STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 2

Tensorrekening voor Physici.

Cursus 1947

Schouten J.A.

1947

Cursus Tensorrekening voor Physici

door

Prof.dr. J.A. Schouten

INHOUD

I. Ruimten gedefinieerd door lineaire groepen.

§ 1. De groep G_n.
§ 2. Ondergroepen van G_n.
§ 3. De $\mathcal{E}_p$ in $\mathcal{E}_n$.

II. Geometrische objecten in

§ 4. Definities
§ 5. Scalairen en vectoren
§ 6. Affinoren en affinordichtheden
§ 7. Invariante processen
§ 8. Tensoren
§ 9. p-vectoren
§ 10. Dichtheden
§ 11. De fundamentaaltensor

III. Identificering van grootheden na invoering van een ondergroep van G_n

§ 12. Introductie van een eenheidsvolume (ondergroep G_{nf})
§ 13. Introductie van een fundamentaaltensor (ondergroep G_{rn})
§ 14. Introductie van een schroefzin (ondergroep der transformaties met $\Delta > 0$)
§ 15. Introductie van een fundamentaaltensor en een schroefzin (ondergroep G_{rn})

IV. Geometrische objecten in

§ 16. De X_n
§ 17. Geometrische objecten in X_n
§ 18. Invariante Differentiaaloperatoren I: Grad, Div en Rot
§ 19. I .D. II Het theorema van Stokes.
§ 20. I.D. III De afgeleide van Lie.
§ 21. I.D. IV De Lagrange afgeleide.
§ 22. Anholonome coordinatenstelsels in X_n

V. De meetkunde in een met een gegeven overbrenging.

§ 23. Overbrengingen in X_n
§ 24. Geodetische lijnen in $\mathcal{L}_n$
§ 25. Normaalcoordinaten in A_n
§ 26. De V_n
§ 27. Kromming van een A_n
§ 28. De covariante differentiatie in anholonome coordinaten.

vervolg inhoud:

VI. Physische objecten en hun dimensies.
§ 29. Absolute en relatieve dimensies.
§ 30. Constructie van het geometrische beeld.

VII. Elasticiteit in kristallen
§ 31. Deformatie
§ 32. Kracht en spanning
§ 33. De elasticiteitscoefficienten.
§ 34. Dielectrische- en piezoelectrische constanten.
§ 35. Kristalkernen.
§ 36. Piezoelectrisch- en piezomagnetisch effect.
§ 37. Golven in homogene anisotrope media.
§ 38. De kwartsresonator (α-kwarts, trigonaal 10)

VIII. Klassieke dynamica.
§ 39. Holonome stelsels
§ 40. Anholonome coordinaten en anholonome stelsels.
§ 41. Homogenizatie der vergelijkingen van Lagrange en van Hamilton.
§ 42. De eikonaalfuncties.
§ 43. Bijzondere gevallen van eerste integralen.

888888

HET MATHEMATISCH CENTRUM
Nieuwe Kerkstraat 124
A m s t e r d a m C.

VOORDRACHT TE HOUDEN DOOR PROF. Dr. J. A. SCHOUTEN; TENSORREKENING VOOR PHYSICI, NAJAAR 1947.

I RUIMTEN GEDEFINIEERD DOOR LINEAIRE GROEPEN.

§ 1. De groep $\mathcal{G}_a$.

De groep $\mathcal{G}_a$ (affine groep) bestaat uit de lineaire transformaties

1.1) $$x^{k'} = a^{k'} + A^{k'}_{k} x^{k} \quad ; \quad \Delta \overset{def}{=} \mathrm{Det}\,(A^{k'}_{k}) \neq 0 \qquad 1)$$

$$a^{k'} = \text{constant}; \quad A^{k'}_{k} = \text{constant}$$

De omkering luidt:

1.2) $$x^{k} = a^{k} + A^{k}_{k'} x^{k'}$$

met het verband

1.3) $$A^{k'}_{k} A^{k}_{\lambda'} = \begin{cases} 1, & k' = \lambda' \\ 0, & k' \neq \lambda' \end{cases} ; \quad A^{k}_{k'} A^{k'}_{\lambda} = \begin{cases} 1, & k = \lambda. \\ 0, & k \neq \lambda. \end{cases}$$

$$A^{k}_{k'} a^{k'} = -a^{k} ; \quad A^{k'}_{k} a^{k} = -a^{k'}.$$

Om $A^{k}_{\lambda'}$ voor bepaalde waarden van k en λ' te berekenen schrijf uit de matrix van $A^{k'}_{\lambda}$

1.4) $$\begin{Vmatrix} A^{1'}_{1} & \cdots & A^{n'}_{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{n'}_{1} & \cdots & A^{n'}_{n} \end{Vmatrix}$$

vorm de minor van het element $A^{\lambda'}_{k}$ door de k-de rij en de λ-de kolom te schrappen en te vermenigvuldigen met $(-1)^{k+\lambda}$. Dan is $A^{k}_{\lambda'}$ deze minor als determinant opgevat gedeeld door Δ. Door uitschrijven van $\mathrm{Det}(A^{k'}_{\lambda})$ bewijst men dat

1.5) $$A^{k}_{\lambda'} = \Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial A^{\lambda'}_{k}} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial A^{\lambda'}_{k}}.$$

Ieder stelsel waarden x^{k} heet een punt. De waarden x^{k} heten de coördinaten van het punt en de $x^{k'}$ andere coördinaten van hetzelfde punt. Alle coördinatenstelsels die met behulp van (1,1) uit x^{k} kunnen worden gemaakt heten toegelaten (allowable) coördinatenstelsels. De verzameling van alle punten, toegerust met alle toegelaten coördinatenstelsels, heet een affine ruimte of $\mathcal{E}_n$.

In alle formules komen voor kernletters (kernel letters) b.v. A, x, lopende indices b.v. k, k' en vaste indices b.v. $2, 3'$. Bij elk coördinatenstelsel behoort een soort lopende indices en een stelsel vaste indices. Een coördinatenstelsel wordt aangeduid door een van zijn lopende indices tussen haakjes, b.v. (k). Punten en kernletters veranderen niet bij coördinatentransformaties maar wel de lopende en vaste indices.

1) De indices $k, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega$ doorlopen steeds de waarden $1, \ldots, n$ (cursief) de indices $k', \ldots, \omega'$ steeds de waarden $1', \ldots, n'$ (cursief). Over twee gelijke indices waarvan één boven en één onder staat, wordt steeds automatisch gesommeerd. (Einstein conventie).

Er zijn andere transformaties, puntransformaties, waarbij de punten veranderen maar het coördinatenstelsel niet. Aldus stelt

1.6) $$y^{\kappa} = p^{\kappa} + P^{\kappa}_{\lambda}\, x^{\lambda}$$

p^{κ} = constant; P^{κ}_{λ} = constant

een affine punttransformatie voor.

Men verandert een kernletter door een andere letter te nemen, door een accent toe te voegen of door een index boven of onder de kernletter te plaatsen, bijv. y^{*}, y^{κ}. Indices rechts boven of onder worden bij voorkeur gereserveerd voor lopende en vaste indices (uitzondering hierop later).

Men doet goed aan deze principes der kern-index methode(kernel-index method) de hand te houden.

§ 2. Ondergroepen van $\mathcal{G}_r$.

De volgende ondergroepen worden gebruikt:

a. $\mathcal{G}_r$: alle lineaire homogene transformaties. De oorsprong blijft invariant. De ruimte heet nu een gecentreerde $\mathcal{E}_r$.

b. $\mathcal{G}_{\Delta}$: alle equivoluminaire lineaire homogene transformaties. $\Delta = \pm 1$. Volumen blijven invariant. Gecentreerde $\mathcal{E}_r$ met gegeven maatvolume.

c. $\mathcal{G}_{\Delta\pm}$: alle speciaalaffine transformaties. $\Delta = +1$. Volumen en schroefzin blijven invariant. Gecentreerde $\mathcal{E}_r$ met gegeven maatvolume en schroefzin.

Een schroefzin (screwsense) in $\mathcal{E}_r$ is bepaald door n richtingen met zin (pijl) niet gelegen in enige $\mathcal{E}_{r-1}$, in een bepaalde volgorde. Ieder coördinatenststelsel bepaalt dus een schroefzin.

d. $\mathcal{G}_{or}$: alle orthogonale transformaties (draaiingen en spiegelingen) $\Delta = \pm 1$. De ruimte heet nu een $\mathcal{R}_r$. In een $\mathcal{R}_r$ bestaan de begrippen lengte en hoek.

e. $\mathcal{G}_{r+}$: alle rotaties. $\Delta = +1$. Georienteerde $\mathcal{R}_r$ ($\mathcal{R}_r$ met een gegeven schroefzin).

In al deze ruimten zijn de toegelaten coördinatensystemen die systemen, die uit een oorspronkelijk systeem kunnen worden verkregen door de transformaties der ten grondslag gelegde groep.

Bij elke groep behoort een meetkunde, d.w.z. een theorie van alle eigenschappen van figuren, die invariant zijn bij die groep. De betrekkingen tussen de meetkunde van een groep en die van zijn ondergroepen worden vastgelegd in het beginsel van O. Klein (1872).

Is G een groep en G' de ondergroep bestaande uit alle transformaties van G die een stel figuren A invariant laten, dan is de meetkunde van de een of andere figuur ten opzichte van G' dezelfde als de meetkunde van die figuur tezamen met het stel A ten opzichte van G.

§ 3 De $\mathcal{E}_p$ in $\mathcal{E}_n$.

Beschouw de vergelijkingen:

3.1) $$C^{\kappa}_{\lambda}\, x^{\lambda} + C^{\kappa} = 0 \quad ; \quad \kappa = p+1, \cdots, n$$ 1)

C^{κ}_{λ} = constant; C^{κ} = constant

en onderstel, dat de matrix van C^{κ}_{λ} de hoogste rang (rank), d.i. $n-p$ 2)

---

1) Wij maken steeds streng onderscheid tussen verticale en cursi indices.

2) De rang van een matrix is r als er tenminste één onderdeterminant met r rijen bestaat die niet nul is maar geen onderdeterminant met meer dan r rijen.

Dan kunnen $n-p$ der variabelen worden opgelost als lineaire functies der overige p. In de verzameling van alle punten voldoende aan (3.1) kunnen deze laatste als coördinaten worden gebruikt. Aangezien bij ondervormen zijn aan de affine groep die ontstaat als men de overigen constant laat (een ondergroep van G_n) is de verzameling een $\mathcal{E}_p$. Wij noemen deze $\mathcal{E}_p$ in $\mathcal{E}_n$ de nuluitgebreidheid van (3.1) en (3.1) zijn nulvorm. De oplossing van (3.1) kan ook geschreven worden in de parametervorm

3.2) $$x^\kappa = B^\kappa_\rho \eta^\rho + B^\kappa \quad , \quad \rho = 1, \dots, p$$

B^κ_ρ = constant; B^κ = constant

met p parameters η^ρ. Ook de η^ρ kunnen als coördinaten in $\mathcal{E}_p$ worden gebruikt. (3.2) heet de parametervorm van $\mathcal{E}_p$. Er gelden de betrekkingen

3.3) $$C^\kappa_\lambda B^\lambda_\rho = 0 \quad ; \quad C^\kappa_\lambda B^\lambda + C^\kappa = 0 \quad , \quad \rho = 1, \dots, p; \quad \kappa = p+1, \dots, n.$$

Een punttransformatie:

3.4) $$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + c^\kappa \; ; \quad c^\kappa = \text{constant}$$

heet een translatie. Dit begrip is invariant bij G_n. Twee $\mathcal{E}_p$'s heten parallel wanneer zij door een translatie in elkaar kunnen worden overgevoerd. Men zegt dan ook, dat zij dezelfde $\mathcal{E}_p$-richting hebben. Worden de punten "in het oneindige" van $\mathcal{E}_p$ opgevat als een oneigenlijke $\mathcal{E}_{p-1}$, dan kan men ook zeggen, dat twee parallele $\mathcal{E}_p$'s een oneigenlijke $\mathcal{E}_{p-1}$ gemeen hebben.

Een $\mathcal{E}_0$ heet punt, een $\mathcal{E}_1$ lijn, een $\mathcal{E}_2$ vlak en een $\mathcal{E}_{n-1}$ hypervlak (hyperplane).

Bij een $\mathcal{E}_p$ en een $\mathcal{E}_q$ kunnen wij onderscheiden:

de doorsnijding (section) $\mathcal{E}_{p-q}$ bestaande uit de gemeenschappelijke punten; ($\mathcal{E}_{p-q}$ betekent kruising)

de samenvoeging (junction) $\mathcal{E}_{p+q}$ zijnde de kleinste lineaire uitgebreidheid die $\mathcal{E}_p$ en $\mathcal{E}_q$ beide bevat.

Men kan bewijzen dat

3.5) $$s \geq p+q-n \quad , \quad t = p+q-s$$

waarbij oneigenlijke uitgebreidheden meegerekend worden. Hier zijn de doorsnijdingen en samenvoegingen in $\mathcal{E}_4$ voor algemene ligging:

3.6)

doorsnijdingen

	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$
$\mathcal{E}_0$	×	×	×	×
$\mathcal{E}_1$	×	×	×	$\mathcal{E}_0$
$\mathcal{E}_2$	×	×	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_3$	×	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$

samenvoegingen

	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$
$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{E}_4$
$\mathcal{E}_1$	$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_4$
$\mathcal{E}_2$	$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_4$
$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_4$	$\mathcal{E}_4$

Deze tabel kan worden geverifieerd door een eenvoudige proef. In de $\mathcal{E}_4$ van x, y, z en t beschrijft een bewegend punt een wereldlijn. Deze is een $\mathcal{E}_1$ voor uniforme beweging. Een uniform bewegende lijn beschrijft een $\mathcal{E}_2$ en een uniform bewegend vlak een $\mathcal{E}_3$. Men bewege nu twee staven of een staaf en een plaat uniform.

Bij elk toegelaten coördinatenstelsel in $\mathcal{E}_n$ behoren n $\mathcal{E}_{n-1}$'s, de coördinaatassen, $\binom{n}{2}$ $\mathcal{E}_{n-2}$'s, de coördinaatvlakken en algemeen $\binom{n}{p}$ $\mathcal{E}_{n-p}$'s, de coördinaat-$\mathcal{E}_{n-p}$'s. Iedere $\mathcal{E}_p$ in $\mathcal{E}_n$ snijdt elk der coördinaat-$\mathcal{E}_{n-1}$'s in een punt en de $\mathcal{E}_p$ is vastgelegd door $p+1$ van die snijpunten. Elk snijpunt kan worden vastgelegd door $n-p$ getallen, en dus kan een $\mathcal{E}_p$ in $\mathcal{E}_n$ worden vastgelegd door $(p+1)(n-p)$ getallen. Evenzo bewijst men dat een $\mathcal{E}_p$ door een gegeven $\mathcal{E}_q$ in $\mathcal{E}_n$ kan worden vastgelegd door $(p-q)(n-p)$ getallen.

Wanneer in een $\mathcal{E}_n$ een $\mathcal{E}_p$ gegeven is benevens een $(n-p)$-richting, die geen richting met de $\mathcal{E}_p$ gemeen heeft, dan kunnen we iedere figuur in $\mathcal{E}_n$ aan de volgende drie processen onderwerpen:

a. Snijding met $\mathcal{E}_p$: alle punten niet in $\mathcal{E}_p$ worden weggelaten. Alleen $\mathcal{E}_p$ wordt gebruikt.

b. Samenlegging (reduction) met betrekking tot de (n-p)-richting: alle punten die in één en dezelfde $\mathcal{E}_{n-p}$ met deze (n-p)-richting liggen, worden geïdentificeerd. De figuur die ontstaat is gelegen in de $\mathcal{E}_p$ die uit $\mathcal{E}_n$ ontstaat door samenlegging. Alleen de (n-p)-richting wordt gebruikt.

c. Projectie op $\mathcal{E}_p$ in de (n-p)-richting: door ieder punt der figuur wordt een $\mathcal{E}_{n-p}$ gebracht met deze (n-p)-richting en deze $\mathcal{E}_{n-p}$ wordt tot snijding gebracht met de $\mathcal{E}_p$. De verzameling van alle snijpunten is de projectie. De $\mathcal{E}_p$ en de (n-p)-richting worden gebruikt.

Een $\mathcal{E}_p$ met inwendige orientatie (inner orientation) is een $\mathcal{E}_p$ waarin een p-dimensionale schroefzin is gedefinieerd. Een $\mathcal{E}_p$ met uitwendige orientatie (outer orientation) is een $\mathcal{E}_p$ waaraan een (n-p)-dimensionale schroefzin is toegevoegd zoals de $\mathcal{E}_p$ heen d.w.z. in een (en dus in iedere) $\mathcal{E}_{n-p}$ die geen richting met de $\mathcal{E}_p$ gemeen heeft.

II GEOMETRISCHE OBJECTEN IN $\mathcal{E}_n$

§ 4. Definities.

Een geometrisch object in $\mathcal{E}_n$ is een correspondentie tussen de toegelaten coördinatenstelsels enerzijds en de geordende stellen van N getallen anderzijds, die aan de volgende voorwaarden voldoet:

a. aan ieder toegelaten coördinatenstelsel is één en slechts één geordend stel van N getallen toegevoegd;

b. indien Φ_Λ ; $\Lambda = 1, \dots, N$ en $\Phi_{\Lambda'}$; $\Lambda' = 1', \dots, N'$ correspondëren met (K) en (K'), dan zijn de $\Phi_{\Lambda'}$ functies van de Φ_Λ, de $A^{K'}_K$ en de $a^{K'}$.

De Φ_Λ heten de kentallen (components) van het object met betrekking tot (K). Geometrische objecten in $\mathcal{E}_n$ worden onderscheiden naar de transformatiewijze van hun kentallen.

Indien de $\Phi_{\Lambda'}$ lineair homogeen in de Φ_Λ zijn, homogeen algebraïsch in de $A^{K'}_K$ en onafhankelijk van de $a^{K'}$, dan heet het object een geometrische grootheid (quantity). De "radiusvector" z^K is een geometrisch object maar geen geometrische grootheid (bij de groep $\mathcal{G}_a$).

§ 5. Scalairen en vectoren.

a. Scalairen. Een scalair heeft één kental, invariant bij $\mathcal{G}_a$.

b. Contravariante vectoren. Een contravariante vector heeft n kentallen v^K met de transformatiewijze:

5.1) $$v^{K'} = A^{K'}_K v^K$$

Meetkundig beeld: pijl 1). De kentallen zijn de projecties op de assen gemeten met behulp van de maateenheden op die assen. De meegeprojecteerde pijl bepaalt het teken. In een gecentreerde $\mathcal{E}_n$ kan dit beeld worden vervangen door een punt. Aldaar is de "radiusvector" een contravariante vector en dus een geometrische grootheid. Dit is een eerste voorbeeld van twee objecten die bij $\mathcal{G}_a$ niet dezelfde transformatiewijze hebben maar bij een ondergroep van $\mathcal{G}_a$, hier $\mathcal{G}_z$, wel.

c. Covariante vectoren. Een covariante vector heeft n kentallen w_λ met de transformatiewijze

5.2) $$w_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'} w_\lambda$$

Meetkundig beeld: twee parallele vlakken met een zin b.v. aan te geven door een niet noodzakelijk rechte pijl die door de vlakken heen steekt.

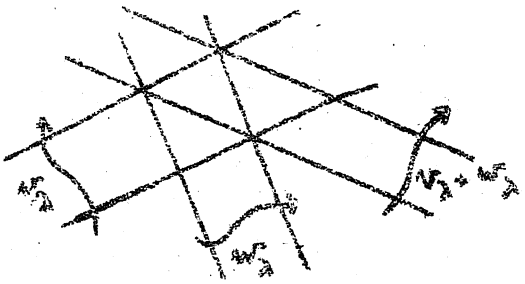
---

1) De pijl moet vrij zwevend gedacht worden, dus bepaald op een translatie na. Bij de volgende meetkundige beelden wordt dit niet telkens gezegd.

De kentallen zijn 1 : de stukken die van de assen afgesneden worden, gemeten met de maateenheden op die assen. In een gecentreerde Σ_2 kan dit beeld vervangen worden door een hypervlak. De w_λ zijn dan de bekende hypervlakcoördinaten.

Optelling van contravariante vectoren geschiedt volgens het "parallelegram van krachten". Optelling van covariante vectoren wordt geïllustreerd in fig. 1 voorstellende een doorsnede met een Σ_2:

fig. 1



Bij vermenigvuldiging met een positieve scalar s wordt het beeld van een contravariante vector s x groter en het beeld van een covariante vector s x kleiner. Is de scalar negatief dan keert de orientering om.

Bij elk coördinatenstelsel hoort een stel van n contravariante vectoren $\overset{\kappa}{e}$ en een stel van n covariante vectoren $\overset{\kappa}{e}_\lambda$, de maatvectoren, gedefinieerd door

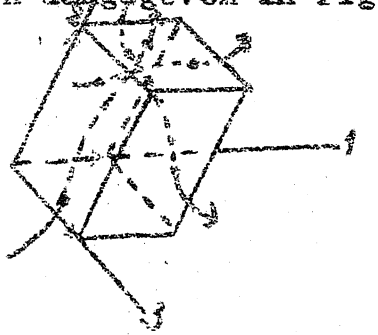
$$\overset{\kappa}{e}_\lambda = \begin{cases} 1 , & \kappa = \lambda \\ 0 , & \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

5.3)

$$\overset{\kappa}{e}_\lambda = \begin{cases} 1 , & \kappa = \lambda \\ 0 , & \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

Hier zijn $\overset{\kappa}{e}$ en $\overset{\kappa}{e}$ de kernen. De in deze kernen optredende indices transformeren niet mee en heten <u>dode indices</u>(dead indices). Voor n = 3 zijn de maatvectoren aangegeven in fig. 2:

fig. 2



De contravariante passen precies tussen de vlakken van de gelijknamige covariante. De kentallen van $\overset{\kappa}{e}$ en $\overset{\kappa}{e}_\lambda$ t.o. van een ander coördinatenstelsel zijn

$$\overset{\kappa'}{e} = A^{\kappa'}_{\kappa}\, \overset{\kappa}{e}$$

5.4)

$$\overset{\kappa}{e}_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'}\, \overset{\kappa}{e}_\lambda .$$

Deze kentallen zijn natuurlijk niet langer 1 of 0. Men ziet hier duidelijk dat de dode indices niet meetransformeren.

De combinatie $v^\lambda w_\lambda$ is een invariant

$$v^{\lambda'} w_{\lambda'} = v^\kappa A^{\lambda'}_{\kappa} A^{\kappa}_{\lambda'} w_\kappa = v^\lambda w_\lambda$$

5.5)

en heet de <u>overschuiving</u> (transvection) van v^κ en w^λ. Voor $v^\kappa w_\lambda = 0$ ligt v^κ in de (n-1)- richting van w_λ en voor $v^\kappa w_\lambda = \pm 1$ past v^κ precies tussen de hypervlakken van w_λ.

Bij elk stel van n lineair onafhankelijke contravariante vectoren v^κ behoort één en slechts één stel van n lineair onafhankelijke covariante vectoren w_λ, zo dat

5.6) $$v^\mu w_\mu = \delta^\kappa_\lambda \begin{cases} 1, & \kappa = \lambda \\ 0, & \kappa \neq \lambda. \end{cases}$$

Het symbool δ^κ_λ voorstellende n^2 scalairen heet het Kronecker symbool. De indices van het Kronecker symbool zijn dood en het is alleen op grond van historische overwegingen dat hier van de consequente schrijfwijze ξ wordt afgeweken. v^κ en w_λ heten t.o. van elkaar reciprook. Blijkbaar is ieder stel maatvectoren behorende bij enig coördinatenstelsel een dergelijk reciprook stel.

Co- en contravariante maatvectoren kunnen worden gebruikt om de kentallen van een vector te bepalen of omgekeerd de vector uit zijn kentallen af te leiden. Van de vector $\vec{v}$ kan men b.v. n scalairen vormen door overschuiving met de $\vec{e}_\lambda$:

5.7) $$\vec{v} = v^\lambda \vec{e}_\lambda .$$

Deze scalairen zijn numeriek gelijk aan de v^κ. Maar indien de vergelijking op andere coördinaten geschreven wordt

5.8) $$\vec{v} = v^\lambda \vec{e}'_\lambda ,$$

transformeren de v^κ wel maar de $\vec{v}$ niet. Men mag dus niet schrijven $\vec{v} = v^\kappa$ maar schrijft daarvoor

5.9) $$v^\kappa \stackrel{*}{=} \vec{v} .$$

waarin het teken $\stackrel{*}{=}$ betekent dat alleen wordt beweerd, dat de vergelijking geldt t.o. van dat coördinatenstelsel of die coördinatenstelsels die in de vergelijking zelf gebruikt zijn. Vergelijkingen met $\stackrel{*}{=}$ behoeven dus niet invariant te zijn. Een vergelijking in kentallen, b.v. $v = v'$ behoeft niet met $\stackrel{*}{=}$ geschreven te worden omdat het hier vanzelf duidelijk is, dat er alleen maar iets t.o. van een bepaald coördinatenstelsel wordt beweerd.

In (2.16) gaat men van een levende index tot een dode index over. Dit proces heet het smoren van een index (to strangle). De gesmoorde index moet hetzij door andere plaatsing als in (5.9) hetzij op andere wijze (zie later) duidelijk als dode index worden gemerkt.

Omgekeerd kan men v^κ construeren uit de scalairen $\vec{v}$ met behulp van de vergelijking

5.10) $$v^\kappa = \vec{v} e_\lambda{}^\kappa$$

of in algemene coördinaten

5.11) $$v^{\kappa'} = \vec{v} e_\lambda{}^{\kappa'} .$$

(5.7) en (5.10) stellen numeriek precies hetzelfde voor maar meetkundig geeft (5.7) aan hoe de kentallen verkregen worden door projectie en (5.10) hoe de vector wordt samengesteld uit zijn componenten. Inderdaad zijn dan ook (5.8) en (5.11), die meetkundig hetzelfde voorstellen als (5.7) en (5.10), volstrekt niet meer numeriek gelijk.

Uit (5.1),(5.8),(5.11) en de corresponderende vergelijkingen voor covariante vectoren volgt

5.12) $$e_{\lambda'} \stackrel{*}{=} e^\kappa_{\lambda'} \stackrel{*}{=} A^\kappa_{\lambda'} \; ; \; e^{\kappa'}_\lambda \stackrel{*}{=} e^{\kappa'}_\lambda \stackrel{*}{=} A^{\kappa'}_\lambda .$$

Wij geven een voorbeeld voor n = 3. Zij de transformatie van x^κ in $x^{\kappa'}$

5.13) $x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa$:

$$x^{1'} = x^1 - x^2 - x^3$$
$$x^{2'} = 2x^1 - 2x^2 - x^3$$
$$x^{3'} = -x^1 + 2x^2 + x^3$$

$A^{\kappa'}_\kappa$:

$\kappa \backslash \kappa'$	1	2	3
1	1	-1	-1
2	2	-2	-1
3	-1	2	1

; $\det(A^{\kappa'}_\kappa) = -1$

dan vindt men door middel van de regel in § 1 voor de constructie van $A^{k}_{k'}$

5.14) $x^{k} = A^{k}_{k'} x^{k'}$

$$\begin{aligned} x^1 &= x^{2'} + x^{3'} \\ x^2 &= x^{1'} + x^{3'} \\ x^3 &= -2x^{1'} + x^{2'} \end{aligned}$$

$A^{k}_{k'}$:

$A^{k}_{k'}$	1'	2'	3'
1	0	1	1
2	1	0	1
3	-2	1	0

en bijgevolg voor de overgang van de maatvectoren van(k) tot de maatvectoren van (k')

$$\overset{k}{e}_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'} \overset{k}{e}_{\lambda} \qquad \overset{k'}{e}_{\lambda} = A^{k'}_{k} \overset{k}{e}_{\lambda}$$

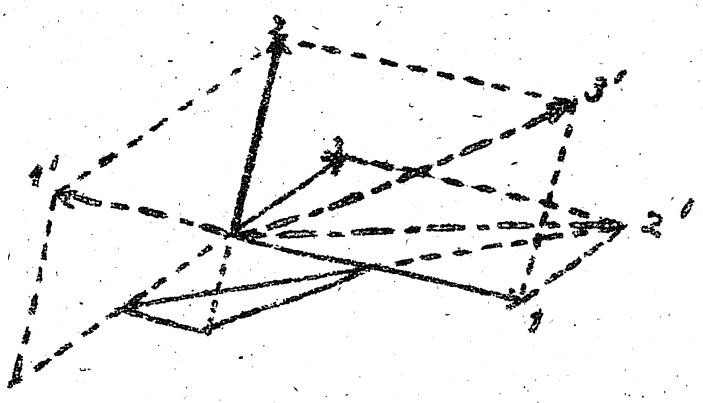
5.15)

$$\begin{aligned} \overset{1'}{e}{}^{k} &= \overset{1}{e}{}^{k} - 2\overset{2}{e}{}^{k} \\ \overset{2'}{e}{}^{k} &= \overset{1}{e}{}^{k} + \overset{3}{e}{}^{k} \\ \overset{3'}{e}{}^{k} &= -\overset{1}{e}{}^{k} + 2\overset{2}{e}{}^{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{1'}{e}_{\lambda} &= \overset{1}{e}_{\lambda} - \overset{2}{e}_{\lambda} - \overset{3}{e}_{\lambda} \\ \overset{2'}{e}_{\lambda} &= 2\overset{1}{e}_{\lambda} - 2\overset{2}{e}_{\lambda} - \overset{3}{e}_{\lambda} \\ \overset{3'}{e}_{\lambda} &= -\overset{1}{e}_{\lambda} + 2\overset{2}{e}_{\lambda} + \overset{3}{e}_{\lambda} \end{aligned}$$

Dit kan worden geverifieerd in fig 3:

fig. 3



Het vlak door het uiteinde van $\overset{2'}{e}{}^{k}$ evenwijdig aan $\overset{1}{e}{}^{k}$ en $\overset{3}{e}{}^{k}$ heeft de vergelijking $2x^{1'} - 2x^{2'} - x^{3'} = 1$

en dit vlak snijdt van de assen de stukken $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1 af. Inderdaad zijn dus 2, -2, -1 de kentallen van $\overset{2'}{e}_{\lambda}$ t.o. (k).
Omgekeerd is:

$$\overset{k}{e}_{\lambda} = A^{\lambda'}_{\lambda} \overset{k}{e}_{\lambda'}$$

5.16) a)

$$\begin{aligned} \overset{1}{e}{}^{k} &= \overset{1'}{e}{}^{k} + 2\overset{2'}{e}{}^{k} - \overset{3'}{e}{}^{k} \\ \overset{2}{e}{}^{k} &= -\overset{1'}{e}{}^{k} - 2\overset{2'}{e}{}^{k} + 2\overset{3'}{e}{}^{k} \\ \overset{3}{e}{}^{k} &= -\overset{1'}{e}{}^{k} - \overset{2'}{e}{}^{k} + \overset{3'}{e}{}^{k} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \overset{1}{e}_{\lambda} &= \overset{2'}{e}_{\lambda} + \overset{3'}{e}_{\lambda} \\ \overset{2}{e}_{\lambda} &= \overset{1'}{e}_{\lambda} + \overset{3'}{e}_{\lambda} \\ \overset{3}{e}_{\lambda} &= -2\overset{1'}{e}_{\lambda} + \overset{2'}{e}_{\lambda} \end{aligned}$$

Men lette er op dat de matrix van (5.15 b) dezelfde is als die van (5.13) maar die van (5.15 a) de gespiegelde t.o. van de hoofddiagonaal van die van (5.14). Dit komt doordat in (5.14) de overschuiving aangrijpt aan de onderste index van $A^{k}_{k'}$ en in (5.15 a) aan de bovenste index. Hetzelfde geldt voor (5.13) en (5.16 a)

§ 6. Affinoren en affinordichtheden.

Wij beschouwen nu algemenere grootheden met n^{p+q} kentallen $\mathcal{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\cdot\cdots\cdot\lambda_1\cdots\lambda_q}$ met de transformatiewijze

6.1) $$\mathcal{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\cdot\cdots\cdot\lambda_1'\cdots\lambda_q'} = \alpha A^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\kappa_1\cdots\kappa_p}\, A^{\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\lambda_1'\cdots\lambda_q'}\, \mathcal{P}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\cdot\cdots\cdot\lambda_1\cdots\lambda_q}$$ *1)

waarin α een product is van een macht van Δ en een macht van $|\Delta|$. Dit is het meest algemene geval. De grootheid heet algemeen een affinordichtheid, p is de contravariante valentie, q de covariante valentie. De grootheid heet contravariant voor q = 0, covariant voor p = 0 en gemengd (mixed) voor $p \neq 0$, $q \neq 0$.

De volgende gevallen komen het meest voor:

6.2)
a) $\alpha = 1$ Affinor; meestal geschreven met latijnse kernletter
b) $\alpha = |\Delta|^{\mathfrak{w}}$ (gewone) affinordichtheid met gewicht $\mathfrak{w}$)
c) $\alpha = \Delta^{\mathfrak{w}}$ affinor- Δ -dichtheid met gewicht $\mathfrak{w}$)
((meestal geschreven met gothische (of griekse)
(kernletter, voor Δ -dichtheden met een $\sim$ erboven)
d) $\alpha = \sigma\,|\Delta|^{\mathfrak{w}}$ $\mathfrak{W}$ -affinor; meestal geschreven met latijnse kernletter met een $\sim$ erboven.

Scalairen en vectoren zijn bijzondere gevallen van affinoren met p=0, q = 0; p = 1, q = 0 en p = 0, q = 1. Heeft een affinor een valentie > 1 dan bestaan er intermediaire kentallen, dat zijn kentallen behorende bij meer dan een assenstelsel, b.v.

6.3) $$\mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda'} = A^{\kappa}_{\kappa}\, \mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} = A^{\lambda}_{\lambda'}\, \mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda'}$$

Bij dichtheden moet men alvorens dergelijke kentallen te kunnen vormen eerst aan iedere index een gewicht toekennen, zo, dat de som dezer gewichten gelijk wordt aan het gewicht van de grootheid.

De plaats van de indices is wezenlijk. Men mag dus niet tijdens een onderzoek nu eens $\mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ schrijven en dan weer $\mathcal{P}^{\cdot\kappa}_{\lambda\cdot}$. In het algemeen worden indices nooit boven elkaar geschreven omdat dan verwarring kan ontstaan o.a. bij het later te definiëren proces van op en neerhalen.

Een gemengde affinor van de valentie 2 stelt een lineaire transformatie van contravariante vectoren en ook een van covariante vectoren voor:

6.4) a) $$\mathfrak{v}^{\kappa} = \mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}\, \mathfrak{v}^{\lambda}$$
b) $$\mathfrak{w}_{\lambda} = \mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}\, \mathfrak{w}_{\kappa}$$

Voor het geval dat $\Delta \neq 0$ $(\mathcal{P}^{\kappa}_{\lambda})$ schrijft men de omkering

6.5) a) $$\mathfrak{v}^{\kappa} = \bar{\mathcal{P}}^{\kappa}_{\cdot\lambda}\, \mathfrak{v}^{\lambda}$$
b) $$\mathfrak{w}_{\lambda} = \bar{\mathcal{P}}^{\kappa}_{\cdot\lambda}\, \mathfrak{w}_{\kappa}$$

en noemt $\bar{\mathcal{P}}^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ de omkering (inverse) van $\mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}$. Men vormt $\bar{\mathcal{P}}^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ uit $\mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ precies als A^{κ}_{λ} uit A^{κ}_{λ} in § 1. Dus is b.v. $\bar{\mathcal{P}}^{1}_{2}$ de minor van $\mathcal{P}^{2}_{1}$ in de matrix van $\mathcal{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda}$, gedeeld door de determinant van die matrix.

De affinor behorende bij de identieke transformatie heet de eenheidsaffinor (unit affinor) en wordt geschreven $\mathcal{A}^{\kappa}_{\lambda}$ *2)

6.6) $$\mathfrak{w}^{\kappa} = \mathcal{A}^{\kappa}_{\lambda}\, \mathfrak{w}^{\lambda}.$$

---

1) voor het gemak wordt de kernletter A niet herhaald, $A^{\kappa\lambda}_{\mu\nu}$ staat dus voor $A^{\kappa}_{\mu} A^{\lambda}_{\nu}$

2) Hier wordt met opzet afgeweken van de regel om geen indices boven elkaar te plaatsen. Het kan juist hier geen kwaad en vereenvoudigt de formules belangrijk.

blijkbaar is A^{κ}_{λ} gelijk 1 voor $\kappa=\lambda$ en 0 voor $\kappa\neq\lambda$, dus

6.7) $$A^{\kappa}_{\lambda} = \varepsilon^{\kappa} \varepsilon_{\lambda} = \delta^{\kappa}_{\lambda}.$$

Transformeert men in (6.6) alleen de index κ dan komt er

6.8) $$\varphi^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\lambda}\, \varphi^{\lambda}$$

en daaruit volgt, dat de $A^{\kappa'}_{\lambda}$ geïntroduceerd in (1.1) niet anders zijn als intermediaire kentallen van de eenheidsaffinor.

Blijkbaar is

6.9) $$P^{\kappa}_{\cdot\lambda}\, \bar{P}^{\lambda}_{\cdot\mu} = A^{\kappa}_{\mu}$$

Uit een covariante of contravariante affinor $P_{\kappa\lambda}$, $Q^{\kappa\lambda}$ van de valentie 2 kan men, voor het geval dat de matrix de rang n heeft eveneens omkeringen $\bar{P}^{\kappa\lambda}$, $\bar{Q}_{\kappa\lambda}$ vormen, steeds volgens dezelfde regel van § 1. ($\bar{P}^{23}$ = minor van P_{32} gedeeld door determinant) en dan geldt

6.10) $$P^{\kappa\lambda}\, \bar{P}_{\lambda\mu} = A^{\kappa}_{\mu}\,; \quad Q_{\kappa\lambda}\, \bar{Q}^{\lambda\mu} = A^{\mu}_{\kappa}.$$

§ 7. Invariante processen.

a. Optelling, alleen voor affinorachtigheden met dezelfde valenties en dezelfde $\propto$ b.v.

7.1) $$P^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu} = Q^{\kappa\lambda}_{\mu} + R^{\lambda\cdot\kappa}_{\cdot\mu}.$$

b. Vermenigvuldigen, b.v.

7.2) $$S^{\cdot\cdot\kappa\rho\sigma}_{\mu\lambda\cdots\tau} = P^{\cdot\cdot\rho}_{\mu\lambda}\, Q^{\kappa}_{\cdot\tau} = R^{\sigma}_{\cdot\tau}.$$

Men letta er op dat bijvoorbeeld

7.3) $$P^{\kappa}Q^{\lambda} \neq Q^{\kappa}P^{\lambda}$$

Er is dus niet zoiets als commutativiteit.

Een affinor is meestal geen product van vectoren maar altijd een som van producten van vectoren, b.v.

7.4) $$P^{\kappa\lambda} = \left(P^{\rho\sigma}\, \overset{\nu}{e}_{\rho}\, \overset{\mu}{e}_{\sigma}\right) \overset{\kappa}{e}_{\nu}\, \overset{\lambda}{e}_{\mu}.$$

c. Overschuiving (transvection), b.v.

7.5) $$R^{\kappa\rho} = P^{\cdot\cdot\kappa}_{\lambda\mu}\, Q^{\lambda\rho\mu}$$

d. Vouwing (contraction, Faltung, Verjüngung)

7.6) $$Q^{\kappa} = P^{\cdot\cdot\kappa\lambda}_{\lambda}$$

e. Isomeervorming (isomer) b.v.

7.7) $$Q^{\kappa\lambda\cdot\cdot\nu}_{\cdot\cdot\mu} = P^{\kappa\cdot\cdot\nu\lambda}_{\cdot\cdot\mu}.$$

f. Menging (mixing), toegepast op een bepaald aantal p gelijkstandige indices. Vorm de $p!$ isomeren door verwisseling, tel op en deel door $p!$. Teken( ) met uitschakelteken | |. B.v.

7.8) $$P^{\cdot\cdot(\kappa\rho\mu\lambda\sigma\nu)}_{\lambda} = \tfrac{1}{6}\left(P^{\cdot\cdot\kappa\rho\mu\sigma\nu}_{\lambda} + P^{\cdot\cdot\rho\sigma\mu\kappa\nu}_{\lambda} + P^{\cdot\cdot\sigma\kappa\rho\mu\nu}_{\lambda} + P^{\cdot\cdot\rho\kappa\mu\sigma\nu}_{\lambda} + P^{\cdot\cdot\kappa\sigma\mu\rho\nu}_{\lambda} + P^{\cdot\cdot\lambda\kappa\sigma\mu\rho}_{\lambda}\right).$$

Een affinor, invariant voor menging der p indices, heet symmetrisch in die indices. Een co- of contravariante affinor symmetrisch in alle indices heet tensor. 1)

---

1) Het woord tensor oorspronkelijk uit de elasticiteitsleer ontsproten voor een symmetrische affinor wordt veelal ook voor alle affinoren gebruikt. Het betere woord affinor, dat aan de tengrondslag liggende affine groep herinnert, is van F.Jung.

g. Alternatie (alternation), precies als menging, alleen worden de oneven permutaties negatief genomen. Teken [ ] met uitschakelteken]. B.v.

$$P_\lambda^{[\kappa\rho|\mu\sigma]} = \frac{1}{6}\left(P_\lambda^{\cdot\kappa\rho\mu\sigma} + P_\lambda^{\cdot\rho\sigma\mu\kappa} + P_\lambda^{\cdot\sigma\kappa\mu\rho} - P_\lambda^{\cdot\rho\kappa\mu\sigma} - P_\lambda^{\cdot\sigma\rho\mu\kappa} - P_\lambda^{\cdot\kappa\sigma\mu\rho}\right) \tag{7.9}$$

Een affinor invariant voor alternatie over p indices heet alternerend (v(alternating)) in die indices. Een co- of contravariante affinor van valentie p, symmetrisch in alle indices, heet een p-vector 1). Aangezien alterneren over meer dan n indices altijd nul geeft, zijn er alleen p vectoren voor $p \leq n$

Opgave: Verifieer b.v. voor n = 2 of n = 3 dat

$$\mathrm{Det.}\left(P^{\kappa\lambda}\right) = n!\, P^{[1[1}\cdots P^{n]}P^{n]} = n!\, P^{[1|1|}\cdots P^{n]n} = n!\, P^{[1[1}\cdots P^{|n|n]} \tag{7.10}$$

en maak duidelijk dat precies dergelijke formules gelden voor $P^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ en $P_{\kappa\lambda}$.

h. Smoren van indices t.o. van een bepaald coördinatenstelsel. Geschiedt door overschuiving met de maatvectoren, b.v.

$$\overset{\kappa}{\underset{\mu}{P}}{}^{\lambda}_{\cdot\nu} = P^{(\kappa)\lambda}_{\cdot\cdot(\mu)\nu} = P^{\rho\lambda}_{\cdot\cdot\sigma\nu}\, \overset{\kappa}{e}_{\rho}\, \underset{\mu}{e}^{\sigma} \tag{7.11}$$

(er ontstaan n^2 affinoren van de valentie 2 uit een affinor van de valentie 4). De gesmoorde indices zijn dood. Zij worden boven of onder de kernletter geplaatst of ook, vooral als er veel zijn, ter plaatse met ( ) of iets anders gemerkt.

Indien in een invariante vergelijking links en rechts dezelfde indices worden gesmoord, dan blijft de vergelijking invariant. Maar indien links en rechts de gesmoorde indices niet dezelfde zijn, dan blijft de vergelijking wel numeriek waar, zolang men het coördinatenstelsel niet verandert, maar de invariantie gaat verloren en het teken $\overset{*}{=}$ moet worden gebruikt. B.v.:

$$A^{\kappa}_{\lambda} \overset{*}{=} A^{(\kappa)}_{\lambda} = \overset{\kappa}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} A^{(\kappa)}_{(\lambda)} = \delta^{\kappa}_{\lambda} \overset{*}{=} A^{\kappa}_{(\lambda)} = \underset{\lambda}{e}^{\kappa}. \tag{7.12}$$

i. Rangvorming. De rang van een grootheid t.o. van een bepaald stel indices is het aantal lineair onafhankelijke grootheden dat men verkrijgt als men de andere indices smoort.(of ook indien men de andere indices achtereenvolgens al hun waarden laat doorlopen). De rang is een arithmetische invariant voor alle toegelaten coördinatentransformaties, Uit de definitie volgt, dat de rang t.o. v. zekere indices gelijk is aan de rang t.o.v. alle andere indices en dat de rang t.o.v. alle indices 1 dus triviaal is.

Een affinor of affinordichtheid van de valentie twee heeft dus maar één rang en deze is gelijk aan de rang van zijn matrix.

Is r de rang van een grootheid t.o.v. een index μ, dan is het aantal lineair onafhankelijke vectoren dat ontstaat bij het smoren van de andere indices juist r. De verzameling van alle vectoren die van deze lineaire afhangen met scalaire coëfficienten heet het μ-gebied (domain) van de grootheid. Zijn deze vectoren contravariant dan is er een kleinste $\mathcal{E}_p$ waar ze alle inliggen, zijn ze covariant, dan is er een grootste $\mathcal{E}_{p_r}$ waar ze alle doorgaan. Deze $\mathcal{E}_p$ heet de drager(support) van het μ-gebied.

Voorbeeld. Gegeven een $\mathcal{E}_p$ en een $\mathcal{E}_q$ die geen richting gemeen hebben in $\mathcal{E}_n$, $p+q=n$. Gevraagd een affinor B^{κ}_{λ} van de rang p, wiens κ-gebied als drager de $\mathcal{E}_p$ en wiens λ-gebied als drager de $\mathcal{E}_q$ heeft en evenzo een affinor C^{κ}_{λ}, waarbij het net andersom is. Verder wordt geeist, dat

1) Sommige auteurs gebruiken de naam antisymmetrische tensor.

7.13) a) $B^{\kappa}_{\lambda} B^{\lambda}_{\mu} = B^{\kappa}_{\mu}$

b) $C^{\mu}_{\lambda} C^{\kappa}_{\mu} = C^{\kappa}_{\lambda}$

Wordt het coördinatenstelsel zo gelegd, dat $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^r$ juist $\mathcal{E}_r$ opspannen en $\varepsilon^{r+1}, \ldots, \varepsilon^n$ juist $\mathcal{E}_q$, dan spannen omgekeerd $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ juist $\mathcal{E}_r$ op en $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n$ juist $\mathcal{E}_p$ en men vindt

7.14) a) $B^{\kappa}_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} e^{\kappa}$; $\lambda, \kappa = 1, \ldots, r$

b) $C^{\kappa}_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} e^{\kappa}$; $\lambda, \kappa = r+1, \ldots, n$.

en daaruit volgt

7.15) a) $A^{\kappa}_{\lambda} = B^{\kappa}_{\lambda} + C^{\kappa}_{\lambda}$

b) $B^{\kappa}_{\mu} = p$; $C^{\kappa}_{\mu} = q$

c) $B^{\kappa}_{\mu} C^{\mu}_{\lambda} = 0$; $B^{\mu}_{\lambda} C^{\kappa}_{\mu} = 0$.

B^{κ}_{λ} en C^{κ}_{λ} kunnen dienen om een vector v^{κ} te ontbinden in twee componenten in $\mathcal{E}_p$ en in $\mathcal{E}_q$, of een vector w_{κ} in twee componenten door $\mathcal{E}_q$ en door $\mathcal{E}_p$:

7.16)
$$v^{\kappa} = B^{\kappa}_{\lambda} v^{\lambda} + C^{\kappa}_{\lambda} v^{\lambda}$$
$$w_{\lambda} = B^{\kappa}_{\lambda} w_{\kappa} + C^{\kappa}_{\lambda} w_{\kappa}.$$

§ 8. Tensoren.

Het aantal onafhankelijke kentallen van een tensor van de valentie p is $\binom{n+p-1}{p}$.

Het geometrische beeld van de tensor $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = w_{(\lambda_1 \ldots \lambda_p)}$ is in een gecentreerde $\mathcal{E}_n$ de X_{n-1} (hyperoppervlak) met de vergelijking

8.1) $$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} x^{\lambda_1} \ldots x^{\lambda_p} = 1$$

in puntcoördinaten. De rang r van een tensor is natuurlijk gelijk t.o.v. alle indices. Er is dus slechts één drager, een $\mathcal{E}_{n-r}$ met de vergelijkingen

8.2) $$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} x^{\lambda} = 0$$

De X_{n-1} (8.1) is een cylinder bestaande uit ∞^{r-1} $\mathcal{E}_{n-1}$'d alle met deze zelfde $(n-r)$-richting. De kegel

8.3) $$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} x^{\lambda_1} \ldots x^{\lambda_p} = 0$$

bestaat uit ∞^{r-2} $\mathcal{E}_{n-r+1}$'d die alle de $\mathcal{E}_{n-r}$ (8.2) bevatten.

Het geometrisch beeld van de tensor $v^{\kappa_1 \ldots \kappa_p} = v^{(\kappa_1 \ldots \kappa_p)}$ is in een gecentreerde $\mathcal{E}_n$ de X_{n-1} met de vergelijking

8.4) $$v^{\kappa_1 \ldots \kappa_p} u_{\kappa_1} \ldots u_{\kappa_p} = 1$$

in hypervlakcoördinaten u_{λ}. Men kan hier soortgelijke beschouwingen opstellen.

Voor de physica is vooral de tensor van de valentie 2 belangrijk. Het geometrisch beeld van $p_{\lambda\kappa}$ is het tweedegraads hyperoppervlak:

8.5) $$p_{\lambda\kappa} x^{\lambda} x^{\kappa} = 1.$$

Er bestaat een merkwaardige stelling, die zegt, dat men voor een reële tensor van de rang r een reëel coördinatenstelsel (K') steeds op

veel wijzen zo kan kiezen, dat

8.6) $P_{11}=-1;\ \dots;\ P_{ss}=-1;\ P_{s+1,s+1}=+1;\ \dots;\ P_{rr}=+1;\ P_{r+1,r+1}=0;\ \dots P_{nn}=0$

Daarbij is s een invariant die men de index van P_{ik} noemt. De volgorde $-\dots-+\dots+$ heet de signatuur. Men zegt dat de signatuur negatief is voor s oneven en positief voor s even. Is $r=n$ dan heeft de omkering t.o. van (K') de kentallen

8.7) $\bar{P}^{11}=-1;\ \dots;\ \bar{P}^{ss}=-1;\ \bar{P}^{s+1,s+1}=+1;\ \dots;\ \bar{P}^{nn}=+1$

en dus dezelfde index en dezelfde signatuur. In dit geval noemt men P^{ik} en P_{ik} positief definiet voor $s=0$, negatief definiet voor $s=n$ en indefiniet voor $0<s<n$. Het geometrisch beeld van P_{ik} is hetzelfde hyperoppervlak (8.5) welks vergelijkingen in hypervlakcoördinaten luiden

8.8) $\bar{P}^{ik}u_i u_k=1$.

Voor $n=3$ voert dit alles tot het bekende proces van het beschrijven van een tweedegraadsoppervlak ten opzichte van onderling toegevoegde coördinaatassen door het middelpunt.

De stelling kan ook in een andere vorm worden uitgesproken. Is r de rang van de reële tensor P^{ik} dan bestaat er altijd tenminste één reële affinor Q^i_k, zo dat de niet verdwijnende kentallen van

8.9) $'P^{ik}=Q^i_r\,Q^k_s\,P^{rs}$

zijn

8.10) $'P^{11}=-1;\ \dots\ 'P^{ss}=-1;\ 'P^{s+1,s+1}=+1,\ \dots,\ 'P^{rr}=+1;\ 'P^{r+1,r+1}=0,\ \dots\ 'P^{nn}=0$.

§ 9. p-Vectoren.

Het aantal onafhankelijke kentallen van een p-vector is $\binom{n}{p}$. Een n-vector heeft dus één onafhankelijk kental b.v. $v^{1\dots n}$. Maar $v^{1\dots n}$ is niet invariant en een n-vector is dus geen scalar.
Niet iedere p-vector kan worden geschreven als het alternerend product van p vectoren

9.1) $v^{k_1\dots k_p}=p!\,v_1^{[k_1}\dots v_p^{k_p]}$.

De n.e.v. voorwaarde hiervoor is dat

9.2) $v^{[k_1\dots k_p}v^{\lambda_1\dots\lambda_p]}=0$

Is deze voorwaarde vervuld dan heet de p-vector enkelvoudig en er geldt een vergelijking van de vorm (9.1) maar de factoren zijn natuurlijk niet eenduidig bepaald. Wat wel bepaald is, is de ξ_p (door O), die door deze vectoren wordt opgespannen en de inhoud van het door deze vectoren in ξ_p bepaalde parallelepipedum. Als beeld van de p-vector kan men dus nemen een deel van een ξ_p met een p-dimensionale schroefzin die door de volgorde $v^{k_1},\dots,v^{k_p}$ wordt vastgelegd. De kentallen zijn de projecties van dit ξ_p-deel op de coördinaten ξ_{ik}, gemeten met de parallelotopen der maatvectoren en b.v. $v^{1\dots p}$ is positief wanneer de meegeprojecteerde schroefzin correspondeert met de schroefzin vastgelegd door $t^1,\dots t^p$ in deze volgorde.

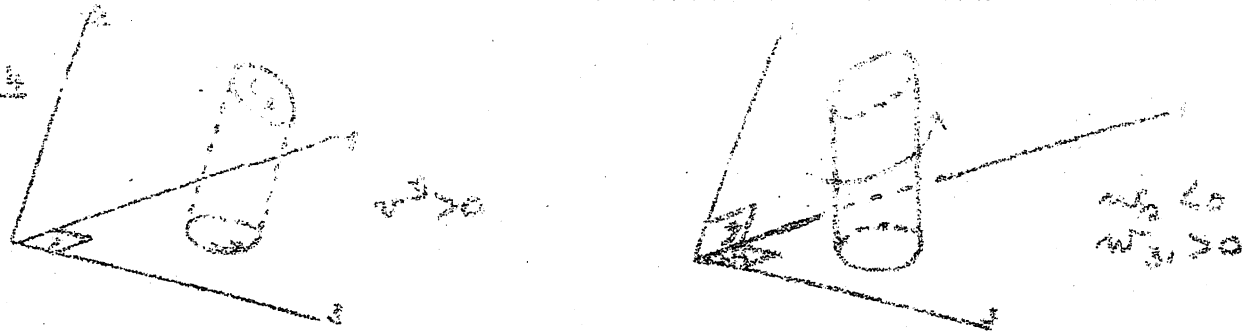
Een enkelvoudige covariante p-vector kan geschreven worden

9.3) $w_{\lambda_1\dots\lambda_p}=p!\,w_{[\lambda_1}\dots w_{\lambda_p]}$

en nu leggen de vectoren $w_1,\dots w_p$ vast een ξ_{n-p} door O en een cylinder welks $(n-1)$-dimensionale begrenzing bestaat uit ∞^{p-1} ξ_{n-p}'s, alle evenwijdig met de ξ_{n-p} door O en waaraan een uitwendige schroefzin is toegevoegd bepaald door de volgorde $w_1,\dots w_p$. De doorsnede van deze cylinder met de coördinaten ξ_{ik}, gemeten met de parallelotopen der maatvectoren zijn de kentallen en b.v. $w_{1\dots p}$ is positief indien de schroefzin om de buis correspondeert met de schroefzin vastgelegd door $e^1,\dots e^k$ in deze volgorde.

Men make zich deze dingen onfelijk voor n = 3 en p = 2. Een contravariante bivector en een covariante bivector hebben dan de beelden

fig 4



Een n- vector is natuurlijk altijd enkelvoudig. Maar men kan bewijzen, dat een (n-1)-vector ook altijd enkelvoudig is. In ξ_3 bestaan dus alleen enkelvoudige p-vectoren. Een niet enkelvoudige p-vector kan altijd geschreven worden als een som van enkelvoudige p-vectoren b.v.

9.4) $$\nu^{\kappa_1 \cdots \kappa_p} = \nu^{(\mu_1)\cdots(\mu_p)} \, \xi^{[\kappa_1}_{\mu_1} \cdots \xi^{\kappa_p]}_{\mu_p}$$

Men noemt dit een decompositie in bladen wanneer het aantal bladen zo klein mogelijk is. Dit aantal is natuurlijk voor elke gegeven p-vector een arithmetische invariant. Voor $p \geq 2$ en $\leq n-2$ is er van deze invariant weinig bekend maar voor $p = 2$ en $p = n-2$ is het kleinste aantal bladen precies gelijk aan de rang gedeeld door 2. We bewijzen dit voor $p = 2$, $n = 4$, het geval dat in de relativiteitstheorie optreedt.

Zij

9.5) $$F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]} \neq 0,$$

dan betekent dit dat

9.6) $$F^{12}F^{34} + F^{23}F^{14} + F^{31}F^{24} \neq 0,$$

of wat hetzelfde is

9.7) $$F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]} = 0.$$

Men neme nu een enkelvoudige bivector $F^{\kappa\lambda}_1$ die voldoet aan de betrekkingen

9.8) a) $$F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]}_1 \neq 0$$

b) $$F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]}_1 = 0$$

en trachte $F^{\kappa\lambda}$ te ontbinden in $F^{\kappa\lambda}_1$ en een andere enkelvoudige bivector $F^{\kappa\lambda}_2 = F^{\kappa\lambda} - \alpha F^{\kappa\lambda}_1$. Dan moet gelden

9.10) $$F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]}_2 = 2\alpha \, F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]}_1 = 0$$

en dit is één vergelijking waaruit α kan worden opgelost. De rang r van $F^{\kappa\lambda}$ kan alleen 2 of 4 zijn omdat een alternerende (antisymmetrische) determinant met een oneven aantal rijen en kolommen altijd nul is en we vinden dus voor $r = 4$ twee bladen (niet eenduidig bepaald) en voor $r = 2$ slechts één blad.

Uit het feit dat het minimum aantal bladen van een bivector van de rang r juist $\frac{1}{2}r$ is, volgt de merkwaardige stelling, dat het coördinatenstelsel bij een reële bivector $F^{\kappa\lambda}$ steeds reëel zo gekozen kan worden, dat de niet verdwijnende kentallen $F^{\kappa\lambda}$ zijn

9.11) $$F^{1'2'} = 1 \; ; \; F^{3'4'} = 1 \; ; \; \cdots \; ; \; F^{(r-1)'r'} = 1$$

Deze stelling kan ook in een andere vorm worden uitgesproken. Is $F^{\kappa\lambda}$ reëel, dan bestaat er steeds tenminste één reële affinor $Q^{\kappa}_{\cdot\mu}$ zo, dat

9.12) $$'F^{\kappa\lambda} = Q^{\kappa}_{\cdot\mu} \, F^{\mu\nu} \, Q^{\lambda}_{\cdot\nu}$$

de niet verdwijnende kentallen

9.13) $$'F^{12} = 1 \; ; \; 'F^{34} = 1 \; ; \; \cdots \; ; \; 'F^{(r-1)'r'} = 1$$

heeft.

Een n-vector heeft slechts één kental en twee contravariante of twee covariante n-vectoren zijn dus altijd gelijk op een scalaire factor na. Het beeld van een n-vector is een n-dimensionaal volume

met een schroefzin en het kental is dit volume gedeeld door het volume van het parallelotoop aller maatvectoren. Het kental is positief als de schroefzin dezelfde is als die van $a^1, \ldots, a^n$ in deze volgorde. Het beeld van een covariante n-vector is precies hetzelfde maar nu is het kental het volume.

Het ene kental van $v^{\kappa_1 \ldots \kappa_n}$ tranformeert zich als volgt (verg.(7.10)

9.14) $$v^{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = A^{\lambda_1}_{\kappa_1} \ldots A^{\lambda_n}_{\kappa_n} v^{\kappa_1 \ldots \kappa_n} = n! A^{\lambda_1}_{[1} \ldots A^{\lambda_n}_{n]} v^{1 \ldots n} = \Delta v^{1 \ldots n}$$

en voor $w_{1 \ldots n}$ geldt

9.15) $$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \Delta^{-1} w_{1 \ldots n} .$$

Volgens onze definitie kan dus $v^{1 \ldots n}$ ook worden opgevat als het kental van een scalaire Δ-dichtheid van het gewicht -1 en $w_{1 \ldots n}$ als het kental van een dito dichtheid van het gewicht +1. Op de constructie dezer dichtheden komen wij nog terug.

Bij elk coördinatenstelsel (K) behoren voor elke waarde van p juist $\binom{n}{p}$ contravariante en $\binom{n}{p}$ covariante enkelvoudige p-vectoren, b.v. $p! \, e^{[1} \ldots e^{p]}$ de zogenaamde maat-p-vectoren. De twee n-vectoren worden geschreven

9.16) $$\underset{(K)}{\varepsilon}{}^{\kappa_1 \ldots \kappa_n} \overset{\text{def}}{=} n! \, e^{[\kappa_1} \ldots e^{\kappa_n]} , \text{ dus } \underset{(K)}{\varepsilon}{}^{1 \ldots n} = +1$$

$$\underset{(K)}{\varepsilon}{}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \overset{\text{def}}{=} n! \, e_{[\lambda_1} \ldots e_{\lambda_n]} , \text{ dus } \underset{(K)}{\varepsilon}{}_{1 \ldots n} = +1 ,$$

Deze voegen aan elke contravariante (n-p)-vector één covariante p-vector toe en omgekeerd:

9.17) $$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \frac{1}{(n-p)!} \underset{(K)}{\varepsilon}{}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \kappa_{p+1} \ldots \kappa_n} v^{\kappa_{p+1} \ldots \kappa_n}$$

$$v^{\kappa_{p+1} \ldots \kappa_n} = \frac{1}{p!} w^{\lambda_1 \ldots \lambda_p} \underset{(K)}{\varepsilon}{}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \kappa_{p+1} \ldots \kappa_n}$$

Beide vergelijkingen drukken uit dat

9.18) $$w_{\mu_1 \ldots \mu_p} = v^{\mu_{p+1} \ldots \mu_n}$$

indien $\mu_1 \ldots \mu_n$ een even permutatie van $1, \ldots, n$ voorstelt.[F] Deze toevoeging kan worden benut om aan te tonen, dat een (n-2)-vector altijd kan worden ontbonden in ten hoogste ½ n bladen indien dit voor een bivector al bewezen is.

§ 10. Dichtheden (densities)

De meest belangrijke Δ-dichtheden (zie definitie (6.2)) zijn de contravariante n-vector-Δ-dichtheid $\varepsilon^{\kappa_1 \ldots \kappa_n}$ van het gewicht + 1 en de covariante n-vector - Δ -dichtheid $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ van het gewicht -1 gedefinieerd door de voor iedere coördinatenstelsel geldige vergelijkingen.

10.1) $$\varepsilon^{1 \ldots n} = +1 \; ; \; w_{1 \ldots n} = +1$$

In tegenstelling tot $\underset{(K)}{\varepsilon}{}^{\kappa_1 \ldots \kappa_n}$ en $\underset{(K)}{\varepsilon}{}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ zijn deze grootheden onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel. Zij spelen eenzelfde rol als de eenheidsaffinor A^{κ}_{λ} (Bewijs als oefening de invariantie van (10.1)).

De grootheden kunnen worden gebruikt om een eenéénduidig verband te leggen tussen contra- (co-)variante p-vectoren en co-(contra-) variante (n-p)-vector - Δ -dichtheden van het gewicht -1(+1):

F) Deze toevoeging is natuurlijk niet invariant, daar afhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel (K).

10.2)

$$\tilde{w}_{\lambda_1\cdots\lambda_p} = \frac{(-1)^{\alpha_p}}{(n-p)!}\,\tilde{\varepsilon}_{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n}\,v^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n}$$

$$v^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n} = \frac{(-1)^{\alpha_p}}{p!}\,\tilde{w}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\,\tilde{\varepsilon}^{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n}$$

$$\tilde{w}^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n} = \frac{(-1)^{\beta_p}}{p!}\,w_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\,\tilde{\varepsilon}^{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n}$$

$$w_{\lambda_1\cdots\lambda_p} = \frac{(-1)^{\beta_p}}{(n-p)!}\,\tilde{\varepsilon}_{\lambda_1\cdots\lambda_p\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n}\,\tilde{w}^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_n}$$

of in kortere vorm

10.3)

$$\tilde{w}_{\mu_1\cdots\mu_p} = (-1)^{\alpha_p}\,v^{\mu_{p+1}\cdots\mu_n}$$

$$\tilde{w}^{\mu_{p+1}\cdots\mu_n} = (-1)^{\beta_p}\,w_{\mu_1\cdots\mu_p} \qquad \mu_1,\ldots,\mu_p = \text{een permutatie van } 1,\ldots,n.$$

We houden de keuze van α_p en β_p nog vrij om te kunnen aansluiten bij de later in te voeren identificeringen van grootheden.

Uit (10.3) ziet men duidelijk, dat de kentallen van een co-(contra)-variante) p-vector ook kunnen worden opgevat als kentallen van een contra-(co-)variante (n-p)-vector - Δ-dichtheid van het gewicht +1(-1). Er is dus tussen deze grootheden geen verschil, hun geometrische beelden zijn dezelfde en het gaat alleen maar om een andere notatie voor de kentallen. Deze kan soms gemakkelijk zijn als $n-p < p$, men komt dan met minder indices uit. Bijvoorbeeld voor een contravariante n-vector $v^{\kappa_1\cdots\kappa_n}$ is het gemakkelijk $\tilde{w}$ te schrijven met de definitievergelijking

10.4)

$$\tilde{w}[\kappa] = \frac{(-1)^{\alpha_0}}{n!}\,v^{1\cdots n}; \text{ evenzo } \tilde{w}(\kappa) = \frac{(-1)^{\beta_n}}{n!}\,w_{1\cdots n}$$

Men heeft dan geen indices nodig. De transformatie van $\tilde{w}$ als scalaire dichtheid met het gewicht +1 luidt

10.5)

$$\tilde{w}[\kappa'] = \Delta\,\tilde{w}[\kappa].$$

Aangezien er geen index meer is, moet er iets wezen om het coördinatenstelsel aan te duiden en dat wordt hier gedaan door de κ en κ' tussen haken. Waar geen misverstand mogelijk is, kan dit teken weggelaten worden.

Blijkens (10.2) corresponderen $\tilde{\varepsilon}^{\kappa_1\cdots\kappa_n}$ en $\tilde{\varepsilon}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ zelf met de getallen $(-1)^{\beta_0}$ en $(-1)^{\alpha_n}$.

Volgens de definitie in § 6 verschillen gewone dichtheden van Δ-dichtheden alleen door het optreden van $|\Delta|$ in plaats van Δ in de transformatieformules. Dit scheelt natuurlijk niets bij de groep $G_{\Delta a}$ $(\Delta = +1)$ en bij de groep kunnen dus deze dichtheden geïdentificeerd worden. Dit is een tweede voorbeeld van identificering van grootheden als men zich tot een ondergroep van G_n beperkt.

Om de meetkundige betekenis van gewone dichtheden te verkrijgen beschouwen we de V-scalar (zie § 6) $\tilde{\rho}$ de transformatiewijze

10.6)

$$\tilde{\rho}[\kappa'] = \frac{1}{|\Delta|}\,\tilde{\rho}[\kappa]$$

Is $\tilde{\rho}[\kappa]=1$ dan heeft $\tilde{\rho}[\kappa']$ dezelfde waarde $[\kappa']$ $[\kappa]$ dezelfde schroefzin hebben en de waarde -1 in het andere geval [1]).
Het meetkundig beeld van $\tilde{\rho}$ is dus niets anders dan een schroefzin waaraan het getal 1 is toegevoegd.
Is $\tilde{w}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ een Δ-dichtheid van het gewicht +1 dan is het duidelijk dat $w^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = \tilde{\rho}\,\tilde{w}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ een gewone dichtheid is. Deze grootheid heeft nu dezelfde kentallen als $\tilde{w}^{\kappa_1\cdots\kappa_p}$ ten opzichte van ieder stelsel met dezelfde schroefzin als $[\kappa]$ maar ten opzichte van de andere stelsels hebben de kentallen met het andere teken.

---

1) Physici spreken wel eens van pseudoscalar, maar dit woord is ook in andere zin gebruikt.

Dat wil zeggen, dat het meetkundig beeld van $\mathfrak{w}^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}$ precies hetzelfde is als dat van $\tilde{\mathfrak{w}}^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}$ d.w.z. een deel van een ε_{n-p}, maar nu niet met een uitwendige orientering maar wel met een inwendige (schroef er in en niet er omheen). De gewone dichtheden vormen dus inderdaad een nieuwe klasse van grootheden.

Vermenigvuldigt men een p-vector $v^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}$ met $\tilde{\rho}$, dan krijgt men volgens definitie (§6) een $\tilde{v}$-p-vector en hiervoor geldt hetzelfde, het meetkundig beeld blijft hetzelfde behalve dat nu de inwendige orientering door een uitwendige vervangen wordt. Hieruit volgt, dat een co-(contra-) variante p-vectordichtheid van het gewicht -1(+1) hetzelfde is als contra- (co-)variante $\tilde{w}$-(n-p)-vector. Inderdaad kan men nu ook weer tussen de kentallen dezer beide groepen een eenéénduidig verband leggen met behulp van $\varepsilon^{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$ en $\tilde{\varepsilon}_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$

10.7)

$$\mathfrak{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} = \frac{(-1)^{\delta_p}}{(n-p)!}\, \tilde{\varepsilon}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p \kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}\, \tilde{v}^{\kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}$$

$$\tilde{v}^{\kappa_{p+1} \cdots \kappa_n} = \frac{(-1)^{\delta_p}}{p!}\, \mathfrak{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}\, \varepsilon^{\lambda_1 \cdots \lambda_p \kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}$$

$$\mathfrak{w}^{\kappa_{p+1} \cdots \kappa_n} = \frac{(-1)^{\delta_p}}{p!}\, \tilde{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}\, \tilde{\varepsilon}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p \kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}$$

$$\tilde{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} = \frac{(-1)^{\delta_p}}{(n-p)!}\, \tilde{\varepsilon}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p \kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}\, \mathfrak{w}^{\kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}$$

of in kortere vorm

$$\mathfrak{w}_{\mu_1 \cdots \mu_p} = (-1)^{\gamma_p}\, \tilde{v}^{\mu_{p+1} \cdots \mu_n}$$

10.8)

$$\mathfrak{w}^{\mu_{p+1} \cdots \mu_n} = (-1)^{\delta_p}\, \tilde{w}_{\mu_1 \cdots \mu_p}$$

De keuze van γ_p en δ_p houden we weer aan tot later.

De gewone dichtheden zijn de dichtheden, die in de physica voorkomen, tezamen met de gewone p-vectoren. Bijv. is in de klassieke mechanica een massa per m.v. (maatvolume = volume van het parallelepipedum der affine maatvectoren) een gewone scalaire dichtheid van het gewicht +1. Een stroomdichtheid is een gewone contravariante vectordichtheid van het gewicht +1.

Wij spreken af als hoofdnotatie voor een p-vector steeds $v^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}$ en $w_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$ te beschouwen en als tweede notatie $\tilde{\mathfrak{w}}_{\lambda_{p+1} \cdots \lambda_n}$ en $\tilde{\mathfrak{w}}^{\kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}$. Evenzo voor dichtheden $\mathfrak{w}^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}$ en $\mathfrak{w}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$ als hoofdnotatie en $\tilde{v}_{\lambda_{p+1} \cdots \lambda_n}$ en $\tilde{w}^{\kappa_{p+1} \cdots \kappa_n}$ als tweede notatie.

Hier volgen twee overzichtstabellen:

getal	hoofdnotatie	tweede notatie	gewicht	oriënterin
S	scalar	$\tilde{\rho}^{\kappa\lambda\mu}$ cov. triv.Δ-dichth.	-1	±-teken
		$\tilde{\rho}_{\mu\lambda\kappa}$ contr.triv.Δ-dichth.	+1	
	v^{κ} contr.vector	$\tilde{\mathfrak{w}}_{\lambda\kappa}$ cov.biv. Δ-dichth.	-1	inw.
0.9)	w_{λ} cov. vector	$\tilde{\mathfrak{w}}^{\lambda\kappa}$ contr.biv. Δ-dichth.	+1	uitw.
	$f^{\kappa\lambda}$ contr.bivector	$\tilde{f}_{\lambda\kappa}$ cov.vect. Δ-dichth.	-1	inw.
	$h_{\lambda\kappa}$ cov. bivector	$\tilde{f}^{\kappa\lambda}$ contr.vect.Δ-dichth.	+1	uitw.
	$p^{\kappa\lambda\mu}$ contr.trivect.	$\tilde{p}^{\kappa\lambda\mu}$ scal. Δ-dichth.	-1	schroef
	$q_{\lambda\mu\kappa}$ cov. trivect.	$\tilde{q}_{\lambda\mu\kappa}$ scal. Δ-dichth.	+1	

schroefzin + getal	hoofdnotatie	gew.	tweede notatie	orient.
	$\tau^{\mu\lambda\mu}$ cov. triv.dichth.	+1	$\tilde{\xi}$ W-scalar	)schroef
	$\tau_{\mu\lambda\kappa}$ contr.triv.dichth.	+1		)
	$\eta_{\lambda\kappa}$ cov. biv. dichth.	-1	$\tilde{v}^{\kappa}$ contr.W-vect.	uitw.
10.10)	$\omega^{\kappa\lambda}$ contr.biv.dichth.	+1	$\tilde{w}_{\lambda}$ cov.W-vect.	inw.
	f_{λ} cov.vectordichth.	-1	$\tilde{f}^{\kappa\lambda}$ contr.W-bivect.	uitw.
	f^{κ} contr.vectordichth.	+1	$\tilde{h}_{\kappa\lambda}$ cov. W-bivect.	inw.
	ξ scalar dichtheid	-1	$\tilde{p}^{\kappa\lambda\mu}$ contr.W-trivect.	)±teke
	ξ_{μ} scalar dichtheid	+1	$\tilde{q}_{\mu\lambda\kappa}$ cov. W-trivect.	)

§ 11. De fundamentaaltensor.

In $\mathcal{E}_n$ introduceren wij een reële tensor $g_{\lambda\kappa}$ met de rang n en constante kentallen. Voor de omkering $\tilde{g}^{\kappa\lambda}$ schrijven we kort $g^{\kappa\lambda}$

Deze tensoren heten de co- en contravariante fundamentaaltensor.

Een $\mathcal{E}_n$ uitgerust met een fundamentaaltensor heet R_n

In R_n is de uitdrukking

11.1) $$+\sqrt{g_{\lambda\kappa}v^{\lambda}v^{\kappa}}$$

een invariant van v^{κ}, die de lengte van v^{κ} genoemd wordt 1). Is $g_{\lambda\kappa}$ indefiniet dan kan $g_{\lambda\kappa}v^{\lambda}v^{\kappa}$ zowel >0 als <0 als $=0$ zijn. De vectoren met lengte nul heten nulvectoren en willen de nulkegel met de vergelijking

11.2) $$g_{\lambda\kappa}x^{\lambda}x^{\kappa}=0 .$$

Voor een definiete fundamentaaltensor is de nulkegel imaginair. Is de nulkegel reëel dan wordt de gecentreerde R_n verdeeld in twee delen, het +-gebied waar $g_{\lambda\kappa}v^{\lambda}v^{\kappa}>0$ en het - gebied waar $g_{\lambda\kappa}v^{\lambda}v^{\kappa}<0$

Twee vectoren u^{κ} en v^{κ} waarvoor geldt

11.3) $$g_{\lambda\kappa}u^{\lambda}v^{\kappa}=0$$

heten onderling loodrecht. Nulvectoren zijn dus de enige vectoren die op zichzelf loodrecht staan. Naar aanleiding van deze definitie kan voor twee vectoren, die beide in het +-gebied of beide in het - gebied liggen, de ingesloten hoek worden gedefinieerd.

Gebruik makend van de stelling in § 8 kan het coördinatenstelsel zo gelegd worden, dat de niet verdwijnende kentallen van $g_{\lambda\kappa}$ en $g^{\lambda\kappa}$ ten opzichte van dit stelsel (k); $k=1,\dots,n$ zijn

$$g_{11}=-1\,;\ \dots\ ;\ g_{ss}=-1\,;\ g_{s+1,s+1}=+1\,;\ \dots\ ;\ g_{nn}=+1,$$

11.4) $$g^{11}=-1\,;\ \dots\ ;\ g^{ss}=-1\,;\ g^{s+1,s+1}=+1\,;\ \dots\ ;\ g^{nn}=+1,$$

Een dergelijk stelsel heet een orthogonaalstelsel. De maatvectoren van een orthogonaalstelsel worden geschreven i^{k} en i_{k}

Voor een orthogonaalstelsel gebruiken we altijd latijnse lopende indices en verticale vaste indices.

De fundamentaaltensor voegt aan elke covariante vector één enkele contravariante vector toe en omgekeerd

---

1) De ruimte der relativitietstheorie is een R_4 met signatuur $- - - +$
Indien $g_{\lambda\kappa}v^{\lambda}v^{\kappa}>0$ is, wordt in plaats van lengte ook wel van duur gesproken.

11.5) $v^\kappa g_{\kappa\lambda} = v_\lambda \; ; \quad v_\lambda = g_{\lambda\kappa} v^\kappa$

Daaruit volgt dat in een R_n v^κ en v_λ mogen worden beschouwd als twee soorten van kentallen voor één en dezelfde grootheid, de "vector" die men naar believen door een pijl of door een systeem van twee parallele ξ_{n-1}'s met een pijl er door mag voorstellen. Vandaar dat we nu ook deze beide grootheden <u>dezelfde kernletter</u> geven en schrijven

11.6) $v^\kappa g_{\kappa\lambda} = v_\lambda \; ; \quad v_\lambda = g_{\lambda\kappa} v^\kappa$,

Dit proces heet het <u>op- en neerhalen van indices</u>. Men kan dit proces ook op affinoren toepassen, bijv.:

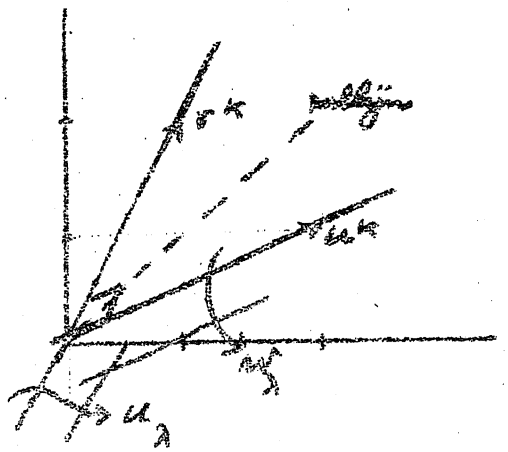
11.7) $T^{\rho\,\cdot\,\nu}_{\cdot\,\lambda\,\cdot} = g^{\rho\kappa} T_{\kappa\lambda}{}^{\cdot\,\cdot\,\nu} \; ; \quad T_{\kappa\lambda\rho} = T_{\kappa\lambda}{}^{\cdot\,\cdot\,\nu} g_{\nu\rho}$.

De vergelijking

11.8) $g_{\lambda\kappa} = g_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} g^{\mu\nu}$

rechtvaardigt nu het gebruik van dezelfde kernletter voor $g_{\lambda\kappa}$ en $g^{\kappa\lambda}$.

<u>Fig.5</u>



Als voorbeeld beschouwen we op het orthogonale coördinatenstelsel(x^κ) $\kappa=1,2$ in een R_2 met de fundamentaaltensor

11.9) $g_{11} = +1 \; ; \quad g_{22} = -1$

de vectoren u^κ en v^κ

$$u^1 = 2, \quad u^2 = 1,$$

11.10) $$v^1 = 1, \quad v^2 = 2,$$

Deze vectoren zijn onderling loodrecht en voor u_λ en v_λ vindt men

11.11) $$u_1 = 2, \quad u_2 = -1$$
$$v_1 = 1, \quad v_2 = -2.$$

Uit de figuur ziet men, dat de orienteringen van u^κ en u_λ gelijk gericht zijn en die van v^κ en v_λ tegengesteld gericht. Dit geldt algemeen: <u>De orienteringen van een contravariante vector v^κ en zijn toegevoegde v_λ zijn gelijk gericht als v^κ in het + gebied ligt en tegengesteld gericht als v^κ in het - gebied ligt</u>. Dus:

Om van een vector v^κ met lengte $v \neq 0$ de vector v_λ te maken, construeert men twee evenwijdige vlakken $\perp v^\kappa$ op een afstand $1/v$ en voegt daaraan de orientering van v^κ toe als v^κ in het + gebied ligt en de omgekeerde orientering in het andere geval.

De maatvectoren e^κ_k van een orthogonaal systeem zijn kennelijk onderling loodrecht. De betrekkingen tussen deze en de covariante maatvectoren e^k_κ luiden

11.12) $$e^\kappa_1 = -e^1_\kappa \; \ldots \; e^\kappa_s = -e^s_\kappa \; ; \quad e^\kappa_{s+1} = +e^{s+1}_\kappa \; \ldots \; e^\kappa_n = e^n_\kappa,$$

en voor de orthogonale kentallen van een vector geldt

11.13) $$v^k = \begin{cases} -v_k \; ; & k = 1, \ldots, s \\ +v_k \; ; & k = s+1, \ldots, n \end{cases}$$

Men controleert dit alles gemakkelijk aan de hand van (11.4). In orthogonale coördinaten is de lengte van v^k

11.14) $$v = \left| \sqrt{-v^1 v^1 \ldots - v^s v^s + v^{s+1} v^{s+1} + \ldots + v^n v^n} \right|$$

en de vergelijking van de nulkegel is

11.15) $-x^1x^1 - \cdots - x^s x^s + x^{s+1}x^{s+1} + \cdots + x^n x^n = 0$

In een R_n zijn de volgende n-vectoren op het teken na vastgelegd

11.16) $\overset{(k)}{\zeta}{}^{k_1 \cdots k_n} = n!\, \overset{(k)}{\zeta}{}^{[k_1}_1 \cdots \overset{(k)}{\zeta}{}^{k_n]}_n$; dus $\overset{(k)}{\zeta}{}^{1\cdots n} = 1$,

$\overset{(k)}{\zeta}_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = n!\, \overset{(k)}{\zeta}_{[\lambda_1}{}^{1} \cdots \overset{(k)}{\zeta}_{\lambda_n]}{}^{n}$; dus $\overset{(k)}{\zeta}_{1\cdots n} = 1$.

Hun meetkundig beeld is het eenheidsvolume voorzien van de schroefzin vastgelegd door $\overset{(1)}{\zeta}{}^{\kappa} \cdots \overset{(n)}{\zeta}{}^{\kappa}$ in deze volgorde. Het teken wisselt bij overgang tot een orthogonaalsysteem met andere schroefzin. Wij onderscheiden in een R_n steeds eenheidsvolumen (e.v) vastgelegd door de fundamentaaltensor en maatvolume (m.v.) zijnde het parallelotoop der maatvectoren t.o. van een willekeurig affien coordinatenstelsel. De massa per m.v. is een scalaire dichtheid maar de massa per e.v. is een scalar als de fundamentaaltensor vast blijft.

Het kental $\overset{(k)}{\zeta}_{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$ laat zich opvatten als een kental van een scalaire Δ-dichtheid van het gewicht +1.

11.17) $\tilde{\zeta}(\kappa) = \overset{(k)}{\zeta}_{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$

en evenzo correspondeert $\gamma^{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$ met $1/\tilde{\zeta}$

Indien $\tilde{\omega}$ een scalar is met kental + 1 t.o. van alle coördinatenstelsels met dezelfde schroefzin als h dan is

11.18) $\zeta = \tilde{\omega}\, \tilde{\zeta}$

een gewone scalaire dichtheid van het gewicht + 1 en deze dichtheid heeft ~~weer~~ het kental + 1 ten opzichte van alle orthogonale coördinatenstelsels behorende bij $g_{\lambda\mu}$. Dit komt natuurlijk doordat $\tilde{\omega}$ de tekenwisseling weer te niet doet. Deze ζ staat in nauw verband met $g_{\lambda\mu}$. Inderdaad is

11.19) $g[\kappa] = |\det(g_{\lambda\mu})| = n!\,|g_{[1[1}\cdots g_{n]n]}|$.

een dichtheid van het gewicht + 2 en daar $g[\zeta] = 1$, volgt

11.20) $\zeta = |g^{\frac{1}{2}}|$.

In tegenstelling tot $\tilde{\zeta}$ heeft ζ geen schroefzin en dat komt uit, een fundamentaaltensor ligt immers alleen een maat vast en geen schroefzin.

In de gewone ruimte gebruiken we de signaturen - - - en + + +. De eerste is belangrijk wegens de voorkeur die de signatuur - - - + in de relativiteitstheorie geniet.

Zodra een fundamentaaltensor is ingevoerd kan men voor een gegeven tensor $T_{\lambda\mu}$ de vraag stellen of er ook vectoren v^κ zijn, die aan de vergelijking

11.21) $T_{\lambda\mu}\, v^\mu = \sigma\, g_{\lambda\mu}\, v^\mu$

voldoen, waarin σ een passend gekozen scalar is. Schrijft men deze vergelijking

11.22) $(T_{\lambda\mu} - \sigma g_{\lambda\mu})\, v^\mu = 0$

dan volgt onmiddellijk dat de rang van $T_{\lambda\mu} - \sigma g_{\lambda\mu}$ niet n kan zijn. Eerste voorwaarde is dus

11.23) $\det(T_{\lambda\mu} - \sigma g_{\lambda\mu}) = 0$.

Dit is de zogenaamde S-vergelijking bekend uit de theorie der kwadratische oppervlakken waarvan bekend is (voor reële $T_{\lambda\mu}$ en definiete $g_{\lambda\mu}$ dat zij alleen reële wortels bezit. Zijn σ en σ' twee ongelijke wortels en zijn v^κ en v'^κ de vectoren die voor deze waarden van σ aan (11.21) voldoen dan volgt

11.24) $v'^\lambda T_{\lambda\mu} v^\mu = \sigma\, v'^\lambda g_{\lambda\mu} v^\mu = \sigma' v'^\lambda g_{\lambda\mu} v^\mu$

en dat is alleen mogelijk indien $v_i^k \perp v_j^k$ en bovendien

11.25) $$v_i^\lambda T_{\lambda\mu} v_j^\mu = 0$$

Is σ_i een m-voudige wortel van (11.23) dan kan men bewijzen, dat de vectoren die aan (11.21) voldoen voor $\sigma = \sigma_i$ juist alle vectoren zijn, die in een bepaalde R_m in R_n liggen. In deze R_m kan men dus op ∞ veel wijzen er m onderling loodrechte uitzoeken, die dan elk loodrecht staan op alle vectoren, die bij andere wortels behoren. Op deze wijze krijgt men n onderling loodrechte vectoren, alle voldoende aan (11.21). Legt men een orthogonaal coördinatenstelsel in de richtingen dezer vectoren, dan volgt

11.26) $$T_{ij} = v_i^\lambda v_j^\mu T_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{voor } i \neq j$$

en daarmee is bewezen

Hoofdassenstelling van een tensor:

Is de fundamentaaltensor definiet en $T_{\lambda\mu}$ een reële tensor dan is het altijd mogelijk een reëel orthogonaal coördinatenstelsel (h) te vinden zo dat

$$T_{ij} = 0 \quad ; \quad i \neq j.$$

Er bestaat een corresponderende stelling voor bivectoren:

Hoofdbladenstelling van een bivector:

Is de fundamentaaltensor definiet en is $F_{\lambda\mu}$ een reële bivector dan is het altijd mogelijk een reëel orthogonaal coördinatenstelsel (h) te vinden zo dat de niet-verdwijnende kentallen van $F_{\lambda\mu}$ zijn

$$F_{12}, F_{34}, \ldots, F_{2r-1,2r}$$

en zodat dus de bivector ontbonden is in ½ r onderling loodrechte bladen.

Het verdient opmerking dat noch de hoofdassenstelling noch de hoofdbladenstelling blijven gelden wanneer de fundamentaaltensor indefiniet is. Dit ligt daaraan dat de tensor of bivector een speciale stand zou kunnen hebben t.o.v. van de reële nulkegel. Voor "algemene stand" blijven de stellingen gelden maar dit is vaag en voorzichtigheid is geboden.

III IDENTIFICERING VAN GROOTHEDEN NA INVOERING VAN EEN ONDERGROEP VAN $\mathcal{G}_a$

§ 12 Introductie van een eenheidsvolume (ondergroep $\mathcal{G}_{eq}$)

Een eenheidsvolume is gegeven door een gewone scalaire dichtheid van gewicht + 1. Men kan nu p-vectoren met p-vectordichtheden (gewicht ± 1) identificeren en N-p-vectoren met p-vector- Δ -dichtheden (gew. ±1) volgens het schema

12.1) $$w^{k_1 \ldots k_p} = \sigma_I v^{k_1 \ldots k_p} \; ; \quad \tilde{w}^{k_1 \ldots k_p} = \sigma_I \tilde{v}^{k_1 \ldots k_p}$$

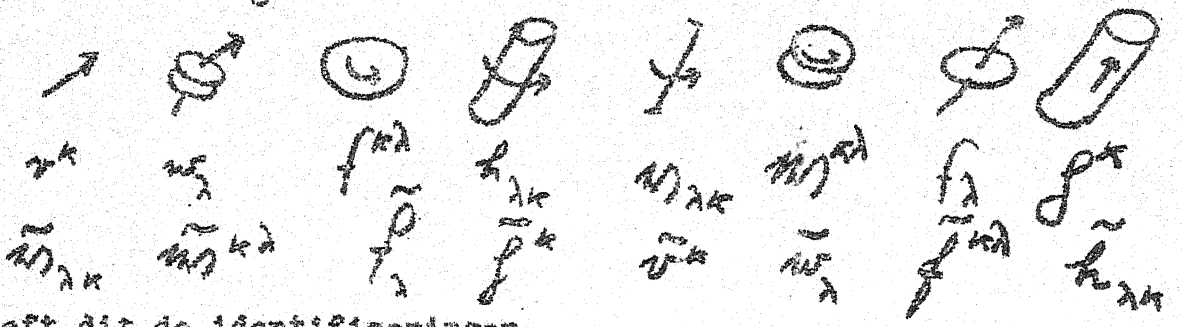
$$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sigma_I^{-1} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} \; ; \quad \tilde{w}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sigma_I^{-1} \tilde{w}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$$

Indien σ_I behoort bij de fundamentaaltensor $\sigma_I = +\sigma_j$ geeft dit in orthogonale kentallen

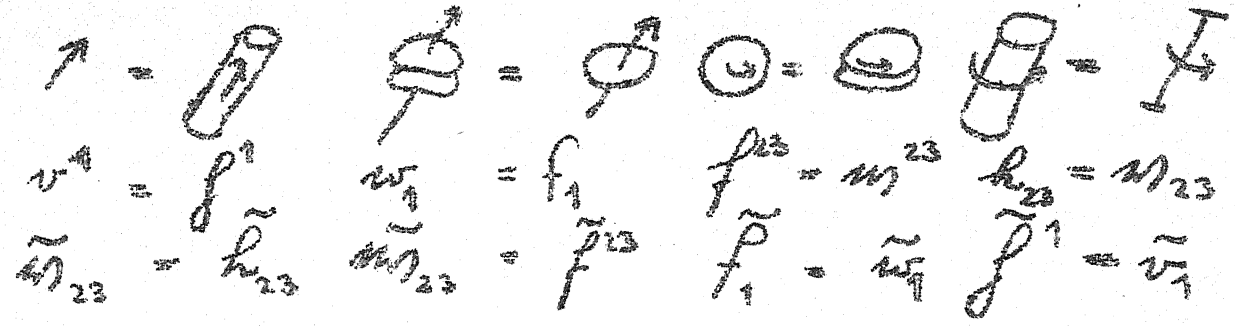
12.2) $$w^{h_1 \ldots h_p} = v^{h_1 \ldots h_p} \; ; \quad \tilde{w}^{h_1 \ldots h_p} = \tilde{v}^{h_1 \ldots h_p}$$

$$w_{i_1 \ldots i_p} = w_{i_1 \ldots i_p} \; ; \quad \tilde{w}_{i_1 \ldots i_p} = \tilde{w}_{i_1 \ldots i_p}$$

Beschouwen we in R_3 de grootheden

12.3) 

dan geeft dit de identificeringen

12.4) 

De vier grootheden hebben nu elk twee meetkundige representaties en vier notaties voor de kentallen. Overeenkomstig hun eenvoudigst meetkundig beeld worden zij veelal genoemd: <u>polaire vector</u>, <u>polaire bivector</u>, <u>axiale bivector</u> en <u>axiale vector</u>.

Indien wij (12.2) vergelijken met (10.3) en (10.8) dan volgt dat teneinde overeenstemming te bereiken de nog vrij gelaten exponenten aan de volgende voorwaarden moeten voldoen

12.5) $$\gamma_p \equiv -\beta_p \ (\mathrm{mod}\ 2) \ ; \ \delta_p \equiv -\alpha_p \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

§ 13. <u>Introductie van een fundamentaaltensor (onder-groep $G_{(n)}$)</u>

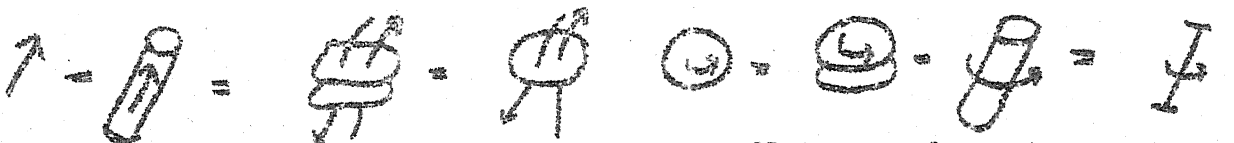
Na introductie van $g_{\lambda\kappa}$ hebben wij de volgende identificeringen

13.1) $$v^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = g^{\kappa_1\lambda_1}\cdots g^{\kappa_p\lambda_p} h_{\lambda_1\cdots\lambda_p} \ ; \ \tilde{v}^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = g^{\kappa_1\lambda_1}\cdots g^{\kappa_p\lambda_p}\tilde{w}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$
$$w^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = g^{\kappa_1\lambda_1}\cdots g^{\kappa_p\lambda_p} w_{\lambda_1\cdots\lambda_p} \ ; \ \tilde{w}^{\kappa_1\cdots\kappa_p} = g^{\kappa_1\lambda_1}\cdots g^{\kappa_p\lambda_p}\tilde{v}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

of in orthogonale kentallen, indien ξ_p het aantal - tekens is onder de eerste p tekens van de signatuur

13.2) $$v^{1\cdots p} = (-1)^{\xi_p} w_{1\cdots p} \ ; \quad \tilde{v}^{1\cdots p} = (-1)^{\xi_p}\tilde{w}_{1\cdots p}$$
$$w^{1\cdots p} = (-1)^{\xi_p} g\, v_{1\cdots p} \ ; \quad \tilde{w}^{1\cdots p} = (-1)^{\xi_p} g\, v_{1\cdots p}$$

In R_3 beschouwen we alleen de beide signaturen $- + +$ en $+ + +$. Dan hebben we, aangezien $g_{\lambda\kappa}$ vanzelf al een eenheidsvolume vastlegt, de identificeringen

13.3) 

De twee grootheden hebben nu elk vier geometrische representaties en acht notaties voor de kentallen. Overeenkomstig hun eenvoudigst meetkundig beeld worden zij vaak genoemd <u>polaire vector</u> en <u>axiale vector</u>.

Vergelijking van (13.2) met (10.3) en (10.8) leert dat de exponenten behalve aan (12.5), aan de volgende voorwaarden moeten voldoen:

13.4)
$$\alpha_{n-p} - \beta_p \equiv p(n-p) \begin{cases} +1 \\ -0 \end{cases} \pmod 2$$
$$\gamma_p - \delta_{n-p} \equiv p(n-p) \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} \pmod 2$$

voor negatieve/positieve signatuur.

§ 14. <u>Introductie van een schroefzin (ondergroep der transformaties met $\Delta > 0$)</u>.

Een schroefzin is gegeven door een W-scalar $\tilde{\omega}$ wiens kental de waarden + 1 en -1 kan aannemen. $\tilde{\omega}$ geeft de volgende identificeringen

14.1)
$$\tilde{v}^{k_1 \dots k_p} = \tilde{\omega}\, v^{k_1 \dots k_p}$$
$$\tilde{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \tilde{\omega}\, w_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$$
$$\tilde{\mathfrak{v}}^{k_1 \dots k_p} = \tilde{\omega}\, \mathfrak{v}^{k_1 \dots k_p}$$
$$\tilde{\mathfrak{w}}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \tilde{\omega}\, \mathfrak{w}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$$

In $\mathfrak{B}_3$ hebben we dus indien $\tilde{\omega}[k] = \mathfrak{A}$ (schroefzin van ξ^k, ξ^k, ξ^k in deze volgorde):

14.2)
$$v^1 = \tilde{v}^1 \qquad f^1 = \tilde{f}^1 \qquad w_1 = \tilde{w}_1 \qquad f_1 = \tilde{f}_1$$
$$\tilde{\mathfrak{w}}_{23} = \mathfrak{w}_{23} \qquad \tilde{h}_{23} = h_{23} \qquad \tilde{\mathfrak{w}}_{23} = \mathfrak{w}_{23} \qquad \tilde{f}^{23} = f^{23}$$

De vier grootheden hebben nu elk twee meetkundige representaties en vier notaties voor de kentallen.

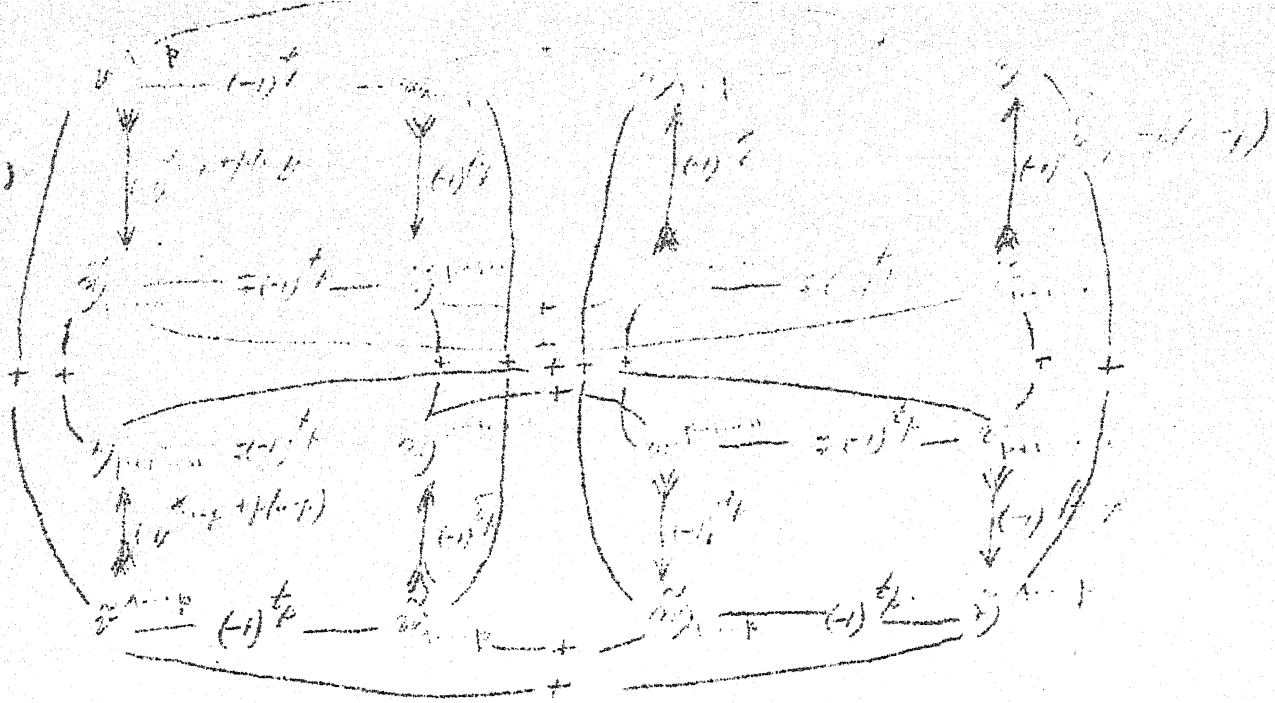
Vergelijking van (13.5) met (10.3) en (10.8) doet zien dat de exponenten moeten voldoen aan de voorwaarden

14.3)
$$\alpha_p \equiv \gamma_p \pmod 2$$
$$\beta_p \equiv \delta_p \pmod 2$$

§ 15. <u>Introductie van een fundamentaaltensor en een schroefzin (ondergroep)</u>

Nu gelden alle identificeringen in orthogonale coördinaten:

15.1)

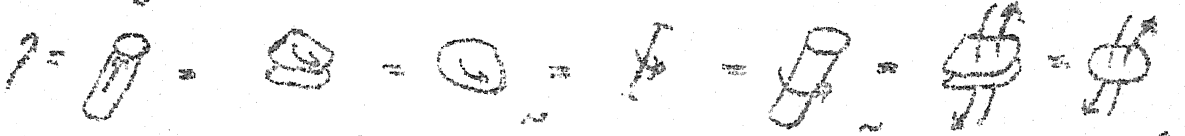


en de acht exponenten voor iedere waarde van p moeten voldoen aan alle voorwaarden (12.5), (13.4), (14.3):

15.2)
$$\left.\begin{array}{lll} \gamma_p \equiv -\beta_p & \alpha_{n-p} - \beta_p \equiv p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases} & \alpha_p \equiv \gamma_p \\ (\gamma_{n-p} \equiv -\beta_{n-p}) & \alpha_p - \beta_{n-p} \equiv p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases} & \alpha_{n-p} \equiv \gamma_{n-p} \\ \delta_p \equiv -\alpha_p & (\gamma_p - \delta_{n-p} \equiv p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases}) & (\beta_p \equiv \delta_p) \\ \delta_{n-p} \equiv -\alpha_{n-p} & (\gamma_{n-p} - \delta_p \equiv p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases}) & (\beta_{n-p} \equiv \delta_{n-p}) \end{array}\right\} \pmod 2$$

Van deze 12 congruenties zijn er zeven onafhankelijk. De anderen zijn tussen haakjes geplaatst.

Voor K_3 hebben we nu de identificeringen



15.3)
$$\pm w^1 = \pm f^1 = \mp \tilde{w}_1 = \mp \tilde{f}_1 = \mp \tilde{w}^1 = \pm \tilde{f}^1 = \mp w_1 = \mp f_1$$

$$\pm w_{23} = \pm \tilde{f}_{23} = \pm \tilde{w}^{23} = \pm f^{23} = \pm w_{23} = \mp f_{23} = \pm \tilde{w}^{23} = \pm \tilde{f}^{23}.$$

maar hier, evenmin als in (12.4), (13.3) en (14.2) staat nog niet vast hoe de bovenste rij kentallen met de onderste rij samenhangt, m.a.w. of

$$w^1 = + w_{23} \quad \text{of} \quad w^1 = - w_{23},$$

Dit hangt af van de keuze der exponenten

Er is nu nog maar één grootheid over; de vector met 6 meetkundige representaties en 16 notaties voor de kentallen. Dit is het standpunt van de gewone vector-analyse. Er moet uitdrukkelijk op worden gewezen, dat uitdrukkingen als "polaire vector" enz. alleen mogen worden gebezigd als vastligt, welke groep ten grondslag gelegd is. Anders zijn zulke termen zinloos.

Met behulp van de 7 congruenties (15.2) kan men alle exponenten uitdrukken

15.4)
$$\alpha_p \equiv \alpha_p \qquad \beta_p \equiv -\alpha_p \qquad \gamma_p \equiv \alpha_p \qquad \delta_p \equiv -\alpha_p$$

$$\alpha_{n-p} \equiv -\alpha_p + p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases} \qquad \beta_{n-p} \equiv \alpha_p + p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases} \qquad \gamma_{n-p} \equiv -\alpha_p + p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases} \qquad \delta_{n-p} \equiv \alpha_p + p(n-p)\begin{cases}+1\\+0\end{cases}$$

Voor n oneven is $\tfrac{1}{2}(n-p)$ een en men krijgt dus als eenvoudigste oplossingen

n oneven, signatuur negatief

15.5) $$\alpha_p = \beta_p = \gamma_p = \delta_p = p \ .$$

n oneven, signatuur positief

15.6) $$\alpha_p = \beta_p = \gamma_p = \delta_p = 0 \ .$$

Voor n even is $\tfrac{1}{2}(n-p) = p \Leftrightarrow n-p$. Dit levert moeilijkheden op voor n even en 2p=n want dan wordt α_p imaginair voor p even en negatieve signatuur en voor p oneven en positieve signatuur. Men doet het verstandigste door voor n even tot de groep $\mathcal{G}_n$ terug te keren, d.w.z. de identificeringen tussen geslaagde en ongeslaagde grootheden te laten vervallen. Dan vervalt (14.3) en de overblijvende 6 congruenties zijn

15.7)
$$\left.\begin{aligned} \gamma_p &= -\beta_p \\ \delta_{n-p} &= -\beta_{n-p} \\ \delta_p &= -\alpha_p \\ \delta_{n-p} &= -\alpha_{n-p} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha_{n-p} - \beta_p &= p \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} \\ \alpha_p - \beta_{n-p} &= p \begin{cases} +1 \\ +0 \end{cases} \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\ 2).$$

De eenvoudigste oplossingen zijn

n even, signatuur negatief

15.8)
$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = p \\ \beta_p &= \beta_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = p \end{aligned}$$

n even, signatuur positief

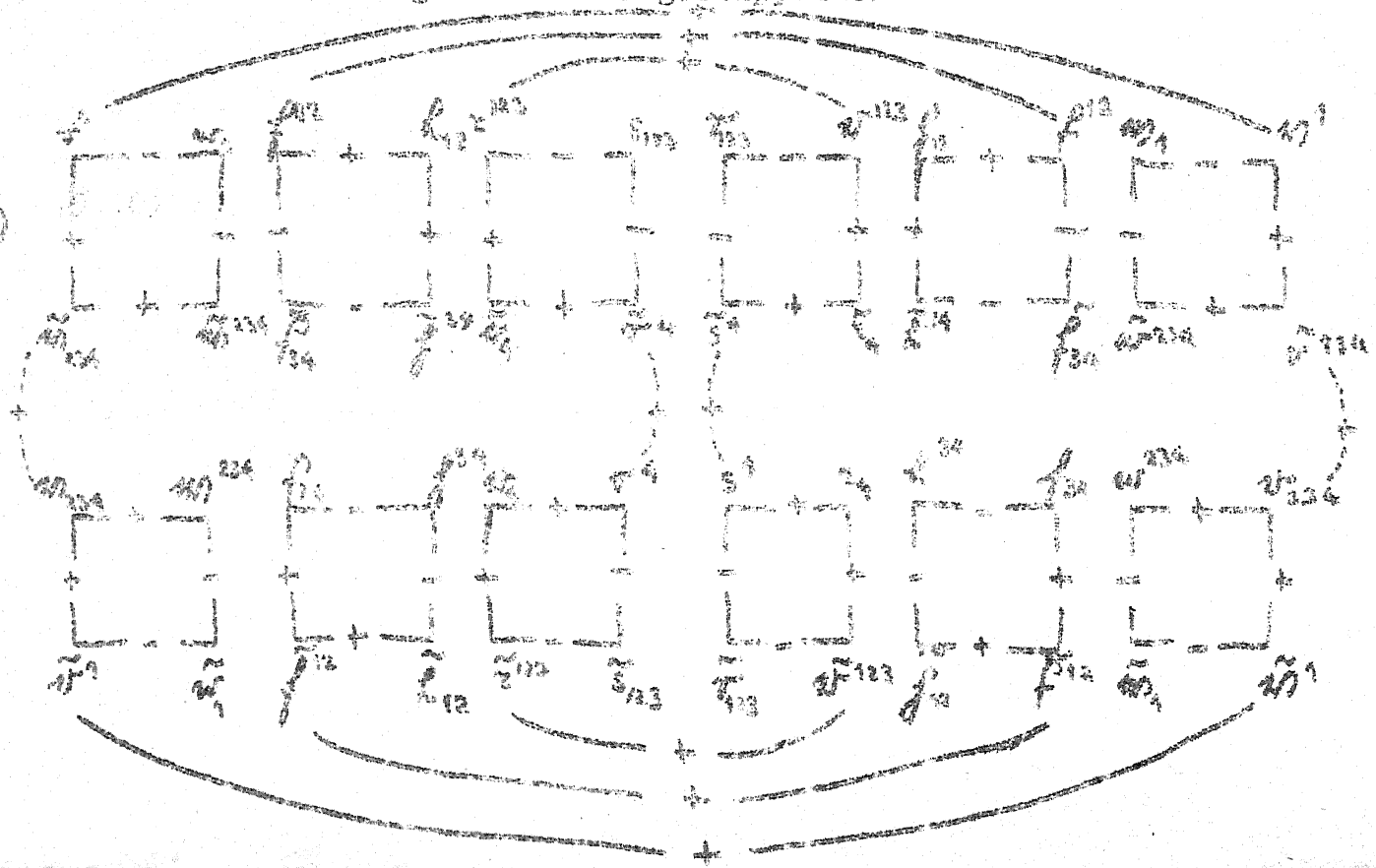
$$\alpha_p = \alpha_{n-p} = \delta_p = \delta_{n-p} = 0$$

15.9)
$$\beta_p = \beta_{n-p} = \gamma_p = \gamma_{n-p} = p$$

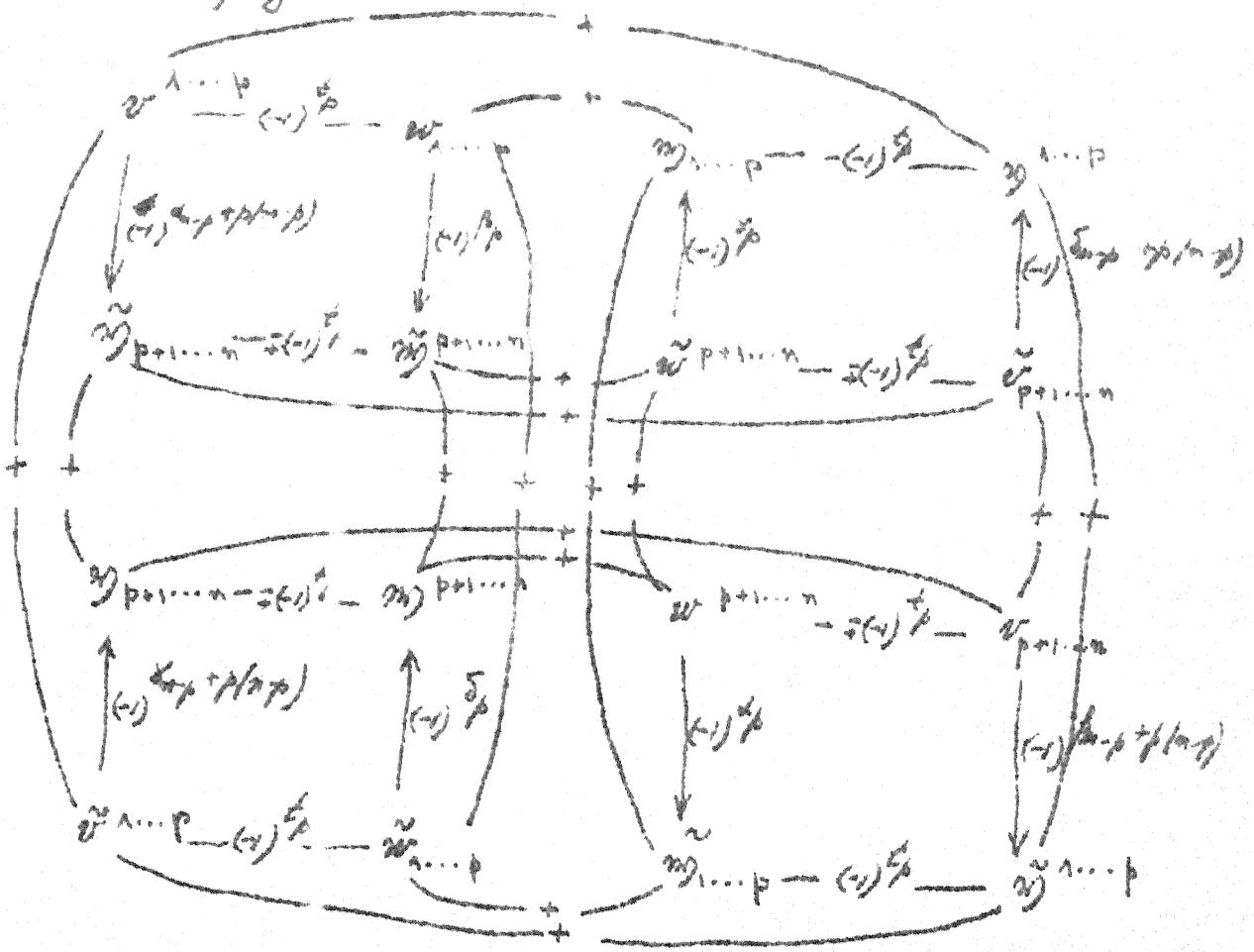
Met deze waarden krijgen we voor n = 3 zodanige tekens dat nu in (12.4), (13.3), (14.2) en (15.3) ook de boven elkaar staande kentallen gelijk worden.

Voor de $\mathcal{P}_4$ van de relativiteitstheorie met signatuur − − − + krijgen we de identificeringen (niet de gestippelde)

15.10)



Behandlung 23.



waaraan we als er een schroefzin is ingevoerd (voor ponen nog de gestippelde identificeringen) $v^1 = \tilde{v}^1$, $s_{123} = \tilde{s}_{123}$, $s^4 = \tilde{s}^4$ en $v_{234} = \tilde{v}_{234}$

met als gevolg $w_1 = \tilde{w}_1$, $t^{123} = \tilde{t}^{123}$, $t_4 = \tilde{t}_4$, $w^{234} = \tilde{w}^{234}$

mogen toevoegen zodat althans voor deze waarden van p de schroefzin 1,2, 3,4 een identificerende rol kan spelen. Voor p even lukt dit echter niet. Wil men $f^{12} = \tilde{f}^{12}$ stellen dan zou volgen $f^{34} = -\tilde{f}^{34}$ Uiteindelijk krijgen we dus in deze R_4 met schroefzin twee soorten grootheden, de vector met 8 meetkundige representaties en 16 notaties voor de kentallen en de bivector met 4 meetkundige representaties en 8 notaties voor de kentallen. Laat men de schroefzin weg dan krijgt men drie soorten grootheden, vector, bivector en trivector elk met 4 meetkundige representaties en 8 notaties voor de kentallen.

IV GEOMETRISCHE OBJECTEN IN X_n

§ 16. De X_n

Wij beschouwen de verzameling van alle stellen van n waarden van n variabelen $\xi^k = 1, \dots, n$ en noemen elk stel een punt, het punt ξ^k. Worden andere variabelen $\xi^{k'}$ geintroduceerd

16.1) $$\xi^{k'} = \xi^{k'}(\xi^k)$$

dan stellen we de eis, dat de functies $\xi^{k'}$ analytisch zijn in het beschouwde gebied en dat de matrix van

16.2) $$A^{k'}_k \overset{\text{def}}{=} \partial\xi^{k'}/\partial\xi^k$$

aldaar de rang n heeft, dan bestaat er een gebied waarin de omkering

16.3) $$\xi^k = \xi^k(\xi^{k'})$$ $F(k)$

eenduidig bepaald is en de ξ^k zijn aldaar analytisch. De verzameling van alle punten uitgerust met alle coördinatenstelsels die uit (16.1) kunnen worden gevormd met behulp van dergelijke analytische en omkeerbare transformaties, heet een X_n. Het verschil tussen een $\mathcal{E}_n$ en een X_n is dat de groep G_n vervangen wordt door de verzameling $\mathcal{F}_n$ van alle omschreven transformaties. $\mathcal{F}_n$ is geen groep, maar een "pseudogroep" d.w.z. twee transformaties leveren altijd weer een transformatie behorende tot $\mathcal{F}_n$ indien zij na elkaar kunnen worden uitgevoerd, maar dat is niet altijd het geval

In een X_n bestaan geen rechte lijnen platte vlakken enz. Men noemt daarom de ξ^k in X_n wel kromlijnige coördinaten. Er is niets tegen in een $\mathcal{E}_n$ eveneens kromlijnige coördinaten in te voeren, men beschouwt de $\mathcal{E}_n$ dan als X_n en maakt wat de coördinaten betreft geen gebruik van de typische ℓ_n-eigenschappen

§ 17 Geometrische objecten in X_n

Een geometrisch object in een bepaald punt ξ^k van een X_n is een correspondentie tussen de toegelaten coördinatenstelsels enerzijds en de geordende stellen van N getallen anderzijds, die aan de volgende voorwaarden voldoet:

a. aan ieder toegelaten coördinatenstelsel is één en slechts één geordend stel van N getallen toegevoegd;

b. indien Φ_Λ, $\Lambda = 1, \dots, N$ en $\Phi_{\Lambda'}$, $\Lambda' = 1, \dots, N'$ corresponderen met (*) en (*'), dan hangen de $\Phi_{\Lambda'}$ alleen af van de Φ_Λ en van de functies $\xi^{k'}(\xi^k)$ in de omgeving van ξ^k 1)

De Φ_Λ heten de kentallen van het object met betrekking tot (*). Geometrische objecten in X_n worden onderscheiden naar de transformatiewijze

hunner kentallen.

Zijn de $\Phi_{\lambda'}$ lineair homogeen in de Φ_{λ}, homogeen algebraïsch in de $A^{\kappa'}_{\kappa}$ en onafhankelijk van de afgeleiden der $A^{\lambda'}_{\kappa}$, dan heet het geometrisch object een <u>geometrische grootheid</u>.

Is een object gedefinieerd in elk punt van een zeker gebied der dan ontstaat een <u>objectveld</u> in dat gebied. Ondersteld wordt steeds, dat de kentallen <u>analytische</u> functies der coördinaten zijn.

Een punt ξ^{κ} is een object maar geen grootheid. De differentialen $d\xi^{\kappa}$ vormen echter een grootheid, het <u>lijnelement</u>:

17.1) $$d\xi^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa}\, d\xi^{\kappa}$$

(17.1) leert, dat $\mathfrak{E}_n$ in elk punt de groep Gl_n induceert. Bijgevolg is aan ieder punt ξ^{κ} der X_n een gecentreerde $\mathfrak{E}_n$ toegevoegd, de <u>lokale</u> $\mathfrak{E}_n$ van dat punt. Het is gebruikelijk het centrum van $\mathfrak{E}_n$ met ξ^{κ} te identificeren. Twee locale $\mathfrak{E}_n$'s in verschillende punten hebben niets met elkaar te maken, met name hebben zij geen enkel punt gemeen.

Aangezien er in elk punt der X_n een gecentreerde locale $\mathfrak{E}_n$ is kunnen alle definities van grootheden uit hoofdstuk II eenvoudig overgenomen worden. Het enige verschil is, dat $A^{\lambda'}_{\kappa}$ niet langer een stel constanten voorstelt maar een stel functies der ξ^{κ} namelijk de afgeleiden der $\xi^{\kappa'}$ naar de ξ^{κ}.

Optelling van grootheden, vermenigvuldiging, overschuiving, enz. volgen dezelfde wetten als in de $\mathfrak{E}_n$ maar alleen in één en dezelfde lokale $\mathfrak{E}_n$. Grootheden in verschillende $\mathfrak{E}_n$'s kunnen niet op deze wijze gecombineerd worden. <u>Iedere lokale $\mathfrak{E}_n$ is een wereld apart</u>.

Om de maatvectoren te verkrijgen voeren we n scalairen $\overset{\kappa}{\xi}$ in, numeriek gelijk aan de ξ^{κ}:

17.2) $$\overset{\kappa}{\xi} = \xi^{\kappa}$$

dan verkrijgtmen bij differentiatie de volgende betrekkingen

17.3) a) $\underset{\lambda}{e}{}^{\kappa} \overset{def}{=} \dfrac{\partial \xi^{\kappa}}{\partial \overset{\lambda}{\xi}}$ contravariante maatvectoren

b) $\underset{\kappa}{e}{}_{\lambda} \overset{def}{=} \dfrac{\partial \overset{\kappa}{\xi}}{\partial \xi^{\lambda}}$ covariante maatvectoren

c) $\delta^{\kappa}_{\lambda} \overset{def}{=} \dfrac{\partial \overset{\kappa}{\xi}}{\partial \overset{\lambda}{\xi}}$ Kronecker symbool

d) $A^{\kappa}_{\lambda} \overset{def}{=} \dfrac{\partial \xi^{\kappa}}{\partial \xi^{\lambda}}$ eenheidsaffinor

---

1) De $\Phi_{\lambda'}$ zijn dus functionalen. Verg. Schouten en Haantjes, On the theory of the geometric object, Proc, London, Math. Soc. 1936, 356-376

§ 18 <u>Invariante differentiaaloperatoren</u> I. Grad, Div. en Rot.

De afgeleiden van een vector of affinor bijv. w_{λ} vormen geen geometrisch object. Immers

18.1) $$\partial_{\mu'} w_{\lambda'} = A^{\mu}_{\mu'}\, \partial_{\mu} \left(A^{\lambda}_{\lambda'} w_{\lambda} \right) = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'}\, \partial_{\mu} w_{\lambda} + w_{\lambda} A^{\mu}_{\mu'}\, \partial_{\mu} A^{\lambda}_{\lambda'}$$
$$= A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'}\, \partial_{\mu} w_{\lambda} + w_{\lambda}\, \partial_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'}$$

De $\partial_{\mu} w_{\lambda}$ <u>samen met</u> de w_{λ} vormen dus wel een geometrisch object maar geen geometrische grootheid. Vitali heeft hiervan gebruik gemaakt.

Er zijn echter enige invariante differentiaaloperatoren

a. De natuurlijke afgeleide of gradient van een scalar of W. scalar:

18.2) $\partial_{\mu'} \rho = A^{\mu}_{\mu'} \partial_\mu \rho \quad ; \quad \partial_{\mu'} \tilde{\rho} = A^{\mu}_{\mu'} \partial_\mu \tilde{\rho}$

Andere schrijfwijze:

18.3) $\Pi \rho = Grad\, \rho \quad ; \quad \Pi \tilde{\rho} = Grad\, \tilde{\rho}$

b. De natuurlijke afgeleide of rotatie van een covariante q-vector of W-q-vector, bijv.

18.4) $(q+1)\, \partial_{[\mu'} w_{\lambda_1' \dots \lambda_q']} = (q+1)\, A^{\mu}_{[\mu'} A^{\lambda_1}_{\lambda_1'} \dots A^{\lambda_q}_{\lambda_q'} \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_q]} + (q+1) \partial_{[\mu'} A^{\lambda_1}_{\lambda_1'} \dots A^{\lambda_q}_{\lambda_q'} w_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}$

$$= A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda_1}_{\lambda_1'} \dots A^{\lambda_q}_{\lambda_q'} (q+1) \partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \dots \lambda_q]}$$

omdat

18.5) $\partial_{[\mu'} A^{\lambda}_{\lambda_j]} = \partial_{[\mu'} \partial_{\lambda_j]} \xi^{\lambda} = 0$

De rotatie is een (q+1)-vector of W-(q+1)-vector en wordt ook wel geschreven met weglating van alle indices

18.6) $(q+1)\, \Pi w = Rot\, w \quad ; \quad (q+1)\, \Pi \tilde{w} = Rot\, \tilde{w}$

c. De natuurlijke afgeleide of divergentie van een contravariante p-vectordichtheid of p-vector-Δ-dichtheid van het gewicht +1, bijv.:

18.7) $\partial_{\mu'} \eta^{\mu' \kappa_2' \dots \kappa_p'} = A^{\kappa_2' \dots \kappa_p'}_{\kappa_2 \dots \kappa_p} \partial_\mu \eta^{\mu \kappa_2 \dots \kappa_p}$

De divergentie is een (p-1)-vectordichtheid of (p-1)-vector-Δ-dichtheid van het gewicht +1. Wij geven hier het bewijs alleen voor p=1:

18.8) $\partial_{\mu'} \eta^{\mu'} = A^{\mu}_{\mu'} \partial_\mu \Delta^{-1} A^{\mu'}_{\lambda} \eta^{\lambda} = \Delta^{-1} \partial_\mu \eta^{\mu} + \eta^{\mu} \partial_\mu \Delta^{-1} +$

$$+ \Delta^{-1} \eta^{\lambda} \partial_\mu A^{\mu}_{\mu'} A^{\mu'}_{\lambda} + \Delta^{-1} \eta^{\lambda} A^{\mu}_{\mu'} \partial_\mu A^{\mu'}_{\lambda}$$

$$= \eta^{\mu} \partial_\mu \Delta^{-1} + \Delta^{-1} A^{\mu}_{\mu'} \eta^{\lambda} \partial_\mu A^{\mu'}_{\lambda} + \Delta^{-1} \partial_\mu \eta^{\mu}$$

$$= \eta^{\lambda} \partial_\lambda \Delta^{-1} - \Delta^{-1} A^{\mu}_{\mu'} \eta^{\lambda} \partial_\lambda A^{\mu'}_{\mu} + \Delta^{-1} \partial_\mu \eta^{\mu}.$$

Nu is tengevolge van (1.5)

18.9) $\partial_\lambda \log \Delta^{-1} = \frac{\partial \log \Delta^{-1}}{\partial A^{\mu}_{\mu'}} \partial_\lambda A^{\mu}_{\mu'}$

en bijgevolg

18.10) $\partial_{\mu'} \eta^{\mu'} = \Delta^{-1} \partial_\mu \eta^{\mu}$

Andere schrijfwijze:

18.11) $\Pi \eta = Div\, \eta \quad ; \quad \Pi \tilde{\eta} = Div\, \tilde{\eta}$

Uit de definitievergelijkingen volgt onmiddellijk

18.12)

a)	Rot Grad $\rho = 0$	Rot Grad $\tilde{\rho} = 0$
b)	Rot Grad $w = 0$	Rot Rot $\tilde{w} = 0$
c)	Div Div $\eta = 0$	Div Div $\tilde{\eta} = 0$

Men kan bewijzen:

Een covariante vector w_λ (W-vector $\tilde{w}_\lambda$) is dan en alleen dan gradient van een scalar (W-scalar) indien Rot $w = 0$ (Rot $\tilde{w} = 0$)

Een covariante q-vector $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$ (W-q-vector $\tilde{w}_{\lambda_1 \ldots \lambda_q}$) is voor q > 1 dan en alleen dan rotatie van een (q-1)-vector (W-(q-1)-vector) indien Rot $w = 0$ (Rot $\tilde{w} = 0$)

Een contravariante p-vectordichtheid $\eta^{\kappa_1 \ldots \kappa_p}$ (p-vector-Δ -dichtheid $\tilde{\eta}^{\kappa_1 \ldots \kappa_p}$) is voor p > 1 dan en aleen dan divergentie van een (p+1)-vectordichtheid ((p+1)-vector-Δ -dichtheid) indien Div $\eta = 0$ (Div $\tilde{\eta} = 0$)

We beschouwen nu de verschillende gevallen voor n=3.

a. Gradient scalar en divergentie trivectordichtheid.

De oppervlakken

18.13) $$\rho = \text{constant}$$

heten de equiscalaire oppervlakken van het scalarveld ρ Is w_λ de gradient van p dan hebben in elk punt de twee vlakken van w_λ de 2-richting van het raakvlak aan het equiscalaire oppervlak door dat punt. Neem nu twee van die oppervlakken in elkaars buurt

18.14) $$\rho = c \quad ; \quad \rho = c + d\varepsilon$$

en een punt ξ^κ op het eerste oppervlak. Dan is

18.15) $$d\rho = w_\lambda d\xi^\lambda$$

en de vergelijking

18.16) $$w_\lambda d\xi^\lambda = d\varepsilon$$

drukt dus uit dat $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ op het tweede oppervlak ligt. Bijgevolg stellen de facetjes van de twee oppervlakken in ξ^κ en $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ precies de vector w_κ / w_ε voor. Een gradientveld is dus niet alleen χ_2 - vormend d.w.z overal tangerend aan een stel van ∞^1 χ_2's maar bovendien passen de op "infinitesimale schaal" getekende gradientvectoren aan elkaar en vormen een stel dubbeloppervlakken die de ruimte geheel opvullen.

Een veld van de vorm

18.17) $$w_\lambda = \alpha \partial_\lambda \rho$$

is blijkbaar ook χ_2-vormend maar de vectoren w_λ sluiten niet meer zo mooi aan elkaar. Nodig en voldoende voorwaarde opdat een veld χ_2-vormend, d.i. van de vorm (18.17) is, is overigens dat

18.18) $$w_\varepsilon \partial_\mu w_{\lambda\nu} = 0$$

ρ correspondeert met de trivector-Δ -dichtheid $\rho \tilde{\varepsilon}^{\kappa\lambda\mu}$

Vormt men nu van deze grootheid de divergentie dan komt er

18.19) $$\partial_\kappa \rho \tilde{\varepsilon}^{\kappa\lambda\mu} = (\partial_\kappa \rho) \tilde{\varepsilon}^{\kappa\lambda\mu}$$

en volgens (10.2) correspondeert deze grootheid precies met $\mp \partial_\kappa \rho$ (voor $\overline{\overline{+}}$). Het is dus op een factor na precies hetzelfde of men de natuurlijke afgeleide neemt van een scalar of van de corresponderende grootheid. Dat geldt algemeen. De algemene omzettingsformule luidt als volgt. Is $(\tilde{w})^{\kappa_{p+1} \ldots \kappa_n}$ toegevoegd aan $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ en is $\tilde{W})^{\kappa_{p+1} \ldots \kappa_n}$ toegevoegd aan $(p+1)$ $\partial_{[\lambda_1} w_{\lambda_2 \ldots \lambda_p]}$ dan is

18.20) $$W = \text{Rot } w \quad ; \quad W)^{\kappa_{p+1} \ldots \kappa_n} = (-1)^{\frac{1}{2}p} \tilde{w}_{\kappa_{p+1} \ldots \kappa_n}$$

$$\text{Div } w)$$

Voor de signaturen $\overline{\overline{+}}$ in V_3 geeft dit volgens (15.5.6)

18.21) $$\text{Div } W) = \mp (-1)^{\frac{1}{2}p} \text{Div } w)$$

Voor W-scalairen en trivector-dichtheden gelden alle dezelfde overwegingen. Gradient en divergentie beide corresponderen met de uit de gewone vectoranalyse bekende gradient.

b. Rotatie covariante vector en divergentie contravariante bivectordichtheid.

Deze rotatie en divergentie corresponderen beide met de uit de gewone vectoranalyse bekende rotatie. Voor covariante W-vectoren en contravariante bivectordichtheden geldt hetzelfde.

c. Divergentie contravariante vectordichtheid en rotatie covariante bivector.

Deze divergentie en rotatie corresponderen beide met de uit de gewone vectoranalyse bekende divergentie. Voor contravariante W-vectordichtheden en covariante bivectoren geldt hetzelfde. Een meetkundige interpretatie volgt later.

§ 19. Invariante differentiaaloperatoren II: Het theorema van Stokes.

In X_n beschouwen we een enkelvoudig samenhangend deel τ_{q+1} van een X_{q+1} en zijn begrenzende X_q, τ_q. Indien de q-dimensionale elementen van τ_q uitgerust worden met een inwendige orientering dan worden deze elementen contravariante q-vectoren. Voor een element schrijven we $df^{\kappa_1 \cdots \kappa_q}$. Ieder element van τ_{q+1} worde nu eveneens uitgerust met een inwendige orientering en wel zó, dat deze ontstaat uit de richting van binnen naar buiten gevolgd door de orientering van $df^{\kappa_1 \cdots \kappa_q}$. Dan wordt dat element een contravariante $(q+1)$-vector, die worde aangeduid met $df^{\kappa_1 \cdots \kappa_{q+1}}$.

Zij nu $f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}$ een covariant q-vectorveld gedefinieerd in τ_{q+1} en op τ_q en dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

a. $f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}$ is continu in τ_{q+1} en op τ_q

b. de afgeleiden $\partial_\mu f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}$ die voorkomen in de uitdrukking $\partial_{[\mu} f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q]}$ bestaan in alle punten van τ_{q+1}

c. deze afgeleiden zijn continu in alle punten van τ_{q+1} met uitzondering van een eindig aantal discontinuiteits-X_q's op welke een eindige sprong geoorloofd is.

Dan kan worden bewezen, dat

$$\int_{\tau_{q+1}} \partial_{[\mu} f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q]}\, df^{\mu \lambda_1 \cdots \lambda_q} = \int_{\tau_q} f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}\, df^{\lambda_1 \cdots \lambda_q} \tag{19.1}$$

Het bewijs is overbekend voor $n=3$, $q=$ en $q=2$. Voor algemenere waarden ontstaan geen extra moeilijkheden. (verg. R.K.blz.95).

Uit (19.1) kunnen een aantal andere vormen van het theorema van Stokes worden afgeleid. In de eerste plaats kan men natuurlijk $\tilde{f}^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}$, $\tilde{f}_{\lambda_1 \cdots \lambda_{p-1}}$, $\tilde{f}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$; $p = n-q$ invoeren in plaats van $f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}$, $f^{\mu \lambda_1 \cdots \lambda_q}$, $f^{\lambda_1 \cdots \lambda_q}$.

Dan ontstaan de drie vormen: [1]

$$p \int_{\tau_{q+1}} (\partial_{[\mu} f_{\lambda_1 \cdots \lambda_q]})\, df \tilde{f}^{\kappa_1 \cdots \kappa_{p-1}]} = \int_{\tau_q} f_{[\lambda_1 \cdots \lambda_q}\, df \tilde{f}^{\kappa_1 \cdots \kappa_{p-1} \mu]} \tag{19.2}$$

$$p \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu \tilde{f}^{\lambda_1 \cdots \lambda_{p-1} \mu}\, df \tilde{f}_{\lambda_1 \cdots \lambda_{p-1}} = \int_{\tau_q} \tilde{f}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}\, df \tilde{f}_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} \tag{19.3}$$

---

1) Verg. R.K. p.97; Schouten & v.Dantzig, On ordinary quantities and W-quantities, Comp. Math. 7(1940) 447-473. In deze publicatie is ~ in een andere minder doeltreffende betekenis gebruikt.

19.4) $\binom{n-q}{q+1} \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu \tilde{\mathfrak{y}}^{[\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}|\mu|} d f^{|\lambda_p|\kappa_1 \dots \kappa_q} = \int_{\tau_{q+1}} \partial_\mu \tilde{\mathfrak{y}}^{[\lambda_1 \dots \lambda_p} d f^{|\mu|\kappa_1 \dots \kappa_q]} = \int_{\tau_q} \tilde{\mathfrak{y}}^{[\lambda_1 \dots \lambda_p} d f^{\kappa_1 \dots \kappa_q]}$

die alle dezelfde meetkundige betekenis hebben als (19.1). Geeft men aan de elementen van τ_q en τ_{q+1} een uitwendige orientatie met dien verstande, dat de orientatie van τ_{q+1} ontstaat uit de orientatie van τ_q gevolgd door de richting van binnen naar buiten, dan ontstaan vier andere formules die van (19.1-4) alleen daardoor verschillen, dat het teken $\sim$ overal wordt weggelaten waar het staat en gezet wordt waar het niet staat. Ook deze vier formules hebben alle dezelfde meetkundige betekenis.

Om de integralen over τ_q en τ_{q+1} werkelijk uit te rekenen, moeten deze worden omgezet in gewone meervoudige integralen. Wij laten dit zien aan $\int_{\tau_n} \partial_{[\lambda_1} v_{\lambda_2 \dots \lambda_n]} d f^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$

Men verdeelt de n-dimensionale ruimte op een bepaalde manier, bijv. in infinitesimale parallelepipeda volgens de coördinaathypervlakken. Dan wordt

19.5) $$d f^{\lambda_1 \dots \lambda_n} = n!\, \underset{1}{d} x^{[\lambda_1} \dots \underset{n}{d} x^{\lambda_n]}$$

waarin $\underset{1}{d} x^\kappa$ een vector is met de kentallen $dx^1, 0, \dots, 0$ enz. Dan is

19.6) $$d f^{1 \dots n} = dx^1 \dots dx^n$$

Is dan

19.7) $$n!\, \partial_{[1} v_{2 \dots n]} = f(x^\kappa)$$

dan gaat de integraal over in

19.8) $$\int_{\tau_n} f(x^\kappa)\, dx^1 \dots dx^n = \int\int \dots \int f(x^\kappa)\, dx^1 \dots dx^n$$

die op de gewone manier als meervoudige integraal kan worden behandeld.

In X_3 hebben we de volgende gevallen

1. $q = 2$

a. integraal van een covariante bivector over een oppervlak met inwendige orientatie

19.9) $$\boxed{\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} v_{\lambda\kappa]} d f^{\mu\lambda\kappa} = \int_{\tau_2} v_{\lambda\kappa}\, d f^{\lambda\kappa}}$$

19.10) $$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} v_{\lambda\kappa]} d \tilde{f} = \int_{\tau_2} v_{[\lambda\kappa}\, d \tilde{f}_{\mu]}$$

19.11) $$\int_{\tau_3} \partial_\mu \tilde{\mathfrak{y}}^\mu d \tilde{f} = \int_{\tau_2} \tilde{\mathfrak{y}}^\mu d \tilde{f}_\mu$$

19.12) $$\frac{1}{3} \int_{\tau_3} \partial_\mu \tilde{\mathfrak{y}}^\mu d f^{\nu\kappa_1\kappa_2} = \int_{\tau_3} \partial_\mu \tilde{\mathfrak{y}}^{[\nu} d f^{|\mu|\kappa_1\kappa_2]} = \int_{\tau_2} \tilde{\mathfrak{y}}^{[\nu} d f^{\kappa_1\kappa_2]}$$

b. integraal van een contravariante vectordichtheid over een oppervlak met uitwendige orientering.

19.13) $$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} \tilde{v}_{\lambda\kappa]} d \tilde{f}^{\mu\lambda\kappa} = \int_{\tau_2} \tilde{v}_{\lambda\kappa}\, d \tilde{f}^{\lambda\kappa}$$

19.14) $$\int_{\tau_3} \partial_{[\mu} \tilde{v}_{\lambda\kappa]} d f = \int_{\tau_2} \tilde{v}_{[\lambda\kappa}\, d f_{\mu]}$$

19.15) $$\boxed{\int_{\tau_3} \partial_\mu \mathfrak{y}^\mu d f \quad \int_{\tau_2} \mathfrak{y}^\mu d f_\mu}$$

19.16) $$\frac{1}{3} \int_{\tau_3} \partial_\mu \mathfrak{y}^\mu d f^{\nu\kappa_1\kappa_2} = \int_{\tau_3} \partial_\mu \mathfrak{y}^{[\nu} d \tilde{f}^{|\mu|\kappa_1\kappa_2]} = \int_{\tau_2} \mathfrak{y}^{[\nu} d \tilde{f}^{\kappa_1\kappa_2]}$$

2. $g = 1$

a. integraal van een covariante vector over een kromme met inwendige orientering

19.17) $$\int_{\Sigma_2} \partial_{[\mu} v_{\nu]}\, d\sigma^{\mu\nu\lambda} = \int_{\Sigma_1} v_\lambda\, d\rho^\lambda$$

19.18) $$\int_{\Sigma_2} \partial_{[\mu} v_{\lambda]}\, d\tilde{f}_{\kappa]} = \int_{\Sigma_1} v_{[\lambda}\, d\tilde{f}_{\kappa\mu]}$$

19.19) $$\int_{\Sigma_1} \partial_\mu \tilde{\varkappa}^{\lambda\mu}\, d\tilde{f}_\lambda = \int_{\Sigma_1} \tilde{\varkappa}^{\lambda\mu}\, d\tilde{f}_{\lambda\mu}$$

19.20) $$\int_{\Sigma_2} \partial_\mu \tilde{\varkappa}^{[\lambda\mu]}\, d\sigma^{\nu\kappa]} = \int_{\Sigma_2} \partial_\mu \tilde{\varkappa}^{[\lambda\nu}\, d\sigma^{\mu|\kappa]} = \int_{\Sigma_1} \tilde{\varkappa}^{[\lambda\nu}\, d\sigma^{\kappa]}$$

b. integraal van een contravariante bivectordichtheid over een kromme met uitwendige orientering.

19.21) $$\int_{\Sigma_2} \partial_{[\mu} \tilde{v}_{\lambda]}\, d\tilde{\sigma}^{\mu\nu\lambda} = \int_{\Sigma_1} \tilde{v}_\lambda\, d\tilde{\rho}^\lambda$$

19.22) $$\int_{\Sigma_2} \partial_{[\mu} \tilde{v}_{\lambda}\, d\tilde{f}_{\kappa]} = \int_{\Sigma_1} \tilde{v}_{[\lambda}\, d\tilde{f}_{\kappa\mu]}$$

19.23) $$\int_{\Sigma_2} \partial_\mu \eta^{\lambda\mu}\, d\tilde{f}_\lambda = \int_{\Sigma_1} \eta^{\lambda\mu}\, d\tilde{f}_{\lambda\mu}$$

19.24) $$\int_{\Sigma_1} \partial_\mu \eta^{[\lambda\mu|}\, d\tilde{\sigma}^{\nu\kappa]} = \int_{\Sigma_2} \partial_\mu \eta^{[\lambda\nu}\, d\tilde{\sigma}^{\mu|\kappa]} = \int_{\Sigma_1} \eta^{[\lambda\nu}\, d\tilde{\rho}^{\kappa]}$$

De integralen in (19.13-16) kunnen hydrodynamisch geïnterpreteerd worden. Zij v^κ de snelheid van een stromende vloeistof en μ zijn dichtheid. d.i. de massa per m.v. Dan is $\eta^\kappa = \mu v^\kappa$ de vectordichtheid van de stroom en $\eta^\mu\, d\tilde{f}_\mu$ de totale massa per tijdseenheid vloeiende door $d\tilde{f}_\mu$ in de richting van de orientering. Dus stelt $\int_{\Sigma_2} \eta^\mu\, d\tilde{f}_\mu$ de totale massa voor die door Σ_2 per tijdseenheid naar buiten stroomt. De continuiteitsvergelijking

19.25) $$\partial_\lambda \eta^\lambda + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

drukt uit, dat de divergentie van de stroomdichtheid in enig punt gelijk is aan de vermindering van de dichtheid per eenheid van tijd. Bijgevolg is

19.26) $$\int_{\Sigma_3} \partial_\lambda \eta^\lambda\, d\tilde{f} = -\int_{\Sigma_3} \frac{\partial \mu}{\partial t}\, d\tilde{f}$$

en dit is het totale verlies aan massa in Σ_3 per eenheid van tijd. Het is duidelijk, dat dit verlies gelijk moet zijn aan de massa die door Σ_2 naar buiten stroomt.

Is $\partial_\mu \eta^\mu = 0$ dan is de totale massa in elke Σ_3 constant. Is k een kleine constante dan kan de gehele ruimte in Σ_3 worden verdeeld in buizen met ondoordringbare wanden door elk waarvan de massa k stroomt per eenheid van tijd. De buis in een punt ξ^μ stelt bij benadering de dichtheid η/k voor en deze benadering is des te nauwkeuriger naarmate k kleiner is. De vergelijking $\partial_\mu \eta^\mu = 0$ drukt dus uit, dat de buizen van η^κ op "infinitesimale schaal" de gehele Σ_3 in Σ_3 zonder gapingen vullen.

Alle integralen die in (19.1-4, 9-24) voorkomen zijn <u>scalairen</u> of n-vector- 1- dichtheden. Dit is ook hoodzakelijk, omdat alleen die grootheden in verschillende punten bij elkaar opgeteld kunnen worden. Gaat men echter over tot een ondergroep van $\mathcal{G}_n$ dan kunnen er andere vormen van het theorema van Stokes ontstaan. Bepaalt men zich b.v. tot coördinatentransformaties met $\Delta > 0$ dan kunnen ook W-scalairen en n-vectordichtheden in verschillende punten bij elkaar opgeteld worden en naast (19.1) hebben we dan b.v. de formule

19.27) $$\int_{\tau_{g+1}} \partial_{[\mu} \tilde{c}_{\lambda_1 \dots \lambda_g]} \, d\tau^{\mu\lambda_1\dots\lambda_g} = \int_{\tau_g} \tilde{c}_{\lambda_1\dots\lambda_g} \, d\tau^{\lambda_1\dots\lambda_g}$$

Bepalen we ons tot de groep $\mathcal{G}_a$, d.w.z. werken we in een $\mathcal{E}_m$, dan kunnen alle gelijksoortige grootheden in verschillende punten bij elkaar opgeteld worden en dan gelden dus de volgende integraalstellingen:

a) $$\int_{\tau_{g+1}} d\tau^{\mu\lambda_1\dots\lambda_g} \tilde{c}_\mu \multimap \Omega = \int_{\tau_g} d\tau^{\lambda_1\dots\lambda_g} \multimap \Omega$$

b) $$\rho \int_{\tau_{g+1}} d\tau \, \tilde{f}_{[\lambda_1\dots\lambda_{p-1}} \partial_{\lambda_p]} \multimap \Omega = \int_{\tau_g} d\tau \, \tilde{f}_{\lambda_1\dots\lambda_p} \multimap \Omega$$

19.28)

c) $$\int_{\tau_{g+1}} d\tau \, \tilde{f}^{\mu\lambda_1\dots\lambda_g} \tilde{c}_\mu \multimap \Omega = \int_{\tau_g} d\tau \, \tilde{f}^{\lambda_1\dots\lambda_g} \multimap \Omega$$

d) $$\rho \int_{\tau_{g+1}} d\tau \, \tilde{f}_{[\lambda_1\dots\lambda_{p-1}} \partial_{\lambda_p]} \multimap \Omega = \int_{\tau_g} d\tau \, \tilde{f}_{\lambda_1\dots\lambda_p} \multimap \Omega$$

waarin Ω een symbool met onderdrukte indices is voor de een of andere grootheid en $\multimap$ de een of andere operatie symboliseert uitgevoerd op de indices $\lambda_1 \dots \lambda_g$ of $\lambda_1 \dots \lambda_p$ en de indices van Ω samengesteld uit alternaties, mengingen en overschuivingen.
Is bijvoorbeeld:

19.29) $$\mathfrak{H}_\lambda = \partial_\mu \mathfrak{H}^\mu{}_\lambda$$

dan hebben we in een $\mathcal{E}_3$

19.30) $$\int_{\tau_3} \mathfrak{H}_\lambda \, d\tau = \int_{\tau_2} \mathfrak{H}^\mu{}_\lambda \circ f_\mu$$

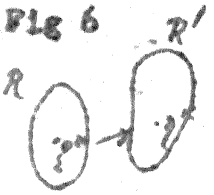
§ 20. Invariante differentiaaloperatoren III: De afgeleide van Lie.

Laat de punten van een gebied R van X_m onderworpen worden aan de een of andere puntransformatie

20.1) $$\eta^\kappa = f^\kappa(\xi^\lambda)$$

waarin de f^κ analytisch zijn in R en zodanig gekozen, dat de <u>functionaaldeterminant</u> $|\partial f^\kappa / \partial \xi^\lambda|$ aldaar $\neq 0$ is, en (20.1) een eenduidige correspondentie vastlegt tussen de punten van R en de punten van een ander gebied R'. Wij introduceren nu een nieuw coördinatenstelsel (κ') zodanig, dat ieder punt in R dezelfde coördinaten t.o.v. (κ') heeft als zijn beeld t.o.v. (κ)

Fig 6



Is dus

20.2) $$\xi^\kappa = \varphi^\kappa(\eta^\kappa)$$

de omkering van (20.1) dan luidt de overgang van (κ) tot (κ'):

20.3) $$\xi^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\kappa}\, \varphi^\kappa(\xi^\kappa) \;;\; \xi^\kappa = f^\kappa(\xi^{\kappa'})$$

Dit proces van overgang van (κ) tot (κ') heet het <u>meeslepen</u> (to drag along) <u>van het coördinatenstelsel</u> (κ) <u>door de puntransformatie</u> (20.1).

Stel nu dat er enig veld b.v. $P^{\kappa\lambda\ldots}_{\mu\ldots}$ gegeven is in R. We vormen dan in R' een nieuw veld, welks componenten $P^{\kappa'\lambda'\ldots}_{\mu'\ldots}$ met betrekking tot (κ') in ieder punt van R' precies dezelfde waarde hebben als $P^{\kappa\lambda\ldots}_{\mu\ldots}$ in het beeldpunt in R. Dit proces noemen we het <u>meeslepen van het veld</u> $P^{\kappa\lambda\ldots}_{\mu\ldots}$ <u>door de puntransformatie</u> (20.1). Dus kort:

<u>kentallen meegesleept veld t.o.v. meegesleept coördinatenstelsel = kentallen oud veld t.o.v. oud coördinatenstelsel.</u>

Indien R en R' punten gemeen hebben kunnen de velden $P^{\kappa\lambda\ldots}_{\mu\ldots}$ en $P^{\kappa'\lambda'\ldots}_{\mu'\ldots}$ in die punten vergeleken worden, waartoe natuurlijk nodig is, dat hun kentallen ten opzichte van één en hetzelfde coördinatenstelsel b.v. òf (κ) òf (κ') worden berekend. Indien dan blijkt, dat $P = P$ dan heet het veld P <u>invariant t.o.v. de puntransformatie</u> (20.1).

Wij beschouwen nu een systeem van n gewone differentiaalvergelijkingen van de vorm

20.4) $$\frac{d\eta^\kappa}{dt} = \psi^\kappa(\eta^\nu)$$

met de onafhankelijke variabele t en de onbekende variabelen η^κ en met functies ψ^κ die analytisch zijn in het beschouwde gebied. Daarbij nemen we als beginvoorwaarden

20.5) $$\eta^\kappa = \xi^\kappa \quad \text{voor} \quad t = 0$$

Wordt de oplossing van deze vergelijkingen ontwikkeld in een machtreeks naar t dan ontstaat

20.6) $$\eta^\kappa = \xi^\kappa + \psi^\kappa(\xi^\nu)t + \ldots$$

Deze vergelijking stelt een punttransformatie $\xi^\kappa \to \eta^\kappa$ voor. Worden de ξ^κ door deze punttransformatie meegesleept dan zijn blijkens (20.3) de $\xi^{\kappa'}$ gegeven door de vergelijkingen

20.7) a) $$\xi^\kappa = \delta^\kappa_{\kappa'}\,\xi^{\kappa'} + \psi^\kappa(\xi^\nu)t + \ldots$$

b) $$\xi^{\kappa'} = \delta^{\lambda'}_{\kappa}\,\xi^\kappa - \delta^{\kappa'}_{\kappa}\,\psi^\kappa(\xi^\nu)t + \ldots$$

Differentiatie van (20.7 b) en omkering geeft indien we schrijven

20.8) $$A^{\lambda'}_{\lambda'} \overset{*}{=} \delta^{\lambda'}_{\kappa}\,(A^\kappa_\lambda - t\,\partial_\lambda v^\kappa + \ldots)$$

$$A^\kappa_{\kappa'} \overset{*}{=} \delta^\lambda_{\kappa'}\,(A^\kappa_\lambda + t\,\partial_\lambda v^\kappa + \ldots)$$

Wanneer we nu in (20.6) alle hogere machten van t verwaarlozen en dt schrijven in plaats van t ontstaat wat Lie noemt een infinitesimale puntttransformatie:

20.9) $$d\xi^\kappa = v^\kappa dt$$

Men zegt dat de eindige aanlediga transformatiegroep (20.6) door de infinitesimale transformatie (20.9) gegenereerd wordt. Bij de infinitesimale transformatie ondergaan alle punten een verplaatsing $v^\kappa dt$ waarbij v^κ natuurlijk van de ξ^κ afhangt. Wordt een coördinatenstelsel of een veld meegesleept door een infinitesimale transformatie $v^\kappa dt$ dan zegt men dat het coördinatenstelsel of het veld over $v^\kappa dt$ wordt meegesleept. Het meegesleepte systeem (κ') is dan gegeven door de uit (20.7) volgende vergelijkingen

20.10) $$\begin{aligned} \xi^\kappa &\overset{*}{=} \delta^\kappa_\mu \xi^\mu + v^\kappa dt \\ \xi^{\kappa'} &\overset{*}{=} \delta^{\kappa'}_\kappa \xi^\kappa - v^\kappa dt \end{aligned}$$

v^κ gegeven zijnde vragen we nu naar de kentallen van enig veld b.v. $P^\kappa_{.\lambda}$ dat over $v^\kappa dt$ wordt meegesleept. De kentallen in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ van het meegesleepte veld t.o.v. (κ') zijn dezelfde als de kentallen van $P^\kappa_{.\lambda}$ in ξ^κ t.o.v. (κ). Bijgevolg zijn de kentallen van het meegesleepte veld in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ t.o.v. (κ) :

20.11) $$\begin{aligned} A^{\rho'\kappa}_{\lambda\sigma} \delta^\rho_{\rho'} \delta^{\sigma'}_\sigma P^\sigma_{.\rho} &\overset{*}{=} (H^\rho_\lambda - \partial_\lambda v^\rho dt)(H^\kappa_\sigma + \partial_\sigma v^\kappa dt) P^\sigma_{.\rho} \overset{*}{=} \\ &\overset{*}{=} P^\kappa_{.\lambda} - P^\kappa_{.\rho} \partial_\lambda v^\rho dt + P^\sigma_{.\lambda} \partial_\sigma v^\kappa dt \end{aligned}$$

Om nu de kentallen van het meegesleepte veld in ξ^κ t.o.v. (κ) te verkrijgen moeten we natuurlijk $v^\mu \partial_\mu P^\kappa_{.\lambda}$ aftrekken en bijgevolg zijn deze kentallen

20.12) $$P^\kappa_{.\lambda} - v^\mu \partial_\mu P^\kappa_{.\lambda} dt - P^\kappa_{.\rho} \partial_\lambda v^\rho dt + P^\sigma_{.\lambda} \partial_\sigma v^\kappa dt$$

De uitdrukking

20.13) $$(v^\mu \partial_\mu P^\kappa_{.\lambda} + P^\kappa_{.\rho} \partial_\lambda v^\rho - P^\sigma_{.\lambda} \partial_\sigma v^\kappa) dt$$

heet de Lie differentiaal van $P^\kappa_{.\lambda}$ t.o.v. $v^\kappa dt$ Dus, wordt een veld meegesleept over $v^\kappa dt$ dan is de toename van het veld in enig vast punt ξ^κ gelijk aan de negatieve Lie differentiaal van het veld aldaar.

Blijkbaar is de Lie differentiaal, zijnde het verschil van twee velden een invariant.

De uitdrukking

20.14) $$\underset{L}{D} P^\kappa_{.\lambda} \overset{def}{=} v^\mu \partial_\mu P^\kappa_{.\lambda} + P^\kappa_{.\rho} \partial_\lambda v^\rho - P^\sigma_{.\lambda} \partial_\sigma v^\kappa$$

heet de Lie afgeleide van $P^\kappa_{.\lambda}$ t.o.v. het veld v^κ Voor affinoren van hogere valentie geldt een overeenkomstige formule, voor elke index komt er een term bij, + voor een covariante en - voor een contravariante index. Blijkbaar gelden de volgende regels:

a. de Lie afgeleide van een som is de som van de Lie afgeleiden der termen;
b. de Lie afgeleide van een vouwing is de vouwing van de Lie afgeleide;
c. voor de Lie afgeleide van een product of overschuiving geldt de regel van Leibniz;

d. de Lie afgeleide van v^κ t.o.v. zichzelf is nul;
e. de Lie afgeleide van δ^κ_λ is nul.

Wij geven hier enige voorbeelden:

Scalar:

20.15) $$\underset{L}{D} s = v^\mu \partial_\mu s$$

Vectoren:

20.16) a) $$\underset{L}{D} u^\kappa = v^\mu \partial_\mu u^\kappa - u^\mu \partial_\mu v^\kappa$$

b) $$\underset{L}{D} w_\lambda = v^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\mu \partial_\lambda v^\mu$$

p-vectoren:

20.17) a) $$\underset{L}{D} u^{\kappa_1 \cdots \kappa_p} = v^\mu \partial_\mu u^{\kappa_1 \cdots \kappa_p} - p\, u^{\mu [\kappa_2 \cdots \kappa_p} \partial_\mu v^{\kappa_1]}$$

b) $$\underset{L}{D} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} = v^\mu \partial_\mu w_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} + p\, w_{\mu [\lambda_2 \cdots \lambda_p} \partial_{\lambda_1]} v^\mu$$

De Lie afgeleiden van dichtheden verkrijgt men het gemakkelijkst als volgt. Uit (20.17 b) volgt:

20.18) $$\underset{L}{D} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} = v^\mu \partial_\mu w_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} + m\, w_{\mu [\lambda_2 \cdots \lambda_m} \partial_{\lambda_1]} v^\mu$$

$$= v^\mu \partial_\mu w_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} + w_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} \partial_\mu v^\mu$$

$$= \partial_\mu v^\mu w_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}$$

Nu transformeert zich $w_{\lambda_1 \cdots}$ als een scalaire Δ-dichtheid van het gewicht + 1. Is dus $\tilde{\varphi}$ een dergelijke dichtheid, dan is ook:

20.19) $$\underset{L}{D} \tilde{\varphi} = \partial_\mu \tilde{\varphi} v^\mu = \mathrm{Div}(\tilde{\varphi} v)$$

Iedere gewone scalaire dichtheid φ van het gewicht + 1 is het product van $\tilde{\omega}$ (verg. § 14) met een $\tilde{\varphi}$. Aangezien het kental van $\tilde{\omega}$ alleen de waarden ± 1 aanneemt, is dus:

20.20) $$\underset{L}{D} \varphi = \partial_\mu \varphi v^\mu = \mathrm{Div}(\varphi v)$$

Hieruit volgt voor een affinordichtheid van het gewicht k b.v.: $f^{\kappa\lambda \cdots}_{\nu \cdots}$

20.21) $$\underset{L}{D} f^{\kappa\lambda \cdots}_{\nu \cdots} = v^\mu \partial_\mu f^{\kappa\lambda \cdots}_{\nu \cdots} + f^{\rho\lambda \cdots}_{\nu \cdots} \partial_\rho v^\kappa + f^{\kappa\sigma \cdots}_{\nu \cdots} \partial_\sigma v^\lambda + \cdots - f^{\kappa\lambda \cdots}_{\rho \cdots} \partial_\nu v^\rho + k f^{\kappa\lambda \cdots}_{\nu \cdots} \partial_\mu v^\mu$$

en precies een dergelijke formule geldt voor affinor-Δ-dichtheden. De Lie afgeleiden van $\varepsilon^{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$ en $\varepsilon_{\lambda_1 \cdots \lambda_m}$ zijn natuurlijk nul.

Indien voor enig veld de Lie afgeleide t.o.v. v^κ in alle punten nul is, heet het veld <u>absolnut invariant</u> t.o.v. v^κ. Een absoluut invariant veld heeft de volgende eigenschappen:

a. de veldwaarde in einig vast punt verandert niet, indien het veld wordt meegesleept door een der transformaties van de eenledige groep die door de infinitesimale transformatie $v^\kappa dt$ wordt gegenereerd.

b. de kentallen van het veld in ξ^κ t.o.v. (κ) zijn gelijk aan de kentallen van ditzelfde veld in $\xi + v^\kappa dt$ t.o.v. het over $v^\kappa dt$ meegesleepte coördinatensysteem κ'

Blijkbaar zijn sommen, producten en overschuivingen van abso-

luut invariante velden eveneens absoluut invariant (altijd t.o.v. <u>hetzelfde</u> veld v^κ !)

Gewoonlijk gaat de invariantie van een veld t.o.v. v^κ verloren als v^κ met een niet constanten scalar σ wordt vermenigvuldigd. Dat betekent dat het veld niet invariant is bij alle transformaties die de <u>stroomlijnen</u> van v^κ invariant laten maar alleen bij die door $v^\kappa dt$ worden gegenereerd. Indien de Lie afgeleide van een veld t.o.v. σv^κ nul is voor iedere waarde van σ, dan heet het veld <u>absoluut invariant t.o.v. de stroomlijnen van</u> v^κ. Dit is een strengere eis en er moet dus een voorwaarde bij komen. Uit (20.17 b) volgt, dat deze bijkomende voorwaarde voor een covariante p-vector luidt:

20.22) $$v^\mu w_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p} = 0$$

De voorwaarde voor een W-p-vector heeft dezelfde vorm. Daaruit leidt men af dat de bijkomende voorwaarde voor een p-vectordichtheid van het gewicht + 1 luidt:

20.23) $$m^{[\kappa_1\ldots\kappa_p} v^{\kappa]} = 0$$

en precies een dergelijke voorwaarde voor een p-vector-Δ-dichtheid. Hieruit volgt, dat een scalar (W-scalar) of een n-vectordichtheid (Δ-dichtheid) van het gewicht + 1 die absoluut invariant is t.o.v. v^κ ook altijd de stroomlijninvariantie heeft en dat een n-vector (W-n-vector) of scalaire dichtheid (Δ-dichtheid) van het gewicht + 1 nooit deze sterkere invariantie kunnen bezitten.

§ 21 <u>Invariante differentiaaloperatoren</u> IV: <u>de Lagrange afgeleide</u>.

Zij Φ_Λ, $\Lambda = 1, \ldots, N$ een stel functies van de coördinaten ξ^κ. Deze kunnen scalairen zijn of kentallen van het een of andere object met een bepaalde transformatiewijze bijvoorbeeld een affinor $P_{\kappa\lambda}$. Dus is Λ niets als een soort verzamelindex. We zien van deze eventuele betekenissen van de Φ_Λ voorlopig geheel af en zullen ook de ξ^κ voorlopig niet transformeren. Ook laten we nu de index Λ maar helemaal weg en verstaan onder Φ, $\partial_\mu \Phi$, $\partial_\nu \partial_\mu \Phi$ enz. de Φ_Λ en eerste en verdere afgeleiden van de Φ_Λ naar de ξ^κ.

Zij na $\mathcal{L}$ een functie van de Φ de $\partial_\mu \Phi$ enz. tot een zekere <u>eindige</u> orde. Dan is $\mathcal{L}$ ~~na~~ via deze functies tenslotte een functie van de ξ^κ over een bepaald gebied van X_n. Schrijf nu de integraal van $\mathcal{L}$ over een bepaald gebied ζ_n van X_n waar alle voorkomende functies analytisch zijn in de vorm

21.1) $$\int_{\zeta_n} \mathcal{L}\, dx^1 \ldots dx^n \quad (\text{verg. } (19.8))$$

Dit is een gewone meervoudige integraal maar voor het gemak schrijven we $\int_{\zeta_n}$. De Φ mogen nu een variatie $\overset{v}{d}\Phi$ ondergaan en wel zo, dat de variaties der Φ en die van alle in $\mathcal{L}$ voorkomende afgeleiden der Φ op de begrenzing ζ_{n-1} van ζ_n nul zijn. Dan geldt voor de variatie van $\mathcal{L}$

21.2) $$\overset{v}{d}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\overset{v}{d}\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu}\overset{v}{d}\Phi_\mu + \ldots \qquad ^{1)}$$

en dientengevolge

21.3) $$\overset{v}{d}\int_{\zeta_n} \mathcal{L}\, d\xi^1 \ldots d\xi^n = \int_{\zeta_n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\overset{v}{d}\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu}\overset{v}{d}\Phi_\mu + \ldots)$$

---

1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\overset{v}{d}\Phi$ staat dus voor $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\Lambda}\overset{v}{d}\Phi_\Lambda$ automatisch te sommeren over Λ, enz.

Partiele intergratie en toepassing van het theorema van Stokes leren.

21.4) $$\delta^{\nu}\int_{\Sigma_n} \mathcal{L}\, d\xi^1 \dots d\xi^n = \int_{\Sigma_n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\,\delta^{\nu}\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu}\,\partial_\mu \delta^{\nu}\Phi + \cdots\right) d\xi^1 \dots d\xi^n =$$

$$= \int_{\Sigma_n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\,\delta^{\nu}\Phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \cdots\right)\delta^{\nu}\Phi\, d\xi^1 \dots d\xi^n$$

omdat immers $\delta^{\nu}\Phi$, $\delta^{\nu}\Phi_\mu$, enz. alle op Σ_{n-1} nul zijn. Wij gebruiken hier (19.3) voor p=1, q= n-1:

21.5) $$\int_{\Sigma_n} \partial_\mu \eta^\mu\, d\tau = \int_{\Sigma_{n-1}} \eta^\mu\, d\tau_\mu$$

waarin η^μ en contravariante vectordichtheid voor het gewicht +1 is en de vraag zou kunnen rijzen of dat nu wel mag omdat we over de transformatie van $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ niets verondersteld hebben. Nu geldt echter (21.5) ten opzichte van elk coördinatenstelsel en dus ook t.o.v. het stelsel (κ) dat we uitdrukkelijk vastgehouden hebben. (21.5) is wel invariant bij coördinatentransformaties mits η^μ zich op de juiste wijze transformeert, maar we maken hier van die invariantie geen gebruik en (21.5) blijft t.o. van (κ) altijd waar wat η^μ ook is. De invariantie kan verloren gaan als η^μ niet net een vectordichtheid is, maar die kan ons hier niet scholen als (21.5) maar t.o. van (κ) waar blijft.

Men schrijft nu

21.6) $$[\mathcal{L}] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu\nu}} - \cdots$$

en noemt de $[\mathcal{L}]$ de Lagrange afgeleide van $\mathcal{L}$ t.o.v. de Φ. $[\mathcal{L}]$ draagt natuurlijk in werkelijkheid evenveel indices als Φ maar ook deze indices laten we hier weg. Is $[\mathcal{L}] = 0$, dan verdwijnt de variatie van den integraal (21.1) voor iedere keuze van ζ_σ mits aan de randvoorwaarden voldaan is en de integraal zelf neemt dus een extreme waarde aan.

De vergelijking $[\mathcal{L}] = 0$ heet de vergelijking van Lagrange in den niet invarianten vorm. Dit type komt bijv. in de klassieke mechanica voor, de ξ^κ reduceren zich tot t en t wordt niet getransformeerd.

Stel nu eens dat Φ een affinor is, bijv. een covariante affinor $P_{\lambda\kappa}$ en dat $\mathcal{L}$ een scalaire dichtheid van het gewicht +1 is. Dat betekent dat indien men $\mathcal{L}$, nu $\mathcal{L}'$ geschreven, uitrekent voor (κ) dus $\mathcal{L}'[\kappa]$ bepaalt en volgens dezelfde rekenregel evenzo $\mathcal{L}'[\kappa']$ bepaalt uit $P_{\lambda\kappa}$, $\partial_\mu P_{\lambda\kappa}$, enz. blijkt dat

21.7) $$\mathcal{L}'[\kappa'] = \Delta^{-1}\,\mathcal{L}'[\kappa]$$

Een heel eenvoudig voorbeeld is $\mathcal{L} = \sqrt{\mathrm{Det}(P_{\lambda\kappa})}$. Andere voorbeelden volgen later.

Nu wordt de integraal (21.1) wel invariant voor coördinatentransformaties en het vormen van de Lagrange afgeleide is nu een invariant proces geworden.

De vergelijking $[\mathcal{L}] = 0$ heet de vergelijking van Lagrange in de invariante vorm. Dit type komt bijv. in de relativiteitstheorie voor.

Is Φ een affinor en $\mathcal{L}$ een scalaire dichtheid van het gewicht +1, dan kan men een zeer belangrijke betrekking afleiden tussen Φ, $\mathcal{L}$ en hun eerste afgeleiden.

We onderstellen daartoe dat de variatie $\delta^{\nu}\Phi$ ontstaat door het Φ veld mee te slepen over $v^\nu dt$. Dan is $d\Phi$ de negatieve Lie differentiaal van Φ. Om gecompliceerde formules te vermijden nemen we voor Φ weer

Voor hogere valenties gaat het precies eender en er treden geen extra moeilijkheden op. Dan hebben we

21.8) $\overset{v}{d} P_{\lambda\kappa} = -v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa}\, dt - P_{\mu\kappa}\, \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\lambda\mu}\, \partial_\kappa v^\mu dt$

en het meegesleepte veld is

21.9) $\overset{1}{P}_{\lambda\kappa} = P_{\lambda\kappa} - v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa}\, dt - P_{\mu\kappa}\, \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\lambda\mu}\, \partial_\kappa v^\mu dt$

Bijgevolg is

21.10) $\partial_\nu \overset{1}{P}_{\lambda\kappa} = \partial_\nu P_{\lambda\kappa} - (\partial_\lambda v^\mu)\, \partial_\mu P_{\lambda\kappa}\, dt - v^\mu \partial_\nu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} dt - (\partial_\nu P_{\mu\kappa})\, \partial_\lambda v^\mu dt - P_{\mu\kappa}\, \partial_\nu \partial_\lambda v^\mu dt - (\partial_\nu P_{\lambda\mu})\, \partial_\kappa v^\mu dt - P_{\lambda\mu}\, \partial_\nu \partial_\kappa v^\mu dt$

en daaruit volgt dat $\overset{v}{d}\phi_\mu$ dan en alleen dan altijd nul is op Σ_m als aldaar v^μ, $\partial_\nu v^\mu$ en $\partial_\nu \partial_\kappa v^\mu$ nul zijn. Voor hogere afgeleiden van de $P_{\lambda\kappa}$ gaat het net so. Aan de randvoorwaarden is dus voldaan als de v^μ en hun afgeleiden tot een voldoend hoge orde nul zijn op Σ_m.

2 Bij substitutie van (21.8) in (21.4), rekening houdende met (21.6) verkrijgt men

21.11) $\overset{v}{d}\int_{\Sigma_m} [P]\, d\xi^1 \dots d\xi^m = -\int_{\Sigma_m} [P]^{\lambda\kappa} (v^\mu \partial_\mu P_{\lambda\kappa} + P_{\mu\kappa}\partial_\lambda v^\mu dt + P_{\lambda\mu}\partial_\kappa v^\mu dt)\, d\xi^1 \dots d\xi^m$

$$\cdot \int_{\Sigma_m} [[P]^{\lambda\kappa} (\partial_\mu P_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - P_{\mu\kappa}\partial_\lambda [P]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu}\partial_\kappa [P]^{\lambda\kappa}] dt\, d\xi^1 \dots d\xi^m$$

waarin, nu de indices in weer ingevoerd zijn, natuurlijk ook $[P]$ indices moet dragen:

21.11) $[P]^{\lambda\kappa} = \dfrac{\partial P}{\partial P_{\lambda\kappa}} - \partial_\mu \dfrac{\partial P}{\partial(\partial_\mu P_{\lambda\kappa})}$

De variatie (w1.11) moet nu echter beslist nul zijn, immers het meegesleepte veld heeft t.o.v. van (κ') precies dezelfde kentallen als het oude veld t.o.v. van (κ) en de integralen voor nieuw veld en oud veld zijn dus kennelijk gelijk.
Daaruit volt dat

21.12) $[P]^{\lambda\kappa} (\partial_\mu P_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda P_{\mu\kappa} - \partial_\kappa P_{\lambda\mu}) - P_{\mu\kappa}\partial_\lambda [P]^{\lambda\kappa} - P_{\lambda\mu}\partial_\kappa [P]^{\lambda\kappa} = 0$

Deze formule krijt een bijzondere betekenis in de relativiteitstheorie.

§ 22. Anholnome coordinatenstelsels in V_m

Als we uitgaan van een toegelaten coordinatenstelsel ξ^κ krijgen we altijd covariante maatvectoren e_λ, wier rotaties nul zijn. Blijkens (17.3 b) zijn de e_λ immers gradienten. Nu is het dikwijls gemakkelijk in iedere locale ξ_m van λ_m een geheel willekeurig stelsel van co- en contravariante maatvectoren te introduceren, $\overset{k}{e}_\lambda$, $\overset{k}{e}^\kappa$, $k, \lambda, \kappa = 1, \dots, m$ die alleen aan de voorwaarde voldoen dat hun kentallen analytische functies der ξ^κ zijn en dat

22.1) $\overset{k}{e}_\mu \overset{i}{e}^\mu = \delta^k_i \quad ; \quad \overset{k}{e}_\lambda \overset{\kappa}{e}^\kappa = A^\kappa_\lambda \, ; \quad k, i, \lambda, \kappa = 1, \dots, m$

Dan zijn de $\overset{k}{e}_\lambda$ in het algemeen geen gradientvectoren en zij behoren dus niet bij enig coordinatenstelsel ξ^κ in de tot dusver gebruikelijke zin. Men noemt nu so'n stelsel van maatvectoren

gedefinieerd over X_n of een deel van X_n een anholonoom coordinatenstelsel, en de kentallen van enig object t.o. van een zodanig stelsel anholonome kentallen

22.2) $A^k_\lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\lambda}$; $A^\kappa_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^i}$

Dan zijn de anholonome kentallen van bijv. $p^{\kappa\lambda}_{\cdots\mu}$

22.3) $p^{ki}_{\cdots j} = A^{k,m}_{\kappa\lambda} p^{\kappa\lambda}_{\cdots\mu}$

De anholonome kentallen van $d\xi^\kappa$ zijn

22.4) $(d\xi)^k = A^k_\kappa \, d\xi^\kappa$

maar men mag hier niet $d\xi^k$ schrijven omdat $A^k_\kappa \, d\xi^\kappa$ geen volledige differentiaal is en ξ^k dus niet bestaat. Inplaats van ∂_μ hebben we in anholonome coordinaten de operator

22.5) $\partial_i \overset{\text{def}}{=} A^\mu_i \partial_\mu$

De gradient van een scalar p wordt dus

22.6) $w_i = \partial_i p$

Maar voor de rotatie van een vector mag men niet $\partial_i w_j$ schrijven, immers

22.7) $\partial_i w_j = A^\kappa_i \partial_\kappa (A^\lambda_j w_\lambda) = A^\mu_i \partial_\mu w_j + (A^\kappa_i \partial_\kappa A^\lambda_j) w_\lambda =$
$= + A^\mu_i \partial_\mu w_j - \Omega_{ij}^{\ k} w_k$

waar

28.8) $\Omega_{ij}^{\ k} \overset{\text{def}}{=} A^\mu_i A^\lambda_j \partial_\mu A^k_\lambda$

$\Omega_{ij}^{\ k}$ heet het anholonomiteitsobject zijn kentallen zijn nul ten opzichte van alle holonome en niet allen gelijk nul ten opzichte van alle anholonome coordinatenstelsels.

Men bewijst gemakkelijk dat

22.9) $\partial_i w_{j_1 \cdots j_q} = A^{\mu}_{i} A^{\lambda_1}_{j_1} \cdots A^{\lambda_q}_{j_q} \partial_\mu w_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} - q \, \Omega_{i[j_1}^{\ k} w_{k \mid j_2 \cdots j_q]}$

en

22.10) $\partial_i x^j = \delta^j_i - \Omega_{ik}^{\ j} x^k$

(22.10) te bewijzen is een goede oefening, (22.9) vergt wat meer schrijfwerk. Een zeer eenvoudig bewijs van (22.7) en (22.10) volgt later

Anholonome stelsels zijn van veel belang voor de mechanica.

V De meetkunde in een X_n met een gegeven overbrenging.

§ 23 Overbrengingen in X_n

De locale ξ's in een X_n zijn geheel onafhankelijk. Tussen grootheden in verschillende locale ξ's bestaan geen betrekkingen. Nu kan men zulk een betrekking introduceren door een voorschrift te definieren

† De overgang van holonome (d.i. gewone) op anholonome coordinaten wordt kenmerkend door de intermediaire kentallen A^κ_λ.

voor de overbrenging van grootheden van de locale $\mathcal{E}_n$ in ξ^κ naar de locale $\mathcal{E}_n$ in $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$. Zulk een voorschrift, indien gegeven voor alle punten in alle richtingen, heet een overbrenging of ook wel een pseudoparallele verplaatsing in λ_n. In een $\mathcal{E}_n$ is een overbrenging a priori gegeven, namelijk de gewone parallele verplaatsing.

Is een veld v^κ gegeven, en v^λ de waarde in ξ^κ, dan is de waarde in $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ gelijk $v^\lambda + dv^\lambda = v^\lambda + d\xi^\mu \partial_\mu v^\lambda$.
Zij nu $v^\lambda + d^* v^\lambda$ de waarde van de naar $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ volgens het voorschrift overgebrachte vector, dan is

23.1) $$v^{\kappa'} + d^* v^{\kappa'} = (A^{\kappa'}_\kappa + d A^{\kappa'}_\kappa)(v^\kappa + d^* v^\kappa) = A^{\kappa'}_\kappa v^\kappa + A^{\kappa'}_\kappa d^* v^\kappa + v^\kappa d A^{\kappa'}_\kappa$$

en bijgevolg

23.2) $$d^* v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_\kappa d^* v^\kappa + v^\kappa d A^{\kappa'}_\kappa$$

Nu weten we echter dat

23.3) $$dv^{\kappa'} = d(A^{\kappa'}_\kappa v^\kappa) = A^{\kappa'}_\kappa dv^\kappa + v^\kappa d A^{\kappa'}_\kappa$$

en daaruit volt dat

23.4) $$dv^{\kappa'} - d^* v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_\kappa (dv^\kappa - d^* v^\kappa)$$

Bijgevolgis

23.5) $$\delta v^\kappa \stackrel{def}{=} dv^\kappa - d^* v^\kappa$$

een contravariante vector. Deze vector heet de covariante differentiaal van v^κ t.o. van de gegeven overbrenging. Wordt het locale coordinatenstelsel in de $\mathcal{E}_n$ van ξ^κ pseudoparallel verplaatst naar $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ dan is δv^κ de differentiaal t.o. van dat coordinatenstelsel. M.a.w. δv^κ is de differentiaal van het standpunt gezien van een waarnemer wiens coordinatenstelsel pseudoparallel wordt verplaatst.

Men verlangt nu enige orde te brengen in de overbrenging van allerlei verschillende grootheden en bepaalt zich derhalve tot lineaire overbrengingen, d.s. overbrengingen voldoende aan de volgende voorwaarden:

1. Is Φ een grootheid (indices weggelaten) dan is $\delta\Phi$ een grootheid van hetzelfde soort;
2. $\delta(\Phi + \Psi) = \delta\Phi + \delta\Psi$;
3. $\delta(\Phi\Psi) = (\delta\Phi)\Psi + \Phi\,\delta\Psi$ (regel van Leibniz);
4. $\delta\Phi$ is lineair homogeen in de $d\xi^\kappa$;
5. de regel van Leibniz geldt ook voor verschuivingen;
6. de covariante differentiaal van een scalar of W-scalar is identiek met de gewone differentiaal.

Een V_n met een lineaire overbrenging heet L_n.
Uit (1), (2) en (4) volgt dat de covariante differentiaal van de vorm

23.6) $$\delta v^\kappa = dv^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda d\xi^\mu = (\partial_\mu v^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda) d\xi^\mu$$

moet hebben, waar de $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ n^3 parameters zijn, die zich als volgt transformeren

23.7) $$\Gamma^{\kappa'}_{\mu'\lambda'} = A^{\kappa'}_\kappa A^\mu_{\mu'} A^\lambda_{\lambda'} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - A^\mu_{\mu'} A^\lambda_{\lambda'} \partial_\mu A^{\kappa'}_\lambda$$
$$= A^{\kappa'}_\kappa A^\mu_{\mu'} A^\lambda_{\lambda'} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + A^{\kappa'}_\lambda \partial_{\mu'} A^\lambda_{\lambda'}$$

De $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ vormen dus een geometrisch object maar geen geometrische grootheid

Uit

23.13) $$\delta w_{\lambda_1 \dots \lambda_m} = d w_{\lambda_1 \dots \lambda_m} - m \Gamma^{\rho}_{\mu [\lambda_1} w_{\lambda_2 \dots \lambda_m] \rho} d\xi^{\mu}$$

volgt dat

23.14) $$\overset{*}{d} w_{1 \dots n} = m \Gamma^{\rho}_{\mu [n} w_{1 \dots n-1] \rho} d\xi^{\mu} = \Gamma_{\mu} w_{1 \dots n} d\xi^{\mu}$$

en daar $w_{1 \dots n}$ kental van een scalaire δ-dichtheid van het gewicht +1 is voor een dergelijke dichtheid

23.15) $$\delta \tilde{\varphi} = d \tilde{\varphi} - \Gamma_{\mu} \tilde{\varphi} d\xi^{\mu}$$

Laat men alleen transformaties met $\Delta = +1$ toe, dan volgt dus voor een gewone dichtheid met gewicht +1

23.16) $$\delta \varphi = d \varphi - \Gamma_{\mu} \varphi d\xi^{\mu}$$

en aangezien δ een invariante operator is, geldt deze formule ook algemeen. Hieruit volgt bijv. voor $\Phi^{\kappa}_{\cdot \lambda}$

23.17) $$\delta \Phi^{\kappa}_{\cdot \lambda} = d \Phi^{\kappa}_{\cdot \lambda} + \left(\Gamma^{\kappa}_{\rho \mu} \Phi^{\rho}_{\cdot \lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda \mu} \Phi^{\kappa}_{\cdot \rho} - \delta^{\kappa}_{\mu} \Gamma_{\rho} \Phi^{\rho}_{\cdot \lambda} \right) d\xi^{\mu}$$

en precies zo'n formule voor δ-dichtheden.

Iedere covariante differentiaal is de overschuiving van $d\xi^{\mu}$ met een andere grootheid, die het covariante differentiaalquotient wordt genoemd. Men gebruikt de notatie

23.18) $$\delta \Phi = d\xi^{\mu} \nabla_{\mu} \Phi \qquad \text{(indices weggelaten)}$$

dus, bijv.:

23.19) $$\nabla_{\mu} v^{\kappa} = \partial_{\mu} v^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu \lambda} v^{\lambda}$$
$$\nabla_{\mu} w_{\lambda} = \partial_{\mu} w_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\mu \lambda} w_{\kappa}$$

Uit (23.7) volgt dat

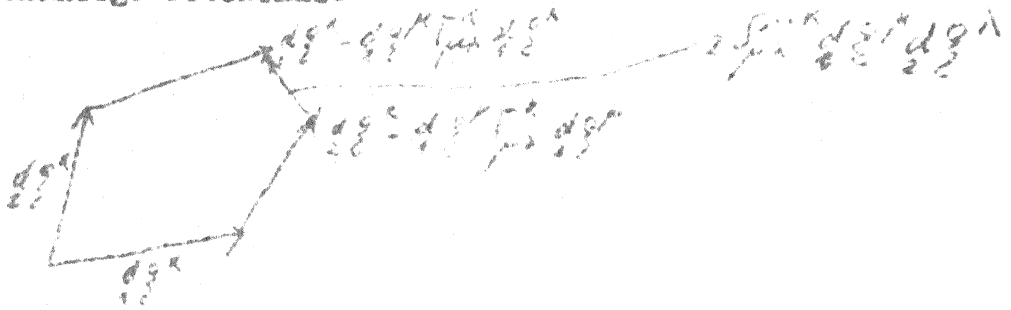
23.20) $$S_{\mu \lambda}{}^{\kappa} = \Gamma^{\kappa}_{[\mu \lambda]}$$

een affinor is. Is $S_{\mu \lambda}{}^{\kappa} \delta^{\mu}_{\kappa} = C$ dan heet de overbrenging symmetrisch en $C \chi_{\mu}$ een β_{μ} is,

23.21) $$S_{\mu \lambda}{}^{\kappa} = S_{[\mu} \delta^{\kappa}_{\lambda]}$$

dan heet de overbrenging halfsymmetrisch

Meetkundige betekenis:



$$\rightarrow S_{\mu \lambda}{}^{\kappa} \xi^{\mu} d\xi^{\lambda}$$

Verplaats $d\xi^{\kappa}$ pseudoparallel langs ξ^{κ} en omgekeerd. De sluitvector verdwijnt dan en alleen dan altijd wanneer $S_{\mu \lambda}{}^{\kappa} = 0$. Er bestaan dan "infinitesimale parallelogrammen" in elke stand. Bij halfsymmetrische overbrengingen bestaan er alleen

infinitesimale parallelogrammen wier vlak in de $\mathcal{E}_{n-1}$ van S_λ ligt.
In een A_n kan in alle invariante differentiaaloperaties in § 18 de ∂_μ vervangen worden door ∇_μ, bijvoorbeeld

23.22) $$\nabla_{[\mu} w_{\lambda]} = \partial_{[\mu} w_{\lambda]} - \Gamma^{\kappa}_{[\mu\lambda]} w_\kappa = \partial_{[\mu} w_{\lambda]}$$

23.23) $$\nabla_\mu \eta^\mu = \partial_\mu \eta^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \eta^\lambda - \Gamma^\mu_{\lambda\mu} \eta^\lambda = \partial_\mu \eta^\mu$$

Hetzelfde geldt voor de Lie-afgeleide in § 20.

23.24) $$\frac{D}{L} \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} = v^\mu \partial_\mu \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} + \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\rho} \partial_\lambda v^\rho - \mathfrak{P}^{\sigma}_{\cdot\lambda} \partial_\sigma v^\kappa + \mathfrak{L} \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} \partial_\mu v^\mu$$
$$= v^\mu \nabla_\mu \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} + \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\rho} \nabla_\lambda v^\rho - \mathfrak{P}^{\sigma}_{\cdot\lambda} \nabla_\sigma v^\kappa + \mathfrak{L} \mathfrak{P}^{\kappa}_{\cdot\lambda} \nabla_\mu v^\mu$$

(reken dit na)
Hetzelfde geldt ook nog voor de identiteiten van de vorm (21.12) voor de Lagrange afgeleide:

23.125) $$[\tilde{\mathfrak{L}}]^{\lambda\kappa} \left(\nabla_\mu P_{\lambda\kappa} - \nabla_\lambda P_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa P_{\lambda\mu} \right) - P_{\mu\kappa} \nabla_\lambda [\tilde{\mathfrak{L}}]^{\lambda\kappa} -$$
$$- P_{\lambda\mu} \nabla_\kappa [\tilde{\mathfrak{L}}]^{\lambda\kappa} = 0$$

(reken dit na)
Maar dit alles is alleen waar in A_n. In een $\mathcal{L}_n$ komen er correctietermen met $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$, bijv.

23.26) $$\nabla_{[\mu} w_{\lambda]} = \partial_{[\mu} w_{\lambda]} - S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} w_\kappa$$

23.27) $$\nabla_\mu \eta^\mu = \partial_\mu \eta^\mu - 2 S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\mu} \eta^\lambda$$

§ 24. <u>Geodetische lijnen in</u> $\mathcal{L}_n$

Zij

24.1) $$\xi^\kappa = \xi^\kappa(z)$$

de parametervorm van een kromme in $\mathcal{L}_n$. $\frac{d\xi^\kappa}{dz}$ is een tangentiale vector. De kromme is geodetisch als $\frac{d\xi^\kappa}{dz}$ aan zichzelf parallel blijft, dus

24.2) $$\frac{\delta}{dz} \frac{d\xi^\kappa}{dz} = \alpha(z) \frac{d\xi^\kappa}{dz}$$

Men kan een andere parameter t invoeren zo dat

24.3) $$\frac{\delta}{dt} \frac{d\xi^\kappa}{dt} = 0$$

Daarvoor is n.e.v. dat

24.4) $$\frac{d^2 t}{dz^2} - \alpha(z) \frac{dt}{dz} = 0$$

De algemene oplossing heeft de vorm

24.5) $$t = C_1 \int e^{\int \alpha(z) dz} dz + C_2$$

t is dus op een lineaire transformatie met constante coefficienten na bepaald en heet <u>natuurlijke parameter</u>. Gevolg: <u>stukken op één geodetische lijn hebben een invariante lengteverhouding</u>. Verandering van C_2 verschaft

het nulpunt van t, verandering van C_1 verandert de "maat". Stukken van verschillende geodetische lijnen kunnen natuurlijk niet door elkaar gemeten worden.

Uit (24.3) volgt dat $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ <u>de geodetische lijnen niet beinvloedt</u>.

§ 25. Normaalcoordinaten in A_n

We bewijzen dat er in een A_n altijd een coordinatenstelsel (κ') bestaat zo dat $\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = 0$ in één bepaald gegeven punt $\underset{0}{\xi}^{\kappa}$.

Zij

25.1) $$\underset{0}{t}^{\kappa} = f^{\kappa}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$$

een parametervoorstelling van ∞^{n-1} contravariante vectoren in $\underset{0}{\xi}^{\kappa}$ zodanig dat er in elke richting juist één ligt.

Op de geodetische lijnen door $\underset{0}{\xi}^{\kappa}$ kiezen we nu een natuurlijke parameter z, zo dat voor iedere lijn $z=0$ in $\underset{0}{\xi}^{\kappa}$ en

25.2) $$\frac{d\xi^{\kappa}}{dz} = \underset{0}{t}^{\kappa}$$

Op iedere geodetische lijn geldt

25.3) $$\frac{d^2\xi^{\kappa}}{dz^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{d\xi^{\mu}}{dz} \frac{d\xi^{\lambda}}{dz} = 0$$

Door differentiatie krijgt men een ∞ reeks van vergelijkingen waaruit de waarden van alle afgeleiden der ξ^{κ} naar z voor $z=0$ kunnen worden berekend. Vervolgens kan men dan ξ^{κ} ontwikkelen in een machtreeks

25.4) $$\begin{aligned} \xi^{\kappa} &= \underset{0}{\xi}^{\kappa} + \left(\frac{d\xi^{\kappa}}{dz}\right)_{z=0} z + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\xi^{\kappa}}{dz^2}\right)_{z=0} z^2 + \cdots \\ &= \underset{0}{\xi}^{\kappa} + \underset{0}{t}^{\kappa} z - \tfrac{1}{2}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}(\underset{0}{\xi}^{\kappa})\, \underset{0}{t}^{\mu}\underset{0}{t}^{\lambda} z^2 + \cdots \end{aligned}$$

waarvan ons hier alleen de drie eerste termen interesseren. Als nieuwe coordinaten gaan we nu kiezen

25.5) $$\begin{aligned} \xi^{h} &\overset{def}{=} \delta_{\kappa}^{h}\, \underset{0}{t}^{\kappa} z = \\ &= \delta_{\kappa}^{h}\left\{(\xi^{\kappa} - \underset{0}{\xi}^{\kappa}) + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\rho\sigma}^{\kappa}(\underset{0}{\xi}^{\kappa})(\xi^{\rho} - \underset{0}{\xi}^{\rho})(\xi^{\sigma} - \underset{0}{\xi}^{\sigma}) + \cdots\right\}; \\ & \qquad h = 1, \dots, n \end{aligned}$$

en door differentiatie volgt

25.6) $$\left.\begin{aligned} A_{\lambda}^{h} &= \delta_{\lambda}^{h} \\ \partial_{\mu} A_{\lambda}^{h} &= \delta_{\kappa}^{h}\, \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}(\underset{0}{\xi}^{\kappa}) \end{aligned}\right\} \text{voor } \xi^{\kappa} = \underset{0}{\xi}^{\kappa}$$

Nu is ingevolge (23.7)

25.7) $$\Gamma_{ji}^{h} = A_{\kappa ji}^{h\mu\lambda}\, \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - A_{ji}^{\mu\lambda}\, \partial_{\mu} A_{\lambda}^{h}$$

en dus in $\underset{0}{\xi}^{\kappa}$

25.8) $$\Gamma_{ji}^{h} = \delta_{\kappa ji}^{h\mu\lambda}\, \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} - \delta_{ji}^{\mu\lambda}\, \delta_{\kappa}^{h}\, \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0$$

wat te bewijzen was. Een dergelijk coordinatenstelsel heet een <u>stelsel van normaalcoordinaten voor het punt</u> $\underset{0}{\xi}^{\kappa}$. Zij hangen alleen af van de keuze van de ∞^{n-1} vectoren $\underset{0}{t}^{\kappa}$ en van het stelsel (κ). Laat men dus die vectoren onveranderd en transformeert men alleen (κ) dan is

25.9) $$\xi^{h'} = \delta^{h'}_{\kappa}\, \underset{0}{t}{}^{\kappa'}{}_{x} = \delta^{h'}_{\kappa'}\, A^{\kappa'}_{\kappa}(\underset{0}{\xi}{}^{\kappa})\, \underset{0}{t}{}^{\kappa}{}_{x} = \delta^{h'\kappa}_{\kappa' h}\, A^{\kappa'}_{\kappa}(\underset{0}{\xi}{}^{\kappa})\, \xi^{h}$$

d.w.z. de normaalcoordinaten in $\underset{0}{\xi}{}^{\kappa}$ zijn door de keuze van de vectoren ξ^{κ} vastgelegd op lineaire homogene transformaties na.

Normaalcoordinaten worden dikwijls met vrucht gebruikt om ingewikkelde berekeningen te vereenvoudigen. Voorbeelden later.

§ 26. De V_n

Wordt in een X_n een reeel tensorveld $g_{\lambda\kappa}$ van de rang n ingevoerd dan ontstaat een V_n. Elke locale ξ_n wordt een R_n. Op- en neerhalen van indices geschiedt als in § 11. Voor de lengte van het lijnelement $d\xi^{\kappa}$ schrijven we ds (in de relativiteitstheorie ook cds)

$$ds^2 = |g_{\lambda\kappa}\, d\xi^{\lambda} d\xi^{\kappa}|$$

Een kromme waarop $ds=0$ in ieder punt heet nulkromme. Voor een gewone kromme bestaat er voor ieder segment een lengte $\int ds$.

De belangrijkste eigenschap in V_n is dat $g_{\lambda\kappa}$ eenduidig een symmetrische overbrenging vastlegt, voldoende aan de voorwaarde

26.1) $$\nabla_{\mu}\, g_{\lambda\kappa} = 0$$

Inderdaad kan men door permutatie uit

26.2) $$\partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} - g_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - g_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} = 0$$

twee andere vergelijkingen afleiden

26.3) $$\partial_{\lambda} g_{\kappa\mu} - g_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa} - g_{\kappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = 0$$

$$-\partial_{\kappa} g_{\mu\lambda} + g_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\kappa\mu} + g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda} = 0$$

en optelling geeft ingevolge de eis $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}$:

26.4) $$\partial_{\mu} g_{\lambda\kappa} + \partial_{\lambda} g_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa} g_{\mu\lambda} = 2 g_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$$

of 26.5) $$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} g^{\kappa\rho}\left(\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\lambda}\right)$$

$\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ is het Christoffelsymbool.

Uit (26.5) volgt

26.6) $$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\rho}\, \partial_{\mu} g_{\rho\lambda} = \tfrac{1}{2}\, \partial_{\mu} \log g$$

Bijgevolg is

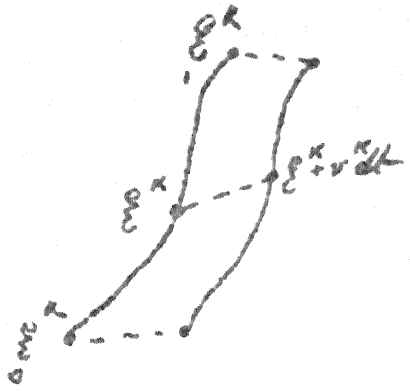
26.7) $$\nabla_{\mu} g = \partial_{\mu} g - 2 g\, \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \qquad \text{(verg. (23.17))}$$

Deze formule kan worden gebruikt om de covariante afgeleide van een contravariante p-vector in een vorm te schrijven die alleen ∂_{μ} en geen ∇_{μ} of $\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$ bevat:

26.8) $$\nabla_{\mu} v^{\mu\kappa_2\cdots\kappa_p} = g^{-1/2}\, \nabla_{\mu} g^{1/2} v^{\mu\kappa_2\cdots\kappa_p} = g^{-1/2}\, \partial_{\mu} g^{1/2} v^{\mu\kappa_2\cdots\kappa_p}$$

We bewijzen dat in een V_n de geodetische lijnen ~~thans~~ tevens de kortste (langste) lijnen zijn.

Neem een kromme tussen $\underset{0}{\xi}{}^{\kappa}$ en $\underset{0}{\xi}{}^{\kappa}$ en noem het algemene punt ξ^{κ}. Geef dan aan ξ^{κ} een verplaatsing $v^{\kappa} ds$, waar v^{κ} een vector is gedefinieerd langs de kromme. We hebben dan $\int ds$ te berekenen langs beide



krommen. Om dat handig te doen breiden we het veld v^κ continu uit op de een of andere manier in de gehele omgeving van de krommen. In ξ^κ zij de veldwaarde $g_{\lambda\kappa}$, dan is de veldwaarde in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ gelijk aan $g_{\lambda\kappa} + v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa}\, dt$ en met die veldwaarde moeten we op de tweede kromme rekenen. Bovendien is het lijnelement $d\xi^\kappa$ van stand veranderd. Dit werkt gecompliceerd en we doen dat nu anders. We slepen tweede kromme en veld mee over $-v^\kappa dt$, en kunnen dan eenvoudig rekenen met de oude kromme maar met een nieuwe veldwaarde in ξ^κ, waarvan we in § 20 hebben bewezen dat die gelijk is aan

26.9) $$g_{\lambda\kappa} + (v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} + g_{\sigma\kappa}\partial_\lambda v^\sigma + g_{\lambda\sigma}\partial_\kappa v^\sigma)\,dt$$

of ook (zie (23.24))

26.10) $$g_{\lambda\kappa} + (g_{\sigma\kappa}\nabla_\lambda v^\sigma + g_{\lambda\sigma}\nabla_\kappa v^\sigma)\,dt = g_{\lambda\kappa} + 2\,(\nabla_\lambda v_\kappa)\,dt$$

omdat $\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$

Bijgevolg is als dt een willekeurige parameter op de kromme is:

$$\begin{aligned} d\,ds &= d\,(g_{\lambda\kappa}\tfrac{d\xi^\lambda}{dt}\tfrac{d\xi^\kappa}{dt})^{\frac12} dt \\ &= \tfrac12 (g_{\lambda\kappa}\tfrac{d\xi^\lambda}{dt}\tfrac{d\xi^\kappa}{dt})^{-\frac12}\cdot 2(\nabla_\mu v_\kappa)\tfrac{d\xi^\mu}{dt}\tfrac{d\xi^\kappa}{dt}\,dt\,dt \\ &= (\nabla_\mu v_\kappa)\tfrac{d\xi^\mu}{ds}\tfrac{d\xi^\kappa}{ds}\,ds\,dt = \tfrac{d\xi^\kappa}{ds}\tfrac{\delta v_\kappa}{ds}\,ds\,dt \end{aligned}$$ 26.11)

en dus

$$\begin{aligned} d\int_{\xi^\kappa}^{\xi^\kappa} ds &= dt \int_{\xi^\kappa}^{\xi^\kappa} \tfrac{d\xi^\lambda}{ds}\,\delta v_\lambda = \\ &= dt\left\{(v_\kappa \tfrac{d\xi^\lambda}{ds})_{\xi=\xi^\kappa} - (v_\kappa \tfrac{d\xi^\lambda}{ds})_{\xi=\xi^\kappa}\right\} - dt\int_{\xi^\kappa}^{\xi^\kappa} v_\kappa\,\delta\tfrac{d\xi^\lambda}{ds} \end{aligned}$$ 26.12)

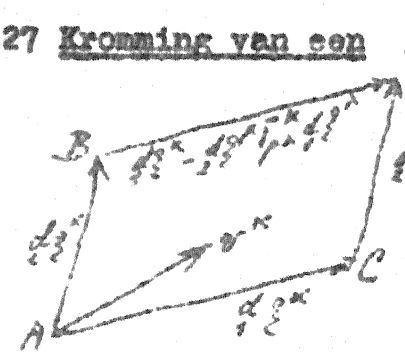
Indien nu $v=0$ in ξ^κ en in ξ^κ dan volgt dat de variatie van $\int ds$ dan en alleen dan voor <u>iedere</u> keuze van v^κ nul is indien

$$\delta\,\tfrac{d\xi^\lambda}{ds} = 0$$ 26.13)

d.w.z. <u>indien de kromme een geodetische lijn is</u>. De lengte tussen twee punten is dan extreem en voor definiete fundamentaaltensor (bij reeele krommen) altijd minimum. Bij indefiniete fundamentaaltensor kan de lengte ook maximum worden.

Een geodetische lijn die met een van zijn elementen op de nulkegel ligt, ligt geheel op de nulkegel. Want is δ een tangentiale vector in dat punt dan blijft deze vector bij pseudoparallele verplaatsing langs de kromme zijn lengte, dat is nul, behouden. Omgekeerd is natuurlijk niet iedere kromme op de nulkegel geodetisch.

§ 27 Kromming van een



Neem een infinitesimaal parallelogram in punt A en verplaats van uit A een vector v^κ pseudoparallel van A over B naar D en ook van A over C naar D. Het verschil tussen de beide verplaatste waarden is een vector en wel

$$\delta_1\xi^\nu\,\delta_2\xi^\mu\,v^\lambda\left\{2\partial_{[\nu}\Gamma^\kappa_{\mu]\lambda}+2\Gamma^\kappa_{[\nu|\rho|}\Gamma^\rho_{\mu]\lambda}\right\}$$

27.1)

Bijgevolg is

27.2) $$R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdots\kappa} \overset{\text{def}}{=} 2\partial_{[\nu}\Gamma^\kappa_{\mu]\lambda}+2\Gamma^\kappa_{[\nu|\rho|}\Gamma^\rho_{\mu]\lambda}$$

een affinor. Dit is de kromteaffinor van de overbrenging $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$.

Deze affinor komt ook op andere wijze voor den dag. Men bewijst gemakkelijk dat

27.3)
$$\nabla_\rho\nabla_\sigma v^\kappa = \tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v^\lambda$$
$$\nabla_\rho\nabla_\sigma w_\lambda = -\tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa w_\kappa$$
$$\nabla_\rho\nabla_\sigma \varphi = -\tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}{}^\lambda\varphi$$

(φ gewicht +1)

en algemener bijv.

27.4) $$\nabla_\rho\nabla_\sigma \mathfrak{P}^\kappa_{\cdots\lambda} = \tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\rho}{}^\kappa\mathfrak{P}^\rho_{\cdots\lambda}-\tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}{}^\sigma\mathfrak{P}^\kappa_{\cdots\sigma}-\tfrac{1}{2}kR_{\nu\mu\sigma}{}^\sigma\mathfrak{P}^\kappa_{\cdots\lambda}$$

(gewicht k)

Voor $\breve{v}^\kappa$, $\breve{w}_\lambda$, $\breve{\varphi}$ en $\breve{\mathfrak{P}}^\kappa_{\cdots\lambda}$ gelden precies dezelfde formules.

Identiteiten voor de kromteaffinor

Eerste identiteit (volgt direct uit de definitie)

27.5) $$\boxed{R_{[\nu\mu\lambda]}{}^\kappa = 0}$$

Tweede identiteit (volgt direct uit de definitie)

27.6 $$\boxed{R_{[\nu\mu\lambda]}{}^\kappa = 0}$$

Derde identiteit (alleen voor k alwaar men $R_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ schrijft i.p.v. $R_{\nu\mu\lambda}{}^\sigma$)

27.7) $$\boxed{R_{\nu\mu(\lambda\kappa)} = 0}$$

Bewijs:

27.8) $$0 = \nabla_\rho\nabla_\sigma g_{\lambda\kappa} = -\tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\lambda}{}^\rho g_{\rho\kappa}-\tfrac{1}{2}R_{\nu\mu\kappa}{}^\rho g_{\lambda\rho} = -R_{\nu\mu(\lambda\kappa)}$$

Vierde identiteit (alleen voor V_n)

27.9) $$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = K_{\lambda\kappa\nu\mu}$$

(volgt direct uit de 2de en de 3de identiteit)

Uit de derde identiteit volgt $K_{\nu\mu\sigma}^{\cdots\sigma} = 0$. In een V_n is dus (zie 27.3 c)) $R_{\nu\mu} = 0$, d.w.z. de overbrenging in een V_n is integrabel voor dichtheden en dat is geen wonder omdat lengten invariant blijven en dus ook inhouden.

$K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ is alternerend in $\nu\mu$ en in $\lambda\kappa$ en bovendien nog eens symmetrisch in de groepen $\nu\mu$, $\lambda\kappa$. Dit is dus een soort grootheden dat t.o. van bivectoren dezelfde rol vervult als een tensor van valentie 2 t.o. van vectoren. Men noemt ze wel bivectortensoren. Een algemene bivectortensor heeft

$$\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}n(n-1)\cdot\left(\tfrac{1}{2}n(n-1)+1\right)\right\} = \tfrac{1}{8}n(n^2-1)(n^2-n+2)$$

onafhankelijke kentallen. Maar $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ voldoet ook aan

27.10) $$K_{[\nu\mu\lambda\kappa]} = 0$$

welke vergelijking volgt uit de 2de, 3de en 4de identiteit en teeamen met de 3de en de 4de gelijkwaardig is aan deze drie. Dit geeft $\binom{n}{4}$ extra vergelijkingen en daaruit volgt dat er precies $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ onafhankelijke kentallen overblijven (1 voor $n=2$; 6 voor $n=3$; 20 voor $n=4$)

Ricci leidde voor de afgeleiden van $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\kappa}$ een identiteit af, die genoemd is naar Bianchi:

27.11) $$\boxed{\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\cdots\kappa} = 0}$$

Bewijs: We nemen in enig vast punt een stelsel normaalcoördinaten bij dat punt behorend (zie § 25). Dan is aldaar $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0$. Maar de afgeleiden van $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ behoeven er niet nul te zijn! Nu is in dat punt

27.12) $$\nabla_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\cdots\kappa} = \partial_{[\omega} R_{\nu\mu]\lambda}^{\cdots\kappa} = 2\,\partial_{[\omega}\left\{\partial_{\nu]}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\nu|\rho|}^{\kappa}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\rho}\right\} =$$

$$= 2\left(\partial_{[\omega}\Gamma_{\nu|\rho|}^{\kappa}\right)\Gamma_{\mu]\lambda}^{\rho} + 2\,\Gamma_{[\omega\nu|\rho|}^{\kappa}\,\partial_{\omega}\Gamma_{\mu]\lambda}^{\rho} = 0$$

Vouwing naar $\nu\kappa$ levert de affinor van Ricci:

27.13) $$R_{\mu\lambda} \overset{\text{def}}{=} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\nu}$$

In een V_n is deze affinor kennelijk een tensor:

27.14) $$R_{\mu\lambda} \overset{\text{def}}{=} K_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\nu} = K_{\lambda\mu}$$

Uit $K_{\mu\lambda}$ kan men de scalar

27.15) $$K = g^{\mu\lambda}K_{\mu\lambda}$$

vormen. $\frac{1}{n(n-1)}K$ heet de scalaire kromming van de V_n. Inderdaad rekent men gemakkelijk uit dat voor een oppervlak in E_3 de gewone kromming juist gelijk $\frac{1}{2}K$ is.

Uit de identiteit van Bianchi volgt bij vouwing

27.16) $$\nabla_{\omega} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\omega} + \nabla_{\nu} R_{\mu\omega\lambda}^{\cdots\omega} + \nabla_{\mu} R_{\omega\nu\lambda}^{\cdots\omega} = 0$$

of

27.17) $$g_\omega R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdots\omega} + 2\nabla_{[\mu} R_{\nu]\lambda} = 0$$

In V_n kan men deze identiteit nog eens met $g^{\mu\lambda}$ overschuiven en dat geeft

27.18) $$2\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda - \nabla_\lambda R = 0$$

of indien men de tensor

27.19) $$G_{\mu\lambda} \equiv R_{\mu\lambda} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\lambda} \quad ; \quad (G_{\mu\lambda} = G_{\lambda\mu}!)$$

invoert:

27.20) $$\boxed{\nabla_\mu G^{\mu\lambda} = 0}$$

Deze identiteit is van centrale betekenis in de algemene relativiteitstheorie. Men noemt het linker lid wel de "divergentie van $G^{\mu\lambda}$". In een V_n bestaat dus steeds een tensor wiens divergentie nul is, en deze hangt af van $g_{\mu\lambda}$ en de afgeleiden van $g_{\mu\lambda}$ tot de tweede orde.

We zullen nu aantonen dat de dichtheid

27.21) $$-\mathcal{G}^{\mu\lambda} \equiv \sqrt{g}\, G^{\mu\lambda}$$

juist de Lagrangeafgeleide van $g^{\mu\lambda} R$ met betrekking tot $g_{\mu\lambda}$ is. Palatini gaf een zeer kort bewijs gebruikmakende van de normaalcoördinaten behorende bij een bepaald punt P. Dan is $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ aldaar nul en dat wil ingevolge (26.2) zeggen dat ook de afgeleiden $\partial_\nu g_{\mu\lambda}$ in P nul moeten zijn. Is nu $\delta g_{\mu\lambda}$ de variatie van $g_{\mu\lambda}$ dan zullen de $\delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ in P in het algemeen niet nul zijn, immers de normaalcoördinaten zijn geen normaalcoördinaten meer voor de bij $g_{\mu\lambda} + \delta g_{\mu\lambda}$ behorende overbrenging. Maar wel weten we dat de $\delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ verschillen zijn van de parameters van twee verschillende overbrengingen en daaruit volgt op grond van de transformatiewijze (23.7) van zulke parameters dat de $\delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ in elk geval kentallen van een affinor zijn.

Nu is

27.22) $$R = g^{\mu\lambda}\left(\partial_\kappa \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\kappa\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\right)$$

en dus is in het punt P:

$$\delta(\sqrt{g}R) = \delta\sqrt{g}\, R + \sqrt{g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\kappa \delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu \delta\Gamma^\kappa_{\kappa\lambda} +$$
$$+ R\,\delta\sqrt{g} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \sqrt{g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g}\,\partial_\kappa g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - \sqrt{g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} R\sqrt{g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \sqrt{g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g}\,\partial_\kappa\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\right) -$$
$$- \tfrac{1}{2} R\sqrt{g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

27.23)
$$= \sqrt{g}\, G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu\sqrt{g}\left(g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}\right)$$

waar het teken $\overset{*}{=}$ tenslotte weer door $=$ vervangen mocht worden omdat de vergelijking de invariante vorm verkregen heeft.

Nu is volgens (19.11) en (27.23)

27.24) $$\overset{v}{d}\int_{\tau_n} g^{1/2} R\, df = \int_{\tau_n} \overset{v}{d}(g^{1/2} R)\, df = \int_{\tau_n} g^{1/2} G_{\mu\lambda}\, \overset{v}{d} g^{\mu\lambda}\, df + \int_{\tau_{n-1}} g^{1/2}(g^{\nu\lambda}\overset{v}{d}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}\overset{v}{d}\Gamma^{\nu}_{\nu\lambda})\, df_{\mu}$$

is dus τ_n een gebied van V_n op welks begrenzing de variaties van $g_{\lambda\kappa}$, $\partial_\mu g_{\lambda\kappa}$ en $\partial_\nu\partial_\mu g_{\lambda\kappa}$ nul zijn, dan verdwijnt de tweede term rechts en er blijft

27.25) $$\overset{v}{d}\int_{\tau_n} g^{1/2} R\, df = \int_{\tau_n} g^{1/2} G_{\mu\lambda}\, \overset{v}{d} g^{\mu\lambda}\, df = -\int_{\tau_n} g^{1/2} G^{\nu}{}_{\kappa\lambda}\, df = -\int_{\tau_n} \mathcal{G}^{\kappa\lambda}\, \overset{v}{d} g_{\kappa\lambda}\, df$$

De identiteit (21.12) gaat voor $[R]^{\lambda\nu} = -\mathcal{G}^{\lambda\kappa}$ over in

27.26) $$-\mathcal{G}^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) + g_{\mu\kappa}\partial_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\kappa} + g_{\lambda\mu}\partial_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\kappa} = 0$$

of

27.27) $$\mathcal{G}^{\lambda\kappa}\Gamma^{\nu}_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\nu} = \nabla_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\nu} = 0$$

in overeenstemming met (27.20)

§28. <u>De covariante differentiatie in anholonome coordinaten.</u>

Is (h) een anholonoom coordinatenstelsel in $\mathcal{L}_n$ dan blijft (23.7) gelden, dus

28.1) $$\Gamma^{h}_{ji} = A^{h\mu\lambda}_{\kappa ji}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} - A^{\mu\lambda}_{ji}\partial_\mu A^{h}_{\lambda}$$

maar $\partial_\mu A^{h}_{\lambda j}$ is niet langer nul. Ingevolge (28.8) is dus

28.2) $$\Gamma^{h}_{[ji]} = \Omega^{\cdot\cdot h}_{ji} - \Omega^{\cdot\cdot h}_{ji}$$

en in een A_n

28.3) $$\Gamma^{h}_{[ji]} = -\Omega^{\cdot\cdot h}_{ji}$$

Bijgevolg is nu

28.4) a) $$\nabla_{[j} w_{i]} = \partial_{[j} w_{i]} + \Omega^{\cdot\cdot h}_{ji} w_h$$

b) $$\nabla_j \eta^j = \partial_j \eta^j + 2\Omega^{\cdot\cdot i}_{ji} w_i$$

hieruit laten zich (22.7) en (22.10) onmiddellijk afleiden.

Op dezelfde wijze als (26.5) kan nu in een L_n met behulp van (28.2) worden afgeleid

28.5) $$\Gamma^{h}_{ji} = \{^{h}_{ji}\} - \Omega^{\cdot\cdot h}_{ji} + \Omega^{\cdot h}_{i\cdot j} + \Omega^{\cdot h}_{j\cdot i}$$

Bestaat dus het anholonome stelsel uit onderling loodrechte eenheidsvectoren, dan is $\{^{h}_{ji}\} = 0$ en

28.6) $$\Gamma^{h}_{ji} = -\Omega^{\cdot\cdot h}_{ji} + \Omega^{\cdot h}_{i\cdot j} + \Omega^{\cdot h}_{j\cdot i}$$

Uit (28.5) volgt voor Γ^{i}_{ji}

28.7) $$\Gamma^{i}_{ji} = \{^{i}_{ji}\} - \Omega^{\cdot\cdot i}_{ji} + \Omega^{\cdot i}_{i\cdot j} + \Omega^{\cdot i}_{j\cdot i} = \{^{i}_{ji}\} = \tfrac{1}{2}\partial_j \log g$$

Daaruit zien we dat (26.7) inderdaad ook voor niet holonome coordinaten geldt:

28.8) $$\nabla_j g = \partial_j g - 2g\,\Gamma^i_{ji} = 0$$

In krijgen we voor de kromteaffinor in plaats van (27.2)

28.9) $$R_{kji}{}^{h} = 2\partial_{[k}\Gamma^h_{j]i} + 2\Gamma^h_{[k|l}\Gamma^l_{j]i} + 2\Omega^h_{kj}\Gamma^h_{ji}$$

Natuurlijk zijn alle vergelijkingen tussen grootheden die alleen ∂_μ bevatten en niet $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$ of ∂_μ invariant ook voor de overgang tot anholonome coordinaten. Maar vergelijkingen die $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$ of ∂_μ bevatten krijgen er in den regel correctietermen bij met Ω^λ_{ji}. Het is soms gemakkelijk het teken $\hat{=}$ te gebruiken indien men uit wil drukken dat een vergelijking alleen voor holonome coordinaten geldt, bijv.:

28.10) $$\partial_\mu w_{\lambda j} \hat{=} \partial_\mu w_{\lambda j}$$

VI Physische objecten en hun dimensies.

(Dorgelo en Schouten, On Units and Dimensions, Proc.Kon. Akad. 49 (1946) 123-131
282-291
393-403)

29. Absolute en relatieve dimensies.

Physische objecten worden beschreven t.o. van coordinaten en van zekere grondeenheden, waarvoor we hier bij wijze van voorbeeld zullen nemen: massa M, lengte L, tijd T en electrische lading Q. Voor deze grondeenheden worden alleen transformaties van de vorm

29.1) $$M' = m^{-1}M;\quad L' = l^{-1}L;\quad T' = t^{-1}T;\quad Q' = q^{-1}Q$$

toegelaten waarin m, l, t en q willekeurige constanten zijn. De transformatie (29.1) heet maatverandering.

Definitie van een physisch object in een V_n ($n=3$ gewone ruimte, $n=4$ ruimte-tijdwereld)

Een physisch object in een bepaald punt ξ^α van een V_n is een correspondentie tussen de toegelaten coordinatenstelsels en de toegelaten stelsels van grondeenheden enerzijds en de geordende stellen van N getallen anderzijds, voldoende aan de voorwaarden:

a. aan ieder toegelaten coordinatenstelsel en ieder toegelaten stel grondeenheden is slechts één geordend stel van N getallen toegevoegd;

b. indien $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ en $\Phi_1', \ldots, \Phi_{N'}'$ behoren bij ω, M, L, T, Q en ω', M', L', T', Q' dan hangen de $\Phi_{L'}$ alleen af van de Φ_L, de functies $\varphi^{\alpha\beta\gamma\delta}$ in de omgeving van ξ^α en m, l, t, q en wel op zodanige wijze dat m, l, t en q alleen voorkomen in de vorm van een factor $m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta$ die voor elk van de Φ_L dezelfde is.

Het geval dat de factoren verschillen, bijv. bij een snelheid in pool coordinaties, kan altijd tot het hier behandelde worden teruggebracht.

Op Φ_L heten de kentallen t.o. van ω, M, L, T, Q. Zijn de Φ_L lineair homogeen in de Φ_L, homogeen algebraisch in de R_n en onafhankelijk van voor de afgeleiden dan heet het object een physische grootheid.

Een stel getallen kan een physisch object vormen t.o.v. zekere coordinatentransformaties en niet ten opzichte van andere transformaties. Bijv. electrische veldsterkte bij orthogonale transformaties in R_3 maar niet in R_4.

Worden M, L, T en Q vastgehouden dan blijven alleen de coordenatentransformaties. Dus bestaat er bij ieder physisch object een geometrisch object dat bij transformatie van M, L, T, Q een factor $m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta$ krijgt. Dit object heet het geometrisch beeld van het physisch object en $[m^\alpha l^\beta t^\gamma q^\delta]$ zijn dimensie, of ook de absolute dimensie van het physisch object.

De absolute dimensie is dus gedefinieerd ten opzichte van algemene coordinatentransformaties, pseudogroep in of groep in een of . De absolute dimensie is niet identiek met de dimensie in de gewone zin.

Neem bijv. een snelheid met de kentallen t.o. van een algemeen coordinatenstelsel. Het meetkundig beeld is de pijl van de weg afgelegd per tijdseenheid. Verander de tijdseenheid met een factor dan krijgt ook deze vector een factor . Zijn absolute dimensie is dus . Neemt men echter de orthogonale kentallen t.o.v. een holonoom of anholonoom orthogonaal coordinatenstelsel, gebaseerd op de eenheid van lengte, dan krijgen de een factor bij maatverandering.
Dit leidt tot de definitie:

Indien de kentallen van een geometrisch object t.a.v. een orthogonaal coordinatenstelsel, gebaseerd op de eenheid van lengte, bij maatverandering een factor krijgen, dan heet de relatieve dimensie, of kort dimensie van het object.

Dit is de in de physica gebruikelijke dimensie. Het verschil zit natuurlijk daarin dat de orthogonale coordinatenstelsels in tegenstelling tot de algemene, zelf veranderen bij maatverandering. Dit heeft als gevolg dat de betrekkingen tussen absolute en relatieve dimensie onafhankelijk zijn van de physischen aard van het object en alleen afhangen van de transformatiewijze van zijn geometrisch beeld.

De overgang van algemene op orthogonale coordinaten geschiedt met behulp van en . Nu krijgt de eenheidsvector bij maatverandering een factor en bijgevolg krijgt de relatieve dimensie een extra factor voor iedere en een factor voor iedere die in de transformatieformules optreedt. Aangezien in juist factoren zitten krijgt een dichtheid van het gewicht een extra factor in zijn relatieve dimensie. Hier is een tabel voor :
29.2)

abs. dim.	rel. dim.	abs. dim.	rel. dim.

De absolute dimensie geeft aan welke grondeenheden bekend moeten zijn voor de constructie van het geometrisch beeld, de relatieve die welke nodig zijn voor de meting der orthogonale kentallen.

absolunt relatief

29.3) Zie blz. 51a

Bijv. geometrische beeld~~s~~nelheid, ter constructie <u>alleen</u> een klok nodig.

Hier volgen enige voorbeelden van absolute en relatieve dimensies in V_n :

	absoluut	relatief
$d\xi^{\kappa}$	$[1]$	$[l]$
ds	$[l]$	$[l]$
$g_{\lambda\kappa}$	$[l^2]$	$[1]$
$g^{\kappa\lambda}$	$[l^{-2}]$	$[1]$
g	$[l^{2n}]$	$[1]$
$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$	$[1]$	$[l^{-1}]$
$\{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$	$[1]$	$[l^{-1}]$
Q_{μ}	$[1]$	$[l^{-1}]$
$R_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$	$[1]$	$[l^{-2}]$
$R_{\mu\lambda}$	$[1]$	$[l^{-2}]$
$R^{\mu\lambda}$	$[l^{-4}]$	$[l^{-2}]$
$\mathfrak{R}^{\mu\lambda}$	$[l^{n-4}]$	$[l^{-2}]$
R	$[l^{-2}]$	$[l^{-2}]$
$g^{\frac{1}{2}} R$	$[l^{n-2}]$	$[l^{-2}]$

§ 30. Constructie van het geometrisch beeld.

Voorbeelden:

1) $\mathfrak{v}^k$ snelheid stromende vloeistof, μ = dichtheid, dus $\mu[x]$ is massa per $m.v.$ = dichtheid gewicht + 1 en $\mu[k]$ massa per $p.v.$ = scalar. μ heeft absolute dimensie $[m]$ en relatieve $[m^2 t^{-2}]$. $m^k = \mu v^k$ is de stroomvector-dichtheid. Dimensies $[m t^{-1}]$ en $[m t^2 t^{-1}]$. Het geometrisch beeld is een cylinder met inwendige orientering: $\mathfrak{G}$ Is $\mathfrak{m}$ de massa die van buiten af op een of andere manier wordt ingepompt per $m.v.$ en per eenheid van tijd dan is de continuiteitsvergelijking

30.1) $$\partial_\mu \mathfrak{m}^\mu + \partial_t \mu[x] = \mathfrak{q}[x]$$ Dimensie (abs.): $[m t^{-1}]$

In orthogonale coordinaten

30.2) $$\nabla_j \mathfrak{m}^j + \partial_t \mu[k] = \mathfrak{q}[k]$$ Dimensie (rel.): $[m t^{-2} t^{-1}]$

De cylinder van $\mathfrak{m}$ in enig punt is de cylinder die juist de eenheid van massa per eenheid van tijd doorlaat. Nodig voor de constructie μ en T. Het geometrisch beeld van μ is het volume dat juist de eenheid van massa bevat. Nodig alleen M. Het geometrisch beeld van $\mathfrak{m}$ is het volume waarin in de eenheid van tijd juist de eenheid van massa gepompt wordt. Nodig M en T.

2) Beschouw de electromagnetische vergelijkingen

30.3)
$$\begin{aligned}
&a)\quad \mathrm{rot}\,\vec{F} + \dot{\vec{B}} = 0\\
&b)\quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\\
&c)\quad \dot{\vec{D}} - \mathrm{rot}\,\vec{H} = -\rho\,\vec{s}\\
&d)\quad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho\\
&e)\quad \vec{D} = \varepsilon\,\vec{F}\\
&f)\quad \vec{B} = \mu\,\vec{H}
\end{aligned}$$

$\vec{F}$ = electrische en $\vec{H}$ = magnetische veldsterkte, $\vec{D}$ = dielectrische verplaatsing, $\vec{B}$ = magnetische inductie, ρ = ladingsdichtheid en $\vec{s}$ = snelheid lading. In orthogonale kenvallen luiden deze

30.4)
$$\begin{aligned}
&a)\quad \partial_2 F^3 - \partial_3 F^2 + c\,\partial_4 B^1 = 0\\
&b)\quad \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0\\
&c)\quad \partial_1 D^1 - \partial_2 H^3 + \partial_3 H^2 = -\rho\, s^1 \quad ; \text{ cycl. } 1,2,3;\ \partial_4 \frac{d}{dt} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\\
&d)\quad \partial_1 D^1 + \partial_2 D^2 + \partial_3 D^3 = \rho\\
&e)\quad D^1 = \varepsilon F^1\\
&f)\quad B^1 = \mu H^1
\end{aligned}$$

Om deze vergelijkingen in een vorm te brengen invariant voor affiene transformaties is voor (30.4a) nodig dat $\mathfrak{F}$ wordt beschouwd als

covariante vector of W-vector en B als covariante bivector of W-bivector. Daar echter de electrische potentiaal geen schroefzin heeft is alleen de eerste veronderstelling mogelijk. Evenzo is, gezien dat de electrische lading geen schroefzin heeft (zelfs een draaiend electron heeft geen schroefzin) alleen mogelijk D te beschouwen als contravariante vectordichtheid en H als contravariante bivectordichtheid van het gewicht +1. Dan gaan de vergelijkingen in de volgende vorm die invariant is bij affiene transformaties en dus maar direct t.o. van een algemeen coordinatenstelsel wordt geschreven (signatuur ...)

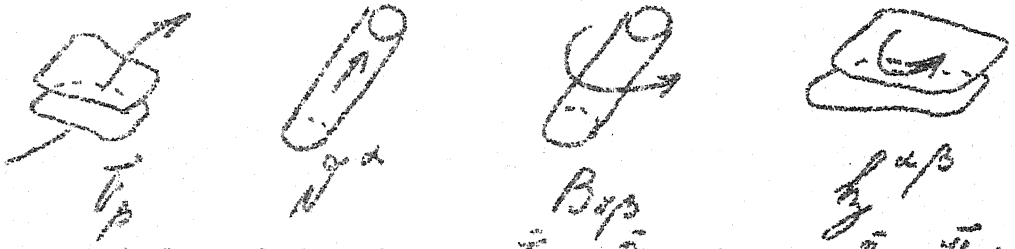
$$
\begin{aligned}
&\text{a)} && -c\,\partial_{[\gamma}\Gamma_{\beta]} + c\,\partial_u B_{\gamma\beta} = 0 \\
&\text{b)} && \partial_{[\gamma} B_{\beta\alpha]} = 0 \\
&\text{c)} && c\,\partial_u \mathcal{D}^\alpha + \partial_\beta \mathcal{H}^{\beta\alpha} = -\rho u^\alpha \\
&\text{d)} && \partial_\alpha \mathcal{D}^\alpha = \rho \qquad ; \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \\
&\text{e)} && \mathcal{D}^\alpha = \varepsilon\, g\, h\, g^{\alpha\beta}\Gamma_\beta \\
30.5)\quad &\text{f)} && B_{\delta\gamma} = \mu\, g^{-1/2}\, g_{\delta\beta}\, g_{\gamma\alpha}\, \mathcal{H}^{\beta\alpha}
\end{aligned}
$$

In een anisotroop medium komt in plaats van (30.5 e,f)

$$
\begin{aligned}
&\text{e')} && \mathcal{D}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\Gamma_\beta \\
30.6)\quad &\text{f')} && B_{\delta\gamma} = \mu_{\delta\gamma\beta\alpha}\, \mathcal{H}^{\beta\alpha} \qquad ; \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3
\end{aligned}
$$

waar $\varepsilon^{\alpha\beta}$ en $\mu_{\delta\gamma\beta\alpha}$ affinordichtheden van het gwicht +1 en −1 zijn.

De meetkundige beelden van $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ en $\mathcal{H}$ zijn dus



waaruit we zien dat de relatie tussen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ en tussen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{H}$ in een isotroop medium noodzakelijk de fundamentaaltensor moet bevatten omdat het begrip "loodrecht" er aan te pas komt.

De relatieve dimensies van de electromagnetische grootheden zijn bekend en wij vinden daaruit aan de hand van (29.2) de absolute:

	rel. dimensie	abs. dimensie
Q	$[q]$	$[q]$
ρ	$[l^{-3}q]$	$[q]$
$\mathcal{F}$	$[m l t^{-2} q^{-1}]$	$[m l^2 t^{-1} q^{-1}] = [\tilde{h} t^{-1} q^{-1}]$
$\mathcal{D}$	$[l^{-2}q]$	$[q]$
$\mathcal{H}$	$[l^{-1}t^{-1}q]$	$[t^{-1}q]$
$\mathcal{B}$	$[m t^{-1} q^{-1}]$	$[m l^2 t^{-1} q^{-1}] = [\tilde{h} q^{-1}]$
ε	$[m^{-1} l^{-3} t^2 q^2]$	$[m^{-1} l^{-3} t^2 q^2] = [\tilde{h}^{-1} c^{-1} q^2]$
μ	$[m l q^{-2}]$	$[m l q^{-2}] = [\tilde{h} c^{-1} q^{-2}]$
$\varepsilon^{\alpha\beta}$	$[m^{-1} l^{-3} t^2 q^2]$	$[m^{-1} l^{-2} t^2 q^2] = [\tilde{h}^{-1} t q^2]$
$\mu_{\delta\gamma\beta\alpha}$	$[m l q^{-2}]$	$[m l^2 q^{-2}] = [\tilde{h} t q^{-2}]$

(30.7)

ρ heeft de absolute dimensie $[q]$. Het geometrisch beeld is het volume dat de lading 1 bevat. Nodig voor constructie is dus alleen Q.