bij benadering het oppervlak der normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1 links van

$$\frac{W-\mu+1}{\sigma}$$

en kan dus in een tabel der normale verdeling worden opgezocht.

Opmerking 7: Daar hier een discrete verdeling benaderd wordt met een continue, wordt de z.g. continuïteitscorrectie toegepast. Hiervoor neemt men de halve afstand tussen de opeenvolgende waarden der toetsingsgrootheid. Deze afstand is hier, als er geen gelijke waarnemingen zijn, gelijk aan 2; in dit geval wordt de correctie dus gelijk aan 1. Dit is de 1 in de teller van bovenstaande formule. Treden er wel gelijke waarnemingen op dan is de afstand tussen de opeenvolgende waarden van W in het algemeen niet constant, zodat een algemene regel voor de correctie dan moeilijk aan te geven is. Het verwaarlozen der correctie geeft echter soms een kleinere overschrijdingskans dan gerechtvaardigd is, zodat men beter doet ook hier 1 als correctie te nemen.

Als echter

a. de groepen gelijke waarnemingen alle dezelfde omvang t hebben

of als

b. er slechts twee groepen gelijke waarnemingen zijn, dus als $k = 2$ *),

dan is de afstand tussen de opeenvolgende waarden van W wel constant en gelijk aan 2t in geval a en gelijk aan N in geval b; de continuiteitscorrectie is dan dus t resp. $\frac{1}{2}N$.

Analoog is de rechtséénzijdige overschrijdingskans bij benadering het oppervlak der normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1 rechts van

$$\frac{W-\mu-1}{\sigma}$$

en de tweezijdige overschrijdingskans bij benadering twee maal het opper-

*) In dat geval gaat het schema der waarnemingen over in een 2 × 2 tabel.

vlak rechts van

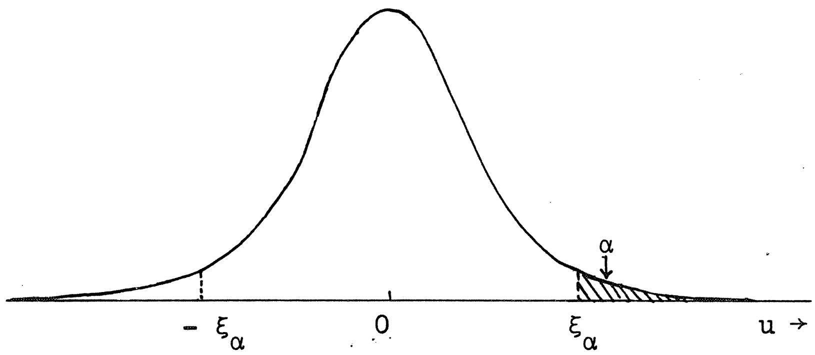
$$\frac{|W-\mu|-1}{\sigma}$$

<u>Opmerking 8</u>: De linker kritieke waarde van W met éénzijdige onbetrouwbaarheidsdrempel α is dus bij benadering de grootste waarde van W waarvoor de benaderde linkséénzijdige overschrijdingskans $\leqq \alpha$ is, dus de grootste waarde van W, waarvoor

$$\frac{W-\mu+1}{\sigma} \leqq -\xi_\alpha$$

is, waarbij ξ_α gevonden wordt met behulp van een tabel der normale verdeling (vgl. fig. 2):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \alpha.$$



figuur 2

Definitie van ξ_α bij een normale verdeling.

De berekening van de overschrijdingskans bij <u>voorbeeld 3</u> (blz. 8) gaat nu als volgt:

$$W = 435,\ N = 35,\ D = 185,\ \mu = mn = 300,$$

$$\sigma^2 = \frac{mn(N^3-D)}{3N(N-1)} = 3587{,}39, \quad \sigma = 59{,}9.$$

De tweezijdige overschrijdingskans is dus bij benadering tweemaal het oppervlak der normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1 rechts van

$$\frac{|W-\mu|-1}{\sigma} = 2{,}24.$$

Hiervoor vinden we in een tabel der normale verdeling

$$k = 2.\ 0{,}0125 = 0{,}025.$$

Indien wij, in de formule voor de variantie van $\underline{W}$, de gelijke waarnemingen niet in rekening brengen, d.w.z. als wij de formule

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\, nm\ (N+1) \qquad \text{(zie par. 1.4)}$$

gebruiken, dan vinden wij $\sigma^2 = 3600$, dus $\sigma = 60$ en

$$\frac{|W-\mu|-1}{\sigma} = 2{,}23.$$

Voor de overschrijdinskans vinden wij dan

$$k = 2.\ 0{,}0129 = 0{,}0258.$$

De invloed der gelijke waarnemingen is hier dus klein.
Gebruiken wij een onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05, dan wordt, daar de overschrijdingskans kleiner is dan 0,05, de hypothese H_0 verworpen. H_0 houdt in, dat mannen en vrouwen niet systematisch in lengte verschillen, en deze hypothese wordt dus verworpen ten gunste van de hypothese dat mannen systematisch langer zijn dan vrouwen (de gevonden waarde van W is nl. groter dan mn).

<u>Opmerking 9</u>: Als er gelijke waarnemingen zijn dan geldt

$$\frac{1}{3}\, mn\ (N+1) > \frac{mn(N^3-D)}{3N(N-1)}$$

Dus als wij, in de formule voor de variantie van $\underline{W}$, de gelijke waarnemingen niet in rekening brengen, vinden we een te grote waarde voor deze variantie en dus een te grote waarde voor de overschrijdingskans. Is deze te grote waarde voor de overschrijdingskans $\leq \alpha$ dan wordt H_0 dus verworpen en hoeft men de berekening der derde machten niet uit te voeren.

Uitwerking van voorbeeld 4 (blz. 10)

De toets wordt weer tweezijdig uitgevoerd met $\alpha = 0{,}01$. De berekening van de overschrijdingskans gaat als volgt:

$$W = 3482,\ N = 151,\ D = 60127,\ \mu = mn = 5100,$$

$$\sigma^2 = \frac{mn(N^3-D)}{3N(N-1)} = 253.898{,}49, \quad \sigma = 503{,}88.$$

Dus

$$\frac{|W-\mu|-1}{\sigma} = 3{,}21.$$

In een tabel der normale verdeling vinden we voor de tweezijdige overschrijdingskans

$$k = 2.0{,}0007 = 0{,}0014.$$

Brengen we in de formule voor de variantie de gelijke waarnemingen niet in rekening dan vinden we

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\,mn\ (N+1) = 258400,$$

$$\sigma = 508{,}3,$$

$$\frac{|W-\mu|-1}{\sigma} = 3{,}18,$$

$$k = 2.0{,}0007 = 0{,}0014.$$

De gelijke waarnemingen hebben hier dus geen invloed.

Daar de overschrijdingskans kleiner is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel verwerpen wij de hypothese H_0 ten gunste van de hypothese dat jongere mensen systematisch minder tijd voor de test nodig hebben dan oudere mensen.

1.8 Enige opmerkingen over de keuze tussen één- en tweezijdig toetsen

In par. 1.5 hebben wij reeds opgemerkt, dat men de hypothese H_0 kan toetsen tegen de alternatieve hypothesen

$$H: P[\underline{x} > \underline{y}] \neq P[\underline{x} < \underline{y}]$$

of tegen

$$H_1: P[\underline{x} > \underline{y}] > P[\underline{x} < \underline{y}]$$

of tegen

$$H_2: P[\underline{x} > \underline{y}] < P[\underline{x} < \underline{y}].$$

Men gebruikt dan een tweezijdige, een rechtséénzijdige, resp. linkséénzijdige kritieke zone (overschrijdingskans). Bij rechtséénzijdig (en mutatis mutandis bij linkséénzijdig) toetsen kan men nimmer besluiten tot: $\underline{x}$ is systematisch kleiner dan $\underline{y}$, want een kleine waarde van W (d.w.z. kleiner dan mn) kan bij rechtséénzijdig toetsen nooit in de kritieke zone liggen.

Hiermede zal men rekening moeten houden, indien men overweegt eenzijdig te toetsen. Anderzijds zal, bij rechtséénzijdige toetsing sneller ontdekt worden, dat $\underline{x}$ systematisch groter is dan $\underline{y}$, indien dit het geval is; immers de rechter kritieke zone is dan groter.

De rechtséénzijdige toets kan men dus toepassen als men er <u>uitsluitend in geïnteresseerd</u> is H_0 te verwerpen ten gunste van de alternatieve hypothese, dat $\underline{x}$ systematisch groter is dan $\underline{y}$, dus tegen $H_1: P[\underline{x} > \underline{y}] > P[\underline{x} < \underline{y}]$.

Dit zal b.v. het geval zijn, indien men, <u>onafhankelijk van het gegeven waarnemingsmateriaal</u>, weet dat $\underline{x}$ niet systematisch kleiner is dan $\underline{y}$. Ook practische overwegingen kunnen echter tot deze keuze leiden (zie voorbeeld 6 verderop).

Men gebruikt dan een rechtséénzijdige kritieke zone en men besluit tot: $\underline{x}$ is systematisch groter dan $\underline{y}$, als de berekende waarde van W in de kritieke zone ligt.

Opmerking 10: Het is echter onjuist éénzijdig te toetsen naar aanleiding van de gevonden waarde van $\underline{W}$. Zou men nl., omdat b.v. $W > \mu$ gevonden is, een rechtséénzijdige kritieke zone nemen "omdat W toch niet in een linker kritieke zone ligt", dan dient men te overwegen, dat men, als $W < \mu$ gevonden was, hetzelfde met een linkséénzijdige zone zou hebben gedaan. In feite werkt men dan dus toch tweezijdig, maar zou men nu de rechtséénzijdige (resp. linkséénzijdige) kritieke zone de onbetrouwbaarheid α geven, dan werkt men dus eigenlijk met een tweezijdige kritieke zone met onbetrouwbaarheid 2α. Het feit, dat $W > \mu$ (resp. $< \mu$) gevonden is, doet zich gelden bij de conclusie, indien H_0 verworpen wordt. Immers men besluit dan niet alleen, dat H_0 onjuist is, maar ook, dat $\underline{x}$ systematisch groter (resp. kleiner) dan $\underline{y}$ is.

Indien men éénzijdig kan toetsen verdient het aanbeveling dit inderdaad te doen, daar de éénzijdige toets, zoals boven reeds vermeld, bij dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel een groter onderscheidingsvermogen *) bezit dan de tweezijdige (zie par. 1.9). De tot nu toe gegeven voorbeelden zijn allen tweezijdig getoetst omdat nergens redenen aanwezig waren, die het besluit van éénzijdig toetsten zouden rechtvaardigen.
Bij het volgende voorbeeld kunnen wij echter wel éénzijdig toetsen.

Voorbeeld 6

Een textielfabrikant wil door toepassing van een prepareermethode A zijn garens sterker maken.
Trekproeven, verricht op monsters onbehandelde en met A behandelde garens, gaven de volgende resultaten (uitgedrukt in een of andere sterkte-eenheid).

Met A behandelde garens ($\underline{x}$)	Onbehandelde garens ($\underline{y}$)
11,79	10,34
11,21	11,40
13,20	10,19
12,66	12,10
13,37	11,46

*) Het onderscheidingsvermogen van een toets is de kans op het verwerpen van H_0, indien H_0 onjuist is.

De hypothese die wij willen toetsen luidt: de behandelde en de onbehandelde garens zijn even sterk.
Aangezien de fabrikant de prepareermethode voor deze garensoort echter alleen wil invoeren indien deze methode de garens sterker maakt, is hij er dus alleen in geïnteresseerd H_0 te verwerpen ten gunste van de alternatieve hypothese dat de met A behandelde garens systematisch sterker zijn dan de niet behandelde. De twee mogelijkheden:

a) de prepareermethode helpt niet

en

b) de prepareermethode schaadt,

leiden beide tot dezelfde beslissing: deze niet in te voeren, en zijn dus bij dit probleem, practisch gezien, equivalent, zodat zij niet van elkaar onderscheiden behoeven te worden. Het linker deel van een tweezijdige kritieke zone zou dus doelloos zijn.

Wij toetsen dus rechtséénzijdig en nemen als onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05.
Voor de toetsingsgrootheid vinden we hier W = 42 en in tabel I vinden we bij m = n = 5 voor de rechtséénzijdige overschrijdingskans k_r = 0,048. Daar de overschrijdingskans kleiner dan de onbetrouwbaarheidsdrempel is, verwerpen wij de hypothese H_0 ten gunste van de hypothese dat de prepareermethode de garens sterker maakt.

Indien wij hier tweezijdig getoetst hadden, hadden wij voor de (tweezijdige) overschrijdingskans k = 2.0,048 = 0,096 gevonden; de hypothese H_0 hadden wij dan, bij dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel, niet kunnen verwerpen.
De onbetrouwbaarheidsdrempel α van de éénzijdige toets heeft in dit geval de volgende practische interpretatie: de kans op het ten onrechte invoeren van A (als dit niet helpt of zelfs schaadt) is hoogstens gelijk aan α. *)

*) En wel, indien A niet helpt, doch schaadt, zelfs veel kleiner dan α.

1.9 Het onderscheidingsvermogen van de toets van WILCOXON, vergeleken met dat van de toets van STUDENT

Het onderscheidingsvermogen van de toets van WILCOXON is voor speciale gevallen onderzocht. Men zou verwachten, dat het bij toepassing op twee steekproeven uit normale verdelingen met gelijke spreidingen aanzienlijk geringer zou zijn dan dat van de toets van STUDENT, daar bij eerstgenoemde toets van het gegeven der normaliteit geen gebruik wordt gemaakt.

Voor grote steekproeven ($m \to \infty$ en $n \to \infty$) kan bewezen worden, dat de verhouding van de aantallen waarnemingen, die nodig zijn om de toets van WILCOXON en die van STUDENT in de buurt van H_0 hetzelfde onderscheidingsvermogen te geven, tot $3/\pi \approx 0,955$ nadert. Tevens blijkt, dat het onderscheidingsvermogen van de toets van WILCOXON voor scheve verdelingen - waarvoor dus strikt genomen de toets van STUDENT niet toepasbaar is - aanzienlijk groter kan zijn dan dat van de toets van STUDENT.

In het algemeen, als beide verdelingen alleen in locatie verschillen is de bovengenoemde verhouding nooit kleiner dan 0,864.

Bij eindige steekproefgrootte blijkt bij normale verdelingen, met gelijke spreidingen, het onderscheidingsvermogen van de toets van WILCOXON ook niet aanzienlijk kleiner te zijn dan dat van de toets van STUDENT.

Voor meer gedetailleerde informatie en litteratuurverwijzing zie [1] (sectie 5.8.4).

De toets van WILCOXON heeft verder een belangrijk voordeel boven de toets van STUDENT, nl. dat ver weg liggende waarnemingen, die wellicht (of wellicht niet) door een vergissing van enige aard veroorzaakt zijn, weinig invloed hebben op de uitkomst van de toets. Dit behoedt de onderzoeker voor het vaak zeer onaangename dilemma: een waarneming, die er onaannemelijk uitziet, doch waarvan men niet weet, of hij "fout" is, al of niet weg te laten.

Behalve de toets van WILCOXON zijn voor het toetsen van de in par. 2 genoemde hypothese verscheidene andere verdelingsvrije toetsen voorgesteld; een bekende is die van VAN DER WAERDEN, o.a. beschreven in [1]. Het antwoord op de vraag welke van deze toetsen "de beste" is hangt af van de onbekende kansverdeling van de waarnemingen. De toets van WILCOXON verdient

in het algemeen de voorkeur boven de toets van VAN DER WAERDEN bij een verschuivingsalternatief voor een verdeling met "dikke" staart (b.v. de logistieke verdeling) terwijl bij b.v. een exponentiële verdeling de toets van VAN DER WAERDEN te prefereren is (d.w.z. in het algemeen een hoger onderscheidingsvermogen zal hebben).
Overigens is de toetsingsgrootheid W eenvoudiger te berekenen dan die van VAN DER WAERDEN.
Een discussie over het onderscheidingsvermogen van diverse toetsen voor het tweesteekproeven probleem vindt men b.v. in [1].

Deel 2. Exacte behandeling bij gelijke waarnemingen

2.1 Inleiding

In deel 1 (par. 1.6 en 1.7) werd aangegeven hoe men voor de toets van WILCOXON, met behulp van tabellen en benaderingen, de kritieke zones en overschrijdingskansen kan vinden. Deze tabellen en benaderingen kan men niet gebruiken, als m en n klein zijn en bovendien de groepen gelijke waarnemingen veel in grootte verschillen; in deze gevallen zal men de verdeling van $\underline{W}$ onder de getoetste hypothese dus exact moeten berekenen.
In dit deel zullen wij aangeven hoe men deze exacte verdeling kan berekenen en tevens hoe men in deze gevallen de kritieke zones en overschrijdingskansen definieert.

De berekeningen vergen aanzienlijk meer tijd dan de niet-exacte en zullen dus in de regel alleen in uitzonderingsgevallen uitgevoerd worden.

2.2 Berekening van de exacte verdeling van $\underline{W}$ onder de getoetste hypothese H_0.

De twee steekproeven $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kan men als volgt samenvatten:

Tabel 2

Waarnemingsschema

Voorkomende steekproefwaarden	Aantal malen, dat z_i optreedt bij		totaal
	$\underline{x}$	$\underline{y}$	
z_1	$\underline{a}_1$	$\underline{b}_1$	$\underline{t}_1$
z_2	$\underline{a}_2$	$\underline{b}_2$	$\underline{t}_2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
z_k	$\underline{a}_k$	$\underline{b}_k$	$\underline{t}_k$
totaal	m	n	N

Hierin zijn $z_1, z_2, \ldots, z_k$ de voorkomende steekproefwaarden gerangschikt naar opklimmende grootte; m en n de steekproefgrootten; $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \ldots, \underline{t}_k$ de grootten der groepen gelijke waarnemingen en $\underline{a}_i$ (resp. $\underline{b}_i$) het aantal malen, dat z_i in de eerste (resp. tweede) steekproef optreedt.
De kans dat $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ de waarden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ aannemen, onder de hypothese H_0 en bij de gevonden waarden voor $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \ldots, \underline{t}_k$ wordt gegeven door de (k-1)-dimensionale hypergeometrische verdeling:

$$(1) \qquad P\left[\underline{a}_1=a_1, \underline{a}_2=a_2, \ldots, \underline{a}_k=a_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k; H_0\right] = \frac{\binom{t_1}{a_1} \cdot \binom{t_2}{a_2} \cdots \binom{t_k}{a_k}}{\binom{N}{m}} \;{}^{*)}.$$

Nu worden, bij de gegeven waarden van m, n en $t_1, t_2, \ldots, t_k$ alle mogelijke combinaties van $a_1, a_2, \ldots, a_k$ opgeschreven en voor iedere combinatie de waarde van de toetsingsgrootheid $\underline{W}$ berekend, zoals aangegeven is in deel 1.
Met behulp van formule (1) wordt dan, voor ieder der mogelijke combinaties, de kans berekend, dat die combinatie, bij de gegeven waarden van m, n en $t_1, t_2, \ldots, t_k$ optreedt als de getoetste hypothese H_0 juist is.
Voor stochastische grootheden, die slechts twee waarden aan kunnen nemen, is de toets van Wilcoxon equivalent met de toetsingsmethode die de methode van de 2 × 2 tabel genoemd wordt (zie [2]).

Voorbeeld 7

Men wil twee geneesmiddelen A en B vergelijken wat betreft hun uitwerking bij de behandeling van een bepaalde ziekte; 5 patiënten lijdende aan deze ziekte krijgen een injectie met geneesmiddel A en 10 patiënten een injectie met B. Twee weken na deze injectie wordt voor iedere patiënt de graad van verbetering genoteerd; deze verbeteringsgraad wordt aangegeven met:

---

*) $\binom{t}{a} = \frac{t!}{a!(t-a)!}$; tabellen voor deze binomiaalcoëfficiënten vindt men o.a. in [3].

1. geen of geringe verbetering,
2. matige verbetering,
3. goede verbetering,
4. geheel genezen.

Deze waarnemingen kunnen we als volgt samenvatten:

Tabel 3

Verbeteringsgraad van patiënten, behandeld met geneesmiddelen A en B:

verbeterings-graad	aantal patiënten met de betreffende verbeterings-graad bij geneesmiddel		totaal
	A	B	
1	1	0	1
2	3	5	8
3	1	2	3
4	0	3	3
totaal	5	10	15

In gevallen als die van voorbeeld 7 zal men, om de overschrijdingskansen te vinden, de exacte verdeling van $\underline{W}$ onder de hypothese H_0 moeten berekenen.

Hieronder volgen alle mogelijke combinaties van $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (bij de gegeven waarden van n, m en $t_1, t_2, \ldots, t_k$) met de bijbehorende waarde van W.

1	0	1
4	4	8
0	3	3
0	3	3
5	10	15

W = 16

0	1	1
5	3	8
0	3	3
0	3	3
5	10	15

W = 25

1	0	1
3	5	8
1	2	3
0	3	3
5	10	15

W = 27

1	0	1
3	5	8
0	3	3
1	2	3
5	10	15

W = 33

0	1	1
4	4	8
1	2	3
0	3	3
5	10	15

W = 36

1	0	1
2	6	8
2	1	3
0	3	3
5	10	15

W = 38

0	1	1
4	4	8
0	3	3
1	2	3
5	10	15

W = 42

1	0	1
2	6	8
1	2	3
1	2	3
5	10	15

W = 44

0	1	1
3	5	8
2	1	3
0	3	3
5	10	15

W = 47

1	0	1
1	7	8
3	0	3
0	3	3
5	10	15

W = 49

1	0	1
2	6	8
0	3	3
2	1	3
5	10	15

W = 50

0	1	1
3	5	8
1	2	3
1	2	3
5	10	15

W = 53

1	0	1
1	7	8
2	1	3
1	2	3
5	10	15

W = 55

0	1	1
2	6	8
3	0	3
0	3	3
5	10	15

W = 58

0	1	1
3	5	8
0	3	3
2	1	3
5	10	15

W = 59

1	0	1
1	7	8
1	2	3
2	1	3
5	10	15

W = 61

0	1	1
2	6	8
2	1	3
1	2	3
5	10	15

W = 64

1	0	1
0	8	8
3	0	3
1	2	3
5	10	15

W = 66

1	0	1
1	7	8
0	3	3
3	0	3
5	10	15

W = 67

0	1	1
2	6	8
1	2	3
2	1	3
5	10	15

W = 70

1	0	1
0	8	8
2	1	3
2	1	3
5	10	15

W = 72

0	1	1
1	7	8
3	0	3
1	2	3
5	10	15

W = 75

0	1	1
2	6	8
0	3	3
3	0	3
5	10	15

W = 76

1	0	1
0	8	8
1	2	3
3	0	3
5	10	15

W = 78

0	1	1
1	7	8
2	1	3
2	1	3
5	10	15

W = 81

0	1	1
1	7	8
1	2	3
3	0	3
5	10	15

W = 87

0	1	1
0	8	8
3	0	3
2	1	3
5	10	15

W = 92

0	1	1
0	8	8
2	1	3
3	0	3
5	10	15

W = 98

Met behulp van formule (1) vindt men nu:

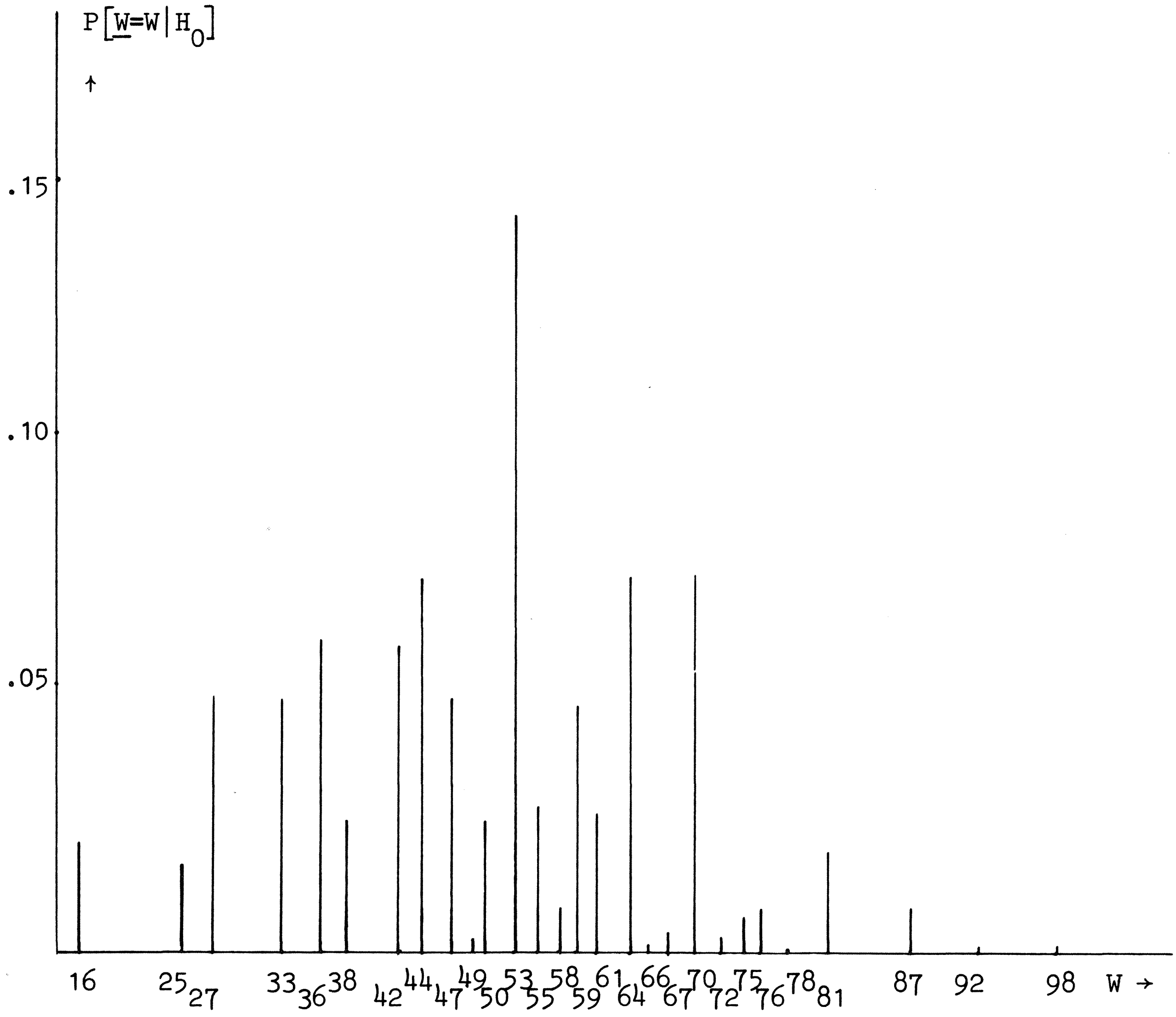
Tabel 4

Verdeling van $\underline{W}$ onder de hypothese H_0 voor

$m = 5$, $n = 10$, $t_1 = 1$, $t_2 = 8$, $t_3 = t_4 = 3$.

W	$P[W \mid t_1,\ldots,t_4;H_0]$	W	$P[W \mid t_1,\ldots,t_4;H_0]$
16	0,0233	59	0,0559
25	0,0187	61	0,0240
27	0,0559	64	0,0839
33	0,0559	66	0,0010
36	0,0699	67	0,0027
38	0,0280	70	0,0839
42	0,0699	72	0,0030
44	0,0839	75	0,0080
47	0,0559	76	0,0093
49	0,0027	78	0,0010
50	0,0280	81	0,0240
53	0,1679	87	0,0080
55	0,0240	92	0,0010
58	0,0093	98	0,0010

De exacte verdeling van $\underline{W}$ heeft, als H_0 juist is, de in fig. 3 getekende vorm. Uit deze figuur ziet men dat de verdeling in dit geval een zeer onregelmatig karakter heeft.



figuur 3

Verdeling van $\underline{W}$ onder de hypothese H_0 voor
$n = 5$, $m = 10$, $t_1 = 1$, $t_2 = 8$, $t_3 = t_4 = 3$.

2.3 Definitie van kritieke zones en overschrijdingskansen

De éénzijdige kritieke zones en overschrijdingskansen worden op de gebruikelijke wijze gedefinieerd.De rechts- (resp. links-) éénzijdige kritieke zone bestaat dus uit grote (resp. kleine) waarden van W en de rechts- (resp. links-) éénzijdige overschrijdingskans van een waarde W van $\underline{W}$ is de kans dat $\underline{W}$ niet kleiner (resp. niet groter) is dan W.
Bij voorbeeld 7 is W = 27; de linkséénzijdige overschrijdingskans hiervan is (zie tabel 4):

$$P[\underline{W} \leq 27] = 0{,}0233 + 0{,}0186 + 0{,}0559 = 0{,}0978.$$

De rechtséénzijdige overschrijdingskans van W = 27 is

$$P[\underline{W} \geq 27] = 1 - P[\underline{W} < 27] = 1 - (0{,}0233+0{,}0186) = 0{,}9581.$$

Bij symmetrische verdelingen (zie hierover par. 1.4, eigenschap 2) wordt als tweezijdige kritieke zone met onbetrouwbaarheidsdrempel α gewoonlijk een links- en een rechtséénzijdige genomen, ieder met onbetrouwbaarheidsdrempel $\frac{1}{2}\alpha$. Deze tweezijdige kritieke zone wordt aangegeven door Z_1. De tweezijdige overschrijdingskans is dan gelijk aan twee maal de kleinste éénzijdige. Bij asymmetrische verdelingen heeft deze methode echter het bezwaar, dat er een groot verschil kan ontstaan tussen α en de werkelijke onbetrouwbaarheid. Als de kleinste of de grootste waarde, die $\underline{W}$ aan kan nemen, een waarschijnlijkheid > $\frac{1}{2}\alpha$ heeft, wordt de zo gedefinieerde kritieke zone bovendien eenzijdig. Het verschil tussen α en de werkelijke onbetrouwbaarheid is dan $\geq \frac{1}{2}\alpha$.

Om te komen tot een algemene methode voor het stapsgewijs opbouwen van een tweezijdige kritieke zone, die het genoemde nadeel niet bezit en die voor symmetrische verdelingen met de gebruikelijke overeenstemt, stellen wij een aantal principes vast, die wij bij deze opbouw in de aangegeven volgorde willen toepassen. Deze principes zijn:

a) het linker- en rechterdeel der kritieke zone vormen bij iedere stap ieder een aaneengesloten geheel,

b) alle waarden, die tot een kritieke zone behoren, behoren ook tot alle kritieke zones met grotere onbetrouwbaarheidsdrempel,

c) bij iedere stap wordt het verschil tussen de onbetrouwbaarheden van het linker- en rechterdeel van de kritieke zone in absolute waarde zo klein mogelijk gehouden,

d) de onbetrouwbaarheid van de kritieke zone wordt, voor iedere onbetrouwbaarheidsdrempel α, zo dicht mogelijk onder α gehouden,

e) indien de principes a, ..., d bij een bepaalde stap niet één, doch twee mogelijke nieuwe waarden aanwijzen als volgende bouwsteen voor de kritieke zone, worden deze tegelijk aan de kritieke zone toegevoegd.

Deze principes leiden in symmetrische gevallen tot Z_1. Verder wordt een ondubbelzinnige opbouw verkregen, die op aanschouwelijke wijze, als volgt beschreven kan worden:

Volgens principe c) kiezen wij van de grootste en de kleinste waarde die $\underline{W}$ aan kan nemen degene met de kleinste waarschijnlijkheid; zijn de waarschijnlijkheden van deze twee waarden aan elkaar gelijk dan nemen wij beide waarden (principe e)). De volgende waarde van $\underline{W}$, die wij bij de kritieke zone nemen, is een waarde links of een waarde rechts zodat het linker- en rechterdeel der kritieke zone ieder een aaneengesloten geheel vormen (principe a)) en dat het verschil tussen de onbetrouwbaarheden links en rechts in absolute waarde zo klein mogelijk is (principe c)). Wij vervolgen deze opbouw door iedere keer links of rechts een waarde van $\underline{W}$ bij de kritieke zone te nemen totdat de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel het toevoegen van een nieuwe waarde verhindert.

Als het toevoegen van een waarde links in absolute waarde hetzelfde verschil tussen links en rechts geeft als het toevoegen van een waarde rechts dan wordt van deze twee waarden degene met de kleinste waarschijnlijkheid toegevoegd (principe b) en d)).
Tenslotte: is het verschil tussen links en rechts in een bepaald stadium gelijk aan 0 en hebben de volgende linker- en rechterwaarde van $\underline{W}$ dezelfde waarschijnlijkheid dan worden beide waarden toegevoegd (of als men daarmee α overschrijdt, geen van beide (principe e))).

Wij zullen de zo gedefinieerde kritieke zone aanduiden als Z.

De tweezijdige overschrijdingskans wordt gedefinieerd als de onbetrouwbaarheid van de kleinste kritieke zone Z, die de gevonden waarden van W bevat.

Bij voorbeeld 7 bestaat de tweezijdige kritieke zone Z met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 uit de waarden W = 16; 87; 92 en 98; de werkelijke onbetrouwbaarheid wordt hier 0,0333.

In tabel 5 staan voor ieder der mogelijke waarden van W bij voorbeeld 7 de volgens Z gedefinieerde tweezijdige overschrijdingskansen vermeld (kolom (2)). In de kolommen (3) en (4) staan de tweezijdige overschrijdingskansen, die men vindt met behulp van de normale benadering (zie deel 1, par. 1.7); bij kolom (3) is geen continuïteitscorrectie toegepast; bij kolom (4) een continuïtietscorrectie ter grootte van 1.

De cijfers tussen haakjes in kolom (2) geven de volgorde aan waarin de waarden van W uit kolom (1) bij de kritieke zone genomen zijn.

Tabel 5

Exacte en benaderde tweezijdige overschrijdingskansen bij voorbeeld 7.

(1)	(2)		(3)	(4)
W	Tweezijdige overschrijdingskans			
	exact		benaderd	
			zonder	met
			continuïteitscorrectie	
16	0,0333	(4)	0,0226	0,0272
25	0,0760	(6)	0,0950	0,1074
27	0,1532	(11)	0,1236	0,1416
33	0,2930	(13)	0,2542	0,2846
36	0,4505	(17)	0,3472	0,3844
38	0,4785	(18)	0,4238	0,4592
42	0,6283	(21)	0,5892	0,6384
44	0,7455	(24)	0,6892	0,7414
47	0,9693	(26)	0,8414	0,8966
49	0,9720	(27)	0,9442	1
50	1	(28)	1	0,9442
53	0,9134	(25)	0,8414	0,8966
55	0,6616	(23)	0,7414	0,7872
58	0,6376	(22)	0,5892	0,6384
59	0,5584	(20)	0,5486	0,5892
61	0,5025	(19)	0,4592	0,5028
64	0,3806	(16)	0,3472	0,3844
66	0,2967	(15)	0,2846	0,3174
67	0,2957	(14)	0,2542	0,2846
70	0,2371	(12)	0,1802	0,2040
72	0,0973	(10)	0,1416	0,1586
75	0,0943	(9)	0,0950	0,1074
76	0,0863	(8)	0,0818	0,0950
78	0,0770	(7)	0,0602	0,0702
81	0,0573	(5)	0,0376	0,0444
87	0,0100	(3)	0,0132	0,0160
92	0,0020	(2)	0,0050	0,0060
98	0,0010	(1)	0,0012	0,0016

Opmerkingen

1. Als de kans op de gevonden waarde voor $\underline{W}$ (berekend volgens formule (1)) groter is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel α, dan is zowel de één- als de tweezijdige overschrijdingskans > α, zodat men in dit geval niet de gehele exacte verdeling behoeft uit te rekenen.
2. Heeft men de gehele exacte verdeling berekend en is de kleinste éénzijdige overschrijdingskans van de gevonden waarde van $\underline{W}$ > α, dan is de tweezijdige overschrijdingskans ook > α, zodat men in dit geval de tweezijdige kritieke zone niet behoeft te bepalen.
3. De bovenbeschreven methode om de exacte verdeling van $\underline{W}$ te berekenen, kan men ook toepassen als er geen gelijke waarnemingen zijn, dus als $t_i = 1$ voor iedere i. Formule (1) gaat dan over in

$$P[\underline{a}_1 = a_1, \underline{a}_2 = a_2, \ldots, \underline{a}_k = a_k | H_0] = \binom{N}{m}^{-1}$$

In dit geval is het echter veel handiger om de exacte verdeling van $\underline{W}$ onder de hypothese H_0 te berekenen zoals aangegeven is in [7], d.w.z. te werken met de recursieformule

$$P[W|m,n;H_0] = \frac{m}{N} P[W-2n|m-1,n;H_0] + \frac{n}{N} P[W|m;n-1;H_0],$$

waarin $P[W|m,n;H_0]$ de kans op W voorstelt onder de hypothese H_0 bij m waarnemingen van $\underline{x}$ en n waarnemingen van $\underline{y}$.
Een dergelijke recursieformule is ook bekend voor het geval dat er gelijke waarnemingen zijn, maar die heeft een veel gecompliceerder karakter (zie [8]).

2.4 Litteratuur

[1] Bradley, J.V. Distributionfree statistical tests. Prentice Hall (1968).

[2] Eeden, C. van Verdelingsvrije toetsen voor twee steekproeven en de methode der 2 × 2 tabel. Statistica Neerlandica, 10 (1956), 157-162.

[3] Fry, T.C. Probability and its engineering uses. D. van Nostrand (1928).

[4] Hemelrijk, J. Note on Wilcoxon's two sample test when ties are present. Ann. Math. Stat., 23 (1952), 133-135.

[5] Lehmann, E.L. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests. Ann. Math. Stat., 22 (1951), 165-179.

[6] Lehmann, E.L. The power of rank tests. Ann. Math. Stat., 24 (1953), 23-43.

[7] Mann, H.B. en Whitney, D.R. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. Ann. Math. Stat., 18 (1947), 50-60.

[8] Smid, L.J. On the distribution of the test statistics of Kendall and Wilcoxon's two sample test when ties are present. Statistica Neerlandica, 10 (1956), 204-214

[9] Vaart, H.R. van der en Dantzig, D. van De toets van Wilcoxon. Statistica Neerlandica, 5 (1951), 185-193.

[10] Wilcoxon, F. Individual comparisons by ranking methods. Biometrics, 1 (1945), 80-82.

TABEL I: linksééenzijdige overschrijdingskansen voor de toets van Wilcoxon

n = 3

W \ m	1	2	3
0	0,250000	0,100000	0,050000
2	0,500000	0,200000	0,100000
4	0,750000	0,400000	0,200000
6		0,600000	0,350000
8			0,500000
10			0,650000

n = 4

W \ m	1	2	3	4
0	0,200000	0,066667	0,028571	0,014286
2	0,400000	0,133333	0,057143	0,028571
4	0,600000	0,266667	0,114286	0,057143
6		0,400000	0,200000	0,100000
8		0,600000	0,314286	0,171429
10			0,428571	0,242857
12			0,571429	0,342857
14				0,442857
16				0,557143

n = 5

W \ m	1	2	3	4	5
0	0,166667	0,047619	0,017857	0,007936	0,003968
2	0,333333	0,095238	0,035714	0,015873	0,007936
4	0,500000	0,190476	0,071429	0,031746	0,015873
6	0,666667	0,285714	0,125000	0,055556	0,027778
8		0,428571	0,196429	0,095238	0,047619
10		0,571429	0,285714	0,142857	0,075397
12			0,392857	0,206349	0,111111
14			0,500000	0,277778	0,154762
16			0,607143	0,365079	0,210318
18				0,452381	0,273810
20				0,547619	0,345238
22					0,420635
24					0,500000
26					0,579365

TABEL I: linksééenzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 6

W \ m	1	2	3	4	5	6
0	0,142857	0,035714	0,011905	0,004762	0,002164	0,001082
2	0,285714	0,071429	0,023810	0,009524	0,004329	0,002164
4	0,428571	0,142857	0,047619	0,019048	0,008658	0,004329
6	0,571428	0,214286	0,083333	0,033333	0,015152	0,007576
8		0,321429	0,130952	0,057143	0,025974	0,012987
10		0,428571	0,190476	0,085714	0,041126	0,020563
12		0,571429	0,273810	0,128571	0,062770	0,032468
14			0,357143	0,176190	0,088744	0,046537
16			0,452381	0,238095	0,123376	0,066017
18			0,547619	0,304762	0,164502	0,089827
20				0,380952	0,214286	0,120130
22				0,457142	0,268398	0,154762
24				0,542857	0,331169	0,196970
26					0,396104	0,242424
28					0,465368	0,294372
30					0,534632	0,349567
32						0,409091
34						0,468614
36						0,531385

n = 7

W \ m	1	2	3	4	5
0	0,125000	0,027778	0,008333	0,003030	0,001263
2	0,250000	0,055556	0,016667	0,006061	0,002525
4	0,375000	0,111111	0,033333	0,012121	0,005051
6	0,500000	0,166667	0,058333	0,021212	0,008838
8	0,625000	0,250000	0,091667	0,036364	0,015152
10		0,333333	0,133333	0,054545	0,023990
12		0,444444	0,191667	0,081818	0,036616
14		0,555556	0,258333	0,115152	0,053030
16			0,333333	0,157576	0,074495
18			0,416667	0,206061	0,101010
20			0,500000	0,263636	0,133838
22			0,583333	0,324242	0,171717
24				0,393939	0,215909
26				0,463636	0,265152
28				0,536364	0,319444
30					0,377525
32					0,438131
34					0,500000
36					0,561869

TABEL I: linkséénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 7

W \ m	6	7
0	0,000583	0,000291
2	0,001165	0,000583
4	0,002331	0,001166
6	0,004079	0,002040
8	0,006993	0,003497
10	0,011072	0,005536
12	0,017482	0,008741
14	0,025641	0,013112
16	0,036713	0,018939
18	0,050699	0,026515
20	0,068764	0,036422
22	0,090326	0,048660
24	0,117133	0,064103
26	0,147436	0,082459
28	0,182983	0,104312
30	0,222610	0,129662
32	0,266899	0,158800
34	0,314102	0,191434
36	0,365384	0,227856
38	0,417832	0,267483
40	0,472610	0,310023
42	0,527389	0,355187
44		0,402389
46		0,450758
48		0,500000
50		0,549242

TABEL I: linkseénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 8

W \ m	1	2	3	4	5
0	0,111111	0,022222	0,006061	0,002020	0,000777
2	0,222222	0,044444	0,012121	0,004040	0,001554
4	0,333333	0,088889	0,024242	0,008081	0,003108
6	0,444444	0,133333	0,042424	0,014141	0,005439
8	0,555556	0,200000	0,066667	0,024242	0,009324
10		0,266667	0,096970	0,036364	0,014763
12		0,355556	0,139394	0,054545	0,022533
14		0,444444	0,187879	0,076768	0,032634
16		0,555556	0,248485	0,107071	0,046620
18			0,315152	0,141414	0,063714
20			0,387879	0,183838	0,085470
22			0,460606	0,230303	0,111111
24			0,539394	0,284848	0,142191
26				0,341414	0,177156
28				0,404040	0,217560
30				0,466667	0,261849
32				0,533333	0,310800
34					0,362082
36					0,416472
38					0,471639
40					0,528361

TABEL I: linkséénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 8

W \ m	6	7	8
0	0,000333	0,000155	0,000078
2	0,000666	0,000311	0,000155
4	0,001332	0,000622	0,000311
6	0,002331	0,001088	0,000544
8	0,003996	0,001865	0,000932
10	0,006327	0,002953	0,001476
12	0,009990	0,004662	0,002331
14	0,014652	0,006993	0,003496
16	0,021312	0,010256	0,005206
18	0,029637	0,014452	0,007382
20	0,040626	0,020047	0,010334
22	0,053946	0,027040	0,014064
24	0,070929	0,036053	0,018959
26	0,090576	0,046931	0,024942
28	0,114219	0,060295	0,032479
30	0,141192	0,075991	0,041492
32	0,172494	0,094639	0,052448
34	0,206793	0,115928	0,065190
36	0,245421	0,140482	0,080264
38	0,286380	0,167832	0,097436
40	0,331002	0,198446	0,117249
42	0,377289	0,231702	0,139316
44	0,425907	0,267910	0,164102
46	0,474858	0,306294	0,191142
48	0,525141	0,347164	0,220901
50		0,389433	0,252680
52		0,433255	0,286869
54		0,477544	0,322688
56		0,522455	0,360450
58			0,399223
60			0,439238
62			0,479565
64			0,520435

TABEL I: linksééNzijdige overschrijdingskansen (vervorlg)

n = 9

W \ m	1	2	3	4	5
0	0,100000	0,018182	0,004545	0,001399	0,000500
2	0,200000	0,036364	0,009091	0,002797	0,000999
4	0,300000	0,072727	0,018182	0,005594	0,001998
6	0,400000	0,109091	0,031818	0,009790	0,003496
8	0,500000	0,163636	0,050000	0,016783	0,005994
10	0,600000	0,218182	0,072727	0,025175	0,009490
12		0,290909	0,104545	0,037762	0,014486
14		0,363636	0,140909	0,053147	0,020979
16		0,454545	0,186364	0,074126	0,029970
18		0,545455	0,240909	0,099301	0,041458
20			0,300000	0,130070	0,055944
22			0,363636	0,165035	0,073426
24			0,431818	0,206993	0,094905
26			0,500000	0,251748	0,119880
28			0,568182	0,302098	0,148851
30				0,355244	0,181818
32				0,412587	0,218781
34				0,469930	0,259240
36				0,530070	0,303196
38					0,349650
40					0,398601
42					0,449051
44					0,500000
46					0,550949

TABEL I: linkséénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 9

W \ m	6	7	8	9
0	0,000200	0,000087	0,000041	0,000021
2	0,000400	0,000175	0,000082	0,000041
4	0,000799	0,000350	0,000164	0,000082
6	0,001399	0,000612	0,000288	0,000144
8	0,002398	0,001049	0,000494	0,000247
10	0,003796	0,001661	0,000782	0,000391
12	0,005994	0,002622	0,001234	0,000617
14	0,008791	0,003934	0,001851	0,000926
16	0,012787	0,005769	0,002756	0,001378
18	0,017982	0,008217	0,003949	0,001995
20	0,024775	0,011451	0,005553	0,002818
22	0,033167	0,015560	0,007610	0,003887
24	0,043956	0,020892	0,010325	0,005306
26	0,056743	0,027448	0,013698	0,007096
28	0,072328	0,035577	0,017976	0,009379
30	0,090509	0,045367	0,023200	0,012217
32	0,111888	0,057080	0,029618	0,015734
34	0,136064	0,070804	0,037228	0,019992
36	0,163836	0,086888	0,046360	0,025154
38	0,194206	0,105245	0,056972	0,031263
40	0,227972	0,126136	0,069395	0,038503
42	0,264335	0,149563	0,083587	0,046956
44	0,303496	0,175524	0,099794	0,056746
46	0,344455	0,203934	0,117935	0,067956
48	0,387812	0,234878	0,138297	0,080749
50	0,431968	0,268007	0,160633	0,095125
52	0,477322	0,303234	0,185191	0,111209
54	0,522677	0,340297	0,211724	0,129042
56		0,378846	0,240354	0,148663
58		0,418532	0,270712	0,170054
60		0,459091	0,302920	0,193254
62		0,500000	0,336487	0,218141
64		0,540909	0,371493	0,244714
66			0,407404	0,272851
68			0,444179	0,302406
70			0,481283	0,333237
72			0,518716	0,365220
74				0,398087
76				0,431654
78				0,465714
80				0,500000
82				0,534286

TABEL I: linkséénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 10

W \ m	1	2	3	4	5
0	0,090909	0,015152	0,003496	0,000999	0,000333
2	0,181818	0,030303	0,006993	0,001998	0,000666
4	0,272727	0,060606	0,013986	0,003996	0,001332
6	0,363636	0,090909	0,024476	0,006993	0,002331
8	0,454545	0,136364	0,038462	0,011988	0,003996
10	0,545455	0,181818	0,055944	0,017982	0,006327
12		0,242424	0,080420	0,026973	0,009657
14		0,303030	0,108392	0,037962	0,013986
16		0,378788	0,143357	0,052947	0,019980
18		0,454545	0,185315	0,070929	0,027639
20		0,545455	0,234266	0,093906	0,037629
22			0,286713	0,119880	0,049617
24			0,346154	0,151848	0,064602
26			0,405594	0,186813	0,082251
28			0,468532	0,226773	0,103230
30			0,531469	0,269730	0,127206
32				0,317682	0,154845
34				0,366633	0,185481
36				0,419580	0,219780
38				0,472527	0,256743
40				0,527472	0,297036
42					0,339327
44					0,383949
46					0,429570
48					0,476523
50					0,523476

TABEL I: linkséénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 10

W \ m	6	7	8	9	10
0	0,000125	0,000051	0,000023	0,000011	0,000005
2	0,000250	0,000103	0,000046	0,000022	0,000011
4	0,000500	0,000206	0,000091	0,000043	0,000022
6	0,000874	0,000360	0,000160	0,000076	0,000038
8	0,001499	0,000617	0,000274	0,000130	0,000065
10	0,002373	0,000977	0,000434	0,000206	0,000103
12	0,003746	0,001542	0,000686	0,000325	0,000162
14	0,005494	0,002314	0,001028	0,000487	0,000244
16	0,007992	0,003393	0,001531	0,000725	0,000362
18	0,011239	0,004833	0,002194	0,001050	0,000525
20	0,015609	0,006787	0,003108	0,001494	0,000752
22	0,020979	0,009255	0,004273	0,002067	0,001044
24	0,027972	0,012494	0,005827	0,002836	0,001440
26	0,036339	0,016505	0,007770	0,003810	0,001943
28	0,046703	0,021544	0,010261	0,005066	0,002598
30	0,058941	0,027663	0,013323	0,006636	0,003420
32	0,073551	0,035119	0,017140	0,008606	0,004465
34	0,090285	0,043912	0,021710	0,011009	0,005748
36	0,109890	0,054401	0,027264	0,013964	0,007344
38	0,131743	0,066536	0,033800	0,017493	0,009271
40	0,156593	0,080625	0,041570	0,021737	0,011615
42	0,183816	0,096616	0,050551	0,026738	0,014402
44	0,213911	0,114767	0,060994	0,032627	0,017731
46	0,246129	0,134924	0,072855	0,039446	0,021628
48	0,281093	0,157394	0,086407	0,047360	0,026212

TABEL I: linkséénzijdige overschrijdingskansen (vervolg)

n = 10

W \ m	6	7	8	9	10
50	0,317682	0,181921	0,101536	0,056377	0,031506
52	0,356393	0,208659	0,118492	0,066650	0,037627
54	0,396228	0,237350	0,137140	0,078200	0,044604
56	0,437437	0,268099	0,157708	0,091157	0,052561
58	0,478896	0,300442	0,179967	0,105512	0,061502
60	0,521104	0,334533	0,204122	0,121403	0,071570
62		0,369806	0,229878	0,138756	0,082746
64		0,406262	0,257393	0,157689	0,095158
66		0,443387	0,286302	0,178116	0,108781
68		0,481129	0,316719	0,200090	0,123725
70		0,518870	0,348233	0,223484	0,139930
72			0,380913	0,248349	0,157499
74			0,414278	0,274480	0,176340
76			0,448375	0,301890	0,196524
78			0,482700	0,330360	0,217936
80			0,517300	0,359847	0,240625
82				0,390092	0,264424
84				0,421052	0,289370
86				0,452412	0,315264
88				0,484119	0,342105
90				0,515880	0,369682
92					0,397968
94					0,426714
96					0,455898
98					0,485256
100					0,514743

TABEL II: linkerkritieke waarden van W voor de toets van Wilcoxon *)
α = 0,01 (eenzijdig)

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	-	-	2	8	14	18	24	30	36	44	50									
12	-	-	4	10	16	22	28	34	42	48	56	62								
13	-	0	4	10	18	24	32	40	46	54	62	70	78							
14	-	0	4	12	20	26	34	44	52	60	68	76	86	94						
15	-	0	6	14	22	30	38	48	56	66	74	84	94	102	112					
16	-	0	6	14	24	32	42	52	62	72	82	92	102	112	120	130				
17	-	0	8	16	26	36	46	56	66	76	88	98	110	120	130	140	152			
18	-	0	8	18	28	38	48	60	72	82	94	106	118	128	140	150	162	174		
19	-	2	8	18	30	40	52	64	76	88	100	112	126	136	148	162	174	186	200	
20	-	2	10	20	32	44	56	68	80	94	106	120	132	144	158	172	186	198	212	226
21	-	2	10	22	34	46	60	72	86	100	114	128	140	154	168	182	196	210	224	
22	-	2	12	22	36	48	62	76	90	106	120	134	148	162	178	192	208	222		
23	-	2	12	24	38	52	66	80	96	110	126	140	156	172	186	202	218			
24	-	2	12	26	40	54	70	84	100	116	132	148	164	180	196	214				
25	-	2	14	26	42	58	72	90	106	122	138	154	172	188	206					
26	-	2	14	28	44	60	76	94	110	128	144	162	180	198						
27	-	4	14	30	46	62	80	98	116	132	150	168	188							
28	-	4	16	32	48	66	84	102	120	138	156	176								
29	-	4	16	32	50	68	86	106	126	144	164									
30	-	4	18	34	52	70	90	110	130	148										
31	-	4	18	36	54	74	94	114	134											
32	-	4	18	36	56	76	98	118												
33	-	4	20	38	58	80	100													
34	-	6	20	40	60	82														
35	-	6	22	40	62															
36	-	6	22	42																
37	-	6	22																	
38	-	6																		
39	-																			

*) "-" betekent dat voor de betreffende waarden van n en m voor geen waarde van W de linksééénzijdige overschrijdingskans ≤ α is. De onderstreepte waarden zijn gevonden met behulp van de normale benadering.

TABEL II: linkerkritieke waarden van W voor de toets van Wilcoxon (vervolg)
α = 0,025 (eenzijdig)

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	-	0	6	12	18	26	32	38	46	52	60									
12	-	2	8	14	22	28	36	44	52	58	66	74								
13	-	2	8	16	24	32	40	48	56	66	74	82	90							
14	-	2	10	18	26	34	44	52	62	72	80	90	100	110						
15	-	2	10	20	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118	128					
16	-	2	12	22	30	42	52	62	74	84	94	106	118	128	138	150				
17	-	4	12	22	34	44	56	68	78	90	102	114	126	138	150	162	174			
18	-	4	14	24	36	48	60	72	84	96	110	122	134	146	160	172	186	198		
19	-	4	14	26	38	50	64	76	90	104	116	130	142	156	170	184	198	210	224	
20	-	4	16	28	40	54	68	82	96	110	124	138	152	166	180	194	210	224	238	254
21	-	6	16	30	44	58	72	86	100	116	130	146	160	176	190	206	222	236	252	
22	-	6	18	32	46	60	76	90	106	122	138	154	170	186	202	218	234	250		
23	-	6	18	34	48	64	80	96	112	128	144	162	178	194	212	228	246			
24	-	6	20	34	50	66	84	100	118	134	152	170	186	204	222	240				
25	-	6	20	36	54	70	88	106	124	140	158	178	196	214	232					
26	-	8	22	38	56	74	92	110	128	148	166	186	204	224						
27	-	8	22	40	58	76	96	114	134	154	174	194	214							
28	-	8	24	42	60	80	100	120	140	160	180	202								
29	-	8	26	44	64	84	104	124	144	166	188									
30	-	10	26	46	66	86	108	130	150	172										
31	-	10	28	48	68	90	112	134	156											
32	-	10	28	48	70	92	116	138												
33	-	10	30	50	74	96	120													
34	-	10	30	52	76	100														
35	-	12	32	54	78															
36	-	12	32	56																
37	-	12	34																	
38	-	12																		
39	0																			

TABEL II: linkerkritieke waarden van W voor de toets van Wilcoxon (vervolg)
$\alpha = 0{,}05$ (eenzijdig)

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	-	2	10	16	24	32	38	46	54	62	68									
12	-	4	10	18	26	34	42	52	60	68	76	84								
13	-	4	12	20	30	38	48	56	66	74	84	94	102							
14	-	6	14	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112	122						
15	-	6	14	24	36	46	56	66	78	88	100	110	122	132	144					
16	-	6	16	28	38	50	60	72	84	96	108	120	130	142	154	166				
17	-	6	18	30	40	52	66	78	90	102	114	128	140	152	166	178	192			
18	-	8	18	32	44	56	70	82	96	110	122	136	150	164	176	190	204	218		
19	0	8	20	34	46	60	74	88	102	116	130	144	160	174	188	202	216	232	246	
20	0	8	22	36	50	64	78	94	108	124	138	154	168	184	200	214	230	246	260	276
21	0	10	22	38	52	68	82	98	114	130	146	162	178	194	210	226	242	258	276	
22	0	10	24	40	56	72	88	104	120	136	154	170	188	204	222	238	256	272		
23	0	10	26	42	58	74	92	108	126	144	162	180	196	214	232	250	268			
24	0	12	26	44	60	78	96	114	132	150	170	188	206	224	244	262				
25	0	12	28	46	64	82	100	120	138	158	176	196	216	236	254					
26	0	12	30	48	66	86	106	124	144	164	184	204	226	246						
27	0	14	30	50	70	90	110	130	150	172	192	214	234							
28	0	14	32	52	72	92	114	136	156	178	200	222								
29	0	14	34	54	76	96	118	140	162	186	208									
30	0	14	34	56	78	100	122	146	170	192										
31	0	16	36	58	80	104	128	152	176											
32	0	16	38	60	84	108	132	156												
33	0	16	38	62	86	112	136													
34	0	18	40	64	90	114														
35	0	18	42	66	92															
36	0	18	42	68																
37	0	20	44																	
38	0	20																		
39	2																			