STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 1a.

Wiskunde en Research, 1.

Toepassing op waterstaatproblemen.
Wiskunde en radioproblemen.
Physica van de vaste aarde.

Dronkers J.J., Pol B. van der, Vening Meinesz F.A.

1947

Inhoudsopgave

Wiskunde en Research, 1.

Voordracht van Dr.J.J.Dronkers over: Wiskunde en Research. Toepassing op waterstaatsproblemen.

Korte inhoud:

In het eerste deel: Wiskunde en Research, worden enkele meer algemeene opmerkingen gemaakt aan de hand van de volgende punten:

1. Wat beoogt de toegepaste wiskunde en welke werkwijze wordt over het algemeen gevolgd ?
2. De verhouding tusschen zuivere en toegepaste wiskunde.
3. De taak van den mathematischen researchwerker.
4. Hoe zal de samenwerking tusschen den mathematicus en de overige researchwerkers in een researchgemeenschap moeten zijn ?

In het tweede deel wordt gesproken over de wijze, waarop de wiskunde kan bijdragen tot de oplossing van vraagstukken, die bij bepaalde technische waterstaatsproblemen optreden. Deze vraagstukken staan dan steeds in nauw verband met de hydraulica c.q. hydrodynamica. In verband hiermede worden ook enkele opmerkingen gemaakt betreffende deze laatstgenoemde vakgebieden, resp. over de meer practische en de zuiver theoretische research op het gebied der waterbeweging.

Verder worden enkele voorbeelden genoemd van practische vraagstukken o.a. met betrekking tot de getijbeweging. Eén dier practische problemen wordt dan nader behandeld. Het wiskundige vraagstuk, dat hierbij optreedt, luidt als volgt:

Uitgaande van bepaalde gegevens van een rivier en zgn. randwaarden wordt gevraagd het verloop van de getijbeweging op die rivier te berekenen. Een dergelijke berekening werd voor het eerst uitgevoerd door de Staatscommissie Zuiderzee, waarin Lorentz zitting had.

Het verloop van de getijbeweging wordt beheerscht door twee partieele differentiaalvergelijkingen, namelijk de bewegingsvergelijking:

$$(1) \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{g b h'}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{s|s|}{C^2 b^2 h'^3}$$

en de continuïteitsvergelijking:

$$(2) \qquad \frac{\partial s}{\partial x} = -B\frac{\partial h}{\partial t}$$

De bewegingsvergelijking is niet lineair, de continuïteitsvergelijking wel.

h = hoogte waterspiegel boven een nulvlak,
s = totale stroom door een dwarsprofiel van de rivier,
x = afstand langs de geulas,
t = tijd,
b = stroombreedte van de rivier,
h'= waterdiepte,
B = kombergingsbreedte = totale breedte van de rivier ter hoogte van de waterspiegel.

Dan zijn b, h' en B functies van x en t.

C = constante van Eytelwein.

Het doel is de berekening van de voortplanting op een rivier van het sinusoïdale getij M_2, dat de belangrijkste componente van de getijgolf is, die op zee wordt opgewekt door de aantrekkingskracht van de maan op de watermassa. Dit is dan globaal uitgedrukt. Een getijlijn - ze geeft de verandering van de hoogte van de waterspiegel aan - verloopt periodiek met een gemiddelde periode van 12 uur 25 min. Ze kan door een Fourierreeks voorgesteld worden, waarvan het M_2 getij de hoofdterm voorstelt, terwijl het M_4 getij dan in belangrijkheid volgt; ze heeft de dubbele frequentie van het M_2 getij.

Zooals in de voordracht zal worden aangetoond, impliceert het voorgaande dat de differentiaalvergelijkingen, waaruit de voortplanting van het M_2 getij bepaald kan worden, en die uit (1) en (2) moeten worden afgeleid, lineair zullen zijn. Het is de vraag, hoe dit moet geschieden. Lorentz gaf een physisch antwoord: de totale arbeid verricht door het M_2 getij, volgens de lineaire wrijvingskracht $\rho a v \left(v = \frac{s}{b h'}\right)$ moet gelijk zijn aan die verricht door de werkelijke wrijvingskracht $\frac{\rho v^2}{C^2 h'}$ (h' = diepte, wordt dan als constant beschouwd; ρ = dichtheid van het water). Uit deze voorwaarde is dan de constante a te bepalen.

Mazure daarentegen stelde een mathematisch antwoord op: de niet lineaire termen in (1) (h' werd dan wel als variabel aangenomen) moeten in een Fourierreeks ontwikkeld worden, zoo wordt bijvoorbeeld gesteld:

$$s|s| = |S+\sigma|(S+\sigma) = m_0 S_0^2 + m_1 S_0^2 \cos(nt-\varphi) + m_2 S_0^2 \cos 2(nt-\varphi) \quad \text{etc.}$$

Dan is

S = opperwaterafvoer,

$\sigma = \sigma_0 \cos(nt-\varphi)$, stroom van het M_2 getij ($n = 1{,}405.10^{-4}$),

$S_0 = \sigma_0$ als $S < \sigma_0$ en $S_0 = S$ als $S > \sigma_0$.

De grootheden m_0, m_1 en m_2 zijn nader te bepalen functies van σ_0 en S. Indien $S = 0$ en h' constant is wordt voor m_1 de waarde $\frac{8}{3\pi}$ gevonden, in overeenstemming met de waarde volgens Lorentz.

De mathematische methode van Mazure verdient de voorkeur vanwege haar grootere mogelijkheden

De differentiaalvergelijkingen van het M_2 getij worden dan als volgt afgeleid.

In (1) en (2) wordt gesubstitueerd:

$$s = S + \sigma \qquad h' = h'_m + \eta \qquad h = H + \eta$$

Dan zijn S en σ hiervoren gedefinieerd.

b_m en h'_m zijn de gemiddelde waarden gedurende het getij van b en h'.

η = verheffing van de waterspiegel ten opzichte van haar gemiddelde stand, als gevolg van het M_2 getij.

$\eta = \eta_0(x) \cos(nt - k(x))$

H = gemiddelde hoogte van de waterspiegel ten opzichte van een vast nulvlak.

Daarna worden de verschillende termen van (1) door Fourierreeksen voorgesteld, zooals reeds hiervoren vermeld is. Tenslotte zijn de differentiaalvergelijkingen van het M_2 getij op te stellen:

(3) $$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{g\, b_m\, h'_m} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - m_1 \frac{\gamma^x}{\sigma_0} + X m_0 \gamma^x \eta \qquad \gamma^x = \frac{S_0^2}{C^2 b_m^2 h'^3_m}$$

(4) $$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -b \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

X is een zekere grootheid, alleen afhankelijk van de gemiddelde diepte, namelijk bij benadering gelijk aan $\frac{3}{h'_m}$.

S_0 is hierboven gedefinieerd.

Indien nu twee randwaarden gegeven zijn, dus bijvoorbeeld $\eta_0(a), k(a)$ en $\eta_0(b), k(b)$ is het verloop van η en σ met behulp van complexe functies te berekenen. Dan moeten voor de bepaling van m_0 en m_1 voorloopige waarden van $\frac{\sigma_0}{S}$ geschat worden.

Moeten echter voor een bepaald rivierenstelsel vele verschillende gevallen worden berekend, dan kan het van voordeel zijn een geheel reëele oplossing voor (3) en (4) te kiezen, doordat dan gemakkelijker gebruik gemaakt kan worden van bijzondere eigenschappen, die bepaalde grootheden van de getijbeweging bezitten.

Uit (3) en (4) zijn namelijk de niet partieele differentiaalvergelijkingen af te leiden:

$$\frac{d\eta_0}{dx} = -A\eta_0 + \bar{B}$$

$$(5) \qquad \eta_0 \frac{d(\varphi - k)}{dx} = -D\eta_0^2 + F$$

$$\frac{dS_e}{dx} = -Bn\left[\sin(k-\varphi)\right]\eta_0 .$$

A, $\bar{B}$, D en F zijn dan functies van $\frac{S_e}{S}$ en $(k-\varphi)$, die hier niet verder worden opgegeven en voor ieder riviervak grafisch kunnen worden voorgesteld. Nu zijn $(k-\varphi)$ en η_0 grootheden, die op een riviervak langzaam veranderen in vergelijking met bijvoorbeeld $\frac{S_e}{S}$. Van deze feiten kan men dan bij de bepaling van de voortplanting van het M_2 getij gebruik maken.

Het hiervoren genoemde is een voorbeeld van een der doeleinden van de toegepaste wiskunde om bij de oplossing gebruik te maken van bepaalde eigenschappen der onbekenden, waarvan men op de een of andere wijze kennis heeft gekregen.

Een oplossingsmethode van differentiaalvergelijkingen, die tegenwoordig in de praktijk met succes toegepast wordt, is de zgn. iteratiemethode. Indien hiervoor nog tijd beschikbaar is, wordt deze methode gedemonstreerd aan de hand van de differentiaalvergelijkingen (1) en (2).

Publicatie. Circulatie

na circulatie t/ Prof v.d. Corput

ms. 1024.

WISKUNDE EN RADIOPROBLEMEN x)

door

Balth. van der Pol

Mijnheer de Directeur van het Mathematisch Centrum,
Dames en Heren,

§1. Wat Wiskunde is weten wij hier allemaal, maar ~~de plaats van de~~ Radio zou ik nader willen definiëren. De Radio kan worden beschouwd als zijnde een onderdeel van de Electrotechniek, ~~het~~ welke zelf een onderdeel is van de Techniek in het algemeen.

Nu kan men de Techniek beschouwen als gerijpte Physica (met inbegrip van de Chemie), zodat wij vandaag zullen bezien de relaties:

Wiskunde ⟷ Physica ⟷ Techniek.

In mijn circa dertigjarige ervaring op researchgebied heeft mij steeds weer getroffen het feit dat de mathematicus eigenlijk een andere taal spreekt dan de physicus, en deze weer een taal die aanmerkelijk verschilt ~~met~~ van die van den technicus. Deze verschillende talen, die telkens door de andere groepen in het algemeen weinig worden begrepen, is -- zo komt het mij voor -- wel een van de oorzaken die een wederzijds begrip en waardering hebben belemmerd.

Er is dus een gaping tussen de Wiskunde en de Natuurkunde enerzijds en tussen de Natuurkunde en de Techniek anderzijds; en, aangezien de Techniek in geen andere relatie staat tot de Wiskunde dan via de Natuurkunde, zijn er twee gapingen tussen de Wiskunde en de Techniek.

Een gevolg hiervan demonstreert zich in een gezegde van mathematische zijde (dat aan Cailey wordt toegeschreven): " Besselfunctions are beautiful functions in spite of their many applications "; en evenzo lezen wij bij Landau in zijn Vorlesungen über Zahlentheorie (band I, pag.21) : "Die Zahlentheorie ist nützlich, weil man nämlich mit ihr promovieren kann." Ook in het, overigens boeiend geschreven, boekje van Hardy, "A mathematician's apology", bespeurt men een onderwaardering voor de toepassing van de Wiskunde in de Techniek.

---

x) Voordracht gehouden voor het Mathematisch Centrum te Amsterdam op 15 Maart 1947.

Maar aan de andere kant heb ik ook vaak van zuiver technische zijde uitingen vernomen, die van weinig begrip (en daardoor van weinig waardering) voor de Wiskunde getuigen. Gewoonlijk culmin~~eert~~eren dan ~~het~~ de argumenten in de vraag: "Wat heb je er aan?".

Een practische moeilijkheid bij dit alles is dat men een tolk nodig heeft tussen de Wiskunde en de Natuurkunde , en een andere tolk tussen de Natuurkunde en de Techniek. Maar het is bekend dat de uitoefening van het beroep van tolk veronderstelt dat men meer of min op de hoogte is van het onderwerp waarover men te vertalen heeft. Nu wil het geval dat er in het algemeen, helaas, niet zo heel veel van de twee bovengenoemde soorten tolken te vinden zijn.

Om enige pregnante voorbeelden te geven van de verschillende talen, die door genoemde groepen worden gebezigd, citeer ik U wat ik zeer recent van radiotechnische zijde hoorde: "Ik heb een C'tje over de lamp geschakeld om de van-achteren-naar-voren fluit er uit te halen", waarmee in mathematische taal werd bedoeld dat de niet-lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficienten, die het electrische gedrag van een bepaald versterkersysteem beschrijft, aanleiding gaf tot labiliteit, te danken aan een onbedoelde koppelingsterm; en dat deze labiliteit kon worden opgeheven door een bepaalde verandering in de coëfficienten, die correspondeerde met het aanbrengen van een condensator als extra schakelelement.

Maar dat, omgekeerd, ook de taal der mathematici soms voor den physicus, en ad fortiorem voor den technicus, zonder meer niet te begrijpen is, volgt wel uit een ander voorbeeld, dat ik kort geleden aantrof in het nieuwe werk van Graves, "Theory of functions of real variables" (New York 1946). Daar behandelt de schrijver (pag.168) van suiver mathematisch standpunt uit de vergelijking

$$\ddot{y} = - g \sin y ,$$

en hij merkt op dat deze vergelijking representatief is voor de beweging van een slinger met de eenheid van lengte. Uit zijn mathematische beschouwingen deduceert de schrijver dan de volgende regel:

$$M>0 . \varepsilon>0 : \supset : \exists \delta>0 \ni : |\eta'|<\delta . |x|<M . \supset . |y(x,0,\pi,\eta')-\pi|<\epsilon$$

Maar, ter nadere verduidelijking (misschien met wat tegenzin), voegt hij er aan toe : "This means that the pendulum will remain within an angular distance ϵ of the vertically upward position for M units of time, provided its initial velocity is sufficiently small ", een conclusie die de physicus, en zelfs de technicus, zonder meer, in simpele taal en zonder Mathesis, direct zou kunnen geven.

Een ander modern en pregnant voorbeeld van het taalverschil tussen physicus en mathematicus, dat zich ook uit in de notatie, vindt men bij het gebruik in de Physica van de deltafunctie van Dirac:

$$\delta(x).$$

De physicus zegt:" Dit is een functie met de eigenaardigheid dat zij overal nul is behalve in het punt $x = 0$, waar zij zodanig oneindig wordt dat haar oppervlak gelijk is aan de eenheid". De integraaleigenschap

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\,\delta(\xi)\,d\xi = f(x),$$

waarbij deze functie als het ware de waarde van een andere functie in een scherp bepaald punt van het integratieinterval (hier $\xi = 0$) uit deze integraal licht, voerde den physicus er toe deze functie $\delta(x)$ een pincetfunctie te noemen. De (strenge) mathematicus evenwel betoogt, en natuurlijk zeer terecht, dat er voor deze deltafunctie in zijn functiebegrip geen plaats is en ontkent daarmede het bestaan van deze deltafunctie; maar wèl schrijft de mathematicus met een gerust hart de volgende Stieltjes integraal op:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,d\,U(\xi) = f(x)$$

waarin

$$U(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0, \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0, \\ 0 & , \quad x > 0, \end{cases}$$

een functie derhalve die bij $x = 0$ een discontinuiteit vertoont.

Mijns inziens zijn dit niet anders dan twee schrijfwijzen voor hetzelfde begrip, waarbij wij toegeven dat, wanneer men eerst de impulsfunctie voorzichtig definiëert , b.v.als

$$\delta(x) = \lim_{x \to +0^\varepsilon} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

en men zorgvuldig de volgorde van de limietovergangen $\varepsilon \to +0$ en de integratie variabele in acht neemt, men aan alle redelijke eisen van strengheid volledig voldoet.

De verschillende talen die men spreekt brengen in het algemeen ook mee dat men van elkanders gebied weinig afweet. Zo denkt aan de ene kant de technicus dat de wiskundige in volledig overbodige abstracties zwemt, en aan de andere kant denkt soms de wiskundige dat de Techniek gerepresenteerd wordt door héél hoge transformatoren, waar je maar niet te dicht bij moet komen, want anders word je dood geslagen; en waar olie in zit, waar je maar vuile vingers van krijgt.

§ 2. Evenals het geval is voor de talen, is ook de instelling van den mathematicus zeer verschillend van die van den physicus of den technicus. Uit de aard van de zaak denkt de physicus(of technicus) meer concreet en is de mathematicus meer abstract ingesteld. De laatste zal er steeds op uit zijn z'n begrippen en stellingen verder en verder te generaliseren, onbekommerd om het feit of zijn symbolen of zijn begrippen ook concrete toepassingen hebben in Physica of Techniek. In deze geest moet men ook verstaan de uitlating van den mathematicus-philosoof Bertrand Russell, die ongeveer het volgende zei: "A mathematician is never so happy as when he does not know what he is talking about".

Daartegenover staat een uitlating van ~~Sir Ernest~~ Lord Rutherford, die, zelf niet mathematisch ingesteld, op een wiskundig probleem stuitende, schertsenderwijze zei: " Wij geven dit probleem aan een "tamed mathematician in a cage" ".

De meer concrete instelling van den physicus vergeleken met den mathematicus brengt mee dat de eerste veel meer grafisch denkt dan de laatste, en hiervan wil ik U enige typische voorbeelden geven. Het beroemde standaardwerk van Watson, "Besselfunctions", bevat 804 paginas. Bij het schrijven daarvan heeft hij zich verstout (ik herinner mij nog zeer goed dat hij 30 jaar geleden in Cambridge daaraan bezig was) met mechanische rekenmachines numerieke waarden van Besselfuncties te berekenen, die vastgelegd zijn in 90 paginas tabellen aan het eind van zijn boek. Echter treft men daarin geen enkele grafische voorstelling van ook maar één Besselfunctie aan. De enkele prentjes die er in staan betreffen contourintegraties.

Nog verder gaat Hobson in zijn 500 bladzijden tellende boek over "Spherical and Ellipsoidal Harmonics", waar geen enkele numerieke tabel te vinden is, laat staan grafieken van zijn functies.

Een laatste voorbeeld hiervan vindt men in de zeven dikke banden "Arithmetik, Algebra und Analysis" van de Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, die tezamen 5000 paginas tellen. Afgezien van twee artikelen daarin over numerieke methoden en rekenmachines vinden wij op de overblijvende 4500 paginas slechts 25 figuren, hetwelk neerkomt op één figuur per 180 pag.

In scherpe tegenstelling daarmee staat het veel meer voor den physicus en technicus ~~gedachte~~ bedoelde boek van Jahnke & Emde, "Funktionentafeln", dat in zijn laatste editie niet alleen de in de physica en techniek meer gangbare functies behandelt, maar waarin men b.v. ook de zetafunctie van Riemann aantreft. Van al deze functies zijn twee-dimensionale grafieken te vinden of, wanneer 't drie variabelen betreft, de twee-dimensionale projecties van drie-dimensionale lichamen. De mathematicus zal hiertegen aanvoeren dat een twee-dimensionale grafiek van een functie slechts te geven is b.v. voor de reële waarden van het argument, maar verschillende grafieken zijn in Jahnke-Emde te vinden waarbij doormiddel van contourlijnen de modulus wordt voorgesteld van de functie met complexe argumenten. Ontegenzeggelijk spreken dergelijke voorstellingen veel meer tot den natuurkundige dan tot den wiskundige, ofschoon veelal de laatste (al geeft men dit niet altijd volmondig toe) een grafische voorstelling appreciëert om haar grote heuristische waarde; voorbeelden: Felix Klein, en meer recent, de getallentheoreticus Viggo Brun.

Ik zou nu nog iets willen zeggen over ~~het~~ de door Landau ingevoerde O en o symbolen. U weet dat $f(x) = O(x^{\lambda})$ voor $x \to \infty$ betekent:

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \left| \frac{f(x)}{x^{\lambda}} \right| < A,$$

waarin A een constante is. En aan de andere kant dat $f(x) = o(x^{\lambda})$ een korte schrijfwijze is voor

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{f(x)}{x^{\lambda}} \right| = 0$$

Vooral Titchmarsh, bijvoorbeeld in zijn beschouwingen over de zetafunctie van Riemann, maakt van deze symbolen steeds een uitvoerig gebruik. Deze zetafunctie wordt als volgt gedefiniëerd:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

welke Dirichlet reeks slechts convergeert voor Re $s > 1$, zodat deze reeks de functie voorstelt in het gearceerde deel van fig.1.

Fig.1

De zetafunctie kan echter over het gehele complexe vlak analytisch worden voortge- en men kan daarbij aantonen dat zij een pool bezit by $s = 1$ en nulpunten bij $s = -2, -4, -6, \ldots$, maar Riemann vermoedde in 1857 dat alle andere (z.g. niet-triviale) nulpunten op de lijn Re $s = \frac{1}{2}$ zijn gelegen (zie fig.1), welke beroemde veronderstelling tot op heden nooit bewezen is of nooit als onjuist kon worden aangetoond.

Kort voor de oorlog heeft Titchmarsh zich verwaardigd tot een poging om eenvoudig numeriek zoveel nulpunten als doenlijk was te berekenen. Hij vond deze alle inderdaad op de lijn Re $s=\frac{1}{2}$. Wanneer men echter zijn artikelen hierover naleest wordt men getroffen door het feit dat hij wel met Landau's O en o notaties begint, maar deze al spoedig terwille van de numerieke berekening moet laten varen. Dit is waarschijnlijk één van de redenen waarom de physicus bij verre na niet zo vertrouwd is met de genoemde Landau-symbolen als de mathematicus.

§ 3. Ofschoon in de latere jaren de Wiskunde, de Natuurkunde en de Techniek veelal hun eigen weg zijn gegaan, is het toch interessant op te merken hoe deze wetenschappen elkaar in de loop der tijd hebben gestimuleerd en bevrucht. Soms zi men hoe de theorie tot het experiment leidt en vaak ook hoe het experiment aanleiding is tot het opzetten van nieuwe theoretische beschouwinge n. Zonder daarbij ook maar enigszins volledig te zijn wil ik enkele typische gevallen memoreren.

Men weet hoe Faraday, geheel alleen werkende in de Royal Institution (Albemarble Street, London), de grondslagen van de electriciteitsleer ~~ontw~~ heeft ontwikkeld, met als bekroning de beroemde inductiewet van Faraday. Hoogstmerkwaardig is het feit dat hij daarbij volledig experimenteel te werk ging en al zijn resultaten, gevisualiseerd in de drie-dimensionale ruimte, als niet-mathematicus, zonder enige formule weergaf. Toen is Maxwell gekomen, die Faraday's ideeën in wiskundige taal overzette, voorlopig echter zonder gebruikmaking van de vectornotatie, die voor de electriciteitsleer pas later, door Heaviside en Lorentz, werd ingevoerd.

Ik mag dus niet zeggen dat Faraday zijn resultaten voor de electrische en magnetische kracht in de vrije aether weergaf in de gesloten mathematische vorm

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{1}{c}\, H',$$

$$\mathrm{rot}\, H = \frac{1}{c}\, E',$$

$$(\mathrm{div}\, E = \mathrm{div}\, H = 0)$$

maar wel meen ik dat Faraday de relaties door elk van deze vergelijkingen uitgedrukt ruimtelijk doorzag en in woorden kon interpreteren. Maar eerst toen Maxwell de ~~Faraday's~~ diepere inzichten van Faraday ~~in~~ deze mathematische taal had geschreven, was het mogelijk langs zuiver mathematische weg één van de variabelen, E of
e elimineren, waardoor plotseling bleek dat de vector E, en ook de vector
eder voor zich, aan de golfvergelijking

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\ddot{u}$$

voldoet.

Ongetwijfeld gaat het boven het menselijk kunnen uit om dit eliminatieproces zonder mathematische symbolen te ~~ve~~ verwezenlijken, ofschoon dit natuurlijk in principe mogelijk zou moeten zijn.

Aldus kon Maxwell besluiten tot het bestaan van electromagnetische golven; het bereiken van dit resultaat zonder de wiskundige symbolen zou practisch tot de menselijke onmogelijkheden hebben behoord.

Treffend in dit verband is een brief van Faraday aan Maxwell van 1857, waaruit ik het volgende aanhaal: "There is one thing I would be glad to ask you. When a mathematician engaged in investigating physical actions and results has arrived at his conclusions, may they not be expressed in common language as fully, clearly, and definitely as in mathematical formulae? If so, would it not be a great boon to such as I to express them so? - translating them out of their hieroglyphics, that we also might work upon them by experiment. I think it must be so, because I have always found that you could convey to me a perfectly clear idea of your conclusions, which, though they may give me no full understanding of the steps of your process, give me the results neither above nor below the truth, and so clear in character that I can think and work for them. If this be possible, would it not be a good thing if mathematicians, working on these subjects, were to give us the results in this popular, useful, working state, as well as in that which is their own and proper to them?".

De hierin uitgesproken gedachten zijn heden nog even actueel als in 1857.

Het heeft toen geduurd tot 1886 alvorens Heinrich Hertz, gestimuleerd o.a. door een op de Maxwell-theorie gebaseerde prijsvraag van Von Helmholtz, deze electromagnetische golven in het laboratorium verwezenlijkte. U weet allen dat hieruit de draadloze telegrafie en telefonie zijn geboren, maar misschien is het minder bekend dat Hertz slechts enkele weken vóór hij de electromagnetische golven vond, het fotoelectrische effect ontdekte, dat de basis is van de huidige televisie.

Een ander voorbeeld waar de Physica (of Astronomie) de Mathesis bevruchtte is te vinden in een verhandeling van Laplace (1789) over de ring van Saturnus, waar het eerst de potentiaalvergelijking voorkomt: $\Delta u = 0$. Het is bekend hoe deze vergelijking, eventueel uitgebreid tot meer dimensies en geschreven in andere dan rechthoekige coördinaten, de bron is geweest voor een studie van allerlei wiskundige functies met zeer interessante eigenschappen. Wanneer men in deze vergelijking , uitgebreid tot meer dimensies, u periodiek neemt in één der onafhankelijke variabelen, leidt zij tot de golfvergelijking

$$(\Delta + k^2)u = 0$$

waaruit tevens een grote verzameling van functies is ontsproten. Het komt ons voor dan ook aanbevelingswaardig niet b.v. de Besselfuncties of de Bolfuncties ieder voor zich te bestuderen, maar beide te laten vallen uit deze golfvergelijking, waardoor het onderlinge verband, dat in essentie op een Fouriertransformatie neerkomt, met dwingende noodzakelijkheid naar voren komt.

Een ander voorbeeld van het nauwe samengaan van experiment en theorie vindt men bij de ontdekking van het Zeemaneffect, waarvan Lorentz onmiddellijk na het experiment van Zeeman een theoretische interpretatie kon geven, zodat de Nobelprijs gemeenschappelijk aan deze twee Nederlanders werd toegekend.

Als tegenvoorbeeld is het interessant op te merken dat Riemann's nieteuclidische meetkunde in abstracto geheel gereed lag toen Albert Einstein, voortbouwende op Lorentz' speciale relativiteitstheorie, zijn algemene relativiteitstheorie opzette, zodat hij de bouwstenen gaaf en persaat klaar vond voor zijn gebouw; en even gelukkig was Schrödinger, die zijn golfmechanische beschouwingen kristalliseerde in de naar hem genoemde Schrödingervergelijking, waarvoor hij al het voorwerk wat betreft de theorie der eigenfuncties en eigenwaarden bij randwaardeproblemen volledig uitgewerkt ter beschikking vond door het werk van Courant en zijn school.

in dit verband

Tenslotte, zou ik nog willen wijzen op een technisch probleem, dat tot een zuiver algebraïsche stelling voerde. De turbineingenieur Stodola had bij zijn experimenten moeilijkheden met onverwachte labiliteiten, die tot trillingen voerden, waarop hij den mathematicus Hurwitz vroeg (in wiskundige termen geformuleerd): Aan welke voorwaarden moeten de coëfficienten in de nde-machtsvergelijking

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

voldoen, opdat van alle wortels het reële deel negatief is?

Hurwitz' antwoord op deze technische vraag luidde, dat alle determinanten D_k daartoe positief moesten zijn (k=1, 2, ...,n),waarbij

$$D_1 = a_1 \text{ ,}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} ,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & & & \dots & a_n \end{vmatrix} \qquad (a_s = 0 \text{ voor } s > n) \, .$$

Dit stabiliteitscriterium wordt in de moderne radiotechniek niet zelden toegepast.

§ 4. Ik zou nu nog een ogenblik Uw aandacht willen vragen voor de toepassing van de Wiskunde in het bedrijfsleven. Bij dit laatste dient men te onderschei a) de fabriek, die voor de productie zorgt welke verkocht kan worden; hierachter staat b) het fabriekslaboratorium, waar de "development" of de ontwikkel van de producten, dat zijn de dingen uit ideeën plaats vindt, welke ideeën ontwikkeld worden door c) het wederom daar achter staande "Research Laboratory" of onderzoekingslaboratorium. Ik kan het dan ook geheel eens zijn met de uitspraak die ik eens in Sydney op een voordracht vernam: "The output of a Research Laboratory should be thoughts rather than things".

Het gebruik van de Wiskunde in de fabriek, het fabriekslaboratorium en het Research Laboratory is dan ook zeer uiteenlopend. Immers de Wiskunde van de productieingenieur bepaalt zich gewoonlijk tot optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (waarbij hij dan moet oppassen voor delen door nul).

De developmentingenieur gebruikt wat meer wiskunde, vaak in de vorm van kl formules -- b.v. voor de zelfinductie van een spoel -- waarbij hij dan moet oppassen (want ook hij moet voorzichtig zijn) dat hij in zijn practische uitwerkingen de goede eenheden gebruikt. Maar ook op een ander gebied kan hij zich vergaloperen. Immers de formules die hij gebruikt zijn vaak klaar gemaakt in een vorm die hij met een rekenlat de baas kan, want deze mogen b.v. niet bevatten mathematische functies zoals elliptische integralen, daar hij gewoonlijk geen t

, en nog vaker geen lust, heeft om dergelijke abstracte zaken te bestuderen. Nu wil het ongeluk, dat bij de benaderingsformules, waarmee hij dus veelal werkt, de condities waar onder de approximaties zijn afgeleid, niet worden weergegeven, zodat hij de kans loopt buiten het geldigheidsgebied van zijn formules terecht te komen, waarmede de zaak ook weer hopeloos in de war kan lopen.

Een typische instelling van een zekere developmentingenieur (niet in Nedreland) ten opzichte van de Wiskunde bleek mij eens toen deze mij vertelde dat hij op zijn bureau een houten lineaaltje had liggen met twee merktekens er op. Wanneer er nu een van zijn ondergeschikten met een theoretisch resultaat bij hem kwam, dan had hij de gewoonte om met zijn lineaaltje te proberen of de voorgelegde formule tussen de merktekens bleef. Was dit niet het geval dan zond hij den man terug om zijn formules eerst nog wat te vereenvoudigen.

Een recent voorbeeld uit delaatste ontwikkeling van de radiotechniek van het gebruik van de wiskundige theorie vindt men in het nieuwe omroepsysteem, dat in tegenstelling tot het oudere amplitudemodulatie systeem, ~~het oudere,~~ als frequentiemodulatie wordt aangeduid. Men weet dat in het oude systeem de amplitude van de uitgezonden electromagnetische golf een lineaire functie gemaakt wordt van de ogenblikkelijke geluidsdruk voor de microfoon, terwijl alles er op wordt gezet dat de nuldoorgangen daarbij niet worden beinvloed.

Bij frequentiemodulatie is het juist omgekeerd. Daarbij wordt de amplitude van de uitgezonden golven rigoreus constant gehouden, doch de over een zekere tijd gemiddelde dichtheid van de nulpunten wordt lineair gevarieerd met bovengenoemde geluidsdruk op de microfoon. Het ongeluk wil nu, dat alle formules die de ingenieur of physicus zo netjes heeft geleerd aan de Hogeschool of de Universiteit, voor de behandeling van gewone wisselstroomproblemen met een zuiver periodiek, (door $e^{i\omega t}$ weergegeven) tweede lid in zijn lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten, en waaruit hij de begrippen complexe impedantie en admittantie pas ~~met~~ na veel moeite had bemeesterd, plotseling bij frequentiemodulatie van alle practische toepassingen ontbloot zij Hij moet dus nu weer helemaal opnieuw beginnen en niet daar waar hij zijn studie had beeindigd, maar juist op de plaats waar deze begonnen was. D.w.z. de hele theorie moet opnieuw worden opgebouwd, vanuit de oorspronkelijke differentiaalvergelijkingen; en alle theoretische regels, plus een groot deel van de practische regels, die hem bij amplitudemodulatie zulke grote diensten bewezen (en waarbij hij er nooit meer over nadacht om nog eens de differentiaalvergelijking op te schrijven) zijn overbodig geworden [x]). Zo ergens dan geldt ~~ook~~ wel h

x) F.L.H.M.Stumpers, Eenige onderzoekingen over trillingen met frequentie modulatie, Diss. Delft, 1946.

het wijze woord van Boltzmann: "Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie".

Een andere recente radioontwikkeling, die een uitermate grote rol in de oorlog heeft gespeeld, is de ~~Radar~~ RADAR (RAdio Direction And Range). Daarbij worden voor de tijd van een millioenste seconde radiogolven met een golflengte van enige cm uitgezonden, waarbij antennes worden gebruikt die even als een zoeklicht scherp gebundelde stralen uitzenden. Zo'n radiobundel wordt nu gericht, b.v. op een boven de wolken vliegend en dus onzichtbaar vijandelijk vliegtuig, dat een radioecho van de aankomende golven terugzendt naar de zender, terwijl de richting van ~~m~~ maximale reflectie de richting van het vliegtuig aangeeft; verder is het tijdsverloop tussen uitzending en ontvangen echo direct een maat voor de afstand, waarmee dus de ruimtelijke positie van het vliegtuig bekend is.

De techniek van deze Radar moest in de oorlog in de kortst mogelijke tijd worden ontwikkeld. Men heeft daartoe in Cambridge (Mass.) het Radiation Laboratory ingericht, waarin een duizendtal mathematici, physici en technici werkten. Men vertelde mij aldaar dat de verhouding van het aantal theoretici tot het aantal experimentatoren oorspronkelijk 1:25 was. De directeur, Dr Rabi, had zich echter uitgelaten dat, als hij dit nog eens moest ondernemen, hij die verhouding 1:4 zou kiezen. Wel een indicatie hoe de oorlog er toe heeft meegewerkt de waardering (ook in regerings- en andere kringen) voor den theoreticus zeer te doen stijgen.

In hetzelfde Cambridge werkte ook Prof. Van Vleck, die op theoretische gronden had voorspeld dat waterdamp in de atmosfeer voor electromagnetische golven een selectieve absorptie zou veroorzaken voor golven van $\lambda = 1.3$ cm, en dat de zuurstof zo'n absorptieband zou vertonen bij $\lambda = 0.8$ cm, hetgeen later experimenteel volkomen bevestigd werd gevonden. Ook om laag invliegende vliegtuigen op zo groot mogelijke afstand met Radar te kunnen "zien", werd de golflengte steeds meer en meer verkleind, maar, zo vertelde mij Prof. Van Vleck, in het vijandelijke kamp verwachtte men abusievelijk een resonantiefrequentie voor $\lambda \simeq 10$ cm. Deze foutieve conclusie heeft, volgens Prof. Van Vleck, een voor de Radarontwikkeling in Duitsland zeer funeste invloed gehad.

Ook aan het onderzoekingswerk van de atoombom, dat onder leiding stond van den theoreticus Oppenheimer, werkten vele theoretici mee, en in de leidende kringen, zo vernam ik, was de verhouding van aantallen theoretici en experimentatoren als 1 : 1.

§ 5. ~~Tenslotte~~ Vervolgens zou ik nog het een en ander willen zeggen over de toepassing van specifieke onderdelen van de Wiskunde in de Techniek in het algemeen en in de Radiotechniek in het bijzonder.

Wanneer een physisch probleem moet worden ~~ungeknmt~~ uitgewerkt, komen de eerste gegevens soms van den experimentator, die de resultaten van zijn metingen in natuurkundige termen weergeeft (eerste stadium). Bij het tweede stadium moeten daarbij de physische meetresultaten in mathematische taal worden vertaald, waar toe ~~ook~~ de wiskundige, door zijn onvoldoende physische kennis, gewoonlijk niet in staat is maar waarin de physicus, als hij wat theoretisch is aangelegd, wel slaagt. Het derde stadium is dan de oplossing van het mathematische probleem. Dit kunnen ze gewoonlijk geen van beiden, omdat veelal het wiskundige probleem in zijn algemeenheid daarvoor te moeilijk is. Dan moet men trachten (vierde stadium) uit de in het probleem gestopte variabelen zo vele als mogelijk te verwaarlozen zonder dat de essentie van het gezochte effect verloren gaat. Dit is een kwestie van een goede neus hebben, zoals zo vaak voorkomt, zowel in de Wetenschap als in de Techniek. Eerst als het mathematische probleem, aldus ontdaan van alle niet essentiële elementen, tot zijn eenvoudigste vorm is teruggebracht, is er een kleine kans dat de oplossing daarvan iets waardevols representeert.

Bij deze behandelingswijze doet zich een wiskundige kwestie voor waaraan, zover wij kunnen nagaan, tot nog toe in haar algemeenheid niet veel mathematische aandacht is geschonken; en wel aan het gevolg van het ignoreren van termen of parameters van differentiaalvergelijkingen voor de oplossing, speciaal wat de oplossing betreft voor grote waarden van de onafhankelijk variabele, het geheel als aanvangsprobleem beschouwd.

Een andere, niet zelden verwaarloosde, gave die de wiskundige den physicus schenkt, ~~is aangaande~~ betreft de tweede wortel uit een kwadratische vergelijking, terwijl de physicus gewoon is zijn redeneringen op de ene wortel te baseren. Het leidt natuurlijk geen twijfel dat een juiste invoering van zo'n tweede wortel niet alleen het mathematische maar ook het physische inzicht én verdiept én verscherpt.

Verder spreekt het voor den wiskundige haast vanzelf dat, wanneer een mathematische uitdrukking voor physische verschijnselen polen vertoont, de eerste vraag van den natuurkundige moet zijn wat deze polen physisch betekenen, een vraag die, wij hebben er ervaring van, in physische kringen soms achterwege wordt gelaten.

Wat speciaal de Radiotechniek betreft kan men zeggen, dat, afgezien van gewone drie-dimensionale beschouwingen en een enkele maal ook n-dimensionale problemen en de hogere geometrie een rol spelen. Zoo duit men soms op topologische kwesties, in verband met de algemene netwerktheorie [x]).

x) Cf. B.D.H. Tellegen, Meetkundige configuraties en dualiteit van electrische netwerken, Tijdschr. Ned. Radiogenootschap 9, 37-40, 1941.

Ook komt het voor in deze theorie (speciaal wat de vierpolen betreft) dat een niet-euclidische behandeling een zekere mate van vereenvoudiging geeft [xx]).

xx) J. van Slooten, Meetkundige beschouwingen in verband met de theorie der electrische vierpolen, Diss. Delft, 1946.

Ten slotte zou men de voortplanting van golven door de ionospheer bij inachtneming van het aardmagnetische veld, kunnen interpreteren met behulp van niet-Riemannsche metkunde.

Zoals reeds gezegd, is de belangstelling voor de eigenschappen van speciale functies vaak groter bij de physici en technici dan bij de mathematici. Of dit de oorzaak is dat het prachtige boek over "Modern Analysis" van Whittaker & Watson hier te lande in physische- en technische kringen veel meer bekend is dan bij de mathematici, durf ik niet te zeggen, maar het feit zelf lijdt geen twijfel.

Verder brengt het werk van serieuze radioonderzoekers mee, dat zij geregeld te doen hebben met de theorie van de complexe functies, en dit zowel wanneer het betreft lineaire netwerken als potentiaaltheorie, of ook op andere gebieden. Voorts zal de radioonderzoeker vaak in zijn werk gebruik maken van Besselfuncties en Bolfuncties, maar ook Mathieufuncties (en Laméfuncties) doen zich voor. Zo is de gehele moderne theorie van frequentiemodulatie, waarover ik U reeds sprak, nauw verwant met de theorie der Mathieufuncties.

Ook zou men misschien niet vermoeden dat tegenwoordig bij enkele radioproblemen (en mogelijke technische ontwikkelingen daarvan), niet aan de oppervlakte liggende ideeën van de getallentheorie (n'importe de reeds aangehaalde uitspraak van Landau) om de hoek komen kijken.

Dat verder de thetafuncties van Jacobi met voordeel gebruikt kunnen worden bij kwesties betreffende kristalstructuren zal de ingewijde niet verwonderen.

Het spreekt nog vanzelf dat de golfvergelijking:

$$(\Delta + k^2)u = 0$$

fundamenteel is voor alle kwesties die de voortplanting van periodieke electromagnetische golven betreffen. Deze tak van de Wiskunde, die a.h.w. de radiozender met de radioontvanger verbindt, is veel meer fundamenteel voor de radiotechniek dan zelfs in radiotechnische kringen vaak wordt vermoed. Zo werd zeer recent een poging gedaan om een nieuw omroepgolfplan voor lange- en midden golven voor geheel Europa ter verbetering van de door de oorlog chaotisch geworden omroepcondities op te stellen. Daarbij werd uitvoerig gebruik gemaakt van het volgende wiskundige probleem:
Gevraagd wordt de golfvergelijking op te lossen voor de voortplanting van golven om een bol (aarde) van gegeven diëlectrische constante ε en geleidingsvermogen σ, waarbij aan de bekende Maxwellse randvoorwaarden aan de oppervlakte van die bol wordt voldaan. Verder dient de oplossing een singulariteit te bezitten, die zich gedraagt als $1/r$ in een punt buiten de bol op een hoogte h_1 (plaats van de zender). Wanneer dit probleem in zijn algemeenheid is opgelost is men dus in staat het veld van een zender te berekenen op een willekeurige andere plaats, op hoekafstand θ en hoogte h_2 boven het aardoppervlak. In dit probleem kan de atmosfeer al of niet homogeen worden aangenomen. Reeds het eenvoudige geval van een homogene atmosfeer leidt tot een oneindige reeks van Bolfuncties, in iedere term waarvan een coëfficient voorkomt die, goed geteld, acht Besselfuncties bevat x):

x) Balth. van der Pol & H.Bremmer, Phil.Mag. 24, 141, 1937.

$$\Pi_{tot} = \frac{e^{ik_1R_1}}{ik_1R_1} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, R_n \frac{\psi_n(k_1a)}{\zeta_n^{(1)}(k_1a)} \zeta_n^{(1)}(k_1b)\, \zeta_n^{(1)}(k_1r)\, P_n(\cos\theta),$$

$$r > a$$

waarin

$$\zeta_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{n+1/2}^{(1,2)}(x),$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$R_n = \frac{-\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\log\{x\psi_n(x)\}\right]_{x=k_1a} + \left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\log\{x\psi_n(x)\}\right]_{x=k_2a}}{\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\log\{x\zeta_n^{(1)}(x)\}\right]_{x=k_1a} - \left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\log\{x\psi_n(x)\}\right]_{x=k_2a}}$$

r en θ bolcoördinaten, a = aardstraal, $k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, $k_2^2 = \frac{\varepsilon_2\omega^2 + i\sigma_2\omega}{c^2}$

$H^{(1,2)}_{n+\frac{1}{2}}$ = Hankelfuncties, $J_{n+\frac{1}{2}}$ = Besselfuncties, P_n = Legendre polynoom.

De bovenstaande reeks blijkt nu te oscilleren, zodat de opvolgende termen elkaar ongeveer compenseren. De grootste bijdrage is gelegen bij de termen waarvan de orde~~n~~ gelijk is aan de verhouding van de omtrek van de bol tot de gebruikte golflengte, ~~h~~welke verhouding voor alle practische radioproblemen natuurlijk een zeer groot getal is.

Men is er in geslaagd deze reeks met voor de practijk ruim voldoende benadering numeriek te beheersen, zodat voor dit technische probleem grafieken konden worden gemaakt, die ten grondslag werden gelegd aan genoemd Europees omroepgolfplan.

Van belang is het hierbij op te merken dat bij de uitwerking van ~~het~~ bovengenoemd theoretische probleem en passant een nieuwe theorie van de regenboog werd gevonden, want ook daarbij vallen electromagnetische golven (zonlicht) op bolletjes (regendruppels), waarbij eveneens de omtrek van de bolletjes groot is ten opzichte van de golflengte. Enkele nieuwe polarisatieverschijnselen van de regenboog, die deze theorie opleverde, konden daarop optisch experimenteel worden geverifiëerd.

Niet zelden komt het voor dat, wanneer eenmaal een "~~link~~ schakel" tussen een bepaald onderdeel der Wiskunde en de Natuurkunde of de Techniek is gevonden, men reeds bestaand abstract mathematisch werk direct in physische of technische termen kan vertalen. Eén, overigens niet belangrijk, voorbeeld hiervan trof mij enige tijd geleden in Perron's boek "Kettenbrüche", waar ~~hij~~ de schrijver lineaire transformaties behandelt van de elementen van een kettingbreuk die de waarde van de breuk invariant laten. Deze transformaties zijn, wanneer de kettingbreuk geinterpreteerd wordt als een electrische "Kettingleider" (dit is een één-dimensionale aaneenschakeling van electrische netwerken), direct vertaalbaar als de bekende ster-driehoektransformatie van den electrotechnicus.

Een belangrijk mathematisch gebied verder, dat schier dagelijks bij dieper radioonderzoek naar voren komt, is de Laplacetransformatie, die b.v. in de vorm daaraan gegeven door Heaviside als operatorenrekening bij alle inschakelverschijnselen in lineaire netwerken tot verreweg de eenvoudigste rekenmethode leidt. Deze inschakelverschijnselen zijn in de loop van de jaren voor de electrotechniek steeds belangrijker geworden, en hun importantie nam nog extra toe met de komst van de televisie en culmineerde in de moderne theorie van de Radartechniek.

Maar niet alleen zijn het differentiaalvergelijkingen waarop de radioonderzoeker stuit; ook differentievergelijkingen en integraalvergelijkingen komen vaak voor. Zo werd het probleem van de straling van een eenvoudige cylindrische draad (de eenvoudigste antenne) door Hallén teruggebracht tot een integraalvergelijking ; en ofschoon van verschillende zijden ~~in~~ recent zeer veel werk is verricht om dit probleem op te lossen (d.w.z. de straling van een cylindrische antenne te berekenen) x), kan

x) Cf. C.J.Bouwkamp, Physica 's-Gravenhage 9 ,609-631,1942.

nog niet worden gezegd dat deze zeer fundamentele radiokwesties reeds volkomen worden beheerst.

Zoals zo vaak in andere technieken, wordt natuurlijk ook in de Radiotechniek veel van numerieke methoden gebruik gemaakt, waarbij tot nog toe mechanische rekenmachines belangrijk hebben geholpen.

Het ziet er naar uit dat de moderne electrische rekenmachines zoals die ~~in~~ gedurende de oorlog ontwikkeld zijn (men denke aan de ENIAC) in de toekomst ons zeer zullen helpen. Belangrijk is het om op te merken dat bij beschouwingen om deze machines zo te bouwen dat het aantal bewerkingen om een gegeven mathematisch resultaat te bereiken minimaal wordt, opnieuw de vraag is gerezen of het gangbare, door Simon Stevin zo gepropageerde, decimale systeem daarvoor het meeste geschikt is. Stemmen gaan daarbij op om naar ~~een~~ het tweetallig stelsel terug te keren. Ook Leibniz schijnt daarvan reeds gebruik te hebben gemaakt bij de vermenigvuldiging van twee grote getallen omdat het opschrijven van de partiele producten daarbij zo bijzonder eenvoudig is, aangezien bij in het tweetallig stelsel geschreven getallen slechts de cijfers 1 en 0 voorkomen.

Tenslotte zou ik Uw aandacht willen vragen voor de mathematische behandelingswijze van nog een ander radioprobleem: Hoe brengt een teruggekoppelde triode een eenvoudige electrische trillingskring tot oscilleren? Dit misschien meest fundamentele van alle moderne radioproblemen kon ik in 1920, afziende van alle nevenverschijnselen, ~~reduceren~~ kristalliseren tot de volgende, schijnbaar zo simpele, niet-lineaire gewone differentiaalvergelijking x)

$$\ddot{v} - \varepsilon(1-v^2)\dot{v} + v = 0$$

waarin de constante $\varepsilon > 0$ is, en de punten differentiatie naar de tijd betekenen, terwijl v niet anders is dan de spanning over de trillingskring.

x) Tijdschr. Ned. Radiogenootschap 1, 1-31, 1920.

Over deze zo eenvoudig ~~e~~ uitziende vergelijking is een uitgebreide litteratuur ontstaan (zeker van de orde van een honderd publicaties), waarbij vooral van Russische en Franse zijde, en later ook van Amerikaanse kant, zowel uit technisch-physische als mathematische kringen, belangrijke bijdragen zijn geleverd, ook voor het geval dat de vergelijking niet homogeen wordt genomen, doch een periodiek tweede lid bevat. Nog steeds is het niet gelukt de oplossing hiervan tot bekende functies terug te voeren x). De eigenschappen van de oplossingen zijn, zoals gedeeltelijk theoretisch en gedeeltelijk experimenteel kon worden aangetoond, zó interessant dat het inderdaad de moeite loonde hier onderzoekingen aan te wijden.

x) Cf. N.G. de Bruijn, Philips Res. Rep. 1, 401-406, 1946.

Sinds enige maanden is een voorloopige afsluiting op dit gebied verkregen door een zeer belangrijk onderzoek van Littlewood en Miss Cartwright xxx).

xxx) ~~Proc.~~ J. London Math. Soc. 20, 180-189, 1945

Historisch is het misschien van belang mede te delen dat deze vergelijking oorspronkelijk voor het genoemde technische probleem werd opgezet, waarbij ε klein werd verondersteld. Maar in 1926 hebben wij uit zuiver mathematische interesse ons afgevraagd, of deze vergelijking ook nog tot interessante resultaten voerde wanneer ε groot is, en toen volgde daaruit de theorie van de relaxatietrillingen, waarbij de periode van het periodieke verschijnsel niet meer gegeven wordt door $\sqrt{LC}$ (L = zelfinductie, C= capaciteit), maar door een typische relaxatietijd zoals RC (R=weerstand). Zoals fig.2 doet is in het laatste geval de oplossing verre van sinusvormig: ze bevat scherpe sprongen naar boven en naar beneden.

Fig 2

Het zou mij te ver in details voeren als ik op de consequenties van deze theorie nader inging. Alleen wil ik U kort noemen dat hieruit gekristalliseerd werd een nieuwe theorie van het menselijk-hartrhytme, met toepassingen op toendertijd nog onbekende arhytmiën, terwijl allerlei trillingsphenomenen zowel theoretisch als experimenteel konden worden voorzien die, toen de televisie kwam, daarin onmiddellijk aan alle zijden konden worden toegepast.

Met dit probleem zijn wij gekomen op het gebied der niet-lineaire differentiaalvergelijkingen dat, van zuiver mathematische zijde, vaak bijzonder grote moeilijkheden met zich brengt. Dit is juist de reden waarom dit gebied mijns inziens nog tal van effecten verborgen houdt die, juist omdat de theorie zo moeilijk is, lastig te voorzien zijn. De genoemde vergelijking is één van de eerste geweest die men met de Differential Analyzer van Bush grafisch heeft geïntegreerd, en het was interessant voor mij te vernemen dat men daarmede in Philadelphia thans practisch zo vertrouwd is dat men, omgekeerd, om te verifiëren of de Bushmachine geheel in orde is, deze vergelijking als standaardtest voor de machine gebruikt.

Dames, Heren,

Ik heb U een kort, en in menig opzicht onvolledig, exposé gegeven aangaande mijn visie over de relatie van de Wiskunde met de Natuurkunde, Techniek en Radio.

Zoals ik meermalen mocht naar voren brengen, is het feit dat de mathematicus, de physicus, de radioman, verschillende talen spreken, er mede de oorzaak van dat er minder wederzijdse waardering gevonden wordt bij deze drie groepen dan men misschien zou verwachten.

Ik achtte het daarom een zeer gelukkige gedachte dat het Mathematisch Centrum werd opgericht, dat niet alleen oog heeft voor de zuivere Wiskunde, maar ook voor toepassingen daarvan, en dat als zodanig de rol van tolk op zo noodzakelijke wijze op zich kan nemen.

Ik zou mij gelukkig prijzen wanneer mijn voordracht van hedenmiddag er toe heeft kunnen bijdragen de mathematici een blik te geven in de theoretische vraagstukken van de Radio, een gebied dat nog vol is met fraaie problemen die op een oplossing wachten, en waarbij, zoals ik U toonde, allerlei gebieden van de zuivere Wiskunde de helpende hand kunnen bieden.

Anderzijds kunnen de technische problemen, zoals reeds vaak geschiedt, nieuwe impulsen geven aan onze mooie wetenschap, de Wiskunde, waarvan de zuivere aesthetische zijde vaak nog lang niet genoeg wordt gewaardeerd.

Ik heb gezegd.

Eindhoven, Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken,
Eindhoven, Nederland.

VOORDRACHT GEHOUDEN DOOR PROF. F.A.VENING MEINESZ OP 22 MAART 1947.

over

Physica van de vaste aarde.

De geophysica heeft vele aanrakingspunten met de wiskunde, waaronder de volgende problemen een vooraanstaande plaats innemen:

1) Zwaartekracht en potentiaalveld ten gevolge van de zwaartekracht.

Het zeeoppervlak wordt, behoudens storingen van eb en vloed, atmospherische storingen en zeestromen, bepaald door een aequipotentiaalvlak. Dit aequipotentiaalvlak is de geoïde, die ongeveer, maar niet precies een omwentelingsellipsoïde is. Deze vorm is van belang voor de geodesie.

2) Magnetisch aardveld. Ook hier treden de problemen meestal op in de vorm van potentiaal-vraagstukken. Kosmische straling, poollicht e.d. zijn bijbehorende physische verschijnselen.

3) Seismische golven. De mathematische problemen zijn hier van andere aard, n.l. analyse van golfverschijnselen en voortplanting daarvan, waaruit conclusies te trekken zijn omtrent de opbouw van de aarde.

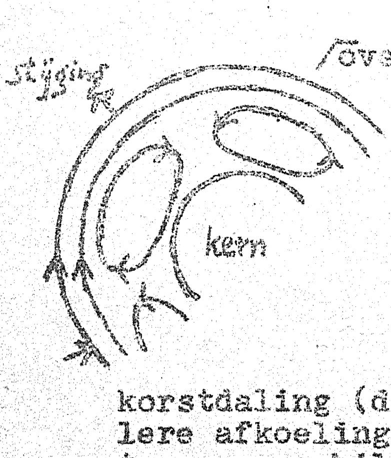
4) Warmtegeleiding. Gemeten grootheden: temperatuur aan het oppervlak en temperatuur-gradient naar de diepte. Deze gradient is niet overal dezelfde en is van belang voor de kennis van de opbouw van de aarde in de buitenste lagen. De radioactiviteit neemt naar de diepte sterk af. Een onopgelost probleem is het, of de aarde afkoelt, wat vermoedelijk wel het geval is. Deze onderzoekingen staan nog zeer in het begin.

Een belangrijk vermoeden is, dat er in de aarde tot op grote diepte (ongeveer 2900 km.) <u>convectiestromingen</u> van grote breedte (ongeveer 6000 km.) en een snelheid van enkele cm.(hoogstens 1 dm.) per jaar optreden. Zonder deze onderstelling is het moeilijk te begrijpen, waar de zeer grote in de aardkorst werkzame krachten vandaan komen, waardoor aardbevingen en plooivorming e.d. optreden en opgetreden zijn. De vroegere verklaring als afkoelingsverschijnsel is zeker niet acceptabel. Waarschijnlijk heeft men te doen met meesleuringseffecten van de aardkorst. Een ander effect zou bestaan in daling van de aardkorst op plaatsen waaronder grote convectiestroming plaats vindt, tengevolge van de daardoor optredende snellere afkoeling.

Slechts door mathematisch doorrekenen van deze hypothesen kan men tot een mening over de al of niet aanvaardbaarheid ervan komen.

In het algemeen zal men bij deze berekeningen van bolfuncties gebruik moeten maken.

<u>Convectiestromen</u>: Alle bekende verschijnselen wijzen erop, dat men de aarde moet beschouwen als een vloeibare bol van hoge temperatuur met een starre korst van 30 à 40 km. dikte, een daaronder gelegen laag van ongeveer 2900 km. diepte met een sterkte van 50 à 100 kg/cm^2 en een kern van hoog s.g., die geen transversale trillingen doorlaat. (Dit levert bij aardbevingen een schaduwverschijnsel, waardoor de grootte van de kern bepaald is). Door gelijkmatige afkoeling aan de buitenkant zou, ten gevolge van de sterkte, in het geheel geen stroming optreden. Bij ongelijkmatige afkoeling kunnen echter spanningen optreden, die de sterkte van 50 à 100 kg/cm^2 /overschrijden, zodat dan een convectiestroom optreedt, die, eenmaal begonnen, zichzelf versnelt tot ¼ slag is gemaakt, daarna zichzelf vertraagt en na ½ slag tot rust komt. Bij volle diepte en breedte van 6000 km ongeveer zou een dergelijke stroming ongeveer 60.000.000 jaar duren. Indien men dit beeld aanvaardt, kan men de periodieke gebergtevorming en tussenliggende rustperioden van ongeveer 100- à 160.000.000 jaar verklaren. Momenteel bevinden wij ons in een periode van gebergtevorming. Zware aardbevingen zijn reeds verklaarbaar door vrij ondiepe stromingen. Men kan de verdeling der continenten en oceanen in verband brengen met de diepe stromingen.



korstdaling (door snellere afkoeling; groter temp. verschil met de omgeving).

gebergtevorming door meesleuringseffect.

Bij de mathematische behandeling gaat men uit van de hydrodynamische vergelijkingen. Deze komen overeen met de elasticiteitsvergelijkingen, wanneer men voor de contractiecoëfficient van Poisson m = 2 neemt (het geval, waarin geen volumeverandering optreedt) en indien men in de laatste de elastische verplaatsingen vervangt door snelheden en de temperatuur door $\frac{\partial \theta}{\partial t}$.

Deze overgang van de elastische naar de hydrodynamische vergelijkingen is geoorloofd, aangezien de convectiestromen in ieder geval zo traag zijn, dat men de kwadratische termen mag verwaarlozen.

Een simpele oplossing van het mathematisch probleem is mogelijk onder de volgende voorwaarden:

$\theta = \theta_0(\rho) k_n$; ρ = voerstraal, k_n is bolfunctie van n^e orde.

$V_\rho = w_0(\rho) k_n$; V_ρ = snelheid in de richting van de voerstraal

$V_\delta = v_0(\rho) \frac{\partial k_n}{\partial \delta}$; V_δ = " " " " v.d. meridiaan.

$V_\lambda = \frac{v_0(\rho)}{\sin \delta} \frac{\partial k_n}{\partial \lambda}$; V_λ = " " " " v.d. paralelcirkel.

Onder deze voorwaarden (en m = 2) kan men de oorspronkelijke differentiaalvergelijkingen herleiden tot differentiaalvergelijkingen van 1 veranderlijke ieder, waarvan die, waarin ρ optreedt, de vorm heeft:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \rho^4} + \frac{8}{\rho} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \rho^3} - \frac{2(n^2+n-6)}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} - \frac{4n(n+1)}{\rho^3} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} + (n-1)n(n+1)(n+2)\frac{w_0}{\rho^4}$$

$$- \frac{n(n+1)}{\rho^2} \frac{\alpha \rho' g}{\eta} \theta_0 = 0.$$

waarin: η = visceositeit
ρ' = dichtheid
g = versnelling van de zwaartekracht
α = uitzettingscoëfficient.

Is de laatste term een bekende functie van ρ, dan kan men door substitutie $\rho = e^u$ de vergelijking terugbrengen tot een lineaire vergelijking met constante coëfficienten (op de laatste term na) en deze is op te lossen door variatie van de constante. Deze oplossing is dus slechts afhankelijk van de orde van de bolfunctie k_n en niet van zijn speciale vorm. Dit geldt echter <u>niet</u> voor de spanningsvergelijkingen, die wel van de k_n afhankelijk blijven. Eén hiervan is b.v.:

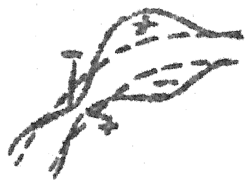
$$\frac{\sigma_\delta}{2\eta} = \left[-\frac{p_0}{2\eta} + \frac{w_0}{\rho}\right] k_n + \frac{v_0}{\rho} \frac{\partial^2 k_n}{\partial \delta^2}$$

Men moet waarschijnlijk aannemen, dat voor het ontstaan van een convectiestroom overal tegelijk een bepaalde grensspanning overwonnen moet worden. De bolfunctie moet daarom een regelmatige verdeling geven. Bovendien moet deze verdeling zodanig zijn, dat in ieder hoekpunt een even aantal zijvlakken samenkomen, waarbij ieder zijvlak een gebied van daalstroom resp. stijgstroom is, zodat in de buurt van ieder hoekpunt evenveel daal- als stijgstromen aanwezig zijn. Hieraan voldoet van de lagere orde bolfuncties alleen de orde m = 3, overeenkomende met het octaëder. Uitgaande van deze bolfunctie kan men dan berekenen, dat een minimum van energie nodig is om een convectiestroming te laten ontstaan, wanneer deze een diepte van ongeveer 2900 km. heeft. Anders uitgedrukt, de maximale visceositeit, die de convectiestroom juist niet verhindert, is, voor m = 3, zo groot mogelijk, als de diepte van de convectiestroom 2900 km. is. Het is aannemelijk, dat hierdoor de afscheiding tussen de kern en de mantel ontstaan is.

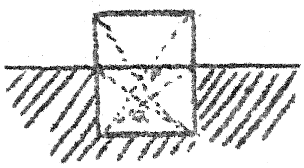
Zie: F.A.Vening Meinesz: De verdeling van continenten en oceanen over het aardoppervlak, Proc. Kon. Ned. Akad. v.Wetensch. Afd. Natuurkunde 4 1944, bl. 151-159 en idem, Equations for elastic solids in spherical coördinates, Proc. Kon. Ned. Akad. v.Wetensch. 1945 bl. 469-486.

Vervolgens wordt een ander probleem iets uitvoeriger behandeld:

De aardkorst moet men zich voorstellen als drijvende op een plastische onderlaag van groter s.g. Waar zich een gebergte bevindt, of een continent, moet deze korst dus ook dieper in de onderlaag weggezonken zijn, dan bij een lager gedeelte, b.v. een oceaan het geval is. De korst is dus bij de gebergten en continenten ook in de diepte meer uitgebreid dan onder de oceanen. Het resultaat hiervan is, dat de storingen, die de zwaartekracht ten gevolge van massa ophopingen in de korst ondervindt, grotendeels opgeheven wordt (het verschijnsel der isostasie). Het is van belang uit te rekenen, welke storingen van de geoïde toch nog door deze onregelmatigheden in de aardkorst worden veroorzaakt, aangezien de afwijkingen van de zuivere ellipsoïdevorm, die na eliminatie van deze storingen nog overblijven, het gevolg moeten zijn van de structuur van het substratum en men dus,als men in de berekening slaagt, gegevens over deze structuur zou kunnen verkrijgen. Het storend effect, dat, tengevolge van topografische verschillen, nog op de geoïde overblijft, kan men aldus beschrijven: brengt men in een vloeistof, waarvan het oppervlak een aequipotentiaal vlak is, een drijvende massa aan, dan zullen weliswaar volgens de wet van Archimedes in eerste benadering de positieve massa boven het vloeistofoppervlak en de negatieve eronder tezamen hetzelfde effect hebben als oorspronkelijk de door het lichaam verplaatste vloeistof, maar, bij nadere beschouwing moet men in aanmerking nemen, dat het zwaartepunt van de drijvende massa hoger is gelegen dan dat van de verplaatste vloeistof oorspronkelijk gelegen was, zodat het aequipotentiaalvlak ten gevolge hiervan plaatselijk verhoogd wordt. Hierdoor zal dus de geoïde ter plaatse van continenten boven en ter plaatse van oceanen beneden de omwentelingsellipsoïde liggen. Dit effect heeft een grootte van ongeveer 5 à 10 m gal (gal = cm/sec^2). Het berekenen hiervan wordt nog gecompliceerd door het feit, dat deze vervorming van de geoïde ook een vervorming in de diepere lagen van het substraat ten gevolge heeft. Immers het zwaartepunt van de aarde kan door werking van de aarde zelf (i.c. de aardkorst) niet verplaatst worden.



aequipotentiaalvlakken aan onderkant en bovenkant van de korst.
+ = positieve massa
- = negatieve massa
(s.g. van de korst is kleiner dan van het substraat).



P = zwaartepunt drijvend lichaam.
Q = zwaartepunt van de oorspronkelijk aanwezige vloeistof.

Indien dus in een bepaald gebied een massa zich van het zwaartepunt verwijdert, moet dit gecompenseerd worden door andere massaverschuivingen, zodat het hele potentiaalveld van de aarde verandert. Kortom men kan niet volstaan met een locale behandeling van het probleem. Dit secundaire effect is weliswaar zeer klein, maar niet verwaarloosbaar.
Mathematisch heeft dit tot gevolg, dat men niet kan volstaan met één enkele bolfunctie, daar men het probleem slechts in zijn geheel kan behandelen en dus de topographische hoogte van de hele aarde in een reeks bolfuncties moet ontwikkelen. Dit is gedaan door A. Prey, tot en met de 16e orde bolfunctie.

Neemt men nu ter vereenvoudiging 3 sprongen van dichtheid aan, de eerste direct onder de korst, de tweede midden in het substratum (als interpolatie van de totale dichtheidsverandering van het substratum) en de derde op de overgang naar de kern, dan krijgt men o.a. de volgende vergelijking:

$$3\frac{\theta_0}{\theta_m}\frac{gl}{R}\sum_2^\infty \frac{n}{2n+1} h_n + 3\frac{\theta_1}{\theta_m} g\sum_2^\infty \frac{1}{2n+1} N_{1n} - g\frac{\theta_0\Delta_1}{\theta_m^2}\frac{gl}{R}\sum_2^\infty \frac{1}{2n+1} h_n +$$

$$+2\frac{\Delta_2}{\theta_m} f \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\rho_2^{\,n+2}}{R^{n+2}} W_{2n} + 3\frac{\Delta_3}{\theta_m} f \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\rho_3^{\,n+2}}{R^{n+2}} = f\,h_n$$

voor het oppervlak van de aarde zelf. (In deze vergelijking zijn de aequipotentiaalvlakken boven en onder de aardkorst samengevat). Hierin is:

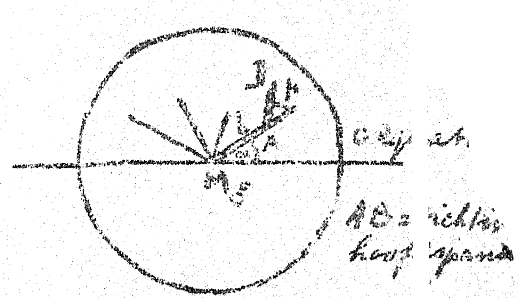
h_n = n° term van de in bolfuncties ontwikkelde topografische hoogte.
θ_0 = s.g. van de korst.
θ_m = gemiddeld s.g. van de aarde.
t = afstand van de massa's boven de korst ... rende massa's onder de korst.
θ_1 = s.g. van de bovenste laag van het subs...
θ_2 = s.g. van de onderste laag van het subs...
θ_3 = s.g. van de kern.
W_{n} = n° term van de in bolfuncties ontwikkeld... ving van het potentiaalvlak door de aanwe... de topografische massa.
$\Delta_1 = \theta_1 - \theta_0$
$\Delta_2 = \theta_2 - \theta_1$
$\Delta_3 = \theta_3 - \theta_2$
R = straal van de aarde.
ρ_2 = straal van het tweede discontinuïteitsvlak.
ρ_3 = " " " derde "

Dergelijke vergelijkingen moet men ook opstellen voor de andere ... potentiaalvlakken, waar een sprong van de dichtheid ondersteld is. ... oplossen van de vergelijkingen moet voor iedere bolfunctie apar... beuren. Heeft men de Ni berekend, dan levert de uitkomst de gew... zwaartekrachtcorrecties.

F.A. Vening Meinesz: The indirect isostatic or Bowie reduction and ... equilibrium figure of the earth; Bulletin géodésique Juli 1946, bl... (met litteratuurverwijzingen).

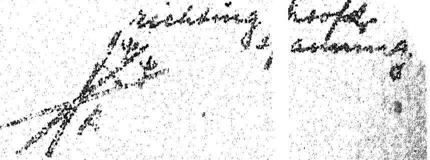
Spanningen in de aardkorst tengevolge van verandering van stand van aardas.

Een verplaatsing van de aardas en dus tevens van de afplatting ... een hoek van 70° zou, zoals met behulp van de spanningstheorie van ... laard en Iterson te berekenen is, schuifspanningen van 2500-3000 k... veroorzaken, waardoor bepaalde scheurrichtingen zouden ontstaan. ... zijn deze op verschillende plaatsen te constateren, b.v. in de sti... oceaan, de Azoren, horsten en slenken in het steenkolengebied van ... land. Dit kan een plaatselijk verschijnsel zijn geweest, maar bere... men het effect van een poolverschuiving over een geschikt gekozen ... en richting, dan krijgt men een net van scheurrichtingen, waarin de ... van de waargenomen gevallen passen. Dit net is als volgt geconstru... Uitgaande van het punt (0°,0°) wordt (zie tekening) in een willekeurig punt A van de aardbol de richting van de hoofdspanning gegeven door de formule:



$$tg\,2\mu = -\frac{2\cos\delta}{1+\cos^2\delta}\,cotg\,2\alpha$$

(dat de Greenwich-meridiaan hierbij optreedt is toeval).
Is ψ de hoek, die de 2 richtingen van afschuiving met de richting van hoofdspanning maken, dan wordt ψ gegeven door:



$$\cos 2\psi = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\delta}{1+\cos^2\delta}\cos 2\mu$$

Hierdoor is dus het hele net bepaald.
Een ander verschijnsel, dat in deze theorie past, is het optreden van 2 soorten vulcanen met verschillend magma. De eerste soort, die langs ... bogen lijnen liggen, is er een, waarvan het ontstaan aan ... bergtevorming geweten wordt, de vulcanen van de tweede ... gen op rechte lijnen, juist passend in ...

$$+3\frac{\Delta_2}{\theta_m}\, g \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, \frac{\rho_2^{\,n+2}}{R^{n+2}}\, N_{2n} + 3\frac{\Delta_3}{\theta_m}\, g \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, \frac{\rho_3^{\,n+2}}{R^{n+2}} = g\, N_i$$

voor het oppervlak van de aarde zelf.(In deze vergelijking zijn de aequipotentiaalvlakken boven en onder de aardkorst samengevat). Hierin is:

- h_n = n^e term van de in bolfuncties ontwikkelde topografische hoogte.
- θ_0 = s.g. van de korst.
- θ_m = gemiddeld s.g. van de aarde.
- t = afstand van de massa's boven de korst en de compenserende massa's onder de korst.
- θ_1 = s.g. van de bovenste laag van het substraat.
- θ_2 = s.g. van de onderste laag van het substraat.
- θ_3 = s.g. van de kern.
- N_{in} = n^e term van de in bolfuncties ontwikkelde verschuiving van het potentiaalvlak door de aanwezigheid van de topografische massa.
- $\Delta_1 = \theta_1 - \theta_0$
- $\Delta_2 = \theta_2 - \theta_1$
- $\Delta_3 = \theta_3 - \theta_2$
- R = straal van de aarde.
- ρ_2 = straal van het tweede discontinuiteitsvlak.
- ρ_3 = " " " derde " "

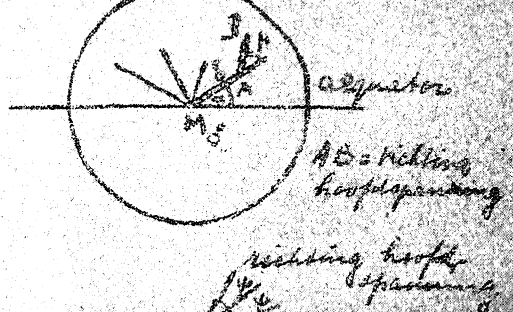
Dergelijke vergelijkingen moet men ook opstellen voor de andere aequipotentiaalvlakken, waar een sprong van de dichtheid ondersteld is. Het oplossen van de vergelijkingen moet voor iedere bolfunctie apart gebeuren. Heeft men de Ni berekend, dan levert de uitkomst de gewenste zwaartekrachtcorrecties.

F.A.Vening Meinesz: The indirect isostatic or Bouvie reduction and the equilibrium figure of the earth; Bulletin géodésique Juli 1946, bl.33-107. (met litteratuurverwijzingen).

Spanningen in de aardkorst tengevolge van verandering van stand van de aardas.

Een verplaatsing van de aardas en dus tevens van de afplatting over een hoek van 70° zou, zoals met behulp van de spanningstheorie van Bijlaard en Iterson te berekenen is, schuifspanningen van 2500-3000 kg/cm^2 veroorzaken, waardoor bepaalde scheurrichtingen zouden ontstaan. Inderdaad zijn deze op verschillende plaatsen te constateren, b.v. in de stille oceaan, de Azoren, horsten en slenken in het steenkolengebied van Nederland. Dit kan een plaatselijk verschijnsel zijn geweest, maar berekent men het effect van een poolverschuiving over een geschikt gekozen hoek en richting, dan krijgt men een net van scheurrichtingen, waarin de meeste van de waargenomen gevallen passen. Dit net is als volgt geconstrueerd: Uitgaande van het punt (0°,0°) wordt (zie tekening) in een willekeurig punt A van de aardbol de richting van de hoofdspanning gegeven door de formule:

$$tg\,2\mu = -\frac{2\cos\delta}{1+\cos^2\delta}\, cotg\, 2\alpha$$

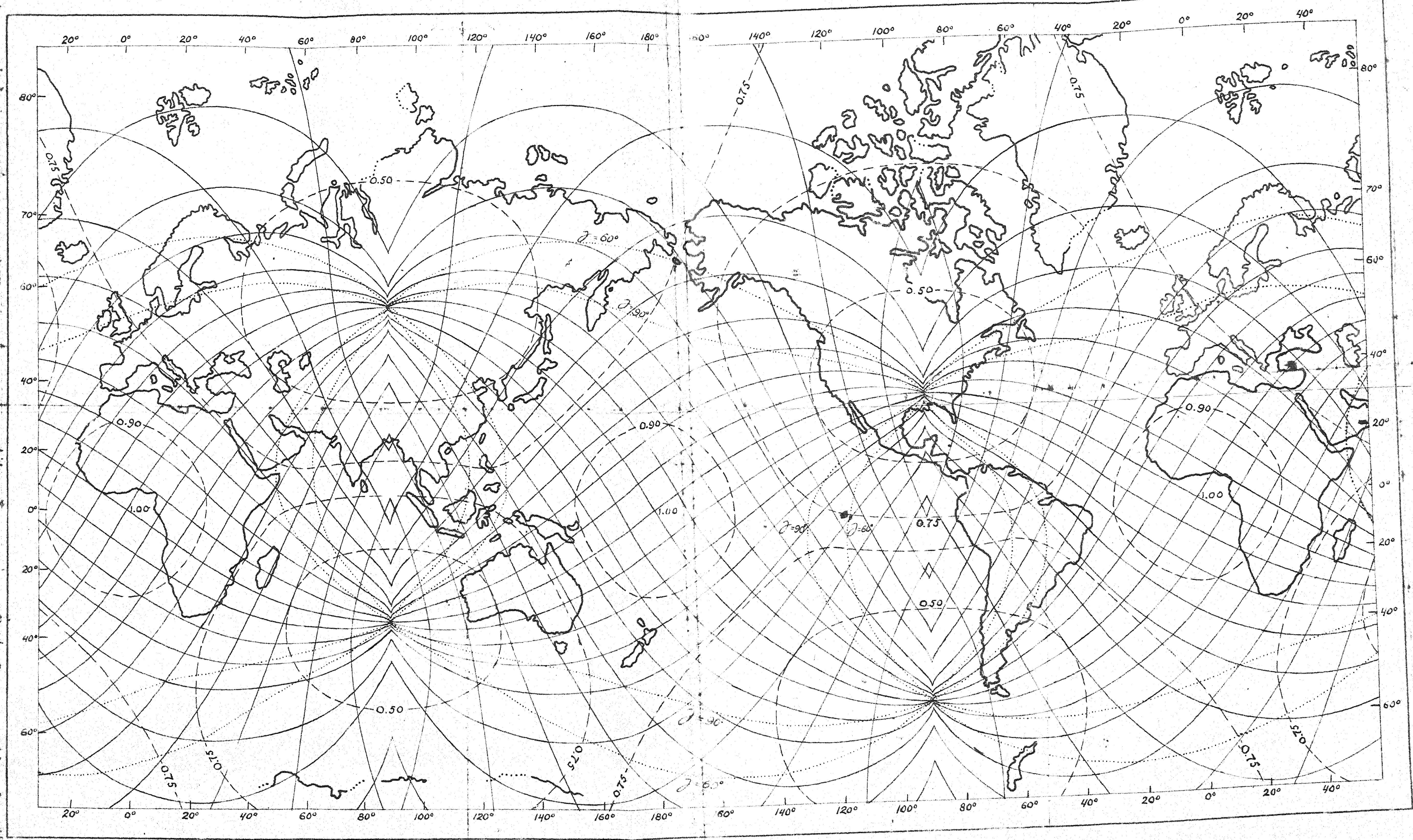


(dat de Greenwich-meridiaan hierbij optreedt is toeval).
Is ψ de hoek, die de 2 richtingen van afschuiving met de richting van hoofdspanning maken, dan wordt ψ gegeven door:

$$\cos 2\psi = \frac{\frac{2}{3}\sin^2\delta}{1+\cos^2\delta}\, \cos 2\mu.$$

Hierdoor is dus het hele net bepaald.

Een ander verschijnsel, dat in deze theorie past, is het optreden van 2 soorten vulcanen met verschillend magma. De eerste soort, die langs gebogen lijnen liggen, is er een, waarvan het ontstaan aan plaatselijke gebergtevorming geweten wordt, de vulcanen van de tweede soort echter liggen op rechte lijnen, juist passend in dit scheurensysteem.



Net No 1

L