Errata.

De veranderingen zijn in de text aangegeven door (1) , (2) ,enz.

Blz. 4 - (1) tusschenvoegen de formule: (4.2):

(4.2) $y' = P_1' x' + \ldots + P_n' x + q'$

blz.13 - (2) „Wij zullen bewijzen:" vervalt. Hiervoor komt in de plaats:
Uit (12.5) volgt:

blz.13 - (3) „Bewijs" vervalt. Hiervoor komt in de plaats:
Men kan dit ook als volgt inzien:

blz.14 - (4) Achter form. (14.4)

$$; \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1$$

blz.14 - (5) Vanaf (5) tot het einde van de bladzeide aldus veranderen:
Het vlak door het eindpunt van e_2, evenwijdig aan e_1, en e_3, wordt t.o.van het stelsel K voorgesteld door de vergelijking

(14.5)
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

blz.15 - (6) of, herleid:

(15.1) $$2x' - 2x^2 - x^3 = 1.$$

blz.15 - (7) in form. (15.4) achter e_2 en achter e_3 een : te plaatsen

blz.17 - (8) Vanaf „Uit de vergelijking" tot „Ook de kentallen" te vervangen door:
Gaat men in (16.4) voor den index waarover niet gesommeerd wordt over tot het assenstelsel (K') dan volgt

(17.4) $$A_k^{k'} v^k = v^{k'}$$

en uit een vergelijking met (7.1) volgt dus dat de intermediaire kentallen $A_k^{k'}$ juist gelijk zijn aan de $A_{k'}^{k}$ uit (7.1), zoodat achteraf blijkt, dat wij goed deden in (6.1) reeds den kenletter A te gebruiken.

blz.18 - (9) achter „algemeen product" komt: of kort product

blz.18 - (10) „een dergelijken" vervangen door: iederen willekeurigen

blz.18 - (11) „(Zie opgave)" wordt (Zie de opgave boven)

blz.19 - (12) De opgave wordt als volgt geschreven:
Opgave: Bewijs op dezelfde manier, dat de affinor a_λ^k geschreven kan worden als de som van producten van twee vectoren.

Miat blz.

3-4-5-6

30-31

64-65-66-67.

blz.20 - (13) Aan de opgave toevoegen:
en dus geen invariante bewerking is.

blz.20 - (14) Het gedeelte vanaf (14) tot de opgave, vervalt .

blz.23 - (15) Form. (23.2) wordt als volgt geschreven:

$$g_{\kappa\lambda}\, x^{\kappa} x^{\lambda} = 1. \qquad (23.2)$$

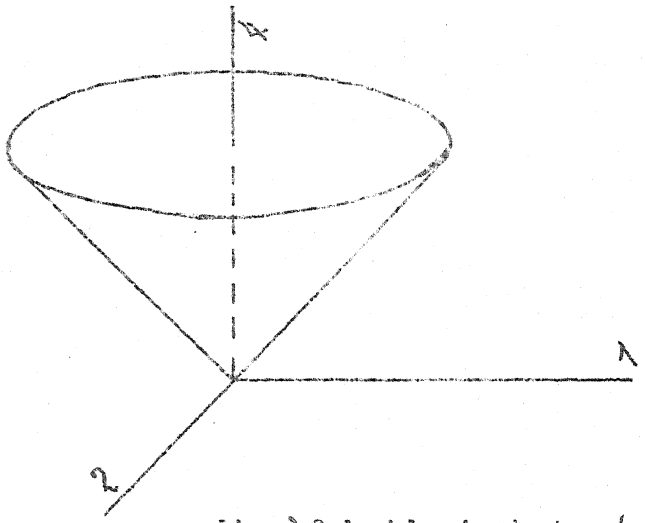
blz.29 - (16) Is $p_{\lambda\kappa}$ een <u>reëele tensor</u> (d.w.z. een tensor met reëele kentallen) van den rang n, dan kan het assenstelsel steeds reëel zoo gekozen worden, dat

blz.29 - (17) tusschenvoegen het woord: reëel

blz.29 - (18) „een dergelijken vorm krijgt," vervangen door: een vorm als (28.7) krijgt,

blz.30 - (19) Aan toevoegen: Van een vector met positive resp. negative invariant zegt men dat hij in het + -gebied resp. — -gebied ligt.

blz.30 - (20) De figuur moet er als volgt uitzien:



blz.31 - (21) tusschenvoegen: die òf beide in het + -gebied òf in het — -gebied liggen.

blz.31 - (22) achter form. (31.2) komt: ; $\begin{cases} + \text{ voor het } + \\ - \text{ voor het } - \end{cases}$

blz.35 - (23) vervolgen met: (we laten de indices v

blz.35 - (24) in form. (35.2) vervalt:

$$x_4 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + ct\vec{u} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' + ct'\vec{u}'$$

blz.35 - (25) Hier tusschenvoegen:
Inderdaad is

$$x'\vec{i}_1 + y'\vec{i}_2 + x'\vec{i}_3 + ct'\vec{i}_4 =$$

$$(x\cos\psi + y\sin\psi)(\vec{i}_1\cos\psi + \vec{i}_2\sin\psi) + \qquad (35.3)$$
$$+(-x\sin\psi + y\cos\psi)(-\vec{i}_1\sin\psi + \vec{i}_2\cos\psi) + x\vec{i}_3 + ct\vec{i}_4 =$$
$$x\vec{i}_1 + y\vec{i}_2 + x\vec{i}_3 + ct\vec{i}_4$$

blz.35 - (26) form. (35.3) wordt (35.4)

blz.35 - (27) form. (35.4) wordt (35.5)

blz.35 - (28) hier komt nog:

Inderdaad is ook hier

$$x'_{1'}i + y'_{2'}i + x'_{3'}i + ct'_{4'}i = x_1 i + y_2 i + x_3 i + ct_4 i$$

blz.37 - (29) tusschenvoegen: (en dus de index +4 of 0 is)

blz.37 - (30) „orthogonaal" onderstreepen.

blz.38 - (31) en (32) in beide gevallen vervolgen met:

, dus niet in de ruimte-tijd-wereld der relativiteitstheorie

blz.42 (33) tusschenvoegen: van n^k

blz.42 - (34) tusschenvoegen: (en dus de pijl van n_λ naar buiten !)

blz.42 - (35) ∇ wordt ∂

blz.43 - (36) - (37) - (38) en (39) ∇ wordt ∂

Relativistische Mechanica.

Inleiding.

De bedoeling van dit college is niet om te onderzoeken of de relativiteitstheorie al of niet juist is, maar om de techniek ervan te behandelen. Het doel van de Mechanica en Physica is de waarnemingscijfers zoo te ordenen, dat men na vele waarnemingen de verdere kan voorspellen. Hiervoor maken wij een gedachtenschema naast de realiteit, stellen symbolen en regels op en zorgen dat een gebeurtenis in de realiteit een correspondeerend geval in het schema heeft. Het schema is dus niet absoluut; er kunnen meerdere goede schema's zijn. De meetkunde van Euclides, gecombineerd met de principes $K = ma$ en actie is gelijk reactie geeft met de algebra een afgesloten geheel, n.l. de klassieke mechanica van Newton. Dit is een zeer geslaagd schema, maar wij weten, dat het slechts ten deele goed is. Het is gebleken, dat dit schema heel goed aan de realiteit beantwoordt als $\frac{v}{c} << 1$ en $m >>$ massa van het electron.[1)]

De eenvoudige relativiteitstheorie behandelt hoofdzakelijk die gevallen, waarin v niet meer $<< c$ is en waarbij men alleen op de snelheden let. De algemeene relativiteitstheorie houdt zich ook bezig met de theorie van gravitatie en versnellingen, die voor de eenvoudige relativiteitstheorie een gevaarlijk terrein is. Zijn de massa's niet langer $>>$ dan die van het electron, dan komt men op het gebied van de quantentheorie. De combinatie van deze laatste met de relativiteitstheorie is nog niet op in alle opzichten bevredigende wijze gelukt. Uitgangspunt van de relativiteitstheorie is het beschouwen van de gebeurtenissen als 4-dimensionaal. Wij moeten daarom eerst de 4-dimensionale of algemeener de n-dimensionale Meetkunde ontwikkelen.

- - - - - - -

1) Het teeken $<<$ beteekent dat de grootheid links te verwaarloozen is ten opzichte van de grootheid rechts. $>>$ is de omkeering van $<<$.

De Ruimte-Tijd-Wereld.

Dit is een 4-dimensionale ruimte met 3 ruimte-assen en 1 tijd-as. Een klassiek 1-dimensionaal gebeuren, b.v. de beweging van een punt langs een lijn, b.v. de x-as, is relativistisch een 2-dimensionaal gebeuren in het x,t vlak. Het punt beschrijft een wereldlijn. Heeft het punt een gelijkmatige snelheid, dan is de wereldlijn van dat punt recht. Een lijn, die met al zijn punten gelijke gelijkmatige snelheid beweegt, geeft een vlak in de Ruimte-tijd-wereld. Twee aldus bewegende lijnen hebben slechts op een bepaald moment een punt gemeen; twee vlakken in de 4-dimensionale ruimte snijden elkaar dan ook in één punt. In de 4-dimensionale wereld kan men zich nog een 3-dimensionale ruimte, hypervlak, denken, die b.v. verkregen wordt door aan alle punten van een vlak dezelfde gelijkmatige snelheid te geven. Een bewegend vlak en een bewegende lijn hebben een bewegend punt gemeen. Een hypervlak en een vlak in de 4-dimensionale ruimte snijden elkaar dan ook in een lijn, in dit geval de wereldlijn van het bovengenoemd snijpunt.

Opgave: Bewijs dat een lijn en een vlak in de R-T-wereld in den regel geen punt gemeen hebben, door de lijn en het vlak op te vatten als verkregen te zijn door de beweging van een punt resp. een lijn in de 3-dimensionale ruimte. Bewijs evenzoo, dat een lijn en een hypervlak in de R-T-wereld slechts één punt gemeen hebben

Men kan zich zoo'n 4-dimensionale ruimte evenmin voorstellen als een n-dimensionale ruimte. Om het steeds terugwerken op de 3-dimensionale ruimte te voorkomen wordt, uitgaande van de volgende tabel een nieuwe meetkunde ontwikkeld.

	lijn	vlak	hypervlak
lijn	kruisen	kruisen	p
vlak	kruisen	p	l
hypervlak	p	l	vl.

Hierin beteekenen p, l en vl respectievelijk: punt, lijn en vlak gemeen.

Men kan dus een contravarianten vector meetkundig voorstellen door een puntenpaar met een zin, die aangeeft welk punt het eerste en welk het tweede is. Die zin kan b.v. aangegeven worden door een pijl, men krijgt als meetkundige voorstelling dan een pijl, die begint in het eerste en eindigt in het tweede punt. In de keuze van één der punten is men volkomen vrij, het puntenpaar is slechts bepaald op evenwijdige verplaatsing na. De kentallen van den vector zijn de coördinatenverschillen van de projecties van begin- en eindpunt op de coördinatenassen, positief gerekend wanneer de meegeprojecteerde pijl in de positieve asrichting wijst.

Zoolang men alleen transformaties beschouwt, waarbij de oorsprong van het coördinatenstelsel vast is, kan men een contravarianten vector ook door één punt voorstellen; het eerste punt kan men dan n.l. in den oorsprong nemen. Alleen in dit geval transformeert een punt zich als een contravariante vector.

Onder ~~het product van een skalar p (een getal)~~ met een contravarianten vector x^k wordt verstaan de contravariante vector met de kentallen $p x^k$. Bij vermenigvuldiging met p wordt een contravariante vector dus $|p|$ maal zoo lang. De zin verandert alleen wanneer p negatief is.

~~covariante vectoren~~.

De vergelijking van een hypervlak luidt in zijn normaalvorm:

$$(7.1) \qquad u_k x^k = 1.$$

Dit vlak snijdt de x^i-as in het punt $x^i = \frac{1}{u_i}$. Men ~~kan~~ $u_1 \ldots u_n$ ~~deze beschouwen~~ als de ~~kentallen~~ van ~~een~~ hypervlak. Hoe transformeeren deze ~~kentallen~~ zich wanneer de oorsprong vastgehouden wordt ($x^{k'} = 0$)? Uit de nieuwe vergelijking

$$(7.2) \qquad u_{k'} x^{k'} = 1$$

en de oude vergelijking (7.1) volgt

$$(7.3) \qquad u_{k'} A^{k'}_{k} x^k = 1$$

en dus

$$(7.4) \qquad u_k = A^{k'}_{k} u_{k'}$$

of omgekeerd

Bij het stelsel (K') behooren ~~ook weer~~ (eveneens) maatvectoren, waarvan men de kentallen ook weer kan betrekken op elk willekeurig ander stelsel. Zoo zijn

$e_{\lambda'}^{K'}$ $\quad e_{\lambda'}^{K'}$ de kentallen van de maatvectoren van ~~stelsel~~ (K') betrokken op (K') (zijn alle 1 of 0)

$e_{\lambda'}^{K}$ $\quad e_{\lambda}^{K'}$ de kentallen van de maatvectoren van (K'), betrokken op (K)

$e_{\lambda}^{K'}$ $\quad e_{\lambda'}^{K}$ de kentallen van de maatvectoren van (K), betrokken op (K')

<u>Overschuiving van een contravarianten met een covarianten vector</u>

Laat v^K een contravariante, w_λ een covariante vector zijn. Onder <u>overschuiving</u> verstaan wij de som

(10.1) $$v^\lambda w_\lambda$$

<u>Deze som is invariant bij coordinatentransformaties</u>

Bewijs:

(10.2) $$v^{K'} = A_K^{K'} v^K \qquad w_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} w_\lambda$$

(10.3) $$v^{\lambda'} w_{\lambda'} = A_K^{\lambda'} A_{\lambda'}^{\lambda} v^K w_\lambda = A_K^{\lambda} v^K w_\lambda = v^\lambda w_\lambda$$

De meetkundige beteekenis van

(10.4) $$v^K w_K = 1$$

is, dat de contravariante vector v^K precies past tusschen de twee hypervlakken, die w_λ voorstellen en bovendien met de zin van beide grootheden overeenkomt.

Een hypervlak bevat ∞^{n-1} richtingen, die de ($n-1$)-<u>richting</u> van het hypervlak vormen. Door de ($n-1$)-richting is het hypervlak bepaald op evenwijdige verplaatsing na. De meetkundige beteekenis van $v^\lambda w_\lambda = 0$ is ~~na~~ dus, dat de richting van v^λ ligt in de ($n-1$)-richting van w_λ.

<u>Reciproke vectoren</u>

Wanneer men n lineair onafhankelijke contravariante vectoren v_λ^K (λ is een doode index) door n ~~puntenpaaren~~ pijlen voorstelt en voor het beginpunt steeds hetzelfde punt kiest, dan bepalen deze ~~punten~~ pijlen een n-dimensionaal parallelotoop. Hetzelfde geldt voor n lineair onafhankelijke covariante vectoren w_λ^K, als men de beginvlakken

door hetzelfde punt loopt. Kiest men voor beide stelsels een en hetzelfde beginpunt, dan kan men zich afvragen, wanneer deze beide stelsels hetzelfde parallelotoop bepalen. Uit het voorgaande volgt dadelijk, dat moet gelden

$$(11.1) \qquad \overset{1}{v}^{K}\,\overset{1}{w}_{K} = 1 \qquad \overset{2}{v}^{K}\,\overset{1}{w}_{K} = 0 \quad \cdots \quad \overset{n}{v}^{K}\,\overset{1}{w}_{K} = 0, \text{ enz.}$$

wat men ook als volgt kan schrijven

$$(11.2) \qquad \overset{\rho}{v}_{\lambda}\,\overset{K}{w}_{\rho} = \delta^{K}_{\lambda} \begin{cases} = 1 & (K = \lambda) \\ = 0 & (K \neq \lambda). \end{cases}$$

δ^{K}_{λ} is het <u>symbool van Kronecker</u>. Het stelt n^2 scalairen voor, die de waarde 1 of 0 hebben en die men tot een matrix vereenigen kan:

$$(11.3) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

De indices van het Kroneckersymbool zijn <u>dood</u>, men zou dus eigenlijk moeten schrijven $\overset{K}{\delta}_{\lambda}$. Men laat hier uit historische overwegingen een kleine inconsequentie toe.

Twee stelsels van n vectoren, die aan (11.2) voldoen, noemen wij ten opzichte van elkaar <u>reciproke</u> stelsels. De maatvectoren e^{K}_{λ}, $\overset{K}{e}_{\lambda}$ vormen dus twee reciproke stelsels.

Overschuift men een contravarianten vector met de n covariante maatvectoren, dan krijgt men n scalairen, die wij aanduiden met $\overset{K}{v}$

$$(11.4) \qquad \overset{K}{v} = v^{\lambda}\,\overset{K}{e}_{\lambda}.$$

Omdat de kentallen van $\overset{K}{e}_{\lambda}$ 1 of 0 zijn, al naar λ gelijk of ongelijk is aan K, is het duidelijk, dat voor het stelsel (K) de volgende gelijkheid geldt:

$$(11.5) \qquad v^{K} \overset{*}{=} \overset{K}{v}$$

Wij schrijven hier $\overset{*}{=}$ en bedoelen daarmee, dat de gelijkheid alleen geldt voor het coördinatenstelsel, dat in de vergelijking zelf optreedt, en niet voor alle coördinatenstelsels ~~geldt~~. $\overset{K}{v}$ is n.l.

een systeem van n scalairen, die elk op alle coördinatenstelsels hetzelfde kental hebben, namelijk $\overset{k}{v}$, terwijl de v^k als kentallen van een vector overgaan in $v^{k'}$. De overgang (11.4) van de levende indices van v^k tot de doode indices van $\overset{k}{v}$ heet het <u>smoren van den index</u> K.

Uit (11.5) volgt een voorschrift om de kentallen van een vector v^k op een bepaald stelsel te vinden; men overschuift n.l. dezen vector met den passenden maatvector van dit stelsel. Wil men b.v. de kentallen op het stelsel (k') weten dan vormt men

(12.1) $$\overset{k'}{v} = \overset{k'}{e}_{\lambda}\, v^{\lambda}.$$

Dit zijn de gezochte kentallen als scalairen geschreven. Het 3-kental is dus als scalar geschreven:

(12.2) $$\overset{3'}{v} = \overset{3'}{e}_{\lambda}\, v^{\lambda}.$$

Wij hebben reeds gezien, dat de maatvectoren lineair onafhankelijk zijn. Het moet dus mogelijk zijn een vector v^k te schrijven als som van veelvouden der contravariante maatvectoren, d.w.z. als $\overset{\lambda}{p}\, e^k_{\lambda}$, maar $\overset{\lambda}{p}$ scalairen zijn. Wij zullen bewijzen:

(12.3) $$v^k = \overset{\lambda}{v}\, e^k_{\lambda}$$

waar $\overset{\lambda}{v}$ is gedefinieerd met behulp van (11.4).

Bewijs:

(12.4) $$\overset{\lambda}{v}\, e^k_{\lambda} = \overset{\lambda}{e}_{\mu}\, v^{\mu}\, e^k_{\lambda} = v^{\mu}\left(\overset{1}{e}_{\mu}\, e^k_1 + \overset{2}{e}_{\mu}\, e^k_2 + \ldots + \overset{n}{e}_{\mu}\, e^k_n\right) =$$

[illegible] $= v^k$.

De beide vergelijkingen (11.4) en (12.3) geven <u>in getallen</u> precies hetzelfde weer, doch hebben meetkundig geheel verschillende beteekenis. Ten opzichte van coördinatentransformaties gedragen zij zich ook geheel anders; (11.4) geeft een gelijkheid van scalairen, terwijl (12.3) een gelijkheid van vectoren aangeeft. Op een ander stelsel (k') geschreven luiden deze vergelijkingen:

(12.5) $$\overset{k}{v} = v^{\lambda'}\, \overset{k}{e}_{\lambda'}$$

resp.:

(12.6) $$v^{k'} = \overset{\lambda}{v}\, e^{k'}_{\lambda}.$$

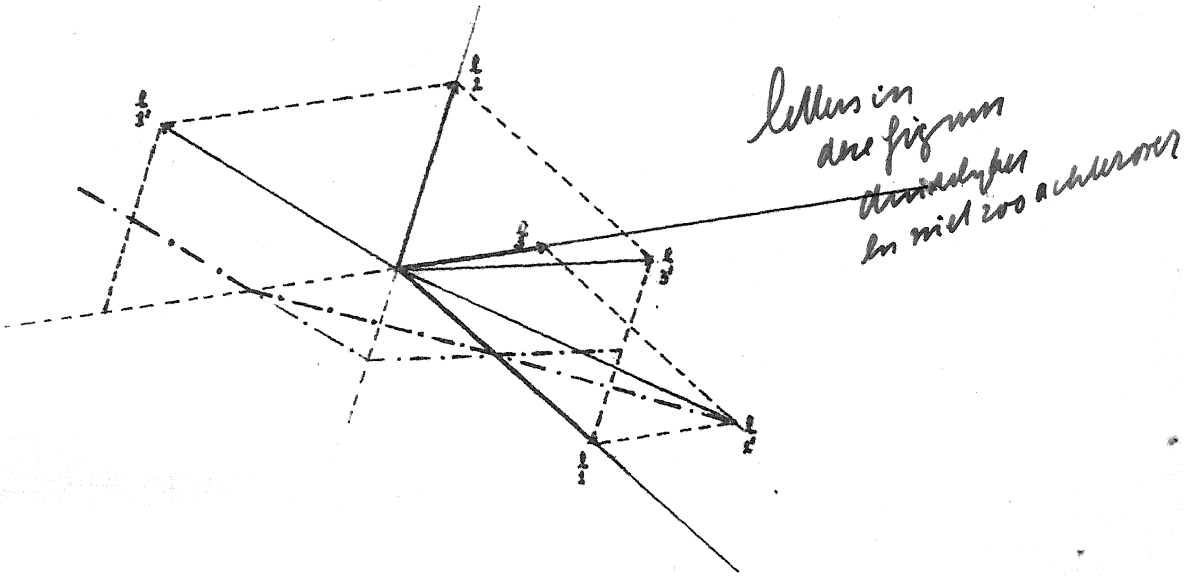
Voorbeeld.

Voor $n = 3$ hebben de drie contravariante maatvectoren de kentallen

$$(13.1)\qquad \begin{array}{lllll} \underset{1}{e}: & \underset{1}{e}^{1}=1 & \underset{1}{e}^{2}=0 & \underset{1}{e}^{3}=0 \\ \underset{2}{e}: & \underset{2}{e}^{1}=0 & \underset{2}{e}^{2}=1 & \underset{2}{e}^{3}=0 \\ \underset{3}{e}: & \underset{3}{e}^{1}=0 & \underset{3}{e}^{2}=0 & \underset{3}{e}^{3}=1. \end{array}$$

De kentallen van de bij het assenstelsel (K') behoorende maatvectoren zijn $\underset{\lambda'}{e}^{K}$. Nemen wij hiervoor:

$$(13.2)\qquad \begin{array}{lllll} \underset{1'}{e}: & \underset{1'}{e}^{1}=0 & \underset{1'}{e}^{2}=1 & \underset{1'}{e}^{3}=-2 \\ \underset{2'}{e}: & \underset{2'}{e}^{1}=1 & \underset{2'}{e}^{2}=0 & \underset{2'}{e}^{3}=1 \\ \underset{3'}{e}: & \underset{3'}{e}^{1}=1 & \underset{3'}{e}^{2}=1 & \underset{3'}{e}^{3}=0 \end{array}$$



Brengt men nu b.v. het vlak aan door het eindpunt van $\underset{1}{e}$ evenwijdig aan $\underset{1'}{e}$ en $\underset{2'}{e}$, dan blijkt, dat dit vlak op het stelsel (K) wordt voorgesteld door de vergelijking

$$(13.3)\qquad \tfrac{1}{1}x^{1}-\tfrac{1}{1}x^{2}-x^{3}=1.$$

(In de figuur zijn de snijlijnen van dit vlak met de coördinaatvlakken van (K) aangegeven door $-.-.-.-$
Hieruit volgt, dat de kentallen van den covarianten maatvector $\underset{1'}{e}$ op het stelsel (K) zijn $(1, -1, -1)$. Evenzoo vindt men de kentallen van $\underset{2'}{e}$ en $\underset{3'}{e}$:

$$(14.1)\qquad \begin{aligned} \overset{1'}{e}&: \ (1, -1, -1).\\ \overset{2'}{e}&: \ (2, -2, -1).\\ \overset{3'}{e}&: \ (-1, 2, +1). \end{aligned}$$

De oude maatvectoren kan men ook ontbinden volgens de nieuwe assen (d.w.z. men zoekt $\overset{\lambda}{e}^{k'}$, $\overset{\lambda}{e}_{k'}$). Deze kentallen vindt men volgens (12.1) door deze vectoren met de nieuwe maatvectoren te verschuiven. Zoo zijn de nieuwe kentallen van e_1 (als scalar geschreven)

$$(14.2)\qquad e_1^{\,k}\,\overset{\lambda}{e}_k^{\,\prime} \qquad \text{dus volgens (14.1): } (1, 2, -1).$$

Evenmoo vinden wij voor de kentallen van e_2 en e_3 op het stelsel (k')

$$(14.3)\qquad \begin{aligned} e_2 &\quad (-1, -2, 2)\\ e_3 &\quad (-1, -1, +1). \end{aligned}$$

II 5. Affinoren.

Definitie. Onder een affinor van de contravariante valentie p, en de covariante valentie q verstaan wij een grootheid met n^{p+q} kentallen, die zich bij transformeeren

$$(14.4)\qquad P^{k_1'\cdots k_p'}_{\cdot\cdots\cdot\lambda_1'\cdots\lambda_q'} = A^{k_1'}_{k_1}\cdots A^{k_p'}_{k_p}\, A^{\lambda_1}_{\lambda_1'}\cdots A^{\lambda_q}_{\lambda_q'}\, P^{k_1\cdots k_p}_{\cdot\quad\cdot\lambda_1\cdots\lambda_q} \quad 1)$$

De som $p+q$ heet de valentie van den affinor.

Een scalar is op te vatten als een affinor van de valentie nul, een vector als een affinor van de valentie 1 (contravariante resp. covariante) en de contravariante valentie 0.

Wanneer een affinor meer dan één index heeft, dan kan men grootheden beschouwen, waarvan enkele indices op het eene en de andere op het andere stelsel betrekking hebben. De zoo verkregen kentallen worden intermediaire kentallen van den affinor genoemd; b.v.

$$(14.5)\qquad P_\lambda^{\cdot k'} = A_k^{k'}\, P_\lambda^{\cdot k} = A_\lambda^{\lambda'}\, P_{\lambda'}^{\cdot k'}.$$

---

1) Bij affinoren worden, op zeer weinige uitzonderingen na, co- en contravariante indices nooit onder elkaar geschreven, omdat de ervaring geleerd heeft dat dit tot misverstanden aanleiding kan geven.

Eenheidsaffinor.

Een affinor $P^{k}_{.\lambda}$ van de covariante valentie 1 en de contravariante valentie 1 stelt een homogene lineaire transformatie voor

(15.1) $$P^{k}_{.\lambda}\, v^{\lambda} = w^{k}.$$

Aan elken vector v^{λ} wordt een vector w^{k} toegevoegd. Dit verband is éénéénduidig, als det. $(P^{k}_{.\lambda}) \neq 0$ is en er dus een omkeering bestaat

(15.2) $$\overset{-1}{P}{}^{k}_{.\lambda}\, w^{\lambda} = v^{k}.$$

(De kernletter van de omkeering wordt gevormd door bovenplaatsing van -1, deze index, die eigenlijk een exponent is, kan hier niet op de gewone plaats komen, omdat die al voor contravariante indices gereserveerd is). De matrix $\overset{-1}{P}{}^{k}_{.\lambda}$ kan uit de matrix $P^{k}_{.\lambda}$ gevonden worden. $\overset{-1}{P}{}^{2}_{.3}$ is b.v. gelijk aan den minor van $P^{3}_{.2}$ uit de determinant $|P^{k}_{.\lambda}|$, gedeeld ddor de waarde van deze determinant.

De eenheidsaffinor is die affinor, die elken vector in zichzelf transformeert

(15.3) $$A^{k}_{\lambda}\, v^{\lambda} = v^{k}.$$

Bij den eenheidsaffinor wordt plaatsing der indices boven elkaar toegelaten. Deze affinor heeft de kentallen 1 als $k = \lambda$ en 0 als $k \neq \lambda$ is. De matrix van de kentallen van A^{k}_{λ} op het stelsel (k) ziet er dus als volgt uit

(15.4)
$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix} \right\|$$

Dit is dezelfde matrix die ook bij het Kronecker symbool optrad. Derhalve is

(15.5) $$A^{k}_{\lambda} \overset{*}{=} \delta^{k}_{\lambda}.$$

Men mag echter volstrekt niet schrijven

(15.6) $$A^{k}_{\lambda} = \delta^{k}_{\lambda}$$

want links staat een affinor, rechts een stelsel van n^2 scalairen. Weliswaar is ook

$$(16.1) \qquad A_{\lambda'}^{\kappa'} \overset{*}{=} \delta_{\lambda'}^{\kappa'}$$

links kunnen we echter ook overgaan tot de intermediaire kentallen $A_{\lambda}^{\kappa'}$ en $A_{\lambda'}^{\kappa}$, en rechts niet. Uit de vergelijking

$$(16.2) \qquad A_{\lambda'}^{\kappa} = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\lambda}^{\kappa}$$

volgt, dat deze intermediaire kentallen juist gelijk zijn aan de $A_{\kappa}^{\kappa'}$ uit (5.3) en de $A_{\kappa'}^{\kappa}$ uit (6.1), zoodat achteraf blijkt dat wij goed deden daar reeds den kernletter A te gebruiken. Ook de kentallen der n maatvectoren $\underset{\lambda}{e}^{\kappa}$ en evenzoo die van $\overset{\kappa}{e}_{\lambda}$ laten zich tot een matrix vereenigen, die dezelfde is als die van $\delta_{\lambda}^{\kappa}$ Dientengevolge is

$$(16.3) \qquad A_{\lambda}^{\kappa} \overset{*}{=} \overset{\kappa}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} \underset{\lambda}{e}^{\kappa} \overset{*}{=} \delta_{\lambda}^{\kappa}$$

maar men mag hier nergens het gewone gelijkteeken zetten, een affinor kan niet <u>gelijk</u> zijn aan een stelsel van n vectoren, wel kunnen op <u>een zeker</u> coördinatenstelsel de n^2 kentallen van een affinor toevallig gelijk worden aan de $n \times n$ kentallen der vectoren. Uit deze beschouwingen blijkt, dat een matrix <u>zonder meer</u> nog maar een los schema van n^2 getallen is. Zoo'n matrix krijgt pas geometrische beteekenis wanneer daarnaast nog extra wordt gegeven hoe die n^2 getallen zich transformeeren bij coördinatentransformaties. Daar $A_{\kappa}^{\kappa'}$ de eenheidsaffinor is, beteekent de vergelijking

$$(16.4) \qquad v^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} v^{\kappa}$$

dat de vector bij overschuiving met den eenheidsaffinor niet verandert. Deze vergelijking heeft dus dezelfde beteekenis als (15.3), alleen wordt hetzelfde feit ~~ten deele op een ander~~ coördinatenstelsel beschreven.

Invariante Bewerkingen met affinoren

<u>Optellen</u>. Het optellen van affinoren is alleen mogelijk, als de betrokken affinoren dezelfde valenties hebben b.v.

$$(16.5) \qquad S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} + R_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\kappa}$$

Opgave.

Laat zien, dat de optelling onafhankelijk is van het coördinatenstelsel.

Vermenigvuldiging. Onder het algemeene product van affinoren in een bepaalde volgorde verstaan wij een affinor, waarvan de kentallen door vermenigvuldiging worden verkregen en waarvan de indicesvolgorde bepaald wordt door die der te vermenigvuldigen affinoren b.v.

$$(17.1) \qquad \mathcal{S}_{\mu\lambda\ldots\tau}^{\ldots\kappa\rho\sigma} = \mathcal{P}_{\mu\lambda}^{\ldots\kappa}\, \mathcal{S}^{\rho\sigma} w_\tau .$$

Voor deze vermenigvuldiging gelden de gewone regels uit de algebra met uitzondering van de commutatieve wet; zoo is b.v., als $v^\kappa \neq w^\kappa$ is

$$(17.2) \qquad \mathcal{S}^{\lambda\kappa} = v^\lambda w^\kappa \neq w^\lambda v^\kappa = \mathcal{T}^{\lambda\kappa} .$$

Opgave: Bewijs dat $\overset{\rho}{e}_\lambda \overset{\kappa}{e}^\rho = A_\lambda^\kappa$.

De affinor $\mathcal{S}^{\lambda\kappa}$ in (17.2) kan als product van twee vectoren geschreven worden. Een willekeurige affinor van de contravariante valentie 2 heeft deze eigenschap niet. Wel kunnen wij bewijzen, dat men een dergelijke affinor kan schrijven als een som van producten van vectoren. Wij gebruiken hiervoor de vergelijking

$$(17.3) \qquad \overset{\rho}{e}_\lambda \overset{\kappa}{e}^\rho = A_\lambda^\kappa \qquad \text{(Zie opgave)}$$

tengevolge waarvan:

$$(17.4) \qquad \begin{aligned} \mathcal{R}^{\kappa\lambda} = A_{\rho\sigma}^{\kappa\lambda}\, \mathcal{R}^{\rho\sigma} &= \overset{\kappa}{e}_\mu \overset{\mu}{e}_\rho \overset{\lambda}{e}_\nu \overset{\nu}{e}_\sigma \mathcal{R}^{\rho\sigma} \\ &= \overset{\kappa}{e}_\mu \overset{\lambda}{e}_\nu \left(\overset{\mu}{e}_\rho \overset{\nu}{e}_\sigma \mathcal{R}^{\rho\sigma} \right) . \end{aligned}$$

Het stuk tusschen haakjes stelt een scalar voor, dien wij aanduiden met $\overset{\mu\nu}{\mathcal{R}}$; $\overset{\mu\nu}{\mathcal{R}}$ is het $(\mu\nu)$-kental van $\mathcal{R}^{\kappa\lambda}$ als scalar geschreven. Men heeft dus

$$(17.5) \qquad \mathcal{R}^{\kappa\lambda} = \overset{\mu\nu}{\mathcal{R}}\, \overset{\kappa}{e}_\mu \overset{\lambda}{e}_\nu .$$

Opgave: Bewijs op dezelfde manier, dat elke affinor geschreven kan worden als de som van producten van vectoren.

Op blz. ~~15~~ hebben wij gezien, dat een affinor $P^{K}_{.\lambda}$ aan elken vector v^K een vector w^k toevoegt. Eischt men, dat $P^{K}_{.\lambda}$ den vector v^k aan w^k toevoegt, dan is $P^{k}_{.\lambda}$ hierdoor nog niet bepaald. Men kan eischen, dat n lineair onafhankelijke vectoren v^K_i aan n vectoren w^k_i worden toegevoegd volgens

$$P^{k}_{.\lambda}\, v^{\lambda}_{i} = w^{k}_{i}. \qquad (18.1)$$

Dit zijn n^2 vergelijkingen voor de n^2 onbekende kentallen van $P^{k}_{.\lambda}$. Er is dus een affinor $T^{k}_{.\lambda}$, die de n maatvectoren e^{k}_{λ} van stelsel (K) toevoegt aan de n maatvectoren $e^{K}_{\lambda'}$ van stelsel (K'). Deze affinor wordt de transformeerende affinor van deze twee stelsels genoemd.

Opgave. Laat zien, dat

$$T^{k}_{.\lambda} = e^{k}_{1'} e^{1}_{\lambda} + \cdots + e^{k}_{n'} e^{n}_{\lambda} \qquad (18.2)$$

en bewijs, dat de intermediaire kentallen van $T^{k}_{.\lambda}$, dus de $T^{k'}_{.\lambda}$ of zijn al naar gelang k' en λ door twee correspondeerende of twee niet correspondeerende indices uit de rijen der vaste indices $1', \ldots, n'$ en $1, \ldots, n$ vervangen worden.

Overschuiving. De overschuiving $v^{\lambda} w_{\lambda}$ van twee vectoren hebben wij reeds behandeld. Men kan bij affinoren van hoogere valentie sommeeren over een of meer paren van indices (waarvan er steeds één boven en één onder moet staan) b.v.

$$P^{\cdots k}_{\lambda\mu}\, R^{\lambda\sigma\rho} = S^{\cdot k\sigma\rho}_{\mu} \qquad (18.3)$$

of

$$P^{\cdots k}_{\lambda\mu}\, R^{\lambda\mu\rho} = T^{k\rho}. \qquad (18.4)$$

Opgave. Bewijs, dat $S^{\cdot k\sigma\rho}_{\mu}$ en $T^{k\rho}$ affinoren zijn.

Opgave. Bewijs, dat sommeeren over twee gelijkstandige indices geen affinor oplevert; b.v. $\sum_{\lambda} v_{\lambda} P^{k}_{.\lambda}$.

Isomeer vormen. Het vormen van een isomeer heeft plaats doordat de indices van plaats verwisselen, b.v.

$$(19.1) \qquad R^{\kappa\lambda\cdot\sigma}_{\cdot\cdot\mu} = P^{\kappa\cdot\sigma\lambda}_{\cdot\mu}$$

Hierin is R een isomeer van P en omgekeerd. ~~Deze bewerking komt overeen met het verwisselen van factoren, b.v.~~

~~(19.2) $u^\kappa v^\lambda w_\mu x^\sigma$ en $u^\kappa w_\mu x^\sigma v^\lambda$.~~

Opgave. Geldt de vergelijking

$$(19.3) \qquad a\, v_{\lambda\sigma} + b\, v_{\sigma\lambda} = 0$$

t.o.v. een ~~of ander~~ coördinatenstelsel, dat geldt zij ~~algemeen.~~ (voor ieder coördinatenstelsel)
Is $v_{\lambda\sigma} \neq 0$, dan ~~moet~~ is $a = \pm b$.

Vouwen. Onder vouwen verstaan wij het sommeeren over een of meer paren van ongelijkstandige indices, b.v.

$$(19.4) \qquad P^{\kappa\cdot\lambda}_{\cdot\lambda} = S^\kappa.$$

Een overschuiving ontstaat dus door het proces van het vouwen toe te passen op een algemeen product.

Opgave. Laat zien, dat S^κ een affinor is.

Mengen. Het mengen over p gelijkstandige indices heeft volgens het volgende voorschrift plaats. Neem de som van de $p!$ isomeren, die ontstaan door permutatie van deze indices en deel door $p!$ (dus neem het gemiddelde). Het mengen wordt aangegeven door 2 ronde haakjes om de indices, waarover gemengd wordt. B.v.

$$(19.5) \qquad P_\lambda^{\cdot\kappa(\rho\sigma)} = \tfrac{1}{2}\left(P_\lambda^{\cdot\kappa\rho\sigma} + P_\lambda^{\cdot\kappa\sigma\rho}\right)$$

$$(19.6) \qquad P_\lambda^{\cdot(\kappa\rho\sigma)} = \frac{1}{6}\left(P_\lambda^{\cdot\kappa\rho\sigma} + P_\lambda^{\cdot\kappa\sigma\rho} + P_\lambda^{\cdot\rho\sigma\kappa} + P_\lambda^{\cdot\rho\kappa\sigma} + P_\lambda^{\cdot\sigma\kappa\rho} + P_\lambda^{\cdot\sigma\rho\kappa}\right).$$

De affinor

$$(19.7) \qquad R_\lambda^{\cdot\kappa\rho\sigma} = P_\lambda^{\cdot(\kappa\rho\sigma)}$$

is een affinor, die bij menging niet meer verandert. Verwisselt men twee der indices $\kappa\rho\sigma$, dan houdt men denzelfden affinor.

Men zegt dan, dat $R_\lambda^{\cdot\kappa\rho\sigma}$ symmetrisch is in de indices $\kappa\rho\sigma$.

$$(20.1) \qquad R_\lambda^{\cdot\kappa\rho\sigma} = R_\lambda^{\cdot\rho\kappa\sigma} = R_\lambda^{\cdot\rho\sigma\kappa}.$$

Alterneeren. Wil men een affinor alterneeren over p gelijkstandige indices, dan vormt men uitgaande van dezen affinor de $\frac{1}{2}p!$ even en de $\frac{1}{2}p!$ oneven permutaties. (Een (on)even permutatie wordt verkregen door een (on)even aantal verwisselingen van twee indices). Men neemt nu de som van de even verminderd met de som van de oneven permutaties en deelt alles door $p!$. Het alterneeren wordt aangegeven door twee vierkante haken om de indices, waarover gealterneerd wordt. B.v.

$$(20.2) \qquad P_\mu^{\cdot\kappa[\lambda\sigma]} = \frac{1}{2}\left(P_\mu^{\cdot\kappa\lambda\sigma} - P_\mu^{\cdot\kappa\sigma\lambda}\right)$$

$$(20.3) \qquad S_\mu^{\cdot\kappa\lambda\sigma} = P_\mu^{\cdot[\kappa\lambda\sigma]} = \frac{1}{6}\left(P_\mu^{\cdot\kappa\lambda\sigma} + P_\mu^{\cdot\lambda\sigma\kappa} + P_\mu^{\sigma\kappa\lambda} - P_\mu^{\cdot\kappa\sigma\lambda} - P_\mu^{\sigma\lambda\kappa} - P_\mu^{\cdot\lambda\kappa\sigma}\right).$$

Alterneert men $S_\mu^{\cdot\kappa\lambda\sigma}$ over twee of meer contravariante indices, dan krijgt men weer denzelfden affinor. Verwisselt men twee contravariante indices, dan krijgt men een nieuwen affinor, die gelijk is aan den ouden op het teeken na

$$(20.4) \qquad S_\mu^{\cdot\kappa\lambda\sigma} = -S_\mu^{\cdot\kappa\sigma\lambda}.$$

Is een grootheid symmetrisch in de indices waarover gealterneerd wordt, dan krijgt men 0 als uitkomst. Is bijv. $p^{\kappa\lambda} = p^{\lambda\kappa}$, dan is $p^{[\kappa\lambda]} = 0$.

Affinoren, die alleen hun teeken veranderen bij verwisseling van twee indices heeten alterneerend in de betrokken indices.

7. Tensoren en p-vectoren. Affinoren, welke symmetrisch zijn in alle indices, noemt men tensoren.

Affinoren van de valentie p , welke alterneerend zijn in alle indices, noemt men p-vectoren. Een tensor heeft dus de eigenschap

$$(20.5) \qquad v_{\lambda_1\cdots\lambda_p} = v_{(\lambda_1\cdots\lambda_p)}$$

terwijl voor een p-vector geldt:

$$(20.6) \qquad w_{\lambda_1\cdots\lambda_p} = w_{[\lambda_1\cdots\lambda_p]}.$$

Een affinor van de valentie p heeft n^p kentallen. Tensoren van de valentie p hebben ook n^p kentallen, doch deze zijn niet onafhankelijk. Er zijn slechts

$$(21.1) \qquad \frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{1.2.3.\cdots p} = \binom{n}{p}$$

onafhankelijke kentallen. Ook de n^p kentallen van een p-vector zijn niet onafhankelijk. Hier zijn er slechts

$$(21.2) \qquad \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1.2.\cdots p} = \binom{n}{p}$$

onafhankelijk. Alle kentallen van een p-vector, waarin twee gelijke indices voorkomen zijn nul. Hieruit volgt, dat, als er nog kentallen zullen zijn, die niet gelijk nul zijn, $p \leqq n$ moet zijn. p-Vectoren bestaan dus alleen voor $p \leqq n$.

Een n-vector heeft $\binom{n}{n} = 1$ kental. Toch is het geen scalar, want dit kentaal verandert bij coördinatentransformatie. Wij komen hier nog op terug.

Wanneer wij ons beperken tot transformaties, die den oorsprong invariant laten, dan is

$$(21.3) \qquad w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} x^{\lambda_1} x^{\lambda_2} \cdots x^{\lambda_p} = 1$$

een invariante uitdrukking, die een oppervlak van den graad p voorstelt. Zooals men gemakkelijk inziet, is de tensor door het oppervlak bepaald. In de relativiteitstheorie komt b.v. het oppervlak

$$(21.4) \qquad g_{k\lambda} x^k x^\lambda = 1$$

voor.

De symmetrie is een van het coördinatenstelsel onafhankelijke eigenschap, want voor een tensor $v_{k\lambda}$ geldt

$$(21.5) \qquad v_{k'\lambda'} - v_{\lambda' k'} = A^{k\lambda}_{k'\lambda'} (v_{k\lambda} - v_{\lambda k}) = 0.$$

Opgave. Bewijs dat het alterneerend zijn eveneens een van het coördinatenstelsel onafhankelijke eigenschap is.

Bivectoren.

Men verkrijgt een bijzonder soort bivector, door het alterneerend product te nemen van twee vectoren v^k en w^k.

Contravariante bivector wordt dus meetkundig gerepresenteerd door eindig stuk van een E_2, met een bepaalden inhoud maar ander(s) met een bepaalden vorm en voorzien van een draaizin. Deze figuur mag willekeurig evenwijdig aan zichzelf verplaatst worden.

$$(22.1)\qquad P^{\kappa\lambda} = v^{[\kappa} w^{\lambda]} = \frac{1}{2}\left(v^{\kappa} w^{\lambda} - v^{\lambda} w^{\kappa}\right).$$

De vectoren v^{κ} en w^{κ} bepalen samen een driehoek. Nu stelt $\pm\frac{1}{2}\left(v^1 w^2 - v^2 w^1\right)$ het oppervlak voor van de projectie van dezen driehoek op het $1,2$-vlak en wel geldt het $+$-teeken wanneer de meegeprojecteerde van v naar w wijzende draaipijl correspondeert met den zin van 1 naar 2 en het $-$-teeken in het andere geval. In een n-dimensionale ruimte projecteert men een punt P op het $1,2$-vlak door een E_{n-2} aan te brengen door dit punt evenwijdig aan de $n-2$ andere assen. Dit vlak snijdt het $1,2$-vlak in één punt, de projectie van P op dit vlak.

Men kan niet elken bivector beschouwen als het product van twee vectoren. Is dit wel het geval, dan noemt men den bivector enkelvoudig. De noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het enkelvoudig zijn van een bivector luidt

$$(22.2)\qquad F^{[\kappa\lambda} F^{\mu\nu]} = 0.$$

Deze voorwaarde is gelijkwaardig met

$$(22.3)\qquad F^{\kappa[\lambda} F^{\mu\nu]} = 0.$$

wat zich gemakkelijk laat bewijzen door uitschrijven der alternaties in (22.2) en (22.3).

2a

In 4 afmetingen kan men elken niet enkelvoudigen bivector splitsen als de som van twee enkelvoudige bivectoren. Deze splitsing is echter op ∞ veel manieren mogelijk. Eén der vlakken kan nog behoudens een zekere restrictie willekeurig gekozen worden. Is $\underset{1}{F}^{\kappa\lambda}$ een enkelvoudige bivector in dat vlak, dan is bedoelde restrictie:

$$(22.4)\qquad F^{[\kappa\lambda} \underset{1}{F}^{\mu\nu]} \neq 0.$$

Is daaraan voldaan, dan moet

$$(22.5)\qquad F^{\kappa\lambda} = \alpha \underset{1}{F}^{\kappa\lambda} + \underset{2}{F}^{\kappa\lambda}$$

zijn, waarin $\underset{2}{F}^{\kappa\lambda}$ een nog onbekende enkelvoudige bivector en α een onbekende coefficient is. Daar $\underset{2}{F}^{\kappa\lambda}$ enkelvoudig is, moet nog

$$(22.6)\qquad \left(F^{[12} - \alpha \underset{1}{F}^{[12}\right)\left(F^{34]} - \alpha \underset{1}{F}^{34]}\right) = 0$$

zijn, en dit is een vergelijking van den eersten graad in α, die

dus één wortel heeft. Is deze wortel gevonden, dan is $f_\lambda^{\ \kappa\lambda}$ door (22.5) bepaald. Een enkelvoudige bivector bepaalt niet de vectoren v^k en w^k, maar alleen het vlak der vectoren, en een zeker daarin afgegrensd oppervlak met een draaizin.

Op dezelfde manier kan men uit twee covariante vectoren een enkelvoudigen covarianten bivector $v_{[\lambda} w_{\kappa]}$ vormen. Meetkundig is dit een buis met draaizin, dus voor $n = 3$:

Door den bivector zijn v_λ en w_κ echter niet bepaald. De bivector geeft alleen een $(n-2)$-richting (de richting van de beschrijvenden), die alle $\mathcal{E}_{n-2}$'s zijn (voor $n = 3$ dus rechte lijnen) een zekere grootte van doorsnede (b.v. vast te leggen door het oppervlak der doorsnede met een van de coördinaten - $\mathcal{E}_2$'s) en een draaizin om de buis heen (dat wil dus zeggen in een vlak, dat de buis op niet bijzondere wijze snijdt). De buis loopt naar beide zijden ∞ver door, de afsluitingen in de figuur dienen dus alleen om een perspectivisch beeld te krijgen.

Trivectoren.

In de 4-dimensionale ruimte kan een trivector steeds ontstaan door het product van drie vectoren te alterneeren

$$(23.1) \qquad f^{\kappa\lambda\mu} = v^{[\kappa} w^{\lambda} u^{\mu]}.$$

De vectoren moeten lineair onafhankelijk zijn, anders ontstaat nul. In 3 afmetingen heeft een trivector maar één kental, n.l. $v^{[\kappa} w^{\lambda} u^{\mu]}$. In 4 afmetingen stelt een trivector een stuk van een $\mathcal{E}_3$ voor, dat een bepaalden inhoud heeft, een onbepaalde begrenzing en een schroefzin. De schroefzin verandert als men twee vectoren in het product verwisselt.

Quadrivector.

In $\mathcal{E}_3$ bestaan geen quadrivectoren. In de 4-dimensionale ruimte ontstaat een quadrivector uit vier vectoren

$$(23.2) \qquad t^{[\kappa} v^{\lambda} w^{\mu} u^{\nu]} = p^{\kappa\lambda\mu\nu}$$

1) Een dergelijke schroefzin kan vastgelegd worden door vier richtingen in een bepaalde volgorde.

Zijn er twee gelijke vectoren bij, of zijn, dan is de quadrivectir nul, wat ook het geval is, ~~wanneer~~ de vier vectoren lineair afhankelijk. De quadrivector heeft behalve een vierdimensionalen schroefzin[1] slechts één kental, dat meetkundig een 4-dimensionalen inhoud voorstelt. Dit kental gedraagt zich geheel anders als ~~het kental~~ een scalar. Men heeft n.l.

$$P^{1'2'3'4'} = A^{1'2'3'4'}_{[\kappa\lambda\mu\nu]}\, P^{\kappa\lambda\mu\nu} =$$

$$(24.1) \qquad = \left(4!\, A^{1'2'3'4'}_{[1\,2\,3\,4]}\right) P^{1234} =$$

$$= \Delta\, P^{1234} \qquad ; \Delta = \mathrm{Det}\left(A^{\kappa'}_{\lambda}\right).$$

Al. In het algemeen noemen wij nu een grootheid met één kental $\tilde{\mathfrak{p}}$, dat zich bij een coördinatentransformatie als volgt transformeert

$$(24.2) \qquad \overset{(\kappa')}{\tilde{\mathfrak{p}}} = \Delta^{-\mathfrak{k}}\, \overset{(\kappa)}{\tilde{\mathfrak{p}}}\ ^{1)}$$

in de transformatieformule

~~noemen wij~~ een scalaire dichtheid van het gewicht $\mathfrak{k}$[2]. Omdat een dergelijke grootheid geen index heeft, zetten wij boven den kernletter (zoolang even) (κ) of (κ') al naar gelang het kental t.o.v. het stelsel (κ) of t.o.v. (κ') bedoeld is. Bij scalairen is een dergelijke aanwijzing natuurlijk niet noodig. Uit (24.1) volgt dus, dat het kental van een contravariante ~~n-dichtheid~~ quadrivector in E_4 zich transformeert als een dichtheid van het gewicht -1. Dit geldt ook voor het kental van een contravariante n-vector in E_n. Daarentegen transformeert zich het kental

Opgave. ~~Bewijs, dat het kental van een covariante n-vector zich transformeert als een dichtheid van het gewicht +1~~ van een covariante n-vector in E_n als een dichtheid van het gewicht +1, hetgeen opdezelfde wijze bewezen wordt.

Een co- resp. contravariante n-vector laat zich dus ook opvatten als een dichtheid van het gewicht $+1$ resp. -1 en omgekeerd. Het werken met dichtheden is dus eigenlijk een verkorte notatie waardoor men indices kwijt raakt. Een product van een dichtheid van het gewicht $\mathfrak{k}$ met een affinor heet een affinordichtheid van het gewicht $\mathfrak{k}$. Zulk een grootheid transformeert

---

1) $\mathfrak{k}$ (gothische k) is hier een exponent.

2) Dichtheden krijgen altijd een gothischen kernletter.

zich dus net als een affinor alleen komt er een factor Δ^{-k} bij, dus

$$\mathfrak{R}^{\kappa'}_{\cdot\lambda'} = \Delta^{-k} A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} \mathfrak{R}^{\kappa}_{\cdot\lambda} .$$

affinoren van de valentie 2

De matrix van den affinor $\rho_{\kappa\lambda}$ is

$$(25.1) \qquad \left\| \begin{matrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & & \\ \vdots & & & \\ \rho_{n1} & & & \rho_{\lambda n} \end{matrix} \right\|$$

Men zegt dat deze matrix den rang r heeft, wanneer alle determinanten met $(r+1)$ of meer rijen en kolommen nul zijn, maar niet alle determinanten met r rijen en kolommen. De rang van de matrix wordt tevens de rang van den affinor genoemd. Is de rang r, dan is de affinor

$$(25.2) \qquad \rho_{[\lambda_1[k_1} \cdots \rho_{\lambda_s]k_s]}$$

op niet verdwijnende getalfactoren na

(hier wordt apart over $\lambda_1 \ldots \lambda_s$ en over $k_1 \ldots k_s$ gealterneerd) gelijk nul voor $s > r$ en $\neq 0$ voor $s = r$, want de kentallen zijn juist de onderdeterminanten met s rijen en kolommen. Uit deze van het assenstelsel onafhankelijke formuleering volgt, dat de rang een van de keuze der coördinaten onafhankelijke eigenschap van een affinor uitdrukt. Voor affinoren met twee contravariante indices of met één contravarianten en één covarianten index gelden precies dezelfde eigenschappen. Is de rang $r < n$, dan noemen wij den affinor gedegenereerd. Is de rang $r = n$, dan wil dat zeggen:

$$(25.3) \qquad \text{Det.}\,(\rho_{\lambda k}) \neq 0$$

Een covariante affinor $\rho_{\lambda k}$ voegt aan elken contravarianten vector een covariantan vector toe volgens

$$(25.4) \qquad w_\lambda = \rho_{\lambda\kappa} v^\kappa$$

Alleen wanneer de rang $r = n$ is, is deze toevoeging éénéénduidig, d.w.z. behoort bij elken covarianten vector een contravariante. Dan bestaat $\beta^{\kappa\lambda}$, de omkeering van $\rho_{\kappa\lambda}$, waarvoor geldt

een contravariante affinor

(26.1) $$v'^{k} = \bar{p}'^{k\lambda}\, w_\lambda .$$

Uit (25.4) en (26.1) volgt dat

(26.2) $$v^{k} = \bar{p}'^{k\lambda}\, p_{\lambda\rho}\, v'^{\rho}$$

voor elken willekeurigen vector v'^{k}, zoodat

(26.3) $$A^{k}_{\lambda} = \bar{p}'^{k\rho}\, p_{\rho\lambda} .$$

Meetkundige beteekenis van tensoren. Beperken wij ons tot transformaties, die den oorsprong invariant laten, dan stelt de tensor $p_{\lambda k}$ (wij onderstellen dus nu $p_{k\lambda} = p_{\lambda k}$) een quadratisch oppervlak voor

(26.4) $$p_{\lambda k}\, x^{\lambda} x^{k} = 1 .$$

Is $\mathrm{Det}(p_{\lambda k}) \neq 0$, dan is dit hyperoppervlak niet gedegenereerd.)

Aan elken vector (punt) wordt nu een covariante vector toegevoegd, die voorgesteld wordt door het poolvlak van genoemd punt. Het poolvlak van een punt v^{k} heeft n.l. de vergelijking

(26.5) $$p_{\lambda k}\, v^{k} x^{\lambda} = 1 .$$

Schrijft men het oppervlak in hypervlakcoördinaten, dan luidt de vergelijking

(26.6) $$\bar{p}^{k\lambda}\, u_k u_\lambda = 1 .$$

II 12 H. Meten van lengten en hoeken

In een $\mathcal{E}_n$ kan men een maat invoeren, door in elke richting een willekeurige lengte als eenheid te nemen. Zet men deze lengten in hun bijbehoorende richting vanuit één punt uit, dan vormen de eindpunten van al die maatvectoren een oppervlak, het maat-oppervlak. Elk lijnstuk is dan te meten, omdat men in een $\mathcal{E}_n$ wel lengten van lijnstukken kan vergelijken.

Een van de eenvoudigste maatoppervlakken is nu een quadratisch oppervlak. Een $\mathcal{E}_n$ met een dergelijk maatoppervlak heet R_n. Neemt men het middelpunt in O, dan heeft dit oppervlak de vergelijking

$\det(g_{\lambda\kappa}) \neq 0$.

(27.1) $\qquad g_{\lambda\kappa}\, x^\lambda x^\kappa = 1;$

De tensor $g_{\lambda\kappa}$ wordt de fundamentaaltensor genoemd. ~~Een uitgebreide $\mathfrak{L}_3$ met een fundamentaaltensor $g_{\lambda\kappa}$ geeft onze gewone ruimte.~~

De uitdrukking

(27.2) $\qquad g_{\lambda\kappa}\, v^\lambda v^\kappa$

is een invariant, die aan den vector v^κ is toegevoegd. Deze scalar kan zoowel positief als negatief zijn.

Is een tensor $b_{\lambda\kappa}$ gegeven, dan kan het assenstelsel steeds zoo gekozen worden, dat

(27.3) $\qquad b_{11} = \pm 1, \quad b_{22} = \pm 1, \quad \dots \quad b_{nn} = \pm 1,$

terwijl

(27.4) $\qquad b_{\lambda\kappa} = 0 \quad$, voor $\kappa \neq \lambda$.

Een zeker aantal van de $b_{\lambda\kappa}$'s zal $+1$ zijn. Dit aantal, dat de index van $b_{\lambda\kappa}$ genoemd wordt, is invariant bij reëele assentransformaties, d.w.z., neemt men een ander assenstelsel, waarvoor (27.3) en (27.4) geldt, dan is dit aantal gelijk gebleven. De assenstelsels, waarvoor $g_{\lambda\kappa}$ een dergelijken vorm krijgt, noemen wij orthogonale assenstelsels. De loopende indices op deze stelsels zullen wij aanduiden met $h, i, \dots, m$; $h', i', \dots m'$; enz. de vaste met $1, 2, \dots, n$; $1', 2', \dots, n'$; enz. Heeft de fundamentaaltensor den index m, dan kan men zorgen, dat

(27.5) $\qquad g_{11} = g_{22} = \dots = g_{mm} = -1; \quad g_{(m+1)(m+1)} = \dots = g_{nn} = +1.$

De bij v^κ behoorende invariant is dan

(27.6) $\qquad -v^1 v^1 - \dots - v^m v^m + v^{m+1} v^{m+1} + \dots + v^n v^n.$

Is de index gelijk aan n, dan is de vorm (27.5) positief definiet; is de index nul, dan is (27.5) negatief definiet. In de andere gevallen is de indefiniet en kan het teeken zoowel positief als negatief zijn.

Een $\mathfrak{L}_3$ met een positief definiten fundamentaaltensor geeft onze gewone ruimte.

Opgave. Als x_k de covariante meetvectoren van een orthogonaal

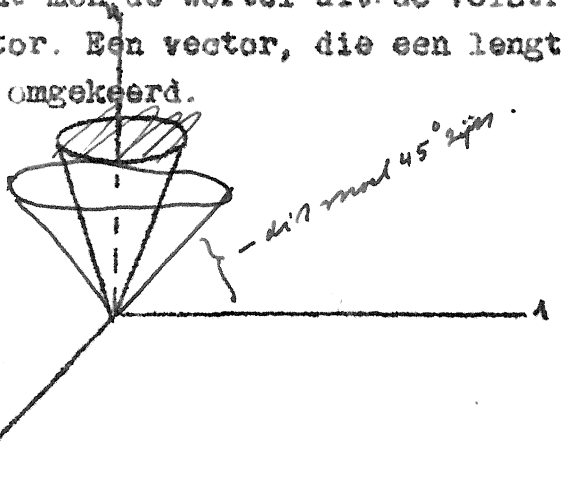
stelsel zijn [1] bewijs dan, dat

(28.1) $g_{\kappa\lambda} = i_\kappa^1 i_\lambda^1 + i_\kappa^2 i_\lambda^2 + \cdots + i_\kappa^m i_\lambda^m - i_\kappa^{m+1} i_\lambda^{m+1} - \cdots - i_\kappa^n i_\lambda^n$

In de relativiteitstheorie komt een fundamentaaltensor van de index 1 met de negatieve signatuur $---+$:

(28.2) $g_{11} = -1 \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1 \quad g_{44} = +1.$

De invariant van een vector kan dan dus zoowel positief als negatief zijn. Voor het geval de invariant positief is noemt men hier de wortel uit deze invariant „ duur "; is de invariant negatief dan noemt men de wortel uit de volstrekte waarde „ lengte " van den vector. Een vector, die een lengte heeft, heeft dus geen duur en omgekeerd.



Ook zijn er vectoren, waarvoor $g_{\kappa\lambda} v^\kappa v^\lambda = 0$. Deze vectoren zijn gelegen op den nulkegel:

(28.3) $g_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa = 0.$
of in een orthogonaal stelsel $-x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3 + x^4x^4 = 0$

Voor het geval (28.2) heeft een vector binnen den nulkegel een duur, een vector daarbuiten een lengte.

In analogie met het 3-dimensionale geval, waar de hoek tusschen twee vectoren gegeven wordt door

(28.4) $\cos\varphi = \dfrac{-\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\sqrt{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)\,(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)}}$

definieeren wij als hoek tusschen twee vectoren v_1^κ en v_2^κ den hoek φ, waarvan de cos gelijk is aan

1) De maatvectoren van een orthogonaal stelsel krijgen altijd den kernletter i.

(29.1) $$\cos\varphi = \frac{\pm g_{\kappa\lambda} v^\kappa w^\lambda}{\left|\sqrt{(g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu)(g_{\rho\sigma} w^\rho w^\sigma)}\right|}.$$

~~Deze hoek φ kan ook imaginair zijn. De uitdrukking wordt beteekenisloos indien één der vectoren op den nulkegel ligt. In dat geval noemen we de twee vectoren orthogonaal indien $g_{\kappa\lambda} v^\kappa w^\lambda$ nul is.~~

De fundamentaaltensor doet een éénéénduidig verband ontstaan tusschen co- en contravariante vectoren

(29.2) $$v^\kappa g_{\kappa\lambda} = w_\lambda$$
$$v^\kappa = \overset{-1}{g}{}^{\kappa\lambda} w_\lambda .$$

De covariante vector w_λ is bepaald door het poolvlak van het punt v^κ t.o.v. het tweede graadsoppervlak

(29.3) $$g_{\kappa\lambda} x^\kappa x^\lambda = 1.$$

Twee vectoren v^κ en w_λ, die verbonden zijn door (29.2), stellen dus eigenlijk op verschillende wijze hetzelfde geometrische object voor. Wij identificeeren ze dan ook en ~~zullen~~ ze denzelfden kernletter geven (brengen dit tot uiting door)

(29.4) $$v_\lambda = g_{\kappa\lambda} v^\kappa.$$

Deze bewerking noemen wij het op- en neerhalen van indices. Ook bij affinoren kan men indices omhoog en omlaag halen. Doen wij dit voor $\overset{-1}{g}{}^{\kappa\lambda}$, dan krijgen wij $g_{\kappa\lambda}$; wij zullen dan ook voortaan $g^{\kappa\lambda}$ inplaats van $\overset{-1}{g}{}^{\kappa\lambda}$ schrijven. Voor [een] orthogonaal assenstelsel geldt

$$v_p = \begin{cases} -v^p & \text{voor } p = 1, \ldots, m \\ +v^p & \text{voor } p = m+1, \ldots, n \end{cases}$$

Uit de orthogonaliteitsdefinitie volgt, dat een vector w^κ loodrecht staat op een vector v^κ, als hij in de $(n-1)$-richting van v_λ ligt. ~~De vectoren, waarvoor~~ Voor een vector op den nulkegel geldt

(29.5) $$g_{\kappa\lambda} v^\kappa v^\lambda = 0.$$

~~Deze vectoren staan dus~~ en een dergelijke vector staat dus loodrecht op zichzelf; ~~het zijn dus die vectoren, die op den nulkegel liggen.~~ De bijbehoorende contravariante vector raakt aan den nulkegel en wel raakt v_λ langs den straal die v^λ bevat.

~~[illegible]~~

~~dus [illegible]~~

van i_k^h ligt De vectoren, waarvoor

$$(32.1) \qquad g_{k\lambda}\, v^k v^\lambda = 0$$

staan loodrecht op zichzelf het zijn dus die vectoren, die op den nulkegel liggen De bijbehoorende contravariante vectoren raken aan den nulkegel en wel raakt i_k^h langs den straal die bevat.

Orthogonale assenstelsels.

Wij hebben een assenstelsel orthogonaal genoemd wanneer de fundamentaaltensor op dit stelsel de volgende kentallen heeft

$$(32.2) \qquad g_{hi} = 0 \quad h \neq i \; ; \quad g_{ii} = \pm 1.$$

Opgave Bewijs dat (32.2) noodzakelijk en voldoende is opdat de maatvectoren van het stelsel onderling orthogonaal zullen zijn en de lengte of duur van deze vectoren 1 zal zijn.

In de relativiteitstheorie hebben wij

$$(32.3) \qquad g_{11} = -1 \quad g_{22} = -1 \quad g_{33} = -1 \quad g_{44} = +1 \quad g_{hi} = 0 \; (h \neq i)$$

waaruit volgt

$$(32.4) \qquad g^{11} = -1 \quad g^{22} = -1 \quad g^{33} = -1 \quad g^{44} = +1 \quad g^{hi} = 0 \; (h \neq i).$$

De maatvectoren i_1^h, i_2^h en i_3^h hebben de lengte 1, terwijl de duur van i_4^h gelijk 1 is Uit (32.3) en (32.4) volgt

$$(32.5) \qquad v^4 = v_4 \; ; \quad v^1 = -v_1 \; ; \quad v^2 = -v_2 \; ; \quad v^3 = -v_3 .$$

$$(32.6) \qquad i_4^h = {}^4i^h = g^{hi}\, {}^4i_i \; ; \quad i_1^h = -{}^1i^h ; \quad i_2^h = -{}^2i^h ; \quad i_3^h = -{}^3i^h$$

en dus ook

$$(32.7) \qquad i_4^K = {}^4i^K \; ; \quad i_1^K = -{}^1i^K \; ; \quad i_2^K = -{}^2i^K \; ; \quad i_3^K = -{}^3i^K .$$

De uitdrukking

$$(32.8) \qquad g_{k\lambda}\, v^k w^\lambda = -v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3 + v^4 w^4$$

komt overeen met het scalaire product van twee vectoren in de

gewone ruimte. Uit de 3-dimensionale ruimte kennen wij ook nog het vectorische product van twee vectoren dat zelf weer een vector is. Dit kunnen wij in de 4-dimensionale ruimte niet. In de 3-dimensionale ruimte ontstaat het vectorische product op de volgende wijze uit den bivector

$$(33.1) \qquad v^{[k} w^{\lambda]}.$$

In R_3 bestaat n.l. een trivector

$$(33.2) \qquad \gamma_{k\lambda\mu} = \gamma_{[k\lambda\mu]} \; ; \quad \gamma_{123} = +1,$$

die meetkundig een volume met schroefzin voorstelt. Uit $v^{[k} w^{\lambda]}$ kan men nu met behulp van $\gamma^{\lambda\mu\lambda}$ een vector vormen:

$$(33.3) \qquad u^k = - v^{[\lambda} w^{\beta]} \; \gamma_{\mu\lambda\rho} g^{\mu k}$$

dus voor een orthogonaal stelsel

$$(33.4) \qquad u^1 = -\left(v^2 w^3 - v^3 w^2\right) \gamma_{123} g^{11} = v^2 w^3 - v^3 w^2.$$

In R_4 gaat dit natuurlijk niet, wel zou men uit het alterneerende product van drie vectoren met behulp van $\gamma_{k\lambda\mu\nu}$ een vector kunnen vormen.

In de gewone vectoranalyse kent men geen co- en contravariante kentallen en ook geen kentallen met twee indices voor bivectoren. Om dus van de gewone vectoranalyse op Ricci-rekening over te gaan moet men een vertaalschema hebben. We geven dit hier voor onze gewone R_3 maar met $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ zooals voor de relativiteitstheorie noodig is. Dan noemen we ter onderscheiding de kentallen van een vector uit de vectoranalyse a_x, a_y, a_z. Deze vector kan in de Ricci-rekening zoowel als vector als als bivector optreden. Het vertaalschema luidt:

$$a_x = a^1 = -a_1 = a^{23} = -a^{32} = a_{23} = -a_{32} \; ; \text{ cyc.}$$

Voor het scalaire product komt dus [1]

$$p = \vec{a}\cdot\vec{b} = -a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

$$p = a^p b_p = a^\kappa b_\kappa$$

$$\text{of ook: } p = -\tfrac{1}{2} a^{pq} b_{pq} = -\tfrac{1}{2} a^{\kappa\lambda} b_{\kappa\lambda}$$

en voor het vectorische product:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \; ; \; \text{cycl}$$

$$c^{pq} = 2a^{[p} b^{q]} \; ; \; c^{\kappa\lambda} = 2a^{[\kappa} b^{\lambda]}$$

$$c_{pq} = 2a_{[p} b_{q]} \; ; \; c_{\kappa\lambda} = 2a_{[\kappa} b_{\lambda]}$$

$$\text{of ook: } c^p = a_q b^{qp} \; ; \; c^\kappa = a_\lambda b^{\lambda\kappa}$$

$$c_q = a^p b_{pq} \; ; \; c_\lambda = a^\kappa b_{\kappa\lambda}$$

$$\text{of ook } c^p = a^{pq} b_q \; ; \; c^\kappa = a^{\kappa\lambda} b_\lambda$$

$$c_q = a_{qp} b^p \; ; \; c_\lambda = a_{\lambda\kappa} b^\kappa$$

Lorentztransformaties

Er zijn meerdere assenstelsels, waarvoor (32.3) geldt. Men kan nu die coordinatentransformaties beschouwen, die de eigenschap hebben, dat voor het nieuwe stelsel ook (32.3) geldt. Voor beide stelsels van maatvectoren moet dan gelden

$$(34.1) \quad g^{\kappa\lambda} = e_4^\kappa e_4^\lambda - e_1^\kappa e_1^\lambda - e_2^\kappa e_2^\lambda - e_3^\kappa e_3^\lambda = e_{4'}^\kappa e_{4'}^\lambda - e_{1'}^\kappa e_{1'}^\lambda - e_{2'}^\kappa e_{2'}^\lambda - e_{3'}^\kappa e_{3'}^\lambda .$$

Zij nu

$$(34.2) \qquad e_{k'}^{\kappa} = P^{\kappa}_{\cdot\lambda}\, e_k^{\lambda} \qquad k = 1 \text{ voor } k = 1' \text{ enz.}$$

de transformatie, die de maatvectoren van het eene assenstelsel in die van het andere overvoert, dan volgt uit (34.1)

$$(34.3) \qquad P^{\kappa}_{\cdot\rho}\, P^{\lambda}_{\cdot\sigma}\, g^{\rho\sigma} = g^{\kappa\lambda}$$

d.w.z. de transformatie $P^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ laat den fundamentaaltensor en dus het maatoppervlak invariant. Invariant blijven dus ook alle lengten en hoeken. Zulke trandformaties heeten draaiingen en spiegelingen en in het speciale geval van de R_4 met fundamentaaltensor

- - - - - - -

1) Wij laten hier de indices p, q, r de waarden 1, 2, 3 doorloopen ten einde later de indices k, ..., m te kunnen reserveeren voor de waarden 1, 2, 3, 4.

met index 1 Lorentztransformaties In het bijzonder beschouwen we alleen die Lorentztransformaties, die de twee binnengedeelten van den nulkegel, die alleen in den top samenhangen niet verwisselen (physisch verleden en toekomst niet verwisselen). Wij geven hier twee voorbeelden van Lorentztransformaties. Ten eerste de transformatie van maatvectoren

$$
\begin{aligned}
\underset{1'}{i} &= \underset{1}{i}\cos\varphi + \underset{2}{i}\sin\varphi & \hat{i}' &= \hat{i}\cos\varphi + \hat{i}^{2}\sin\varphi \\
\underset{2'}{i} &= -\underset{1}{i}\sin\varphi + \underset{2}{i}\cos\varphi & \hat{i}^{2'} &= -\hat{i}\sin\varphi + \hat{i}^{2}\cos\varphi \\
\underset{3'}{i} &= \underset{3}{i} \\
\underset{4'}{i} &= \underset{4}{i}
\end{aligned}
\qquad (35.1)
$$

met de bijbehoorende coördinatentransformatie [1])

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi & x'\hat{i}' + y'\hat{i}^{2'} &= (x\cos\varphi + y\sin\varphi)(\hat{i}\cos\varphi + \hat{i}^{2}\sin\varphi) \\
y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi & &\quad + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)(-\hat{i}\sin\varphi + \hat{i}^{2}\cos\varphi) \\
z' &= z & x_{1} &= x\hat{i} + y\hat{i}^{2} + z\hat{i}^{3} + ct\hat{i}^{4} \\
ct' &= ct & &= x'\hat{i}' + y'\hat{i}^{2'} + z'\hat{i}^{3'} + ct'\hat{i}^{4'}
\end{aligned}
\qquad (35.2)
$$

die een gewone draaiing voorstelt in het 1 ,2 -vlak waarbij de 3 -as en de 4 -as in rust blijven. Ten tweede de transformatie

$$
\begin{aligned}
\underset{1'}{i} &= \underset{1}{i}\cosh\varphi + \underset{4}{i}\sinh\varphi & \hat{i}' &= \hat{i}\cosh\varphi - \hat{i}^{4}\sinh\varphi \\
\underset{2'}{i} &= \underset{2}{i} \\
\underset{3'}{i} &= \underset{3}{i} \\
\underset{4'}{i} &= \underset{1}{i}\sinh\varphi + \underset{4}{i}\cosh\varphi & \hat{i}^{4'} &= -\hat{i}\sinh\varphi + \hat{i}^{4}\cosh\varphi
\end{aligned}
\qquad (35.3)
$$

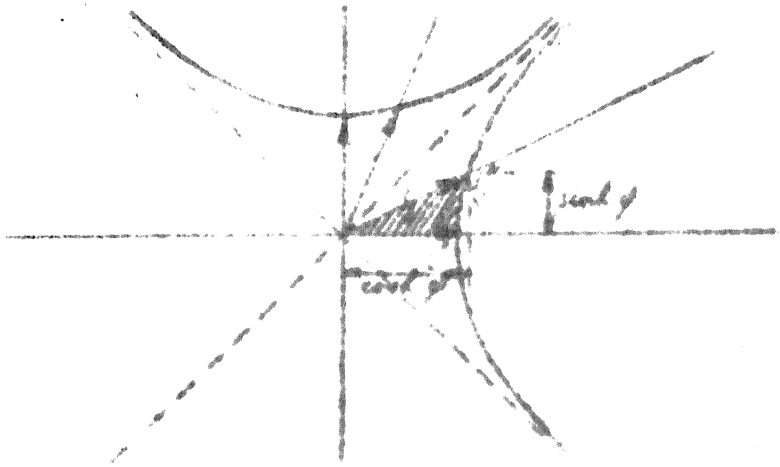
waarbij met de bijbehoorende coördinatentransformatie

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi \\
y' &= y \\
z' &= z \\
ct' &= -x\sinh\varphi + ct\cosh\varphi
\end{aligned}
\qquad (35.4)
$$

---

1) We schrijven hier nu eens x , y , z , ct voor x^1 , x^2 , x^3 , x^4 en x', y' , z' , ct' voor $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$ zooals dikwijls gebruikelijk is

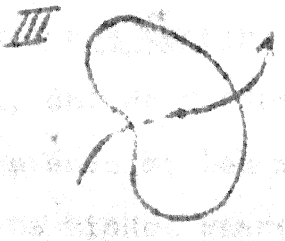
die een Lorentztransformatie in het 1 , 4 -vlak voorstelt, waarbij de x -as en de t -as in rust blijven

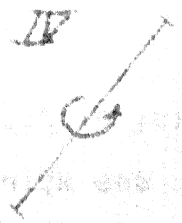


In de figuur, die deze transformatie voorstelt, zijn de hyperbolen $x^2 - c^2t^2 = 1$ de meetkundige plaatsen der eindpunten der vectoren in het 1 , 4 -vlak met lengte 1 en met duur 1 . De nieuwe maatvectoren hebben dus ook weer de eenheid van lengte resp duur, zij zijn bovendien ook weer onderling loodrecht (d.w.z zij hebben toegevoegde richtingen t.o.v de hyperbolen) Het oppervlak van het gearceerde deel van de figuur is $\frac{1}{2}\varphi$ De rechte lijnen zijn de doorsneden van het 1 , 4 -vlak met den nulkegel Een Lorentztransformatie van het eenvoudige soort als in (x' t') heet een speciale Lorentztransformatie

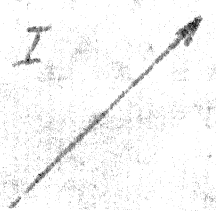
Meetkundige voorstelling der grootheden na invoering van een maat.

Nemen wij eerst aan, dat slechts een volume-eenheid gegeven is, en nog geen fundamentaaltensor, zoodat men al inhouden kan meten maar geen lengten Dan kan men door inpassen van de volume-eenheid den covarianten vector en den covarianten bivector voor $n = 3$ voorstellen door de figuren

cov. vector: 

cov. bivector 

De contravariante grootheden blijven op dezelfde wijze voorgesteld:

contr. vector 

contr. bivector

Men vindt soms in boeken de namen:

I polaire vector
II axiale bivector
III polaire bivector
IV axiale vector

Wordt nu nog een schroefzin ingevoerd, dan kan men I met IV identificeeren en II met III Wordt inplaats van een schroefzin een fundamentaaltensor ingevoerd, dan kan men I met III en II met IV identificeeren Bij invoering zoowel van een schroefzin als van een fundamentaaltensor laten zich alle 4 de grootheden met elkaar identificeeren en laten zich dus alle vectoren en alle bivectoren voorstellen door een pijl

In vier afmetingen interesseert ons speciaal het geval, dat er een fundamentaaltensor ingevoerd is en dus vanzelf ook een volume-eenheid. De eenvoudigste meetkundige voorstellingen zijn dan:

contra- en covar. vector:

enkelv. contra- en covar. bivector:

contra- en covar trivector:

Bij den trivector geeft de kromme lijn aan, dat een schroefzin gegeven is in eenig hypervlak, dat de richting van den trivector niet bevat en dus in ieder zoodanig hypervlak Wordt ook nog een 4-dimensionale schroefzin ingevoerd, dan kan men A en C identificeeren, zoodat alleen A en B als eenvoudigste meetkundige voorstellingen blijven. Vectoren en bivectoren laten zich in vier afmetingen nooit identificeeren.

Hoofdassenstelling van een tensor

Voor het geval, dat de fundamentaaltensor definiet is geldt de stelling: Het is steeds op ten minste één wijze mogelijk een orthogonaal stelsel te vinden waarvoor de kentallen T_{hi} de eigenschap hebben $T_{hi} = 0 \quad (h \neq i)$.

(31.1) $T_{\mu\lambda}\, x^{\mu} x^{\lambda} = 1$

steit een tweedegraadshyperoppervlak voor. Men moet nu de assen zo kiezen, dat het toegevoegde middellijnen zijn, zowel t.o.v. dit oppervlak als t.o.v. tweedegraadsoppervlak

$$g_{\kappa\lambda}\, x^{\kappa} x^{\lambda} = 1. \qquad (38.1)$$

De richtingen van deze assen noemt men de hoofdassen van de tensor $T_{\lambda\kappa}$.

De hoofdassenstelling geldt niet voor niet-definieten fundamentaaltensor

Hoofdbladenstelling van een bivector

Voor definieten fundamentaaltensor geldt de stelling:

Het is steeds op ten minste één wijze mogelijk de bladen van een bivector (voor $n = 4$ ten hoogste twee) zoo te kiezen dat ze onderling loodrecht zijn

De hoofdbladenstelling geldt niet voor niet-definieten fundamentaaltensor

Infinitesimale Lorentztransformaties

De lineaire transformatie $P^{\kappa}_{.\lambda}$ heet infinitesimaal wanneer $P^{\kappa}_{.\lambda}$ slechts infinitesimaal verschilt van A^{κ}_{λ}:

$$P^{\kappa}_{.\lambda} = A^{\kappa}_{\lambda} + \varepsilon F^{\kappa}_{\lambda} \quad , \quad \varepsilon \text{ klein} \qquad (38.2)$$

$P^{\kappa}_{.\lambda}$ is een Lorentztransformatie, indien $g^{\kappa\lambda}$ invariant is

$$\left(A^{\kappa}_{\rho} + \varepsilon F^{\kappa}_{\rho}\right)\left(A^{\lambda}_{\sigma} + \varepsilon F^{\lambda}_{\sigma}\right) g^{\rho\sigma} = g^{\kappa\lambda}. \qquad (38.3)$$

Daaruit volgt als n.o.v. voorwaarde

$$F^{\kappa\lambda} = -F^{\lambda\kappa}. \qquad (38.4)$$

Bij iedere infinitesimale Lorentztransformatie behoort dus een bivector. Laat zich deze bivector in twee onderling loodrechte bladen ontbinden, dan laat de Lorentztransformatie elk van de vlakken dezer bladen invariant. Dit is echter niet altijd het geval omdat

de fundamentaaltensor niet definiet is.

Eindige Lorentztransformaties

Wij bewijzen de stelling

Iedere reeele Lorentztransformatie die de beide deelen van den nulkegel niet verwisselt en een 4-dimensionalen schroefzin niet verandert (d.w.z. determinant +1 heeft), kan worden verkregen door een speciale Lorentztransformatie (blz. 36) gevolgd door een gewone draaiing in drie afmetingen, bij welke draaiing de richting loodrecht op die drie afmetingen invariant blijft.

Bewijs:

Neem binnen den nulkegel een 4-as aan en laat deze door de Lorentztransformatie overgaan in de as 4'. Tengevolge van de onderstelling ligt deze as ook binnen den nulkegel en wel in hetzelfde gedeelte. Breng door de 4-as en 4'-as een vlak en snijdt dat met de ruimte $\perp$ op 4. Kies de 1'-as in deze snijlijn. Oefen dan eerst in het 4,1'-vlak een speciale Lorentztransformatie uit, die de 4-as overvoert in de 4'-as en die de 1'-as brengt in een as, die wij 1'' noemen. In de ruimte $\perp$ op de 4'-as liggen nu de assen 1'', 2 en 3, maar ook de nieuwe assen 1'', 2' en 3'. Want deze zijn alle $\perp$ op de 4'-as. Er is dus in deze ruimte slechts een draaiing of draaiing met spiegeling noodig om de assen 1'', 2, 3 over te voeren in 1'', 2', 3'. Dit moet echter een zuivere draaiing zijn omdat de Lorentztransformatie volgens onderstelling den schroefzin invariant laat.

Invariante differentiatie van velden.

Aangezien

$$(39.1) \qquad \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} = A^k_{k'} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

transformeert zich de operator $\frac{\partial}{\partial x^k}$ als een covariante vector.

Wij schrijven kort ∂_k voor $\frac{\partial}{\partial x^k}$.

is dus $P^{\kappa\lambda}_{\ldots\mu\rho\sigma}$ een affinor, dan is ook

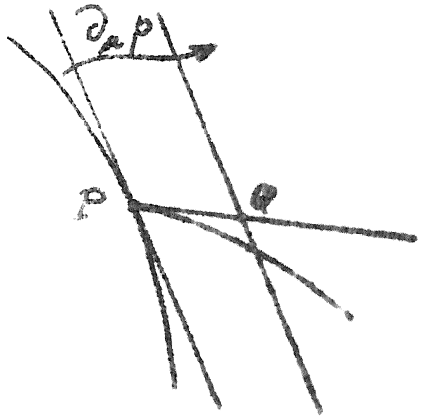
(40.1) $$\partial_\nu P^{\kappa\lambda}_{\ldots\mu\rho\sigma}$$

een affinor.

Is p een scalarveld, dan heet

(40.2) $$w_\mu = \partial_\mu p$$

de gradient van p. De hypervlakken van w_μ hebben overal de $(n-1)$-richting van de hyperraakvlakken aan de hyperoppervlakken $p = c$, de aequiscalaire hyperoppervlakken van het veld.



Teekent men in P den covarianten vector $\partial_\mu p$ dan is de meetkundige beteekenis van het tweede hypervlak van $\partial_\mu p$ de volgende. Beschrijft men van P uit een kromme, dan ondergaat p in P een zekere specifieke verandering. Indien het veld langs de raaklijn PQ voortging op deze wijze te veranderen (wat het in het algemeen niet doet!), dan zou de toename van het veld over den weg van P naar Q juist 1 bedragen.

Is w_λ een vectorveld, dan heet de bivector

(40.3) $$\partial_{[\mu} w_{\nu]}$$

de rotatie van w_λ. Is de rotatie nul, dan bestaat er steeds tenminste één scalarveld p, zoodat

(40.4) $$w_\lambda = \partial_\lambda p.$$

Deze stelling kan worden uitgebreid. Is $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ een p-vectorveld en is

(40.5) $$\partial_{[\mu} w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]} = 0$$

dan bestaat er steeds tenminste één $(p-1)$-vectorveld $v_{\lambda_2 \ldots \lambda_p}$, zoodat

(40.6) $$w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \partial_{[\lambda_1} v_{\lambda_2 \ldots \lambda_p]}.$$

Is dus in het bijzonder $F_{\lambda k}$ een bivector, en is

$$(41.1) \qquad \partial_{[\mu} F_{\lambda k]} = 0$$

dan bestaat er steeds een vectorveld φ_λ, zoodat

$$(41.2) \qquad F_{\mu\lambda} = 2\partial_{[\mu} \varphi_{k]}.$$ 1)

Is v^k een vectorveld, dan noemt men

$$(41.3) \qquad \partial_\mu v^\mu = \partial_1 v^1 + \cdots + \partial_n v^n$$

de divergentie van het veld v^k.

Tot nu is er bij de differentiatie nog geen sprake geweest van invoering van een fundamentaaltensor. Voeren we nu $g_{\lambda k}$ in, dan zijn de kentallen van $g_{k\lambda}$ constanten, dus

$$(41.4) \qquad \partial_\mu g_{\lambda k} = 0$$

en daaruit volgt:

<u>Het op en neerhalen van indices en de differentiatie zijn twee processen wier volgorde men mag omkeeren,</u>

dus b.v.

$$(41.5) \qquad \partial_\mu v^k = g^{k\lambda} \partial_\mu v_\lambda.$$

In R_4 is in orthogonale kentallen

$$(41.6) \qquad \begin{aligned} \partial_\mu v^\mu &= +\partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 + \partial_3 v^3 + \partial_4 v^4 \\ &= -\partial_1 v_1 - \partial_2 v_2 - \partial_3 v_3 + \partial_4 v_4. \end{aligned}$$

Het vertaalschema voor R_3 is (vergelijk blz. 34)

---

1) De constante 2 is hier alleen ingevoerd om aan te sluiten aan de notaties der relativiteitstheorie.

De vergelijkingen van Maxwell-Lorentz in vacuum

Uitgangspunt zijn de vectoranalytische vergelijkingen van Maxwell-Lorentz in vacuum.

$$(42.1)\qquad \begin{cases} I & \begin{cases} \nabla \times \bar{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\dot{\bar{B}} = 0 \\ \nabla . \bar{B} = 0 \end{cases} \\ II & \begin{cases} \frac{1}{c}\dot{\bar{\mathcal{E}}} - \nabla \times \bar{B} = -\frac{f}{c}\bar{u} \\ \nabla . \bar{\mathcal{E}} = -\rho \end{cases} \end{cases}$$

die invariant zijn bij drie dimensionale draaiingen. De bedoeling is deze vergelijkingen 4-dimensionaal in de Ricci-notatie te schrijven. Schrijven wij de vergelijking (42.1) uit, dan krijgen wij

$$(42.2)\qquad \begin{cases} I & \begin{cases} \partial_1 \mathcal{E}_1 - \partial_3 \mathcal{E}_y + \partial_4 B_x = 0 \quad ; \text{ cycl. } xyz, \; 123. \\ -\partial_1 B_x - \partial_2 B_y - \partial_3 B_z = 0 \end{cases} \\ II & \begin{cases} \partial_4 \mathcal{E}_x - \partial_2 B_z + \partial_3 B_y = -\frac{f}{c} u_x \quad ; \text{ cycl.} \\ \partial_1 \mathcal{E}_x + \partial_2 \mathcal{E}_y + \partial_3 \mathcal{E}_z = +\rho \end{cases} \end{cases}$$

waarin $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ = componenten electrische veldsterkte
B_x, B_y, B_z = " magnetische veldsterkte
u_x, u_y, u_z = " snelheid bewegende lading
ρ = electrische ladingsdichtheid
c = lichtsnelheid
$\partial_1, \partial_2, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$
$\partial_4 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$

Gaan we van de gewone vectoranalyse over tot Ricci-rekening in drie afmetingen met negatief definieten fundamentaltensor, dan is het vertaalschema van blz 39 te gebruiken (verg. ook blz. 32):

$$(42.3)\qquad a_x = a^1 = -a_1 = a^{23} = a_{23} = -a^{32} = -a_{32}$$

waardoor de vergelijkingen overgaan in

$$(42.4)\qquad \begin{cases} I & \begin{cases} -\partial_1 \mathcal{E}_3 + \partial_3 \mathcal{E}_2 + \partial_4 B_{23} = 0 \quad ; \text{ cycl.} \\ -\partial_1 B_{23} - \partial_2 B_{31} - \partial_3 B_{12} = 0 \end{cases} \\ II & \begin{cases} +\partial_4 \mathcal{E}^1 + \partial_2 B^{21} + \partial_3 B^{31} = -\frac{\rho}{c} u^1 \quad ; \text{ cycl.} \\ \partial_1 \mathcal{E}^1 + \partial_2 \mathcal{E}^2 + \partial_3 \mathcal{E}^3 = +\rho \end{cases} \end{cases}$$

of geschreven met lopende indices

(43.1)
$$I\begin{cases} -2\partial_{[r}\mathcal{E}_{q]} + \partial_4 \mathcal{B}_{rq} = 0 \\ \partial_{[r}\mathcal{B}_{qp]} = 0 \end{cases}$$
$$II\begin{cases} \partial_4 \mathcal{E}^p + \partial_r \mathcal{B}^{rp} = -\frac{f}{c}u^p \\ \partial_r \mathcal{E}^r = \rho \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ blijven wij dus hier nog als vector schrijven, $\mathcal{B}$ schrijven we daarentegen als bivector

De indices

(43.2) h, i, j, k, l, m doorlopen de waarden $1, 2, 3, 4$
p, q, r, s, t, u " " " $1, 2, 3$ en
dus niet 4

We schrijven voor $\mathcal{E}_p$, voorloopig alleen formeel:

(43.3) $$\mathcal{E}_p = -\mathcal{E}^p = +F^{p4} = -F^{4p} = -F_{p4} = +F_{4p},$$

waardoor de vergelijkingen overgaan in

(43.4)
$$I\begin{cases} \partial_r F_{q4} + \partial_q F_{4r} + \partial_4 F_{rq} = 0 \\ \partial_{[r}\mathcal{B}_{qp]} = 0 \end{cases}$$
$$II\begin{cases} \partial_4 F^{4p} + \partial_r \mathcal{B}^{rp} = -\frac{f}{c}u^p \\ \partial_r F^{r4} = -\rho \end{cases}$$

Schrijven we eveneens alleen nog formeel:

(43.5) $$\mathcal{B}_{rq} = F_{rq} = -F_{qr} = F^{rq} = -F^{qr}$$
$$S^p = -S_p = \frac{f}{c}u^p \; ; \; S^4 = S_4 = \rho \; ;$$

dan krijgen we tenslotte

(43.6)
$$I \quad \partial_{[j} F_{hi]} = 0$$
$$II \quad \partial_j F^{jk} = -S^k .$$

Deze vergelijkingen zijn echter invariant bij Lorentztransformaties indien F_{hi} zich transformeert als bivector en S^i als vector van de Ruimte-tijd-wereld.

Daaruit volgt:

De natuurwetten neergelegd in de vergelijkingen van Maxwell-Lorentz zijn invariant bij Lorentz-transformaties van x, y, z, et en daarmede gepaard gaande zoodanige

transformaties van de kentallen der velden l_p, h_p, n^p en ρ, dat de combinaties van deze kentallen genaamd F_{ki} en s^k zich transformeeren als de kentallen van een bivector resp. vector der ruimte-tijdwereld

Laten wij alleen transformaties toe, die den tijd invariant laten (drie dimensionale draaiingen) dan zijn de beide vergelijkingenstelsels (42.1) en (43.6) volkomen aequivalent. (F_{4p} is dan een ruimte vector). Bij Lorentz transformaties echter zijn de vergel. (42.1) niet invariant. F_{ki} noemt men een bivector van het electromagnetische veld. Splitsing in een electrisch en een magnetisch gedeelte heeft alleen relatieve beteekenis.

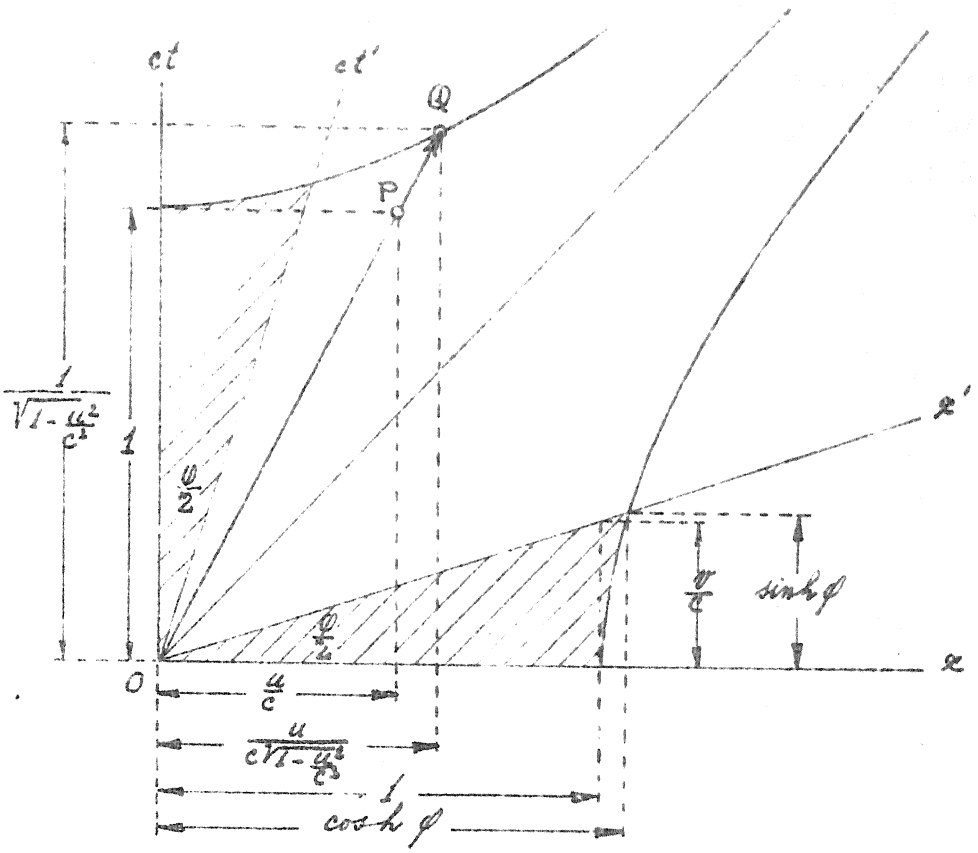
De vergelijkingen kunnen op grond van hun invarianten vorm ook in willekeurige scheve koordinaten geschreven worden:

$$(44.1)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{I} \quad \partial_{[\mu} F_{\lambda\kappa]} = 0 \\ &\mathrm{II} \quad \partial_{\mu} F^{\mu\kappa} = -s^{\kappa} \end{aligned}$$

Lorentztransformaties.

Iedere Lorentztransformatie kan verkregen worden door een speciale Lorentztransformatie in het x, t -vlak gevolgd door een gewone draaiing in de ruimte loodrecht op de nieuwe t-as (blz.36). Deze laatste is niet belangrijk, aangezien de invariantie der vergelijkingen bij gewone draaiingen in de ruimte evident is. We beschouwen dus nu eens alleen de speciale Lorentztransformatie van blz.33:

$$(44.2)\qquad \begin{aligned} x' &= x \cosh\varphi - c\,t \sinh\varphi. \\ y' &= y \\ z' &= z \\ c\,t' &= x \sinh\varphi + c\,t \cosh\varphi. \end{aligned}$$



De kinematische beteekenis van deze transformatie is, dat een punt in rust t o van het stelsel $x't'$ (d w z $\frac{dx'}{dt'}=\frac{dy'}{dt'}=\frac{dz'}{dt'}=0$) de wereldlijn ct' volgt en dus in den tijd $\frac{1}{c}$ den afstand $\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}$ doorloopt De snelheid van het stelsel $x't'$ ten opzichte van het stelsel xt is dus

$$(45.1)\qquad v=v^1=c\,\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}\ ,\quad v^2=0\ ,\quad v^3=0$$

Men kan dit zoowel uit de fig. als uit (44.2) afleiden Het verband tusschen $x't'$ en xt kan men nu in v inplaats van in φ uitdrukken. Uit (45.1) volgt met behulp van de formule $\cosh^2\varphi-\sinh^2\varphi=1$

$$(45.2)\qquad \sinh\varphi=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ;\quad \cosh\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad \frac{v}{c}=\beta\ \text{(gemakshalve)}$$

De Lorentztransformatie (44.1) laat zich nu als volgt schrijven

$$(45.3)\qquad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,x-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,ct=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ ct' &= -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,x+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,ct=\frac{ct-\frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}$$

Beschouwen we een punt dat zich van O uit met een snelheid $u=u^1,0,0$ ten opzichte van xt beweegt. Dit punt beschrijft

in het x,t-vlak dus een lijn met de vergelijking $x = u\,t$ (wereldlijn van het punt). Ten tijde $t = \frac{1}{c}$ is dit punt in de wereldfilm in het punt P met de koordinaten $\frac{u}{c}, 1$ gekomen. Dit punt heeft volgens de transformatieformule (45.3) in het stelsel x', t' de koordinaten

$$(46.1) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{u}{c} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \quad -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{u}{c} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Volgens het oordeel van den bewegelijken waarnemer heeft dus het bewegelijke punt een snelheid

$$(46.2) \qquad u' = u^1 = c\,\frac{\frac{u}{c} - \beta}{-\beta\frac{u}{c} + 1} = c\,\frac{\frac{u-v}{c}}{-\frac{uv}{c^2} + 1} = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = \frac{u-\beta c}{1-\frac{u\beta}{c^2}}\,.$$

(Dit is de relativistische samenstelling van snelheden; voor $c=\infty$ gaat de formule over in de formule der gewone kinematica: $u' = u - v$) Nu moet s^k zich als een vector transformeeren (blz. 44). Onderstellen we dat de snelheid de richting van de x-as heeft, dus $s^1 = \frac{\rho}{c}u^1$; $s^2 = 0$; $s^3 = 0$; $s^4 = \rho$, dan moet de transformatie dus luiden

$$(46.3) \qquad \frac{\rho'}{c}u' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\rho}{c}u^1 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\rho$$

$$(46.4) \qquad \rho' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\rho}{c}u^1 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\rho = \rho\,\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Subsitueert men de waarde van ρ' uit (46.4) in (46.3) dan volgt

$$(46.5) \qquad u^1 = \frac{u-\beta c}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

geheel in overeenstemming met (46.2). Uit (46.4) volgt, dat de waarde van ρ' ten opzichte van een assenstelsel, dat met de lading meebeweegt, is ($u = v$):

$$46.6 \qquad \mathring{\rho} = \rho\,\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \rho\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,.$$

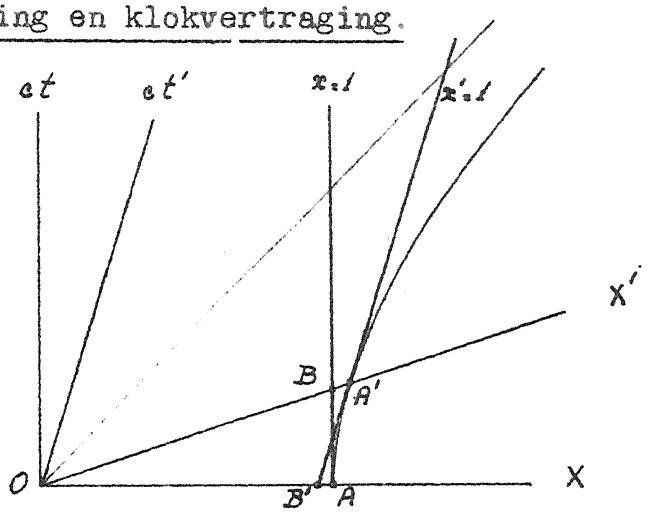
Deze invariante heet de electrische rustdichtheid; het is de electrische dichtheid voor den meebewegenden waarnemer. Deelt men s^k door $\mathring{\rho}$, dan moet er een vector voor den dag komen, die op invariante wijze de snelheid van het stelsel x', t' vastlegt,

en wiens kentallen alleen van de snelheid en dus niet meer van de keuze afhangen. Deze vector

$$(47.1) \qquad u^h = \frac{s^h}{\beta} \qquad \text{komponenten} \begin{cases} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\, u^p \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

waarvoor geldt $g_{hi}\, u^h u^i = 1$, en die dus den duur 1 heeft (blz.28), heet de eenheidsvector van de snelheid (Vierervektor der Geschwindigkeit). Zijn eindpunt ligt in φ op een (duur-) afstand 1 van O. s^h heet de vierdimensionale stroomvector (Viererstrom).

Staafverkorting en klokvertraging.



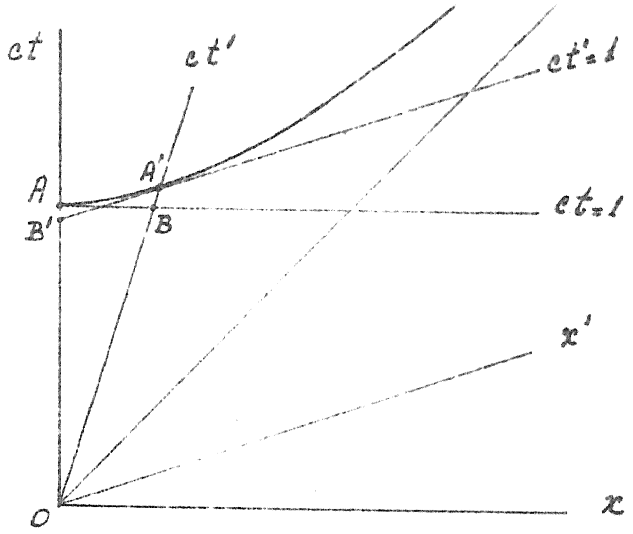
Onderstellen we, dat de staaf OA van de lengte 1 in rust is ten opzichte van x, t , dan snijdt de wreldband van dezen staaf van de x as een stuk OB af, dat kleiner is dan het stuk OA' dat voor den bewegelijken waarnemer de lengte 1 heeft. De staaf schijnt dus verkort in reden van (zie de fig. op blz. 45)

$$(47.2) \qquad \frac{OB}{OA'} = \frac{\frac{v}{c}}{\sin\varphi} = \frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = \sqrt{1-\beta^2} : 1$$

Omgekeerd vormt de staaf OA' van de lengte 1 ten opzichte van den bewegelijken waarnemer een wereldband, die uit de x-as een stuk OB' snijdt $< OA$. De verhouding is (zie de fig. op blz. 45)

$$(47.3) \qquad \frac{OB'}{OA} = \frac{\cosh\varphi - \sinh\varphi\,\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}}{1} = \frac{1}{\cosh\varphi} = \sqrt{1-\beta^2} = 1$$

Beide staven vertoonen dus voor den anderen waarnemer dezelfde verkorting



In het stelsel x,t stelle men langs de x- as een rij klokken op, die alle den tijd t aanwijzen. Ten tijde dat deze klokken den tijd $\frac{1}{c}$ aanwijzen bevinden zij zich alle op de lijn $ct=1$. In het bewegelijke stelsel x',t' doet men precies hetzelfde langs de x'-as, die klokken wijzen dan alle $\frac{1}{c}$ aan wanneer zij op de lijn $ct'=1$ gekomen zijn. De waarnemer in x,t beschrijft de t-as als wereldlijn. Ten tijde $t=0$ valt er in O een x,t-klok samen met een x',t'-klok en beide wijzen dan nul aan. Ten tijde $t=\frac{1}{c}$ is de x',t'-klok in B gekomen en valt daar samen met een andere x,t-klok, die juist $\frac{1}{c}$ aanwijst. De $x't'$ klok wijst echter slechts $\frac{OB}{OA'}=\sqrt{1-\beta^2}$ aan en schijnt dus in de verhouding $\sqrt{1-\beta^2}:1$ verlangzaamd. Omgekeerd zal de x,t klok, die ten tijde $t=0$ in O was, ten tijde $t=\frac{1}{c}\frac{OB'}{OA}$ in B' gekomen zijn en daar samenvallen met een van de x',t'- klokken die dan juist $\frac{1}{c}$ aanwijst. Ook de x,t- klok schijnt dus voor den anderen waarnemer vertraagd in de verhouding $\sqrt{1-\beta^2}:1$. De klokkenfiguur is het spiegelbeeld van de meetstavenfiguur ten opzichte van de lijn $x=ct$.

Rustdichtheid

De meetstaafverkorting verklaart nu ook de merkwaardige transformatie van de dichtheid ρ. Is de meetstaaf electrisch geladen, dan meet de meebewegende waarnemer een lengte 1 en een dichtheid ρ_0. De waarnemer echter, die zich met een snelheid v ten opzichte van de staaf in de lengterichting van den staaf beweegt, meet volgens (46. b) een dichtheid $\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ en een lengte $\sqrt{1-\beta^2}$. Dat wil zeggen dat de totale lading voor beide waarnemers dezelfde en dus een invariante is.

Relativiteitspostulaat.

Het meetstaven- en klokkenexperiment onderstelt, dat de invariantie bij Lorentztransformaties, die bij de vergelijkingen van

Maxwell-Lorentz geconstateerd is, nu ook geldt voor alle andere natuurverschijnselen, in het bijzonder dus voor de mechanische Dit is het relativiteitspostulaat. Dat de vergelijkingen van Maxwell-Lorentz invariant zijn bij Lorentztransformaties is geen postulaat maar eenvoudig een feit. Het nieuwe postulaat eischt, dat ook materieele meetstaven en klokken aan de zelfde invariantie onderworpen zijn, dat dus met name een bewegende klok niet de t maar de (oorspronkelijk als beteekenislooze hulpvariabele beschouwde) t' aanwijst. Dit is iets principieel nieuws

Relativistische mechanica van veld en ladingen.

Bij geldigheid van het relativiteitspostulaat moeten de vergelijkingen der klassieke mechanica ongeldig worden. Want de grondvergelijking van die mechanica

$$(49.1) \qquad K_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \text{ cycl.}$$

is zeker niet invariant bij Lorentztransformaties Zij is wel invariant bij een andere groep (de Galileitransformaties) bestaande uit alle overgangen tot koordinatenstelsels die verkregen kunnen worden door rotaties en translaties waarbij de tijd constant gehouden wordt en bovendien door in den tijd gelijkmatige translaties. Men mag dus in de klassieke mechanica overgaan tot een ander vast koordinatenstelsel, dat uit het gegevene vaste kan worden verkregen door translatie en rotatie en dan bovendien nog aan dat laatste stelsel een gelijkmatige translatie ten opzichte van het vaste geven (dus geen rotatie en geen versnelling).

Daar de invariantie der Maxwell-Lorentzsche vergelijkingen wel gefundeerd is, en een invariantie dezer vergelijkingen bij de Galileigroep met zekerheid niet bestaat moet er gezocht worden naar een relativistische mechanica invariant bij Lorentztransformatie. De brug daartoe wordt geleverd door de vergelijkingen voor de kracht in het electromagnetische veld.
Voor de kracht op een lading e geldt, in gewone vectoranalyse

$$(49.2) \qquad \overset{3}{\mathfrak{K}} = e\overline{\mathfrak{E}} + \frac{e}{c}\,\bar{u} \times \overline{\mathfrak{B}} \qquad 1)$$

1) De index 3 boven $\mathfrak{K}$ dient om deze driedimensionale kracht te onderscheiden van een later optredende vierdimensionale.

en is deze kracht dus opgebouwd uit een electrisch stuk $\rho\bar{\mathcal{E}}$ en een magnetisch stuk $\frac{f}{c}\bar{u}\times\bar{B}$

De kracht per volumeenheid is dus

$$\bar{p} = \rho\,\bar{\mathcal{E}} + \frac{f}{c}\,\bar{u}\times\bar{B} \tag{50.1}$$

of in Ricci-notatie ($p,q,r,\cdots = 1,2,3$):

$$p^p = \rho\,\mathcal{E}^p + \frac{f}{c}\,u_q\,B^{qp} \tag{50.2}$$

Beide deelen der kracht laten zich nu voor het electrostatische resp. het magnetostatische geval als divergentie van een tensor schrijven, den electrischen resp. magnetischen spanningstensor. Wij voeren dit uit voor het electrische deel:

Uit de Maxwellvergel. (43.1-II) volgt

$$\rho = \partial_q\,\mathcal{E}^q. \tag{50.3}$$

Duiden wij het electrische gedeelte van de kracht aan door p_e^p, dan geldt hiervoor de uitdrukking

$$p_e^p = \mathcal{E}_p\,\partial_q\,\mathcal{E}^q = \left(\partial_q\,\mathcal{E}_p\,\mathcal{E}^q\right) - \left(\partial_q\,\mathcal{E}_p\right)\mathcal{E}^q. \tag{50.4}$$

In het electrostatische geval is volgens de Maxwellvergelijking (43.1-I)

$$\partial_q\,\mathcal{E}_{pq} = 0 \tag{50.5}$$

waardoor (50.4) overgaat in

$$p_e^p = g^{pq}\,\partial_q\left(\mathcal{E}_q\,\mathcal{E}^p - \tfrac{1}{2}\,A_r^p\,\mathcal{E}_r\,\mathcal{E}^r\right) = \partial_q\left(\mathcal{E}^p\mathcal{E}^q - \tfrac{1}{2}\,g^{pq}\,\mathcal{E}_r\,\mathcal{E}^r\right) \tag{50.6}$$

of

$$p_e^p = -\,\partial_q\,S_e^{pq} \tag{50.7}$$

S_e^{pq} is symmetrisch en het electrische deel van den

Maxwellschen spanningstensor. De kentallen van dezen tensor S^{pq}_{z} kan men als matrix schrijven:

$$(51.1)\qquad \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-\mathcal{E}^1\mathcal{E}^1+\mathcal{E}^2\mathcal{E}^2+\mathcal{E}^3\mathcal{E}^3) & -\mathcal{E}^1\mathcal{E}^2 & -\mathcal{E}^1\mathcal{E}^3 \\ -\mathcal{E}^1\mathcal{E}^2 & \frac{1}{2}(\mathcal{E}^1\mathcal{E}^1-\mathcal{E}^2\mathcal{E}^2+\mathcal{E}^3\mathcal{E}^3) & -\mathcal{E}^2\mathcal{E}^3 \\ -\mathcal{E}^1\mathcal{E}^3 & -\mathcal{E}^2\mathcal{E}^3 & \frac{1}{2}(\mathcal{E}^1\mathcal{E}^1+\mathcal{E}^2\mathcal{E}^2-\mathcal{E}^3\mathcal{E}^3) \end{array} \right\|$$

Voor het magnetische deel maakt men gebruik van de vergelijkingen

$$(51.2)\qquad \frac{\rho}{c}\,u_q = -\partial_z B^{z}_{\cdot q}$$

en

$$(51.3)\qquad \partial_{[z} B_{q\,p]} = 0,$$

die voor het magnetostatische geval gelden. (zie 43.1) De bij deze berekening te voorschijn komende magnetische spanningstensor heeft de kentallen:

$$(51.4)\qquad \underset{m}{S}{}^{pq} = -B^{p}_{\cdot z} B^{qz} + \frac{1}{4} g^{pq} B_{zs} B^{zs}$$

of geschreven in matrixtabel, waarbij wij B^{23} vervangen door B^{1} , enz. (zie blz. 31,42)

$$(51.5)\qquad \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-B^1B^1+B^2B^2+B^3B^3) & -B^1B^2 & -B^1B^3 \\ -B^1B^2 & \frac{1}{2}(B^1B^1-B^2B^2+B^3B^3) & -B^2B^3 \\ -B^1B^3 & -B^2B^3 & \frac{1}{2}(B^1B^1+B^2B^2-B^3B^3) \end{array} \right\|$$

Deze matrix heeft denzelfden vorm als die van de kentallen van den electrischen spanningstensor. Wij voeren (de berekening) niet uit, omdat de bewerkingen (verg. bijv. Weyl 5de druk blz. 67) dezelfde zijn als bij de samenvatting van beide gevallen, die nu volgt.

Vatten wij beide gevallen samen, dan is de kracht (50.1)

$$(51.6)\qquad p^{\nu} = \rho\, F^{\nu\rho} + \frac{\rho}{c} u_q F^{q\rho}$$

Nu is echter volgens de Maxwellvergelijkingen (43.4) en (43.6

$$\rho = -\partial_j F^{j4}$$

(52.1)

$$\frac{\rho}{c} u^p = -\partial_j F^{jp}$$

zoodat (51.6) overgaat in

(52.2) $$p^p = -(\partial_j F^{j4}) F^{4p} - (\partial_j F^j_{.q}) F^{qp} = -(\partial_j F^j_{.k}) F^{kp}$$

De kracht p^p is derhalve de <u>ruimtekomponente</u> van een vector k^k

(52.3) $$k^k = -(\partial_j F^j_{.k}) F^{kk} = +s_k F^{kk}$$

$$p^p = k^p$$

dien wij den <u>vierdimensionalen krachtvector</u> noemen (Viererkraft)
Nu is

(52.4) $$k^k = -(\partial_j F^j_{.k}) F^{kk} = -(\partial_j F^j_{.k} F^{kk}) + F^{jk}(\partial_j F_{kl}) g^{lk}$$

Door gebruikmaking van de eerste Maxwellvergelijking kunnen wij hiervoor schrijven

(52.5) $$k^k = -(\partial_j F^j_{.k} F^{kk}) - \tfrac{1}{2} F^{jk}(\partial_l F_{jk}) g^{lk}$$

$$= -\partial_j \left\{ -F^j_{.k} F^{kk} + \tfrac{1}{4} g^{kj} F_{kl} F^{kl} \right\}$$

Het gedeelte tusschen accoladen wordt de spanningstensor S^{jk} genoemd. De 4-dimensionale krachtvector laat zich dan schrijven als een divergentie van dezen tensor

(52.6) $$\boxed{k^k = -\partial_j S^{jk}}$$

Wij zagen reeds, dat de ruimtekomponenten van k^k de kracht p^p was. Wat is echter de beteekenis van k^4 ?
Uit (52.3) volgt

$$(53.2)\qquad k^4 = s_i F^{i4} = -s_p F^{4p} = -\frac{\rho}{c} u_p \mathcal{E}^p = -\frac{1}{c} u_q k^q = -\frac{1}{c}\, \bar{u}.\bar{k}$$

dat wil dus zeggen, dat k^4 de door het electrische veld per tijds- en volumeeenheid verrichte arbeid is.

De 16 komponenten van S^{ik} zijn ook in een matrixtabel op te schrijven. Uit (52.5) ziet men gemakkelijk in, dat S^{pq} de som is van $\frac{1}{2}S^{pq}$ en $\frac{1}{m}S^{pq}$. De kentallen van S^{pq} vindt mendan uit (51.1) en (51.5). Het zijn de kentallen van den Maxwellschen spanningstensor.

Voor S^{44} vinden wij

$$(53.2)\qquad S^{44} = F^4_{\ q} F^{q4} + \frac{1}{4} F_{pq} F^{pq} + \frac{1}{2} F_{4p} F^{4p} =$$

$$= -\frac{1}{2} F_{4q} F^{4q} + \frac{1}{4} F_{pq} F^{pq} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_q \mathcal{E}^q - \frac{1}{2} B_q B^q$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\bar{\mathcal{E}}.\bar{\mathcal{E}} + \bar{B}.\bar{B}\right)$$

en is dus de energie van het veld per volumeeenheid. De kentallen S^{4p} zijn kentallen van een ruimtevector

$$(53.3)\qquad S^{4p} = F^4_{\ q} F^{qp} = \mathcal{E}_q B^{qp}$$

Gebruiken wij het schema van blz. 31, dan zien wij dat de vector met de kentallen S^{4p} voorgesteld kan worden door

$$(53.4)\qquad \bar{\mathcal{E}} \times \bar{B}$$

(Men heeft b.v. $S^{41} = \mathcal{E}_2 B^{21} + \mathcal{E}_3 B^{31} = \mathcal{E}_2 B_3 - \mathcal{E}_3 B_2$)

Het c - voud van dezen vector wordt Poyntingsche vector genoemd. Deze stelt den energiestroom in het veld voor.

Om de vergelijking (52.6) te duiden gaan we uit van de continuiteitsvergelijking van een stroomende vloeistof met dichtheid [1]) μ en stroomdichtheidsvector i^q

---

[1]) De hier bedoelde dichtheden zijn physische dichtheden en geen mathematische. (blz. 24).

(54.1) $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_q i^q = 0$ (voor stationaire stroming $\partial_q i^q = 0$)

Deze vergelijking brengt tot uitdrukking dat nergens vloeistof opborrelt of verdwijnt. De vergelijking

(54.2) $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_q i^q = q$

brengt daarentegen tot uitdrukking dat er per tijds en volumeeenheid een hoeveelheid vloeistof q opborrelt.

Beschouwen we nu eerst de vierde der 4 vergelijkingen (52.6)

(54.3) $k^4 = -\partial_j S^{j4} = -\partial_q S^{q4} - \partial_4 S^{44}$

$k^4 = \frac{1}{c}$ (energie door het veld per tijd en volumeeenheid afgestaan)

S^{44} = energiedichtheid van het veld.

$S^{q4} = \frac{1}{c}$ (energiestroomdichtheidsvector van het veld)

en de vergelijking is dus de continuiteitsvergelijking van de energie in totaal gaat ervoor veld + ladingen geen energie verloren, en dat wel voor iedere keuze van het koordinatenstelsel.

Beschouwen we vervolgens de eerste der vergelijkingen (52.6)

(54.4) $k^1 = -\partial_j S^{j1} = -\partial_q S^{q1} - \partial_4 S^{41}$

Als wij in analogie met de gewone mechanica de komponente k^1 als de impuls-dichtheidsaanwinst der ladingen in de x-richting per tijds- en volumeeenheid beschouwen, den skalar

$\frac{1}{c} S^{41}$ als impulsdichtheid in de x-richting van het veld

en den vector

S^{q1} als stroomdichtheidsvector van den impuls in de x-richting van het veld

opvatten, dan stelt (54.4) de continuiteitsvergelijking van den impuls in de x-richting voor: in totaal gaat er voor veld + ladingen geen impuls in de x-richting verloren. Ook dit geldt

weer voor iedere keuze van het coördinatenstelsel. De vergelijking (52.6) brengt dus tot uitdrukking, dat energie en impuls samen in totaal als vierdimensionale vector niet verloren gaan. Energie en impuls per tijds- en volumeeenheid aan de ladingen afgestaan vormen den vector k^h, den impulsenergievector, ck^4 is de energie per tijds- en volumeeenheid door het veld aan de ladingen afgestaan, k^r de impuls per tijds- en volumeeenheid door het veld aan de ladingen afgestaan. Voor het veld is het gecompliceerder, in het veld hebben we de energiedichtheid S^{44} (bij vastgehouden tijdas een skalar), energiestroomdichtheid $c\,S^{s4}$ (bij vastgehouden tijdas een ruimtelijke vector), impulsdichtheid $\frac{1}{c}S^{r4}$ (bij vastgehouden tijdas een ruimtelijke vector) en impulsstroomdichtheid S^{rs} (bij vastgehouden tijdas een ruimtelijke tensor), die samen den tensor S^{hi} samenstellen, den impulsenergietensor

We vinden derhalve de merkwaardige betrekking

$$\text{impulsdichtheid} = \frac{\text{energiestroomdichtheid}}{c^2},$$

waaruit volgt

$$\text{impuls} = \frac{\text{energiestroom}}{c^2}.$$

Impuls komt dus in de relativistische mechanica niet alleen toe aan bewegende massa's maar ook aan stroomende energie, b.v warmteenergie, elastische energie, enz. Is derhalve in een materieel voorwerp dat met een snelheid v beweegt een of andere energie E opgehoopt, dan is de energiestroom Ev en vermeerdering van impuls tengevolge van het aanwezig zijn van E:

(55.1) $$\frac{Ev}{c^2}$$

Klassiek mechanisch gedacht zou het dus zijn alsof de massa van het voorwerp met $\frac{E}{c^2}$ vermeerderd ware. Van relativistisch standpunt kunnen we natuurlijk een dergelijke uitspraak nog niet doen, daar we nog niet weten of de impuls van een massa M ook relativistisch gelijk is aan Mv.

Relativistische dynamica.

Tot nu toe zijn wel krachten opgetreden, $\overset{3}{\mathcal{K}}$, $\bar{p}$ en k^h maar er is nog niets gezegd over de versnellende werking. Het relativiteitspostulaat voert tot de ondersteiling, dat in een coördinatenstelsel ten opzichte waarvan een massa m in rust is, de gewone vergelijking der klassieke mechanica geldt

$$\overset{3}{\mathcal{K}} = \frac{d}{dt} m \frac{d\bar{x}}{dt} \tag{56.1}$$

of

$$\overset{3}{\mathcal{K}}{}^p = \frac{d}{dt} m \frac{dx^p}{dt} . \tag{56.2}$$

Het is nu maar de vraag, wat bij relativistische veralgemeening uit $\overset{3}{\mathcal{K}}{}^p$ en uit m wordt. Maken we gebruik van de electrodynamica dan is duidelijk dat $\overset{3}{\mathcal{K}}{}^p$ geen stuk van een vierdimensionalen vector is. Want de kracht per volumeeenheid $\bar{p}$ was een dergelijk stuk, en daar

$$\overset{3}{\mathcal{K}} = \frac{e}{\rho} \bar{p} \tag{56.3}$$

en ρ zich bij overgang tot een bewegelijk coördinatenstelsel als volgt transformeert

$$\rho = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\sqrt{1-\beta^2}} , \tag{56.4}$$

transformeert zich $\overset{3}{\mathcal{K}}$ anders dan $\bar{p}$. Voeren wij dus den vector

$$\mathcal{K}^p = \frac{e}{\rho} \bar{p} = \frac{\overset{3}{\mathcal{K}}{}^p}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{56.5}$$

in, dan is deze werkelijk een stuk van den vierdimensionalen vector

$$\mathcal{K}^h = \frac{e}{\rho} k^h \tag{56.6}$$

waarvan de vierde komponente

$$\mathcal{K}^4 = \frac{e}{\rho} k^4 = \frac{e}{\rho} \frac{1}{c} \sum_q u^q k^q = \frac{1}{c} \sum_q u^q \mathcal{K}^q \tag{56.7}$$

voor het geval van een massa die in rust is ten opzichte van het coördinatenstelsel (niet nul is.) Wij trachten nu met behulp van K^i een bij Lorentztransformaties invariante vergelijking op te stellen, die voor een t.o.v. de massa rustend coördinatenstelsel overgaat in (56.2). In die vergelijking kan natuurlijk dt niet voorkomen, maar wel de invariante uitdrukking

$$(57.1) \qquad d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx_1^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

Met behulp van τ kan kan men voor de vierdimensionalen eenheidsvector van de snelheid schrijven $u^k = \frac{1}{c}\frac{dx^k}{d\tau}$
Men probeere

$$(57.2) \qquad K^k = m_0 \frac{d^2x^k}{d\tau^2}$$

waarin m_0 een nader te bepalen constante is. Deze vergelijking is te splitsen in

$$(57.3a) \qquad K^p = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx^p}{dt}$$

$$(57.3b) \qquad K^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

De eerste vergelijking is voor $\beta = 0$ identiek met (56.2), de tweede levert voor dat geval $0 = 0$ Want dan is $K^4 = 0$ Getrouw aan het relativiteitspostulaat eischen we nu dat de invariante vergelijking (57.2), die ten opzichte van een rustend coördinatenstelsel het gewenschte resultaat geeft, nu ook voor alle coördinatenstelsels de juiste vergelijkingen geeft Stellen wij dan

$$(57.4) \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad m_0 = \text{rustmassa} = \text{massa t.o.v. met het bewegend systeem}$$

dan luiden de relativistische mechanische vergelijkingen t.o.v. een willekeurig systeem

$$(57.5) \qquad \begin{cases} \overset{1}{K} = \frac{d}{dt} m \frac{d\xi}{dt} \\ \sum_1 u^i \overset{i}{K} = \frac{d}{dt} m c^2 . \end{cases}$$

De eerste vergelijking leert dat de wet : kracht = $\frac{d}{dt}$ impulsie blijft doorgaan, dat echter in de impulsie m nog op een bijzondere wijze extra van de snelheid afhangt. De tweede vergelijking leert dat de arbeid door $\mathcal{K}$ verricht (links) opgenomen wordt in $m c^2$. Deze uitdrukking

$$(58.1) \qquad m c^2 = \frac{\mathring{m} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathring{m} c^2 + \frac{1}{2} \mathring{m} v^2 + \dots$$

stelt dus op een constante na de energie voor. Stelt men die constante 0 dan wordt de energie van een <u>rustend</u> massapunt

$$(58.2) \qquad \boxed{\mathring{m} c^2}$$

Het nulstellen van die constante is niet willekeurig. Wij zagen reeds dat impuls (met c vermenigvuldigd) en energie steeds stukken moeten zijn van een vierdimensionalen vector. Inderdaad vormt de uitdrukking $\mathring{m} \frac{dx^h}{dt}$ uit

$$(58.3) \qquad \mathcal{K}^h = \frac{d}{d\tau} \mathring{m} \frac{dx^h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} c \mathring{m} \mathring{u}^h$$

een dergelijken vector, die zich laat ontbinden in

$$(58.4a) \qquad \mathring{m} \frac{dx^p}{dt} = c \mathring{m} \mathring{u}^p = m \frac{dx^p}{dt} = m u^p$$

$$(58.4b) \qquad \mathring{m} \frac{dx^4}{dt} = c \mathring{m} \mathring{u}^4 = mc$$

(zie blz. 47 : $\mathring{u}^p = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} u^p$)

De impulsenergievector is dus $\mathring{m} c$ vermenigvuldigd met den eenheidsvector $\mathring{u}^h$ (blz. 28). Is mc^2 de energie, dan is de energiestroom $mc^2 u^p$ en dus volgt ook hier

$$(58.5) \qquad \text{Impuls} = \frac{\text{energiestroom}}{c^2} \qquad \text{(Planck 1918)}$$

welke betrekking wij reeds bij de bespreking van den impulsenergietensor vonden. Hiermee zijn ook de aannamen van blz. 54 gerechtvaardigd.

Samenvatting:

rustende massa m_0 heeft een energie $m_0 c^2$ en een impuls o
bewegende " m " " " " mc^2 " " " mu^ρ
rustende energie $\mathcal{E}$ " " massa $\frac{\mathcal{E}}{c^2}$ " " " o
energiestroom heeft een impuls $\frac{\text{energiestroom}}{c^2}$

Potentiaalvector.

Wij passen de stelling van blz. 38 toe op de vergelijking (43.6 I). Er bestaat dus een vectorveld φ_λ, zoo dat

$$F_{\kappa\lambda} = \partial_\kappa \varphi_\lambda - \partial_\lambda \varphi_\kappa \tag{59.1}$$

of, uitgeschreven in orthogonale koordinaten

$$\begin{aligned} B_x &= F_{23} = \partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2 \\ \mathcal{E}_x &= F_{14} = \partial_1 \varphi_4 - \partial_4 \varphi_1 \end{aligned} \tag{59.2}$$

Deze vector φ_λ heet de potentiaalvector. φ_1, φ_2 en φ_3 vormen een ruimtelijken vector, de vectorpotentiaal der gewone vectoranalyse, φ_4 is voor velden, die niet van den tijd afhangen de gewone potentiaal.

Voor een rustende puntlading e (in het punt $x=y=z=0$) lost men de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{E}_x + \partial_2 \mathcal{E}_y + \partial_3 \mathcal{E}_z &= \rho \\ \partial_2 \mathcal{E}_z - \partial_3 \mathcal{E}_y &= 0 \end{aligned} \tag{59.3}$$

als volgt op. Men bepaalt φ_4 met behulp van de formule

$$\varphi_4 = \frac{-e}{4\pi r} \; ; \; r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; , \; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \tag{59.4}$$

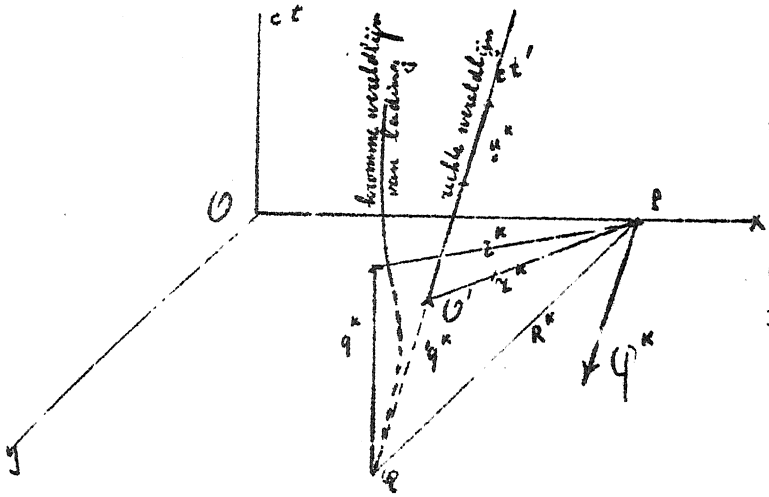
en dan is

$$\mathcal{E}_x = \partial_1 \varphi_4 \; ; \; \text{cycl.} \qquad B_x = B_y = B_z = 0 \tag{59.5}$$

Men overtuigt er zich gemakkelijk van, dat deze oplossing aan (59.3) voldoet.

Wij vragen nu naar de oplossing van de differentiaalvergelijkingen (43.6) I en II voor een bewegende puntlading. Nemen wij eerst het geval, dat een puntlading e zich met constante snelheid u^ρ, $\rho = 1,2,3$, ten opzichte van het stelsel (x, y, z, t)

beweegt. Men bepaalt dan eerst den potentiaalvektor φ_λ voor een willekeurig punt P. Leg het x,y-vlak door de baan en P en de x-as door P. De nulkegel door P snijdt de wereldlijn van e in Q in het verleden. We brengen een nieuw assenstelsel aan, dat de wereldlijn als ct'-as heeft en een x'-as door P. Met betrekking tot dit stelsel is de lading in rust en derhalve in P:



$$(60.1)\qquad \varphi_{4'} = -\frac{e}{4\pi z'} \quad ; \quad \varphi_{1'} = \varphi_{2'} = \varphi_{3'} = 0$$

De vector φ^κ heeft dus de richting van de ct'-as en een duur $\frac{e}{4\pi\sqrt{-z^\kappa z'_\kappa}}$. Is dus u_0^κ de eenheidsvector van de snelheid dan is

$$(60.2)\qquad \varphi^\kappa = -\frac{e}{4\pi}\,\frac{u_0^\kappa}{'z}$$

Nu is echter (zie figuur)

$$(60.3)\qquad {}'z^\kappa\,{}'z_\kappa = (R^\kappa - {}'q^\kappa)(R_\kappa - {}'q_\kappa) = -2\,{}'q^\kappa R_\kappa + {}'q^\kappa {}'q_\kappa \quad ; \quad (R^\kappa R_\kappa = 0)$$

en verder is de duur van q^κ even groot als de lengte van $'z^\kappa$ zoodat

$$(60.4)\qquad {}'z^\kappa\,{}'z_\kappa = -{}'q^\kappa R_\kappa = -\sqrt{-z^\kappa z_\kappa}\;u_0^\kappa R_\kappa$$

zoodat

$$(60.5)\qquad \boxed{\varphi_\lambda = -\frac{e}{4\pi}\,\frac{u_{0\lambda}}{u_0^\kappa R_\kappa}}$$

Hiermede is een geheel van het assenstelsel onafhankelijke oplossing voor φ_λ gevonden. We brengen deze nu terug op ons assenstelsel x, y, z, t. Dan is (daar duur q^κ = lengte z^κ) (vergl. 47.1)

$$(60.6)\qquad \varphi_1 = +\frac{e}{4\pi}\,\frac{\tfrac{1}{c}u^1}{z - \tfrac{1}{c}(u^1 x^1 + u^2 x^2 + u^3 x^3)} \quad ; \quad \text{cycl. } 1,2,3.$$

$$(61.1)\qquad \varphi_4 = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{e}{4\pi}\,\frac{1}{u^4 q_4 + u^1 z_1 + u^2 z_2 + u^3 z_3} =$$

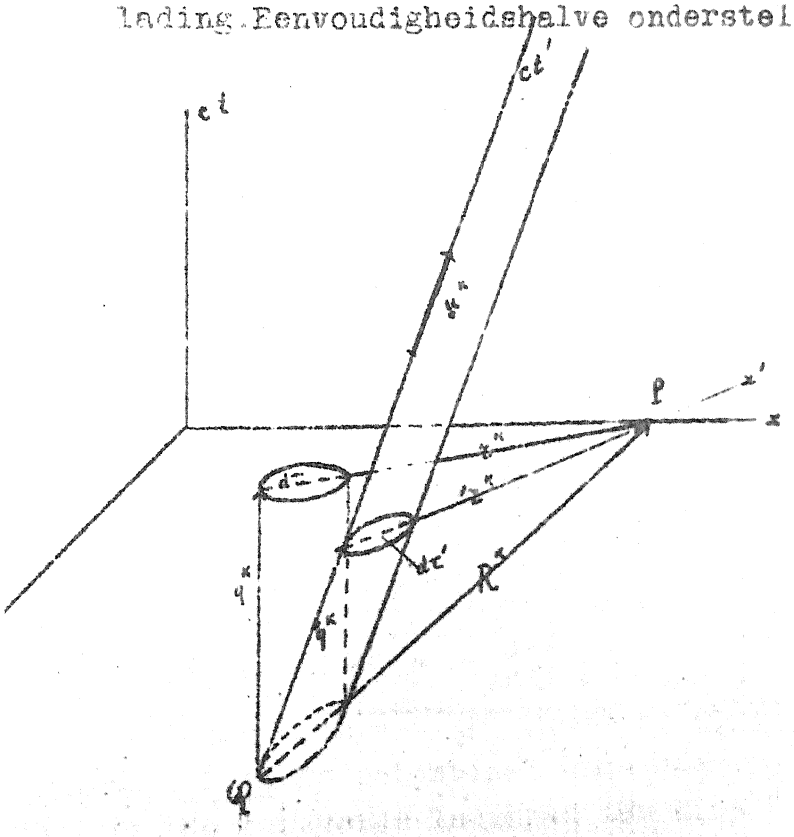
$$= -\frac{e}{4\pi}\,\frac{1}{z - \frac{1}{c}(u^1 z^1 + u^2 z^2 + u^3 z^3)}$$

daar

$$q_4 = z \quad ; \quad u^p = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,u^p \quad ; \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (\text{blz. } 44)$$

waar z de lengte van den vector z^κ voorstelt. (Lienard-Wiechert 98-00). Is de snelheid van de lading niet constant en dus de wereldlijn geen rechte, dan gelden de zelfde formules, φ is dan weer snijpunt van de wereldlijn met den nulkegel door P in het verleden. De vectoren q^κ en u^κ liggen in de raaklijn aan de wereldlijn in dat snijpunt. Het punt φ is dan het eenige punt van de wereldlijn van e, dat voor de potentiaal in P van belang is.

Wij beschouwen nu het geval van een continu verdeelde lading. Eenvoudigheidshalve ondersteilen wij eerst een willekeurig continu over een deel van de x,y,z - ruimte verdeelde lading met een constante snelheid u^p. Deze lading beschrijft een rechte wereldbuis, en wij beschouwen de infinitesimale buis van een klein deel der lading. Zij φ het snijpunt van deze infinitesimale wereldbuis met den nulkegel van P, $d\tau'$ de doorsnede met de $x'y'z'$-ruimte en $d\tau$ de projectie van de doorsnede met den nulkegel van P op de x,y,z -ruimte.



Is de rustdichtheid van de lading $\mathring{\rho}$,dan is de bewegende lading $\mathring{\rho}\,d\tau'$ en de vierdimensionale stroomdichtheid is dus

$$(62.1) \qquad s^\kappa = \mu^\kappa \mathring{\rho}$$

Wij bewijzen nu dat

$$(62.2) \qquad d\tau' : d\tau = {}'z : z = {}'q : q$$

De doorsnede met den nulkegel is driedimensionaal,men kan er dus een kontravarianten trivector aan toevoegen,of met behulp van den eenheidsquadrivector $J_{\kappa\lambda\mu\nu}$ ook een kovarianten vector t_λ .Daar echter het hypervlak van t_λ aan den nulkegel in $\mathcal{P}$ raakt,heeft de kontravariante vector t^κ de richting van R^κ .Bijgevolg is

$$(62.3) \qquad d\tau' : d\tau = R_\lambda \mu^\lambda : R_\lambda t^\lambda = {}'q : q = {}'z : z$$

Uit (60.2) volgt dus dat de bijdrage van de buis $\mu\mu$ φ^κ is

$$(62.4) \qquad d\varphi^\kappa = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{s^\kappa}{z'}\,d\tau' = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{s^\kappa}{z}\,d\tau .$$

zoodat

$$(62.5) \qquad \boxed{\varphi^\kappa = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{s^\kappa}{z}\,d\tau}$$

te integreeren over alle deelen der x,y,z-ruimte waar projecties liggen van doorsneden van stroombuizen met den nulkegel van $\mathcal{P}$,d.w.z. waar bewegende lading aanwezig was op een tijd $\frac{z}{c}$ en van waaruit dus een lichtsignaal uitgestuurd op dien tijd juist ten tijde $t = o$ in $\mathcal{P}$ zou aankomen.Gaan we nu weer over tot willekeurig bewegende ladingen dan is van elke infinitesimale stroombuis weer alleen de doorsnede met den nulkegel van $\mathcal{P}$ van belang en we hebben dus voor elke buis de waarde van s^κ (die nu niet meer constant in den tijd is) te nemen ten tijde $t = -\frac{q}{c} = -\frac{z}{c}$:

$$(62.6) \qquad \boxed{\varphi^\kappa = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{s^\kappa}{z}\right)_{t=-\frac{q}{c}} d\tau}$$

deze vorm van φ^κ ,heet de <u>formule van de gerateerde potentiaal</u>.De potentiaal komt hier tot stand niet als functie van de bewegende ladingen ten tijde $t=o$ maar als functie van de

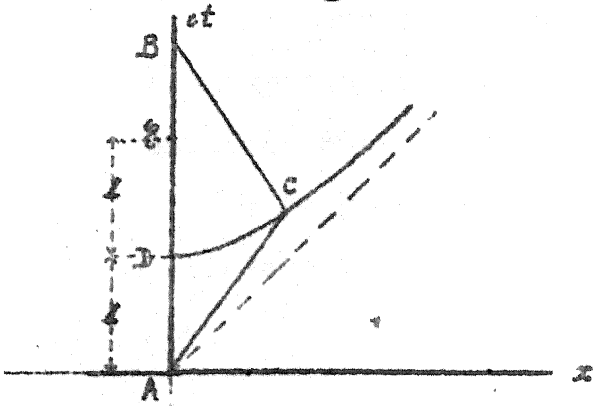
bewegende ladingen in het verleden, die zich in de ruimtetijdwereld op den nulkegel van P bevinden. Men integreert dus eigenlijk over dezen nulkegel.

II. Algemeene Relativistische Mechanica.

Algemeene beschouwingen.

In de eenvoudige of speciale relativiteitstheorie worden de verschijnselen in zeker opzicht losgemaakt van de coördinaten. Alle orthogonale coördinaten in de RT-wereld zijn gelijkgerechtigd, de algemeene formules hebben t.o.v. van elk dier coördinatenstelsels precies denzelfden vorm. Een experiment kan dus nooit leeren of een gegeven stelsel een eenparige snelheid heeft, want het op rust transformeeren van zoo'n stelsel is, als men den tijd op een behoorlijke wijze mee laat transformeeren, een Lorentztransformatie, d.i. een orthogonale transformatie in de R.T.-wereld, die weer tot een, met het eerste stelsel volkomen gelijkgerechtigd stelsel, voert. Alle proeven om een „aetherwind" te constateeren zijn dus, indien de theorie juist is, van te voren gedoemd om te mislukken. Mocht er eens een aetherwind aangetoond worden, dan valt daarmee de relativiteitstheorie, althans in dezen vorm.

Geheel anders is het met stelsels, die t.o.v. van elkaar versnellingen hebben.



Beschouw twee waarnemers.

I : Wereldlijn A B

II: Wereldlijn A C B

Is A D = 1 , dan is ook A C = 1 (Minkowskische maat !) en dus ook B C = 1. Waarnemer II leeft dus in B aangekomen af, dat zijn reis van A naar B $\frac{2}{c}$ seconden geduurd heeft.

Nu is echter A B = A E dus = 2, m.a.w. de waarnemers I en II zijn het er over eens, dat de klok van II t.o.v. van die van I achterloopt. Over de oorzaak van dit verschijnsel zijn zij voorloopig in het duister omdat

I verklaart: II heeft zich van mij met constante

snelheid verwijderd en is daarna met constante snelheid teruggekomen, en

II verklaart: precies hetzelfde van I.

Zij zullen dus moeten nagaan of een van beiden gedurende het experiment het een of ander beleefd heeft dat zijn klok verstoord kan hebben. Onderdaad heeft II iets bijzonders beleefd, namelijk in C een plotselinge vertraging, hij kan die vertraging met een mee genomen instrument gemeten of aan den lijve als „zeeziekte" gevoeld hebben. I heeft die ervaring niet gehad.

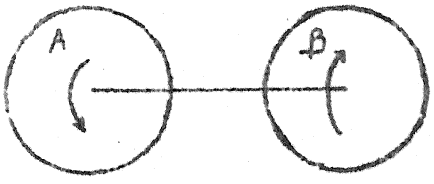
Conclusie:

Ondergaat een stelsel een versnelling, dan laat het zich niet meer zonder meer op rust transformeeren, een versneld stelsel is essentieel iets anders als een niet versneld.

Een versneld punt heeft een wereldlijn, die niet meer recht maar gebogen of gebroken is, en dat wel t.o. van alle „geoorloofde" koordinatenstelsels i d.A.T.-wereld, dat zijn de orthogonale rechtlijnige koordinatenstelsels die door Lorentztransformaties in elkaar overgaan

Als „oorzaak" van het beschouwde effect moet hier dus de afwijking van de „rechte" wereldlijn t.o. van onze bevoorrechte coordinatenstelsels worden aangemerkt.

In de klassieke mechanica kan men een dergelijk voorbeeld construeeren. Twee volkomen gelijke, vrij zwevende, vloeistof-bollen wentelen t.o. van elkaar om de verbindingslijn hunner middelpunten. Dit is tot zoover volkomen relatief.



Rust echter A t.o. van de bevoorrechte coordinatenstelsels der klassieke mechanica, d.z. de „niet roteerende" coordinatenstelsels (de „absolute ruimte" van Newton), die t.o. van elkaar slechts eenparige translaties uitoefenen, dan zal B tengevolge van de middelpuntvliedende kracht afplatten. Rust daarentegen

B, dan zal A afplatten. Het experiment kan uitmaken wie van de twee rust, m.a.w. de „niet roteerende" coordinatenstelsels der klassieke mechanica laten zich experimenteel vastleggen. Ook hier is weer „oorzaak" van het verschijnsel het gedrag t.o.v. van zekere bevoorrechte coordinatenstelsels.

In beide gevallen, zoowel in de speciale relativiteitstheorie als in de klassieke mechanica treffen we dus iets zeer onbevredigends aan: coördinatenstelsels wordt in zekeren zin physische realiteit toegeschreven, terwijl wij toch moeten verlangen dat het gedrag van physische dingen alleen zal afhangen van hun betrekkingen tot andere physische dingen en niet van hun betrekkingen tot onphysische entiteiten als coördinatenstelsels, „absolute ruimte" e.d. Men zal dus moeten zoeken naar een middel om een versneld coördinatenstelsel op rust te transformeeren. Is de versnelling voor alle punten $\bar{a}$, dan is dat in de klassieke mechanica heel gemakkelijk, men behoeft alleen een „schijnkracht" $-m\bar{a}$ in te voeren. Treden er draaiingen op, dan krijgen de schijnkrachten bepaalde namen, „middelpuntvliedende kracht" en „Kracht van Coriolis" maar het principe blijft hetzelfde. Hiermee is echter nog niets gewonnen, er is zooiets gebeurd als het invoeren van een „schijnbaren" tijd t' met behulp van een Lorentztransformatie. De beslissende stap was daar, dat men inzag dat t' een even werkelijke tijd was als t en ook door de klokken in het bewegende stelsel werkelijk werd aangewezen. Hier moeten we dus vragen: zijn er werkelijke krachten bekend, die precies hetzelfde zouden doen als $-m\bar{a}$? Inderdaad voldoet de zwaartekracht aan dien eisch en wel op grond van het feit dat in de formule voor attractie van twee massa's

$$K = f\frac{m\,m'}{r^2} \qquad (70.2)$$

de gravitatieconstante niet van den aard der materie afhangt.

Men drukt dit ook zoo uit: voor alle stoffen is de trage massa gelijk aan de graviteerende massa (proeven van Eötvös en Zeeman tot zeer hoogen graad van nauwkeurigheid). Tengevolge van deze gelijkheid is het voor een waarnemer in een afgesloten ruimte niet uit te maken of zijn systeem een voor alle punten gelijke versnelling $\bar{a}$ heeft, of dat hij zich met zijn geheele stelsel in een gravitatieveld bevindt, dat op iedere massa m een kracht $-m\bar{a}$ uitoefent.

Verder moeten we een eind maken aan de bevoorrechting van zekere coördinatenstelsels. Vooral hun rechtlijnigheid is hinderlijk, want bij versnellingen worden kromlijnige banen beschreven.

Wij gaan dus in de R.T.-wereld in eens over tot willekeurige kromlijnige coördinatenstelsels, waarvan er geen enkel meer bevoorrecht wordt en zullen dan mooten verwachten dat op de een of andere manier vanzelf de gravitatie een rol zal gaan spelen.

De rol, die de „absolute ruimte" zoowel in de klassieke mechanica als ook nog in de speciale relativiteitstheorie als „oorzaak" van verschijnselen heeft gespeeld, is daarmee voorgoed uit. Aangezien er geen bevoorrechte coördinatenstelsels meer zijn, zullen physische gevolgen alleen physische oorzaken hebben, d.w.z. de meetkunde in de R.T.-wereld zal uitsluitend afhangen van de materieverdeeling.

Voorbeelden van kromlijnige coördinatenstelsels in R_n en V_n.

Poolcoördinaten.

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad r = \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| \tag{71.1}$$

$$y = r\sin\theta \quad ; \quad \theta = \operatorname{bgcos}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

De parameterlijnen van r zijn de stralen θ =constant, de parameterlijnen van θ zijn de cirkels r = const. Aan iedere x en y zijn bepaalde r en θ toegevoegd, alleen het

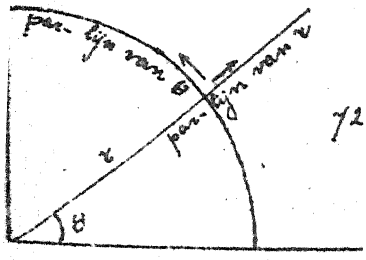
punt O maakt een uitzondering, dit is een singulier punt van de coördinatentransformatie. Zulke singuliere punten zijn gekenmerkt door het 0 of ∞ worden van de z.g. functionaaldeterminant, hier

$$72.1 \qquad \begin{matrix} & r & \theta \\ x: & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ y: & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{matrix}$$

of

$$72.2 \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Gaat men van r en θ uit, dan is de functionaaldeterminant



$$72.3 \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

De eene functionaaldeterminant is altijd gelijk aan 1:door de andere. Is deze determinant ergens $+$, dan beteekent dit dat de nieuwe parameterlijnen in dat punt hetzelfde soort (rechts of links) van assenstelsel vormen als de oude, is de determinant $-$, dan is het assenstelsel gespiegeld. Inderdaad is de draaiing van de $+$-richting van de parameterlijn van r naar de $+$-richting van die van θ hier dezelfde als die van $+x$-as naar $+y$-as.

Bolcoördinaten in de ruimte.

$$72.4 \qquad \begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta \\ z &= r\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

De parameterlijnen zijn:

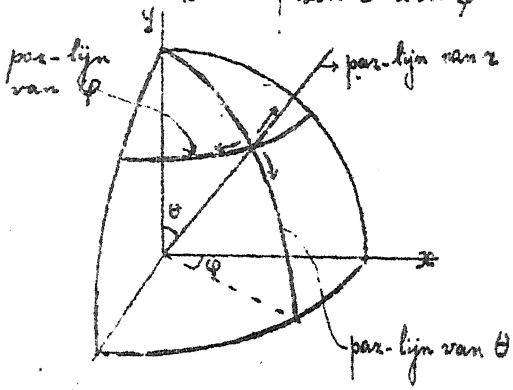
van r : θ =const., φ =const.; stralen door O

van θ : r =const., φ =const., cirkels om O in vlakken door de y-as

van φ : r =const., θ =const.; cirkels met mp. in de y-as, evenwijdig aan het xz-vlak.

De functionaaldeterminant is

$$\gamma 3.1 \qquad \begin{vmatrix} x: & \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ y: & \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ z: & \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta$$



De y-as is dus een singuliere lijn. Inderdaad wordt aan een punt van de y-as geen bepaalde waarde van φ toegevoegd. De parameterlijnen van r, θ en φ vormen voor $\sin\theta > 0$ een links stelsel.

Bolcoördinaten op de bol.

Een bol met een straal R is een V_2. De coördinaten θ en φ zijn kromlijnige coördinaten voor die V_2. De parameterlijnen zijn de meridianen en parallellen, de polen zijn singuliere punten.

Elliptische coördinaten in R_2

De vergelijking

$$\gamma 3.2 \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{2}c^2+\lambda} + \frac{y^2}{-\frac{1}{2}c^2+\lambda} = 1 \qquad ; \; c = \text{constant}$$

stelt een bundel van confocale ellipsen en hyperbolen voor met brandpunten in $x=\pm c$, $y=0$. We hebben voor

$\lambda > \frac{1}{2}c^2$: ellips

$\lambda = \frac{1}{2}c^2$: $y=0$; gedegenereerde ellips of hyperbool

$-\frac{1}{2}c^2 < \lambda < \frac{1}{2}c^2$: hyperbool

$\lambda = -\frac{1}{2}c^2$: $x=0$; gedegenereerde hyperbool

$\lambda < -\frac{1}{2}c^2$: imaginaire kromme

($\gamma 3.2$) is een kwadratische vergelijking in λ:

$$\gamma 3.3 \qquad x^2(\lambda-p) + y^2(\lambda+p) = \lambda^2 - p^2$$

of

$$\lambda^2 - \lambda(x^2+y^2) + p\,(x^2-y^2-p) = 0\,, \qquad 74.1$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2) \pm \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2}{4} - p(x^2-y^2-p)} \qquad 74.2$$

dus $\lambda_1 \geqq \lambda_2$ .Aangezien λ_1 en λ_2 wortels zijn,is

$$\begin{aligned} x^2(\lambda_1-p) + y^2(\lambda_1+p) &= \lambda_1^2-p^2 \\ x^2(\lambda_2-p) + y^2(\lambda_2+p) &= \lambda_2^2-p^2 \end{aligned} \qquad 74.3$$

en dus,voor $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda_1+p)(p+\lambda_2)}{2p} \\ y^2 &= \frac{(\lambda_2-p)(p-\lambda_2)}{2p} \end{aligned} \qquad 74.4$$

Uit de tweede vergelijking volgt,dat voor $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > p$ en $\lambda_2 < p$ moet zijn.Het geval $\lambda_1 = \lambda_2$ kan zich alleen voordoen als

$$(x^2+y^2)^2 = 4p\,(x^2-y^2-p) \qquad 74.5$$

is.

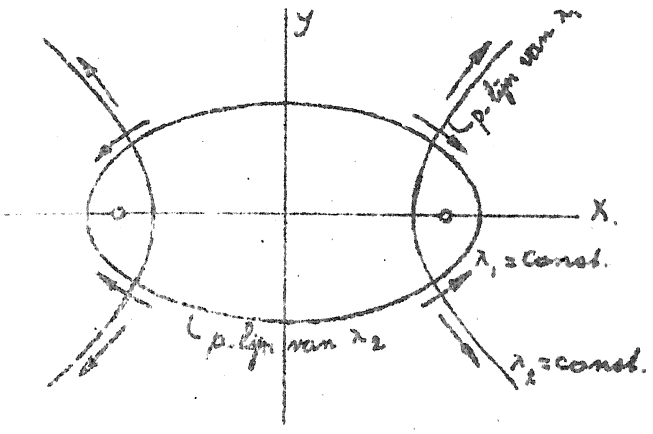
Deze vergelijking laat zich echter schrijven

$$\eta^2 + 2\eta(x^2+2p) + (x^2-2p)^2 = 0 \quad ; \quad \eta \overset{\text{def}}{=} y^2 \qquad 74.6$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \eta &= -(x^2+2p) \pm \sqrt{(x^2+2p)^2 - (x^2-2p)^2} \\ &= -(x^2+2p) \pm 2\sqrt{2p\,x^2} \\ &= -(x \pm \sqrt{2p})^2 \end{aligned}$$

Daar echter $y = y^2$ kan aan deze vergelijking slechts voldaan worden door $x = \mp\sqrt{2p} = \mp c$; $y = o$, dus door de beide brandpunten.



Wij voeren nu λ_1 en λ_2 als nieuwe coördinaten in. Bij iedere x en y (behalve voor de brandpunten) behoort een bepaalde λ_1 en λ_2, omgekeerd behoren echter bij iedere λ_1 en λ_2 vier stelsels waarden van x en y. De parameterlijnen van λ_1 zijn de hyperbolen $\lambda_2 = k$ = constant $< p$

$$\gamma 5.1 \qquad \frac{x^2}{p+k} + \frac{y^2}{k-p} = 1$$

De parameterlijnen van λ_2 zijn de ellipsen $\lambda_1 = l$ = const. $> p$

$$\gamma 5.2 \qquad \frac{x^2}{p+l} + \frac{y^2}{l-p} = 1$$

De zin van de toename van λ_1 en λ_2 langs de parameterlijnen is in de figuur aangegeven. Het is noodzakelijk deze zin in aanmerking te nemen bij het bepalen van het juiste teeken van $\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}$ enz. in de functionaaldeterminant:

$$\gamma 5.3 \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} &= \frac{+}{-} \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_2+p}{\lambda_1+p}} \; ; \; \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} = \frac{+}{-} \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_1+p}{\lambda_2+p}} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} &= \frac{+}{-} \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{p-\lambda_2}{\lambda_1-p}} \; ; \; \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} = \frac{-}{+} \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_1-p}{p-\lambda_2}} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{voor het:} \\ \text{eerste} \\ \text{tweede} \\ \text{derde} \\ \text{vierde} \end{array} \Big\} \text{ quadrant}$$

De functionaaldeterminant is dus

$$\gamma 5.4 \qquad \frac{-}{+} \frac{1}{4c^2}\left\{\sqrt{\frac{(\lambda_2+p)(\lambda_1-p)}{(\lambda_1+p)(p-\lambda_2)}} + \sqrt{\frac{(\lambda_1+p)(p-\lambda_2)}{(\lambda_1-p)(\lambda_2+p)}}\right\}$$

$$= \frac{-}{+} \frac{1}{4c^2}\left\{\frac{(\lambda_2+p)(\lambda_1-p) + (\lambda_1+p)(p-\lambda_2)}{\frac{+}{-}\, 2pxy}\right\} = -\frac{\lambda_1-\lambda_2}{8pxy}$$

Omgekeerd vindt men uit ($\gamma 3.2$)

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = 2x\,\frac{\lambda_1 - p}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = 2y\,\frac{p + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

76.1

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = 2x\,\frac{p - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = -2y\,\frac{p + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

waaruit voor den anderen functionaaldeterminant de waarde $\frac{\partial p x y}{\lambda_1 - \lambda_2}$ volgt. De x-as en de y-as zijn singuliere lijnen. Op de y-as is $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\partial p x y} = \infty$ en op de x-as is $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\partial p x y} = \infty$ voor $x \neq \pm c$ en $\frac{0}{0}$ voor $x = \pm c$. De parameterlijnen van λ_1 en λ_2 vormen in het tweede en vierde quadrant een stelsel net als x, y, in het eerste en derde een ~~geopingeld~~ stelsel met omgekeerden draaiing doorgaan tot φ

De X_4

Gegeven zijn vier veranderlijke (oervariabelen) $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, $0, t = 1, \dots, 4$, die alle waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ kunnen doorloopen. De verzameling van alle mogelijke viertallen $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ vormt een vierdimensionale ruimte X_4. Een enkel viertal heet punt van de X_4, de getallen $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, die erbij hooren, de coördinaten van het punt. Men kan andere oervariabelen invoeren door een transformatie

76.2 $$\xi^{k'} = \xi^{k'}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \quad ; k, \dots, t' = 1', \dots, 4'$$

Van deze transformatie onderstellen we dat de functies een ee voldoend aantal malen differentieerbaar is en dat de determinant van de matrix $\partial \xi^{k'} / \partial \xi^{k}$ in het beschouwde gebied van X_4 ongelijk nul is. Dan bestaat in dat gebied de omkeering van (76.2)

76.3 $$\xi^{k} = \xi^{k}(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}, \xi^{4'}).$$

Onder een geometrisch object wordt verstaan een toevoeging van een aantal getallen (kentallen van het object) aan ieder punt der X_4 voor ieder coördinatenstelsel en wel zoo dat bij transformatie de nieuwe kentallen zich laten opschrijven als functies uitsluitend van de oude en van de transformatie.

Grootheden in X_4

In de ruimte X_4 definieeren we:

1) Een scalar, d.i. een grootheid met één kental ϕ, toegevoegd aan een bepaald punt ξ^κ van X_4, dat bij de transformatie (76.2) niet verandert. Is aan elk punt van een gebied van X_4 een scalar toegevoegd, dan spreekt men van een scalarveld.

2) Een kontravariante vector, d.i. een grootheid met n kentallen v^κ, toegevoegd aan een bepaald punt ξ^κ van X_4, die zich bij (76.2) als volgt transformeeren:

$$77.1 \qquad v^{\kappa'} = \left(A^{\kappa'}_{\kappa}\right)_0 v^\kappa \; ; \; A^{\kappa'}_{\kappa} = \left(\partial_\kappa \xi^{\kappa'}\right)_{\xi^\kappa = \xi^\kappa} \; ; \; \partial_\kappa = \frac{\partial}{\partial \xi^\kappa}.$$

Is aan elk punt van een gebied van X_4 een vector toegevoegd, dan spreekt men van een vectorveld.

dx^κ is een contravariante vector, want

$$77.2 \qquad dx^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} \, dx^\kappa .$$

3) Een covariante vector, d.i. een grootheid met n kentallen w_λ, toegevoegd aan een bepaald punt ξ^κ van X_4, die zich bij (76.4) als volgt transformeeren:

$$77.3 \qquad w_{\lambda'} = \left(A^{\lambda}_{\lambda'}\right)_0 w_\lambda \; , \; A^{\lambda}_{\lambda'} = \left(\partial_{\lambda'} \xi^\lambda\right)_{\xi^\kappa = \xi^\kappa} .$$

Overgang tot vectorveld als boven.

Is p een scalarveld, dan is $\partial_\lambda p$ een covariant vectorveld, het gradientveld van p:

$$77.4 \qquad \partial_{\lambda'} p = A^{\lambda}_{\lambda'} \partial_\lambda p .$$

Voor $\partial_\lambda p$ geldt

$$77.5 \qquad \partial_\mu \partial_\lambda p = 0.$$

De vergelijking

$$77.6 \qquad \partial_\mu w_\lambda = 0$$

is de n.e.v. voorwaarde opdat het veld w_λ een gradientveld is.

De lokale ruimten

Aan elk punt, bijv. ξ^{κ}, van de X_4 voegen we een $\mathcal{E}_4$ toe met coordinaten X^{κ}, die zich bij (78.2) als volgt transformeeren

$$78.1 \qquad X^{\kappa'} = (A^{\kappa'}_{\kappa})_0 X^{\kappa}$$

Het punt $X^{\kappa} = 0$ wordt geidentificeerd met ξ^{κ} en contactpunt genoemd. Iedere $\mathcal{E}_4$ heeft met de X_4 alleen dit ééne punt gemeen. Twee tot verschillende punten behoorende $\mathcal{E}_4$'s hebben niets gemeen. De $\mathcal{E}_4$'s heeten de lokaalruimten van de X_4. Men kan zich van deze $\mathcal{E}_4$ een beeld vormen door de X_4 te denken, liggende in een $\mathcal{E}_N$, $N > 4$, en dan als $\mathcal{E}_4$ te nemen de raak - $\mathcal{E}_4$ in deze $\mathcal{E}_N$ aan de X_4. Dit is echter gevaarlijk, omdat twee verschillende $\mathcal{E}_4$'s elkaar zouden kunnen snijden en een $\mathcal{E}_4$ een kromme, inplaats van alleen een punt, met de X_4 gemeen zou kunnen hebben. Ziet men geheel van deze voor de voorstelling overtollige en zelfschadelijke gemeenschappelijke punten af, dan kan men het beeld gebruiken om aan de voorstelling tegemoet te komen. Aangezien het contactpunt bij de transformatie (78.1) dezelfde coördinaten (namelijk alleen nul) behoudt, gedragen zich p, v^{κ} en w_{λ} in ξ^{κ} volkomen als een skalar, een contravariante vector en een covariante vector in de lokale $\mathcal{E}_4$ van ξ^{κ}. De beide laatsten kunnen dus daar resp. door een punt en een hypervlak worden voorgesteld. Een veld voegt dus aan elke lokaalruimte een grootheid toe. Wij hadden dus bij de definitie van scalaren en vectoren ook van de locaalruimten kunnen uitgaan en in elke locaalruimte die grootheden op de gewone manier kunnen definieren, zooals dit vroeger voor $\mathcal{E}_n$ is geschied. Deze weg volgen we voor alle verdere grootheden.

Affinoren en dichtheden.

Een affinor wordt in de lokaalruimte op de gewone manier gedefinieerd, bijv.

79.1 $$\mathcal{P}^{\kappa_1' \dots \kappa_p'}{}_{\lambda_1' \dots \lambda_q'} = A^{\kappa_1' \dots \kappa_p' \lambda_1 \dots \lambda_q}_{\kappa_1 \dots \kappa_p \lambda_1' \dots \lambda_q'} \mathcal{P}^{\kappa_1 \dots \kappa_p}{}_{\lambda_1 \dots \lambda_q}$$

alleen heeft nu $A^{\kappa'}_{\lambda}$ een andere beteekenis, namelijk $\partial_\lambda \xi^{\kappa'}$. De eenheidsaffinor is hier

79.2 $$A^{\kappa}_{\lambda} = \partial_\lambda \xi^{\kappa}$$

Bewerkingen met affinoren in één en dezelfde locaalruimte, zijn natuurlijk net als in de $\mathcal{E}_n$.

Dichtheden worden eveneens in de locaalruimte gewoon gedefinieerd, bijv. een scalaire dichtheid van het gewicht l:

79.3 $$\overset{(\kappa')}{\mathcal{P}} = \Delta^{-l} \mathcal{P} \quad ; \quad \Delta = \mathrm{Det}\,(\partial_\lambda \xi^{\kappa'})$$

~~Maatvectoren~~

Om de maatvectoren in de locaalruimte te verkrijgen beschouwen we de n scalarvelden $\overset{\kappa}{\xi}$, die uit ξ^{κ} ontstaan door het smoren van den Index κ. Bij overgang tot $\xi^{\kappa'}$ blijven de $\overset{\kappa}{\xi}$ als scalarvelden invariant. De n uitdrukkingen

79.4 $$\underset{\lambda}{e}^{\kappa} = \frac{\partial \xi^{\kappa}}{\partial \overset{\lambda}{\xi}}$$

zijn blijkbaar n contravariante vectorvelden, die alleen kentallen 1 of 0 hebben. In elke locaalruimte vormen zij de n kontravariante maatvectoren, die behooren bij ~~de oervariabelen~~ het coordinatenstelsel (κ). Evenzoo zijn de n uitdrukkingen

79.5 $$\overset{\kappa}{e}_{\lambda} = \frac{\partial \overset{\kappa}{\xi}}{\partial \xi^{\lambda}}$$

n covariante vectorvelden, die eveneens alleen kentallen 1 of 0 hebben en in elke locaalruimte de n covariante maatvectoren vormen, die bij (κ) hooren. Bij elk coördinatenstelsel hoort in elke locaalruimte zoo'n stel van n contra- en n covariante maatvectoren. Daar echter

79.6 $$\partial_{[\mu} \overset{\kappa}{e}_{\lambda]} = 0$$

en een willekeurig gekozen stel van n covariante n-doren zeker niet aan deze voorwaarden voldoet

is, ~~en dus de ξ gradientvectoren zijn~~, blijkt, dat wanneer men in elke locaalruimte een willekeurig stel van reciproke vectoren als maatvectoren zou nemen, deze in het algemeen niet tot een stelsel van coördinaten in X_n zouden behooren. Daarvoor is n.e.v. dat (79.5) geldt. Zulke stelsels van maatvectoren, die aan (79.6) voldoen en dus tot bepaalde coördinaten in X_n behooren, heeten holonoom, andere (die ook veel gebruikt worden) anholonoom. De uitdrukkingen

$$80.1 \qquad \delta^{\hat{\lambda}}_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \hat{\xi}}$$

zijn n^2 scalarvelden, die in elke locaalruimte de n^2 scalaren van het Kroneckersymbool vormen.

doorgaan 30t

We bewijzen de stelling:

De quadrivector der nieuwe maatvectoren is gelijk aan den quadrivector der oude, vermenigvuldigd met Δ^{-1}.

Bewijs (vergelijk blz. 26)

$$80.2 \qquad \begin{aligned} \underset{1'}{e}^{[1}\underset{2'}{e}^{2}\underset{3'}{e}^{3}\underset{4'}{e}^{4]} &\overset{*}{=} A^{\kappa\lambda\mu\nu}_{1'2'3'4'}\, \underset{\kappa}{e}^{[1}\underset{\lambda}{e}^{2}\underset{\mu}{e}^{3}\underset{\nu}{e}^{4]} \\ &\overset{*}{=} 4!\, A^{[1234]}_{1'2'3'4'}\, \underset{1}{e}^{[1}\underset{2}{e}^{2}\underset{3}{e}^{3}\underset{4}{e}^{4]} \\ &\overset{*}{=} \Delta^{-1}\, \underset{1}{e}^{[1}\underset{2}{e}^{2}\underset{3}{e}^{3}\underset{4}{e}^{4]}. \end{aligned}$$

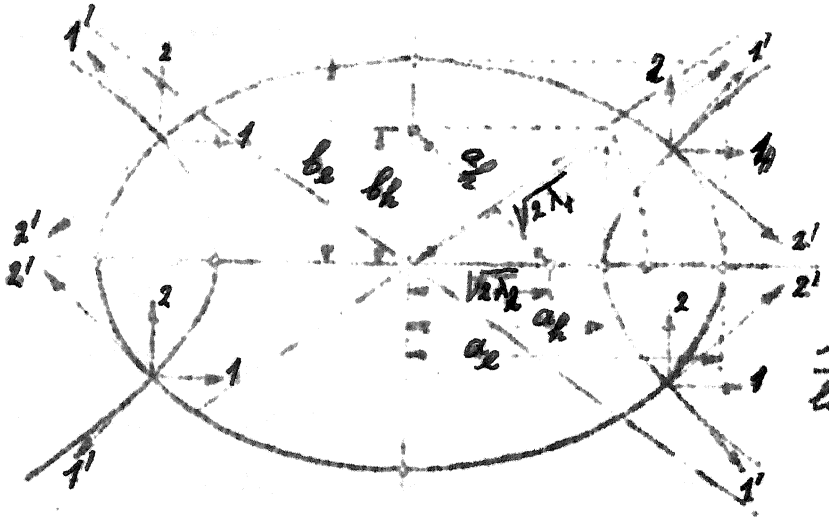
dit niet

De inhouden van de parallelotopen der maatvectoren verhouden zich dus als $1 : \Delta^{-1}$.

Als voorbeeld behandelen we de maatvectoren van de elliptische coördinaten in R_2 (verg. blz. 73) Noemen we $x = \xi^1$, $y = \xi^2$, $\lambda_1 = \xi^{1'}$ en $\lambda_2 = \xi^{2'}$, dan volgt uit (75.3)

$$\underset{1'}{e}^{1} \overset{*}{=} A^{1}_{1'} \overset{*}{=} \underset{1'}{e}^{1} = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_2 + p}{\lambda_1 + p}} \; ; \; \underset{2'}{e}^{1} \overset{*}{=} A^{1}_{2'} \overset{*}{=} \underset{2'}{e}^{1} = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_1 + p}{\lambda_2 + p}}$$

$$\underset{1'}{e}^{2} \overset{*}{=} A^{2}_{1'} \overset{*}{=} \underset{1'}{e}^{2} = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{p - \lambda_2}{\lambda_1 - p}} \; ; \; \underset{2'}{e}^{2} \overset{*}{=} A^{2}_{2'} \overset{*}{=} \underset{2'}{e}^{2} = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_2 - p}{p - \lambda_2}}$$



$2\lambda_1 = a_e^2 + b_e^2$

$2\lambda_2 = a_h^2 - b_h^2$

$$\frac{\text{lengte } 1'}{\text{lengte } 2'} = \frac{a_h b_h}{a_e b_e}$$

moet zijn: $\frac{a_h b_h}{a_e b_e}$

~~Tevens~~ Evenzoo geldt

$$e_1^{1'} \overset{*}{=} A_1^{1'} \overset{*}{=} e_1^{1'} = 2x \frac{\lambda_1 + p}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad e_2^{1'} \overset{*}{=} A_2^{1'} \overset{*}{=} e_2^{1'} \quad 2y \frac{p + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

81.

$$e_1^{2'} \overset{*}{=} A_1^{2'} \overset{*}{=} e_1^{2'} = 2x \frac{p - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad e_2^{2'} \overset{*}{=} A_2^{2'} \overset{*}{=} e_2^{2'} = -2y$$

Hieruit volgt: $\Delta = \mathrm{Det}(A^{*'}) = -\frac{8pxy}{\lambda_1 - \lambda_2}$ en deze determinant is zooals het behoort positief in het tweede en vierde en negatief in het eerste een derde kwadraat

Daar we in een R_2 werken kan men lengten en hoeken bepalen

De lengten van $e_{1'}^{k}$ en $e_{2'}^{k}$ zijn

$$\sqrt{e_{1'}^{1} e_{1'}^{1} + e_{1'}^{2} e_{1'}^{2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{2p(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2 - p^2}}$$

resp.

$$\sqrt{e_{2'}^{1} e_{2'}^{1} + e_{2'}^{2} e_{2'}^{2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\lambda_1 + p}{\lambda_2 + p} + \frac{\lambda_1 - p}{p - \lambda_2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{2p(\lambda_1 - \lambda_2)}{p^2 - \lambda_2^2}}$$

en deze vectoren staan loodrecht op elkaar omdat

81.3 $$e_{1'}^{1} e_{2'}^{1} + e_{1'}^{2} e_{2'}^{2} = 0 .$$

in De rechthoek der vectoren heeft dus een inhoud

81.4 $$\frac{2p}{4c^2} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1 - p)(\lambda_1 + p)(p - \lambda_2)(p + \lambda_2)}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{8pxy}$$

en dit is, zooals het behoort, gelijk aan $|\Delta^{-1}|$. ~~Bij~~ In de buurt van de x-as en bij de y-as nadert de inhoud van den rechthoek tot ∞.

doorgaan 30 u

overbrenging, pseudoparallelisme

Tot nu toe zijn de lokale K_n volkomen onafhankelijk van elkaar Men kan nu in de K_n een voorschrift geven om twee tot naburige punten behoorende K_n op elkaar af te beelden Een dergelijk voorschrift heet een overbrenging (bij Weyl ook wel Zusammenhang) In de keuze van deze overbrenging heeft men alle vrijheid.De overbrenging zou bijv zoo kunnen zijn,dat rechte lijnen in de eene K_n overgaan in kromme lijnen in de andere We beschouwen hier alleen overbrengingen waarbij contravariante vectoren overgaan in contravariante vectoren,covariante in covariante en algemeen affinoren in affinoren van hetzelfde soort.De vector en de overgebrachte vector heeten pseudoparallel.

Zij nu v^κ een gegeven vectorveld.In x^κ de veldwaarde in ξ^κ, dan is $v^\kappa + dv^\kappa$ in veldwaarde in $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ en

82.1 $$dv^\kappa = d\xi^\nu \partial_\nu v^\kappa$$

Brengen we nu volgens het overbrengingsvoorschrift den vector v^κ in ξ^κ over naar $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ dan heeft die overgebrachte vector kentallen $v^\kappa + \mathring{d}v^\kappa$ die natuurlijk slechts infinitesimaal van v^κ verschillen.Echter is in het algemeen $\mathring{d}v^\kappa \neq dv^\kappa$ omdat immers het overbrengingsvoorschrift geheel willekeurig is.Gaan we nu over tot het stelsel (x') dan is, aangezien volgens onderstelling $v^\kappa + \mathring{d}v^\kappa$ in $\xi^\kappa + d\xi^\kappa$ weer een contravariante vector is

82.2 $$v^{\kappa'} + \mathring{d}v^{\kappa'} = (A^{\kappa'}_\kappa + dA^{\kappa'}_\kappa)(v^\kappa + \mathring{d}v^\kappa)$$

waaruit volgt

82.3 $$\mathring{d}v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_\kappa \mathring{d}v^\kappa + v^\kappa dA^{\kappa'}_\kappa$$

$\mathring{d}v^\kappa$ is dus geen vector.We hebben echter ook

82.4 $$dv^{\kappa'} = A^{\kappa'}_\kappa dv^\kappa + v^\kappa dA^{\kappa'}_\kappa$$

en daaruit volgt dat $\delta v^\alpha = dv^\alpha - \dot{a} v^\alpha$ wel een vector is:

§3.1 $$\delta v^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha} \delta v^\alpha .$$

δv^α is de differentiaal van het veld v^α beoordeeld vanuit een volgens het overbrengingsvoorschrift mee verschoven vector v^α. Deze differentiaal heet de covariante differentiaal. De overbrenging bepaalt de covariante differentiaal, en omgekeerd, is het voorschrift om de covariante differentiaal van alle grootheden te vormen bekend, dan kent men de overbrenging (verplaats namelijk de grootheid zódá, dat de covariante differentiaal nul wordt)

We gaan nu axiomatisch een soort overbrenging vastleggen, die de eenvoudigst denkbare is en die we lineaire overbrenging noemen. De axioma's zijn:

1) Is ϕ een grootheid (het algemeenste geval is een affinordichtheid), dan is $\delta\phi$ een grootheid van dezelfde soort.

2) a) $\delta(\phi + \Psi) = \delta\phi + \delta\Psi$

b) $\delta(\phi\Psi) = \phi\,\delta\Psi + (\delta\phi)\Psi$ (regel van Leibniz)

naast elkaar schrijven symboliseert het algemeen product.

3) $\delta\phi$ is lineair homogeen in $d\xi^\alpha$

4) De regel van Leibniz geldt ook voor overschuivingen

5) De covariante differentiaal van een scalar is identiek met de gewone differentiaal : $\delta p = dp$

Uit (1), (2) en (3) volgt dat de algemeenste vorm, die de covariante differentiaal van een kovarianten vector kan aannemen, is:

§3.2 $$\delta v^\alpha = dv^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} v^\lambda d\xi^\mu = (\partial_\mu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} v^\lambda) d\xi^\mu$$

Hierin zijn $\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}$ parameters, die op een bepaald coördinatenstelsel (*) willekeurig als functies van ξ^α gegeven kunnen

worden.Uit de transformatie van δx^λ (Axioma (1)) volgt dan het stelsel transformatieformules

84.1 $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = A^{\lambda}_{\kappa} A^{\mu}_{\mu} A^{\nu}_{\nu} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} + A^{\lambda}_{\kappa} \partial_{\mu} A^{\kappa}_{\nu}$

De $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ zijn dus de kentallen van een geometrisch object;zij transformeeren zich echter ingewikkelder dan die van een affinor.Uit (4) en (5) volgt

84.2 $d(v^\lambda w_\lambda) = \delta(v^\lambda w_\lambda) = (\delta v^\lambda) w_\lambda + v^\lambda \delta w_\lambda$

en daaruit leidt men af

84.3 $\delta w_\lambda = d w_\lambda - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} w_\kappa \, d\xi^\mu$

Voor een affinor,bijv. $P^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ volgt uit (2):

84.4 $\delta P^{\kappa}_{\cdot\lambda} = d P^{\kappa}_{\cdot\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} P^{\nu}_{\cdot\lambda} d\xi^\mu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} P^{\kappa}_{\cdot\nu} d\xi^\mu$

Men behoeft dus het proces van toevoeging van een correctieterm slechts zoovele malen te herhalen als er indices zijn. Uit de transformatieformule voor $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ volgt voor $\Gamma_\mu = \Gamma^{\kappa}_{\mu\kappa}$

84.5 $\Gamma'_\mu = A^{\kappa}_{\mu} \Gamma_\mu - A^{\lambda}_{\kappa} \partial_\mu A^{\kappa}_{\lambda}$

De Γ_μ zijn dus eveneens kentallen van een geometrisch object. De transformatie laat zich nog eenvoudiger schrijven.Wij herinneren eraan,dat A^{λ}_{κ} de minor van het element A^{κ}_{λ} (in de matrix der A^{κ}_{λ}) is gedeeld door de determinant $\Delta = \det(A^{\kappa}_{\lambda})$. Bijgevolg is:

84.6 $\dfrac{\partial \Delta}{\partial A^{\kappa}_{\lambda}} = \Delta A^{\lambda}_{\kappa}$,

of

84.7 $\partial_\mu \ln \Delta = A^{\lambda}_{\kappa} \partial_\mu A^{\kappa}_{\lambda}$,

zoodat in plaats van (84.5) geschreven kan worden

85.1 $\bar{\Gamma}^{\cdot}_{\mu\cdot} = A^{\cdot}_{\cdot} \Gamma^{\cdot}_{\mu\cdot} - \partial_{\cdot} \log \Delta$.

De Γ spelen een rol bij de covariante differentiatie van dichtheden Is $w_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$ een covariante $+$ - vector, dan is

85.2 $\delta w_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = d w_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda_1} w_{\rho\lambda_2 \cdots \lambda_n} d\xi^{\mu} - \cdots - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda_n} w_{\lambda_1 \cdots \rho} d\xi^{\mu}$

en dus

85.3 $\dot{d} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda_1} w_{\rho\lambda_2 \cdots \lambda_n} d\xi^{\mu} + \cdots + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda_n} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}\rho} d\xi^{\mu}$

waaruit volgt

85.4 $\dot{d} w_{1 \cdots n} = \Gamma_{\mu} w_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} d\xi^{\mu}$

Nu transformeert zich $w_{1 \cdots n}$ echter als een kental van een dichtheid van het gewicht $+1$ (blds. 26), is dus 1 een dichtheid van het gewicht $+1$, dan is ook

85.5 $\dot{d} \mathfrak{g} = \Gamma_{\mu} \mathfrak{g} \, d\xi^{\mu}$

en

85.6 $\delta \mathfrak{g} = d\mathfrak{g} - \dot{d}\mathfrak{g} = d\mathfrak{g} - \Gamma_{\mu} \mathfrak{g} \, d\xi^{\mu}$

Voor een dichtheid q van het gewicht k volgt dus

85.7 $\delta q = d q - k \Gamma_{\mu} q \, d\xi^{\mu}$

en voor een affinordichtheid van het gewicht k , bijv. $\mathfrak{P}^{\cdot}_{\cdot\lambda}$

85.8 $\delta \mathfrak{P}^{\cdot}_{\cdot\lambda} = d\mathfrak{P}^{\cdot}_{\cdot\lambda} + \Gamma^{\cdot}_{\mu\rho} \mathfrak{P}^{\rho}_{\cdot\lambda} d\xi^{\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \mathfrak{P}^{\cdot}_{\cdot\rho} d\xi^{\mu} - k \Gamma_{\mu} \mathfrak{P}^{\cdot}_{\cdot\lambda} d\xi^{\mu}$

Een X_n met een lineaire overbrenging heet $\mathfrak{L}_n$.

Covariante afgeleide.

Iedere covariante differentiaal is een overschuiving van $d\xi^{\mu}$ met een andere grootheid. Deze grootheid heet de covariante afgeleide en wordt met ∇_{μ} geschreven, bijv.

85.9 $\nabla_{\mu} v^{\nu} = \partial_{\mu} v^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} v^{\lambda}$

85.10 $\nabla_{\mu} w_{\lambda} = \partial_{\mu} w_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} w_{\lambda}$

(Een andere schrijfwijze is $\varkappa_{\lambda;\mu}$, deze heeft het nadeel dat de differentieerende index aan den verkeerden kant komt).

Is de covariante afgeleide van een veld overal nul, dan heet het veld covariant constant; is die afgeleide ergens nul, dan heet het veld daar ter plaatse covariant stationair

Symmetrie van een lineaire overbrenging

Uit de transformatiewijze van $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ volgt

86.1 $$\Gamma^{\kappa'}_{[\mu'\lambda']} = A^{\mu\lambda\ \kappa'}_{\mu'\lambda'\ \kappa}\ \Gamma^{\kappa}_{[\mu\lambda]}$$

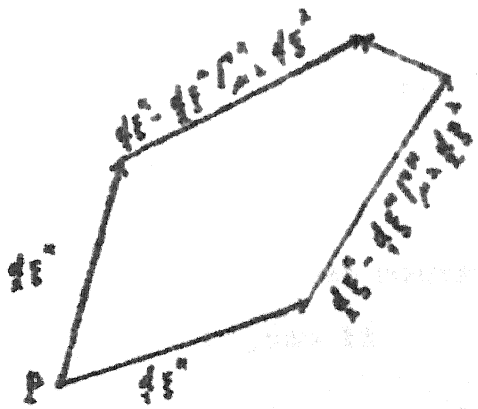
Daaruit volgt dat $\Gamma^{\kappa}_{[\mu\lambda]}$ een affinor is Voor dezen affinor schrijven we

86.2 $$S^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\kappa}_{[\mu\lambda]}$$

Is $S^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu\lambda} = 0$, zoo heet de overbrenging symmetrisch Kan men $S^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu\lambda}$ in den vorm

86.3 $$S^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu\lambda} = S_{[\mu} A^{\kappa}_{\lambda]}$$

schrijven, dan heet de overbrenging halfsymmetrisch.



Heeft men in P twee lijnelementen $d_1\xi^\kappa$ en $d_2\xi^\kappa$ en verplaatst men elk van deze pseudoparallel langs het andere, dan hebben de verplaatste vectoren de kentallen

$$d_1\xi^\kappa - d_2\xi^\mu\, \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\, d_1\xi^\lambda$$

$$d_2\xi^\kappa - d_1\xi^\mu\, \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\, d_2\xi^\lambda$$

De sluitvector is dus

86.4 $$2\, d_1\xi^\mu\, d_2\xi^\lambda\, \Gamma^{\kappa}_{[\mu\lambda]} = 2\, d_1\xi^\mu\, d_2\xi^\lambda\, S^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu\lambda} ,$$

waaruit volgt

Er bestaan dan en alleen dan infinitesimale parallelogrammen in ieder punt in iedereen stand, wanneer de overbrenging symmetrisch is

Is de overbrenging halfsymmetrisch, dan is

87.1 [illegible]

Er bestaan dan alleen infinitesimale parallelogrammen in het door [illegible] bepaalde [illegible] hypervlak.

Een X_n met een symmetrische lineaire overbrenging heet A_n

Rotatie en Divergentie

Algemeen is

87.2 $$\xi_{\lambda\mu} w_\nu = \partial_\mu w_\nu - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} w_\kappa = \dots$$

Bij een symmetrische overbrenging is dus $\xi_{\lambda\mu} w_\nu$ onafhankelijk van de keuze van de overbrenging. Is $w_{\lambda\dots}$ een p vector, dan is eveneens voor $\xi_{\lambda\mu} w_{\lambda\dots}$

87.3 $$\xi_{\mu} w_{\lambda\dots\lambda_p} = \partial_\mu w_{\lambda\dots\lambda_p}$$

Men noemt $\xi_{\lambda\mu} w_\nu$ en $\xi_{\mu} w_{\lambda\dots\lambda_p}$ wel de rotatie van het veld resp. $w_{\lambda\dots\lambda_p}$.

Is x^ν een contravariante vectordichtheid van het gewicht $+1$, dan is

87.4 $$\xi_\mu x^\nu = \partial_\mu x^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} x^\lambda - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} x^\nu$$
$$= \partial_\mu x^\nu + 2 S_{\mu\lambda}{}^{\nu} x^\lambda$$

Bij een symmetrische overbrenging is dus $\xi_\mu x^\nu$ onafhankelijk van de keuze van de overbrenging. Is $x^{\lambda\dots}$ een p vectordichtheid van het gewicht $+1$, dan is eveneens voor [illegible]

80.1 $$\nabla_{\alpha_1} m^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} = \partial_{\alpha_1} m^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$$

Men noemt $\nabla_\nu m^\nu$ en $\nabla_{\alpha_1} m^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ wel de divergentie van het veld resp. $m^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$.

<u>Geodetische lijnen.</u>

Rechte lijnen bestaan in een L_n niet. Men kan een kromme als <u>zoo recht mogelijk</u> beschouwen, wanneer de tangentiale vector langs de kromme bij pseudoparallele verplaatsing tangentiaal blijft. Zulke krommen heeten <u>geodetische lijnen</u> der L_n.

Beschouw een kromme en leg op deze kromme of op een stuk ervan, op geheel willekeurige wijze, een continue schaalverdeeling z ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~. Bij iedere reëele waarde van z (eventueel tusschen zekere grenzen) hoort dan één punt van de kromme. z heet een op de kromme gedefinieerde <u>parameter</u>. Nu is $\frac{d\xi^\kappa}{dz}$ een tangentiale vector en de conditie voor geodetisch zijn is dat $\delta\frac{d\xi}{dz}$ de richting van $\frac{d\xi}{dz}$ heeft dus

88.2 $$\frac{\delta}{dz}\frac{d\xi^\kappa}{dz} = \alpha(z)\frac{d\xi^\kappa}{dz},$$

waar α de een of andere functie van z is. Het is jammer dat in deze vergelijking, die als de definitievergelijking der geodetische lijnen te beschouwen is, rechts de onbekende functie α optreedt. Men kan nu de vraag stellen of men den parameter misschien door een anderen parameter t, functie van z, dus $t = t(z)$ kan vervangen, zóó, dat het rechter lid verdwijnt. (88.2) laat zich omzetten in

88.3 $$\frac{\delta}{dz}\left(\frac{d\xi^\kappa}{dt}\frac{dt}{dz}\right) = \alpha\frac{d\xi^\kappa}{dt}\frac{dt}{dz}$$

of

88.4 $$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2\frac{\delta}{dt}\frac{d\xi^\kappa}{dt} + \frac{d^2t}{dz^2}\frac{d\xi^\kappa}{dt} = \alpha\frac{d\xi^\kappa}{dt}\frac{dt}{dz}$$

of ook

89. $$\frac{\delta}{dt}\frac{d\xi^\kappa}{dt} = \frac{\left(\alpha\frac{dt}{dx} - \frac{d^2t}{dx^2}\right)\frac{d\xi^\kappa}{dt}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}$$

Het rechter lid wordt dus dan en alleen dan nul wanneer t voldoet aan de differentiaalvergelijking

89.2 $$\frac{d^2t}{dx^2} - \alpha(x)\frac{dt}{dx} = 0 .$$

waarvan de oplossing luidt

89.3 $$t = C_1 \int e^{\int \alpha dx} dx + C_2 .$$

Hieruit volgt:

1. Er bestaan op iedere geodetische lijn parameters, t.o. waarvan de vergelijking der lijn luidt $\frac{\delta}{dt}\frac{d\xi^\kappa}{dt} = 0$ of, uitgeschreven

89.4 $$\frac{d^2\xi^\kappa}{dt^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\frac{d\xi^\mu}{dt}\frac{d\xi^\lambda}{dt} = 0$$

Men noemt deze parameters natuurlijke affine parameters (t heeft natuurlijk niets met den tijd te maken).

2 Heeft men één zoo'n natuurlijke parameter, bijv ξ, dan is iedere andere in den vorm te schrijven

89.5 $$t = C_1 \xi + C_2$$

(dit is een affine transformatie)

waarin C_1 en C_2 willekeurige constanten zijn. Verandering van C_2 verlegt het nulpunt, verandering van C_1 verandert de „maat".

Op een geodetische lijn in L_n kan men dus weliswaar nog niet spreken van de lengte van het stuk, maar al wel van de lengteverhouding van twee verschillende stukken.

Uit de vergelijking (89.4) volgt, dat de ligging der geodetische lijnen onafhankelijk is van $S^{\kappa\mu\lambda}$ en dat deze alleen afhangt van $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$.

Wordt in iedere lokaalruimte een fundamentaaltensor $g_{\lambda\mu}$ van den rang n ingevoerd (dus $Det(g_{\lambda\mu}) \neq 0$), dan heet in X_n een V_n. In een V_n is aan iedere dx^λ een getal toegevoegd

g0.1 $$g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu$$

Is de $g_{\lambda\mu}$ positief, resp. negatief definiet, dan is dit getal steeds positief, resp. negatief. In de relativiteitstheorie hebben we steeds te maken met een fundamentaaltensor met de signatuur $(- - - +)$, zoodat $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu$ zoowel $+$ als $-$ als 0 kan zijn. De krommen, die voldoen aan de vergelijking

g0.2 $$g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu = 0,$$

heeten nullijnen. Zij hebben in ieder punt een richting, die op den mantel van den plaatselijken nulkegel valt. Is $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu > 0$, dan schrijven we

g0.3 $$dx^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu.$$

De lijnen met $dx^2 > 0$ hebben tusschen twee punten een duur $\int dx$; deze lijnen hebben een tijdachtig karakter en kunnen wereldlijnen zijn van bewegende massapunten. $\int dx$ is de „eigentijd" langs de wereldlijn, d.i. de tijd die een meebewegende klok van nature zal aanwijzen.

Is $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu < 0$ dan schrijven we

g0.4 $$ds^2 = -g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda dx^\mu.$$

De lijnen met $ds^2 > 0$ hebben tusschen twee punten een lengte $\int ds$; deze lijnen hebben een ruimteachtig karakter en kunnen gelijktijdigheidslijnen zijn. $\int ds$ is de lengte die een langs de kromme gelegde meetband van nature zal aanwijzen.

Voorbeelden van verschillende ds^2

1) Poolcoördinaten in de gewone R_2 :

gl. 1 $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

2) Poolcoördinaten in de Minkowskische R_2 :

$$-dt^2 = ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2$$

gl. 2 $$\begin{cases} x = r\cosh\varphi & ; \quad dx = dr\cosh\varphi + r\,d\varphi\sinh\varphi \\ ct = r\sinh\varphi & ; \quad c\,dt = dr\sinh\varphi + r\,d\varphi\cosh\varphi \end{cases}$$

gl. 3 $$-dt^2 = ds^2 = dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

3) Bolcoördinaten op bol:

gl. 4 $$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

4) Elliptische coördinaten in R_2: zie blz. 75

gl. 5 $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda_1}d\lambda_1 + \frac{\partial x}{\partial\lambda_2}d\lambda_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda_1}d\lambda_1 + \frac{\partial y}{\partial\lambda_2}d\lambda_2\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{+}{-}\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_2+p}{\lambda_1+p}}\,d\lambda_1 \;\frac{+}{-}\;\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_2+p}{\lambda_2+p}}\,d\lambda_2\right)^2 + \left(\frac{+}{+}\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{p-\lambda_2}{\lambda_1-p}}\,d\lambda_1 \;\frac{-}{+}\;\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{\lambda_1-p}{p-\lambda_2}}\,d\lambda_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{4c^2}\left\{\left(\frac{\lambda_2+p}{\lambda_1+p} + \frac{p-\lambda_2}{\lambda_1-p}\right)d\lambda_1^2 + \left(\frac{\lambda_1+p}{\lambda_2+p} + \frac{\lambda_1-p}{p-\lambda_2}\right)d\lambda_2^2\right\}$$

$$= \frac{\lambda_1-\lambda_2}{4}\left\{\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1^2-p^2} + \frac{d\lambda_2^2}{p^2-\lambda_2^2}\right\}$$

De overbrenging in een V_n.

We vragen nu of aan een V_n een bepaalde bevoorrechte lineaire overbrenging toekomt. Een natuurlijke eisch is, dat de lengte of duur van een vector niet zal veranderen bij pseudo-parallele verplaatsing. Wij eischen dus

gl. 6 $$\delta(v^\lambda v^\kappa g_{\lambda\kappa}) = 0$$

voor

gl. 7 $$\delta v^\kappa = 0$$

Daaruit volgt echter

gl. 8 $$0 = 2 g_{\lambda\kappa} v^\lambda \delta v^\kappa + v^\lambda v^\kappa \delta g_{\lambda\kappa} = v^\lambda v^\kappa \delta g_{\lambda\kappa}$$

en deze vergelijking moet gelden voor iedere keuze van v^κ, waaruit volgt dat

g2.1 $$\delta g_{\lambda\kappa} = d\varphi^\mu \nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

is, voor iedere verplaatsing $d\varphi^\mu$, dus

g2.2 $$\nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = 0$$

In woorden:

de covariante afgeleide van den fundamentaaltensor moet

n nul zijn

Is hieraan voldaan, dan volgt als bijresultaat:

De operatie ∇ en de operatie op- en neerhalen van indices zijn verwisselbaar: $\nabla_\mu v^\kappa = \nabla_\mu g^{\kappa\lambda} v_\lambda = g^{\kappa\lambda} \nabla_\mu v_\lambda$.

Eischen we bovendien dat de overbrenging symmetrisch is (d.w.z. dat er infinitesimale parallelogrammen in ieder punt en in iedere stand bestaan) dan hebben we voldoende voorwaarden om de $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ te berekenen. Inderdaad is

g2.3 $$0 = \nabla_\mu g_{\lambda\kappa} = \partial_\mu g_{\lambda\kappa} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\kappa} - \Gamma^\rho_{\mu\kappa} g_{\lambda\rho}$$

en dus ook

g2.4
$$0 = \partial_\lambda g_{\kappa\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa} g_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\kappa\rho},$$
$$0 = -\partial_\kappa g_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\kappa\mu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\kappa\lambda} g_{\mu\rho}.$$

Tellen we deze drie vergelijkingen op, dan volgt wegens $\Gamma^\kappa_{[\mu\lambda]} = 0$ en $g_{[\lambda\kappa]} = 0$

g2.5 $$\Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\kappa} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}),$$

of

g2.6 $$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2} g^{\kappa\rho}(\partial_\mu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}).$$

De uitdrukking rechts werd het eerst door Christoffel inge-

voerd (1869) en met $\left\{ {\mu\lambda \atop \kappa} \right\}$ aangeduid (Christoffel-symbool). Tegenwoordig schrijft men $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$.

g3.1 $$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$$

Hiermede is aangetoond, dat er in een V_n één en slechts één lineaire overbrenging bestaat die symmetrisch is en waarbij de covariante afgeleide van den fundamentaaltensor nul is

Lijnen van extreme lengte in een V_n

We willen bepalen of er in een V_n tusschen twee gegeven punten verbindingslijnen bestaan van extreme lengte (dus óf korter óf langer dan alle andere verbindingslijnen) Voor de afleiding hebben we het begrip „meesleepen van een veld" noodig:

Stel ,er is in een X_n een veld gegeven, bijv. een vectorveld u^{κ} Verder zij gegeven een infinitesimaal verplaatsingsveld $v^{\kappa}dt$ Men kan aan dit laatste veld een meetkundige beteekenis geven, door zich voor te stellen, dat zich alle punten van de X_n over een afstand $v^{\kappa}dt$ verplaatsen De X_n ondergaat daarbij dus een infinitesimale deformatie in zichzelf Nu construeeren we naast u^{κ} een nieuw veld. We voeren een nieuw coördinatenstelsel in, zoodanig, dat we aan elk verplaatst punt $\xi^{\kappa} + v^{\kappa}dt$ de oude coördinatenwaarden ξ^{κ} toekennen en aan het punt met de oude coördinaten ξ^{κ} de nieuwe coördinaten $\xi^{\kappa} - v^{\kappa}dt$ .Noemen we die nieuwe coördinaten $\xi^{\kappa'}$ dan luidt dus de coördinatentransformatie

g3.2 $$\xi^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\kappa}(\xi^{\kappa} - v^{\kappa}dt).$$

Bijgevolg is

$$A^{\kappa'}_{\lambda'} = \partial_{\lambda}\xi^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\kappa}(A^{\kappa}_{\lambda} - \partial_{\lambda}v^{\kappa}dt)$$

g3.3

$$A^{\kappa}_{\lambda'} = \delta^{\lambda}_{\lambda'}(A^{\kappa}_{\lambda} + \partial_{\lambda}v^{\kappa}dt).$$

Dit proces noemen we „meesleepen van het coördinatensysteem over $v^\kappa dt$ " Nu voeren we het nieuwe veld naast u^κ in. Van dit veld verlangen we, dat het ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel, precies de-zelfde kentallen heeft, als het oude veld u^κ ten opzichte van het oude stelsel. Dit proces noemen we „meesleepen van het veld u^κ " Daar dit veld maar infinitesimaal van u^κ verschillen zal, noemen we het $u^\kappa + \overline{\overline{d}} u^\kappa$

$\overline{\overline{d}} u^\kappa$ is dus het verschil in veldwaarden (beide t.o. van het oude systeem), van het oude veld in ξ^κ en het nieuwe veld in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$. In het punt $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ is dus de veldwaarde van dit nieuwe veld ten opzichte van het nieuwe stelsel

$$94.1 \qquad u^{\kappa'} + \overline{\overline{d}} u^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\kappa} u^\kappa ,$$

waar u^κ de veldwaarde in ξ^κ ten opzichte van het oude stelsel is. Dus is die veldwaarde t o van het oude stelsel

$$94.2 \qquad u^\kappa + \overline{\overline{d}} u^\kappa = A^\kappa_{\lambda'} \delta^{\lambda'}_{\kappa} u^\kappa = (A^\kappa_\lambda + \partial_\lambda v^\kappa dt) u^\lambda ,$$

waaruit volgt

$$94.3 \qquad \overline{\overline{d}} u^\kappa = u^\mu \partial_\mu v^\kappa dt$$

Op dezelfde wijze ~~xxxxxxxxxx~~ bewijst men dat voor een covariant vectorveld geldt

$$94.4 \qquad \overline{\overline{d}} w_\lambda = - w_\mu \partial_\lambda v^\mu dt$$

en voor een affinor, bijv. $P^{\kappa\cdot\lambda}_{\cdot\cdot\mu}$

$$94.5 \qquad \overline{\overline{d}} P^{\kappa\cdot\lambda}_{\cdot\cdot\mu} = (P^{\rho\cdot\lambda}_{\cdot\cdot\mu} \partial_\rho v^\kappa + P^{\kappa\cdot\rho}_{\cdot\cdot\mu} \partial_\rho v^\lambda - P^{\kappa\cdot\lambda}_{\cdot\cdot\rho} \partial_\mu v^\rho) dt$$

De uitdrukking $\overline{\overline{d}} u^\kappa$ is blijkbaar geen vector, want uit (94.1) volgt

$$\overline{\overline{d}} u^{\kappa'} = u^{\mu'} \partial_{\mu'} v^{\kappa'} dt - u^\mu \partial_\mu v^{\kappa'} dt .$$

$$= u^\mu \partial_\mu A^{\kappa'}_{\cdot} v^\cdot dt + A^{\kappa'}_\kappa \overline{\overline{d}} u^\kappa + v^\cdot dt\, u^\mu \partial_\mu A^\cdot_\kappa$$

[Denken we parameterlijnen als een netwerk van draden met bijgeschreven getallenwaarden in de ruimte, dan worden de parameterlijnen van het nieuwe stelsel verkregen door het [illegible] met de daaraan gehechte getallenwaarden in elk punt over een afstand $v^\kappa dt$ (verschillend voor verschillende punten) te verschuiven.

Nu geldt echter (voor) de gewone (niet covariante) differentiaal

g5.1 $$du^{\kappa'} = du^{\kappa} + u^{\nu} v^{\mu} dt\, \partial_{\mu} A^{\kappa'}_{\nu}$$

en daaruit volgt, omdat $\partial_{\mu} A^{\kappa'}_{\lambda}$ symmetrisch is in $\mu\lambda$:

g5.2 $$\underset{L}{\delta} u^{\kappa'} = (du^{\kappa'} - \overset{m}{d} u^{\kappa'}) = A^{\kappa'}_{\kappa} (du^{\kappa} - \overset{m}{d} u^{\kappa}) = A^{\kappa'}_{\kappa} \underset{L}{\delta} u^{\kappa}$$

We hebben dus een nieuwe covariante differentiaal gevonden, die meetkundig voorstelt, het verschil tusschen plaatselijke en meegesleepte veldwaarde in $\xi^{\kappa} + v^{\kappa} dt$ en bijgevolg ook (differentialen van de tweede orde verwaarloozend) het verschil tusschen deze beide veldwaarden in het punt ξ^{κ} zelf. Deze differentiaal heet de Liesche differentiaal. Voor een tensor $p_{\lambda\kappa}$ is dus bijv. de Liesche differentiaal

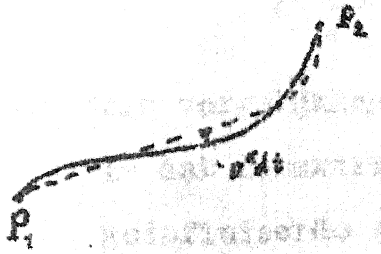
g5.3 $$\underset{L}{\delta} p_{\lambda\kappa} = (v^{\mu} \partial_{\mu} p_{\lambda\kappa} + p_{\mu\kappa} \partial_{\lambda} v^{\mu} + p_{\lambda\mu} \partial_{\kappa} v^{\mu}) dt$$

d.w.z. de veldwaarde van het meegesleepte veld in ξ^{κ} is

g5.4 $$p_{\lambda\kappa} - (v^{\mu} \partial_{\mu} p_{\lambda\kappa} + p_{\mu\kappa} \partial_{\lambda} v^{\mu} + p_{\lambda\mu} \partial_{\kappa} v^{\mu}) dt .$$

Is de Liesche differentiaal voor eenig veld bij de verplaatsing $v^{\kappa} dt$ nul, dan beteekent dat, dat het veld bij het meesleepen in zich zelf overgaat en dus tegenover dat meesleepen invariant is.

We gaan nu in een $\mathcal{V}_n$ een kromme beschouwen, die twee punten P_1 en P_2 verbindt. Geeft men aan de punten van die kromme een kleine verplaatsing $v^{\kappa} dt$, die in P_1 en P_2 nul is, dan ontstaat er een nieuwe kromme. Is de lengte $\int_{P_1}^{P_2} ds$ extreem dan is de variatie van de lengte bij de verplaatsing $v^{\kappa} dt$ nul.



Nu gebruiken we een truc, inplaats van de kromme te varieeren en het veld $g_{\lambda\kappa}$ met rust te laten, laten we de kromme met rust en sleepen het veld mee over $-v^{\kappa} dt$. Dit moet natuurlijk

precies hetzelfde effect op de lengte hebben. We weten al, dat de veldwaarde van het meegesleepte veld in ξ^κ is

$$96.1 \qquad g_{\lambda\kappa} - \delta_L g_{\lambda\kappa} = g_{\lambda\kappa} + (+v^\mu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}\partial_\lambda v^\mu + g_{\lambda\mu}\partial_\kappa v^\mu)\,dt$$

(+ teekens, omdat het meesleepen hier over $-v^\kappa dt$ plaats heeft en dus is

$$96.2 \qquad \delta\int ds = \delta\int (g_{\lambda\kappa}\, d\xi^\lambda d\xi^\kappa)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int \tfrac{1}{2}(g_{\rho\sigma}\, d\xi^\rho d\xi^\sigma)\,\delta(g_{\lambda\kappa}\, d\xi^\lambda d\xi^\kappa)$$

Maar nu is $\delta dx^\lambda = 0$ omdat de kromme rustig blijft liggen, dus

$$96.3 \qquad \delta\int ds = +\tfrac{1}{2}\int (g_{\rho\sigma}\, d\xi^\rho d\xi^\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\xi^\lambda d\xi^\kappa (v^\mu\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}\partial_\lambda v^\mu + g_{\lambda\mu}\partial_\kappa v^\mu)\,d$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{d\xi^\lambda}{ds} d\xi^\kappa \Big(g_{\mu\kappa}\nabla_\lambda v^\mu - g_{\mu\kappa}\left\{{\mu \atop \lambda\rho}\right\} v^\rho + g_{\mu\lambda}\nabla_\kappa v^\mu - g_{\mu\lambda}\left\{{\mu \atop \kappa\rho}\right\} v^\rho$$

$$+ v^\mu\partial_\mu g_{\lambda\kappa}\Big)$$

$$= \int \frac{d\xi^\lambda}{ds} d\xi^\kappa \nabla_\lambda v_\kappa = \int \frac{d\xi^\kappa}{ds}\delta v_\kappa$$

Nu kan men een partieele integratie toepassen

$$96.4 \qquad \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\xi^\kappa}{ds}\delta v_\kappa = \int_{P_1}^{P_2} d\left(\frac{d\xi^\kappa}{ds} v_\kappa\right) - \int_{P_1}^{P_2} v_\kappa\,\delta\frac{d\xi^\kappa}{ds}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} v_\kappa\,\delta\frac{d\xi^\kappa}{ds}$$

waaruit volgt als noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor een extreme lengte (of duur)

$$96.5 \qquad \delta\frac{d\xi^\kappa}{ds} = 0$$

Uit deze vergelijking volgt:

1° dat de extreme lijnen in een V_n, tegelijk de op blz. 86 gedefinieerde rechtste of geodetische lijnen zijn;

2° dat de met behulp van $g_{\lambda\kappa}$ gemeten lengte (of duur), tegelijk een bij de overbrenging $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ behoorende natuurlijke affine parameter is.

Kromming.

Het lijnelement op een bol met straal 1 is

97.1 $$ds^2 = \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$$

Neem $\xi^1 = \varphi$, $\xi^2 = \theta$,dan is dus

$$g_{11} = (\sin\xi^2)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

97.2
$$g^{11} = \frac{1}{(\sin\xi^2)^2}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = 1.$$

en bijgevolg

$$\Gamma^1_{11} = \tfrac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = 0,$$

$$\Gamma^1_{12} = \tfrac{1}{2} g^{11} \partial_2 g_{11} = \frac{\sin\xi^2 \cos\xi^2}{(\sin\xi^2)^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

97.3 $$\Gamma^1_{22} = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = -\tfrac{1}{2} \partial_2 g_{11} = -\sin\xi^2 \cos\xi^2 = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^2_{12} = 0,$$

$$\Gamma^2_{22} = 0,$$

zoodat

$$\delta v^1 = dv^1 + v^2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi + v^1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta,$$

97.4
$$\delta v^2 = dv^2 - v^1 \sin\theta\cos\theta\, d\varphi.$$

Wordt v^K dus pseudoparallel verplaatst, dan is

$$dv^1 = -v^2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi - v^1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

97.5
$$dv^2 = v^1 \sin\theta\cos\theta\, d\varphi$$

Langs een meridiaan $\varphi = \varphi_0$ is $d\varphi = 0$,dus

98.1
$$dv^1 = -v^1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$dv^2 = 0$$

en dus,zooals het behoort (lengte vector invariant bij pseudo-parallele verplaatsing)

98.2
$$d(v^1v^1g_{11} + v^2v^2g_{22}) = 2v^1g_{11}dv^1 + v^1v^1dg_{11}$$
$$= -2v^1v^1\cos\theta\sin\theta\,d\theta + 2v^1v^1\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= 0$$

Uit (98.1) volgt dat de meridianen <u>geodetische lijnen</u> zijn. Langs een parallelcirkel $\theta = \theta_0$ is $d\theta = 0$ dus

98.3
$$dv^1 = -v^2 \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} d\varphi$$

$$dv^2 = v^1 \sin\theta_0 \cos\theta_0 d\varphi$$

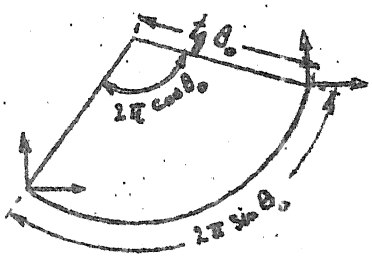
uit welke vergelijking volgt,dat de parallelcirkels <u>geen geodetische lijnen</u> zijn.

Is in een bepaald punt $\mathcal{P}$ van den parallelcirkel v^k gelegen in de tangente,dus $v^2 = 0$,dan zijn de kentallen van den over $d\varphi$ verplaatsten vector v^1 en $v^1 \sin\theta_0 \cos\theta_0 d\varphi$ .De lengte van den vector $v^1, 0$ is $v^1 \sin\theta_0$,de lengte van den vector $0, v^1 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ is $v^1 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ .De vector is dus gedraaid over een hoek $\cos\theta_0 d\varphi$ .Aangezien alle vectoren bij een pseudoparallele verplaatsing over denzelfden hoek draaien, geldt dit voor een bijzondere vector afgeleide resultaat,voor alle vectoren.Gaat men langs den parallelcirkel heelemaal rond, dan is de hoek tusschen begin en eindstand $2\pi\cos\theta_0$ .Vlak bij de pool is dus het verschil bijna 2π ,aan den evenaar is het verschil 0 .In een plat vlak zou de hoek 2π bedragen.Het verschil,dat afkomstig is van het gekromd zijn van het oppervlak,

is dus $2\pi(1-\cos\theta_0)$ en dit is juist het oppervlak van de bolkap waarvan de parallelcirkel de rand is. Algemeen geldt op een bol met straal R :

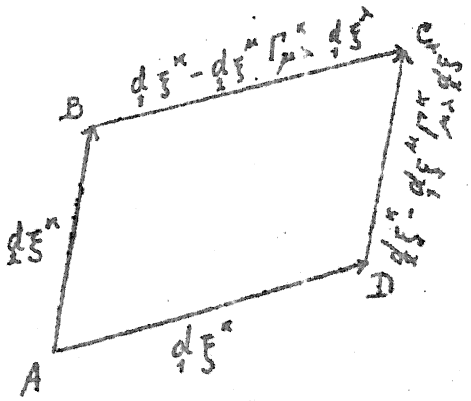
Is de omgrensde inhoud O , dan is de hoek tusschen begin en eindstand $2\pi - \frac{O}{R}$.

Brengt men een kegel aan, die den bol raakt in den parallelcirkel $\theta = \theta_0$ en slaat men dien kegel in een plat vlak uit dan ontstaat een cirkelsector met straal $tg\,\theta_0$ en hoek $2\pi\cos\theta_0$.



Daaruit volgt, dat de pseudoparallele verplaatsing langs den parallelcirkel op den bol en op den kegel dezelfde is

We gaan nu in een algemeene V_n berekenen wat een kontravariante vector doet bij pseudoparallele verplaatsing langs een gesloten kromme. We nemen aan, dat de overgrenging symmetrisch is en er dus infinitesimale parallelogrammen bestaan. In zulk een infinitesimaal parallelogram brengen we een vector eerst pseudoparallel van A naar C via B en dan van A naar C via D . In B is de veldwaarde van $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ geworden



$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + d_2\xi^\nu\partial_\nu\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$

en in D evenzoo $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + d_1\xi^\nu\partial_\nu\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$

Derhalve is, als we beginnen met een vector v^κ in A, de pseudoparallel verplaatste vector

in B

(99.1) $v^\kappa - d_2\xi^\mu\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}v^\lambda$,

in C via B

(99.2) $v^\kappa - d_2\xi^\mu\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}v^\lambda - (d_1\xi^\rho - d_2\xi^\mu\Gamma^\rho_{\mu\lambda}d_1\xi^\lambda)(\Gamma^\kappa_{\rho\sigma} + d_2\xi^\nu\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\rho\sigma})$

$(v^\sigma - d_2\xi^\tau\Gamma^\sigma_{\tau\pi}v^\pi)$

$$= v^\kappa - \delta_1\xi^\mu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda - \delta_1\xi^\rho \Gamma^\kappa_{\rho\sigma} v^\sigma + \delta_1\xi^\rho \Gamma^\kappa_{\rho\sigma} \delta_2\xi^\tau \Gamma^\sigma_{\tau\pi} v^\pi - \delta_1\xi^\rho \delta_2\xi^\nu \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\rho\sigma} v^\sigma$$

$$+ \delta_2\xi^\mu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta_1\xi^\lambda \Gamma^\kappa_{\rho\sigma} v^\sigma + \text{termen van de derde orde}$$

$$= v^\kappa - \delta_2\xi^\mu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda - \delta_1\xi^\kappa \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda + \delta_1\xi^\nu \delta_2\xi^\mu \left(\Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} \right) v^\lambda$$

en in $\mathcal{C}$ via $\mathcal{D}$ evenzoo (verwissel δ_1 en δ_2)

100.1 $$v^\kappa - \delta_1\xi^\mu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda - \delta_2\xi^\mu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} v^\lambda + \delta_2\xi^\nu \delta_1\xi^\mu \left(\Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} \right) v^\lambda$$

Het verschil tusschen de beide waarden is dus

$$\delta_1\xi^\nu \delta_2\xi^\mu \left\{ 2\,\partial_{[\nu} \Gamma^\kappa_{\mu]\lambda} + 2\,\Gamma^\kappa_{[\nu|\rho|} \Gamma^\rho_{\mu]\lambda} \right\} v^\lambda .$$

Daar dit een vector moet zijn en dit geldt voor iedere waarde van $\delta_1\xi^\kappa$, $\delta_2\xi^\kappa$ en v^κ , is de uitdrukking tusschen accolades een affinor. Deze affinor

100.3 $$R^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda} = 2\,\partial_{[\nu} \Gamma^\kappa_{\mu]\lambda} + 2\,\Gamma^\kappa_{[\nu|\rho|} \Gamma^\rho_{\mu]\lambda}$$

heet de kromtenaffinor van de overbrenging. Is de overbrenging Riemannsch, dan schrijven we $K^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda}$.

Men kan tot $R^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda}$ ook komen door een vector tweemaal kovariant te differentieeren en dan te alterneeren. In de onderstelling dat de overbrenging symmetrisch is, is

100.4 $$\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} v^\kappa = \partial_{[\nu} (\nabla_{\mu]} v^\kappa) - \Gamma^\rho_{[\nu\mu]} \nabla_\rho v^\kappa + \Gamma^\kappa_{[\nu|\lambda|} \nabla_{\mu]} v^\lambda$$

$$= \partial_{[\nu} \partial_{\mu]} v^\kappa + \partial_{[\nu} \left(\Gamma^\kappa_{\mu]\lambda} v^\lambda \right) + \Gamma^\kappa_{[\nu|\lambda|} \partial_{\mu]} v^\lambda + \Gamma^\kappa_{[\nu|\lambda|} \Gamma^\lambda_{\mu]\rho} v^\rho$$

$$= \left\{ \partial_{[\nu} \Gamma^\kappa_{\mu]\lambda} + \Gamma^\kappa_{[\nu|\rho|} \Gamma^\rho_{\mu]\lambda} \right\} v^\lambda + \Gamma^\kappa_{[\mu|\lambda|} \partial_{\nu]} v^\lambda - \Gamma^\kappa_{[\mu|\lambda|} \partial_{\nu]} v^\lambda$$

$$= \tfrac{1}{2} R^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda} v^\lambda$$

Evenzoo vindt men

100.5 $$\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} w_\lambda = -\tfrac{1}{2} R^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda} w_\kappa$$

En voor een algemeenen affinor, bijv. $P^\kappa_{\cdot\lambda\rho}$:

100.6 $$\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} P^\kappa_{\cdot\lambda\rho} = \tfrac{1}{2} R^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\sigma} P^\sigma_{\cdot\lambda\rho} - \tfrac{1}{2} R^{\cdots\sigma}_{\nu\mu\lambda} P^\kappa_{\cdot\sigma\rho} - \tfrac{1}{2} R^{\cdots\sigma}_{\nu\mu\rho} P^\kappa_{\cdot\lambda\sigma}$$

De identiteiten.

Voor den kromteaffinor bestaan eenige identiteiten. In de eerste plaats volgt uit de definitie de eerste identiteit

$$I) \qquad R_{(\nu\mu)\lambda}{}^{\rho} = 0$$

Alterneert men over $\nu\,\mu\,\lambda$ dan volgt uit (100.3) bij een symmetrische overbrenging de tweede identiteit:

$$II) \qquad R_{[\nu\mu\lambda]}{}^{\rho} = 0$$

Is de overbrenging Riemannsch, dan is

$$100.1 \qquad P_{[\nu} P_{\mu]} g_{\lambda\kappa} = -\tfrac{1}{2} K_{\nu\mu\lambda}{}^{\rho} g_{\rho\kappa} - \tfrac{1}{2} K_{\nu\mu\kappa}{}^{\rho} g_{\lambda\rho}$$

en dit is de derde identiteit:

$$III) \qquad K_{\nu\mu[\lambda\kappa]} = 0$$

Eindelijk volgt voor een Riemannsche overbrenging uit de tweede en derde identiteit

$$\begin{aligned} 102.2 \qquad K_{\lambda\kappa\nu\mu} &= -K_{\kappa\nu\lambda\mu} - K_{\nu\lambda\kappa\mu} \\ &= +K_{\kappa\nu\mu\lambda} + K_{\nu\lambda\mu\kappa} \\ &= -K_{\nu\mu\kappa\lambda} - K_{\mu\kappa\nu\lambda} - K_{\lambda\mu\nu\kappa} - K_{\mu\nu\lambda\kappa} \\ &= 2K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\kappa\lambda\nu} + K_{\lambda\mu\kappa\nu} \\ &= 2K_{\nu\mu\lambda\kappa} - K_{\kappa\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

en dit is de vierde identiteit

$$IV) \qquad K_{\lambda\kappa\nu\mu} = K_{\nu\mu\lambda\kappa}$$

De kromteaffinor van een Riemannsche overbrenging is alterneerend in $\nu\mu$ en $\lambda\kappa$ en bovendien tengevolge van IV symmetrisch voor de groepen $\nu\mu$ en $\lambda\kappa$. We hebben hier dus met een grootheid te maken, die een soort van tensor is, maar een tensor voor bivectoren. Men noemt dergelijke grootheden bivectortensoren. Het aantal kentallen zou dus zijn

102.1 $$\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}\left\{\frac{n(n-1)}{2}+1\right\} = \frac{1}{8}(n^2-n)(n^2-n+2)$$

Daarbij is al rekening gehouden met de identiteiten I, III en IV. Men bewijst nu gemakkelijk, dat II met het oog op I, III en IV vervangen mag worden door de identiteit

$$II\,a) \qquad K_{[\omega\mu\lambda\kappa]} = 0$$

en dit zijn $\binom{n}{4} = \frac{1}{24}(n^2-n)(n^2-5n+6)$ vergelijkingen. Er blijven dus slechts

$$\frac{1}{24}(n^2-n)(3n^2-3n+6-n^2+5n-6) =$$

$$= \frac{1}{24}(n^2-n)(2n^2+2n) = \frac{1}{12}(n^4-n^2) = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

Voor $n=4$ is dit aantal dus 20.

Voor de eerste kovariante afgeleide van den kromteaffinor $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$ bestaat een identiteit die naar Bianchi genoemd is en voor een symmetrische overbrenging luidt:

$$V \qquad \nabla_{[\omega} K_{\nu\mu]\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = 0$$

We bewijzen dit door gebruik te maken van de volgende hulpstelling:

Bij een symmetrische overbrenging kan men het koördinatenstelsel zoo kiezen dat de $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$ en de gesymmetriseerde afgeleiden $\partial_{(\nu}\Gamma_{\mu\lambda)}^{\kappa}$, $\partial_{(\rho}\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda)}^{\kappa}$ enz. in een bepaald van te voren aan te wijzen punt P (maar dan ook in het algemeen nergens anders) nul worden.

Een zoodanig coördinatenstelsel (over een bepaald punt P is er slechts één), heet in P genormaliseerd.

Van de reeksontwikkeling van deze normaalcoördinaten in ξ^κ geven we hier de eerste termen

102.3 $$\xi^{\kappa'} = \delta_{\kappa}^{\kappa'}\left\{(\xi^\kappa - \overset{0}{\xi}{}^\kappa) + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\right)_{\xi=\overset{0}{\xi}}(\xi^\mu - \overset{0}{\xi}{}^\mu)(\xi^\lambda - \overset{0}{\xi}{}^\lambda) + \cdots\right.$$

Inderdaad is dan

103.1 $$A^{\pi'}_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\pi'}}{\partial \xi^{\lambda}} = \delta^{\pi'}_{\pi} A^{\pi}_{\lambda} + \frac{1}{2}\delta^{\pi'}_{\pi}\left(\Gamma^{\pi}_{\sigma\rho}\right)_{\xi=\xi_0}\left\{(\xi^{\rho}-\xi^{\rho}_0)A^{\sigma}_{\lambda} + (\xi^{\sigma}-\xi^{\sigma}_0)A^{\rho}_{\lambda}\right\} + \cdots$$

en dus in ξ^{π}_0

103.2 $$A^{\pi'}_{\lambda} = \delta^{\pi'}_{\lambda}$$

verder

103.3 $$\partial_{\mu} A^{\pi'}_{\lambda} = \frac{1}{2}\delta^{\pi'}_{\pi}\left(\Gamma^{\pi}_{\sigma\rho}\right)_{\xi=\xi_0}\left\{A^{\sigma\rho}_{\lambda\mu} + A^{\sigma\rho}_{\mu\lambda}\right\} + \cdots$$

en dus in ξ^{π}_0

103.4 $$\partial_{\mu} A^{\pi'}_{\lambda} = A^{\pi'}_{\pi}\,\Gamma^{\pi}_{\mu\lambda}$$

en daaruit volgt in ξ^{π}_0

103.5 $$\Gamma^{\pi'}_{\mu'\lambda'} = A^{\pi'\mu\lambda}_{\pi\mu'\lambda'}\,\Gamma^{\pi}_{\mu\lambda} - A^{\pi\lambda}_{\mu'\lambda'}\,\partial_{\mu} A^{\pi'}_{\lambda}$$

$$= A^{\pi'\mu\lambda}_{\pi\mu'\lambda'}\,\Gamma^{\pi}_{\mu\lambda} - A^{\pi'\mu\lambda}_{\pi\mu'\lambda'}\,\Gamma^{\rho\pi}_{\mu\lambda} = 0$$

Men kan $\Gamma^{\pi'}_{\mu'\lambda'}$ in de omgeving van ξ^{π}_0 ontwikkelen in een reeks naar $\xi^{\pi}-\xi^{\pi}_0$ Het begin van deze reeks is

103.6 $$\Gamma^{\pi'}_{\mu'\lambda'} = \tfrac{2}{3}\left(\xi^{\nu'}_0 - \xi^{\nu}_0\right) R^{\cdots\pi}_{\nu(\mu\lambda)} + \cdots$$

De verdere termen bevatten meer dan één factor $\left(\xi^{\nu'}_0 - \xi^{\nu}_0\right)$ en verder grootheden die zich laten vormen uit de kovariante afgeleiden van $R^{\cdots\pi}_{\nu\mu\lambda}$ Wij kunnen nu de identiteit van Bianchi gemakkelijk bewijzen.

Ten opzichte van een stelsel van normaalcoördinaten in P is

103.7 $$R^{\cdots\pi}_{\nu\mu\lambda;\sigma} = \partial_{\sigma} R^{\cdots\pi}_{\nu\mu\lambda} - \partial_{\sigma\pi}\partial_{\nu}\Gamma^{\pi}_{\mu\lambda} + \left(\partial_{\sigma\pi}\Gamma^{\pi}_{\nu\rho}\right)\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\pi}_{\sigma\nu\rho}\,\partial_{\pi}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = 0$$

en aangezien men dit voor ieder punt kan doen, is $R^{\cdots\pi}_{\nu\mu\lambda;\sigma}$ inderdaad overal nul.

Uit den kromteaffinor leidt men door vouwen naar $\nu\kappa$ een nieuwen affinor af, den <u>affinor van Ricci</u>

104.1 $$R_{\mu\lambda} = R_{\kappa\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$$

Bij een Riemannschen overbrenging schrijven we $\mathcal{K}_{\mu\lambda}$:

104.2 $$\mathcal{K}_{\mu\lambda} = \mathcal{K}_{\kappa\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$$

Hier is deze affinor een <u>tensor</u>, die <u>tensor van Ricci</u> genoemd wordt. Inderdaad volgt uit de vierde identiteit:

104.3 $$\mathcal{K}_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} = \mathcal{K}_{\cdot\mu\lambda\kappa}^{\kappa} = \mathcal{K}_{\cdot\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$$

Uit $\mathcal{K}_{\mu\lambda}$ kan men een scalar afleiden

104.4 $$\mathcal{K} = g^{\mu\lambda}\mathcal{K}_{\mu\lambda}$$

$\frac{1}{n(n-1)}\mathcal{K}$ (voor $n = 4$ dus $\frac{1}{12}\mathcal{K}$) heet de <u>scalaire kromming</u> van de V_n

Uit de Bianchische identiteit volgt door vouwen naar $\nu\kappa$

104.5 $$\nabla_\nu R_{\mu\lambda} + \nabla_\kappa R_{\mu\nu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa} - \nabla_\mu R_{\nu\lambda} = 0$$

of

$$\text{VI)} \qquad 2\nabla_\nu R_{\mu\lambda} = \nabla_\kappa R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$$

Bij een Riemannsche overbrenging hebben we dus

104.6 $$2\nabla_\nu \mathcal{K}_{\mu\lambda} = \nabla_\kappa \mathcal{K}_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}$$

Wordt deze laatste vergelijking overschoven met $g^{\mu\lambda}$, dan ontstaat

104.7 $$\nabla_\nu \mathcal{K} - \nabla^\mu \mathcal{K}_{\nu\mu} = \nabla^\kappa \mathcal{K}_{\nu\kappa}$$

Voert men nu een nieuwen tensor in

104.8 $$\mathcal{G}_{\lambda\kappa} = \mathcal{K}_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\mathcal{K} g_{\lambda\kappa} ,$$

dan laat zich die betrekking eenvoudig schrijven

VII $$\nabla^\nu G_{\mu\lambda} = 0$$

Men noemt $\nabla^\nu G_{\mu\lambda}$ wel eend de divergentie van den tensor $G_{\mu\lambda}$
Uitgeschreven is VII

105.1 $$\nabla^\nu G_{\mu\lambda} = \nabla_\mu G^\nu_{\cdot\lambda} = \partial_\mu G^\nu_{\cdot\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} G^\rho_{\cdot\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} G^\nu_{\cdot\rho}$$

Het is voor de relativiteitstheorie van het grootste belang, dat er in een Riemannsche ruimte vanzelf, d.w.z. uit den aard der meetkunde in die ruimte, een tensor bestaat, waarvan de divergentie nul is.

Als voorbeeld berekenen we $K_{\cdots\mu\lambda}^{\cdots\kappa}$ voor een bol met straal 1. Het kental K_{1212} bepaalt alles, omdat hier $n=2$ is.
We hadden (blz. 97)

105.1 $$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Gamma^2_{11} = -\sin\theta\cos\theta$$

Bijgevolg is

105.2 $$K_{\cdots 21}^{\cdots 2} = \partial_1 \Gamma^2_{21} - \partial_2 \Gamma^2_{11} + 2\Gamma^2_{[1|1}\Gamma^1_{2]1} + 2\Gamma^2_{[1|1}\Gamma^2_{2]1}$$

$$= 0 + \frac{\partial(\sin\theta\cos\theta)}{\partial\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 0$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= -\sin^2\theta$$

en dus

105.3 $$K_{1212} = K_{\cdots 21}^{\cdots 2}\, g_{22} = -\sin^2\theta$$

Hieruit volgt

105.4 $$K_{11} = K_{2\cdots 1}^{\cdots 2} = -\sin^2\theta$$
$$K_{22} = K_{\cdots 21}^{\cdots 1} = K_{1221}\, g^{11} = 1$$
$$K_{12} = 0$$

en

106.1 $$\mathcal{K} = g^{11}K_{11} + g^{22}K_{22} = 1+1 = 2$$

zoodat de kromming wordt

106.2 $$\tfrac{1}{2}\mathcal{K} = 1$$

zooals het ook behoort bij een bol van straal 1.

Het gravitatieveld in de klassieke mechanica.

In de klassieke mechanica is een gravitatieveld in elk geval altijd conservatief. Er bestaat dus een arbeidsvermogen van plaats (of potentiaal) $\overset{t}{P}$ en

106.3 $$\mathcal{K}_x = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Hebben we een gravitatieveld, afkomstig van één massapunt, dan is

106.4 $$P = -\frac{fm}{r}\,;\quad \bar{\mathcal{K}} = -\nabla P = -fm\frac{\bar{r}}{r^3}\,;\quad f = \text{gravitatieconst.}$$

Daaruit volgt dat

106.5 $$-(\nabla.\nabla)P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \nabla.\bar{\mathcal{K}} = 0 \qquad (x,y,z \neq 0)$$

Maar deze vergelijking geldt ook voor een gravitatieveld afkomstig van meerdere massapunten, omdat de totale potentiaal de som is van alle afzonderlijke potentialen, en de vergelijking (106.5) geldt dus ook voor een algemeen veld, maar alleen in die punten van het veld waar zich geen massa bevindt. Is er wel massa aanwezig, dan zal dus het rechter lid van (106.5) een waarde krijgen, die van de massaverdeeling afhangt. De zwaartekracht binnen een bal met straal R om O, homogeen met massa van een dichtheid μ gevuld, is

106.6 $$\bar{\mathcal{K}} = -\frac{4}{3}\pi\mu f\bar{r}$$

en de potentiaal is dus

107.1 $$\varphi = \frac{2}{3}\pi\rho f r^2 .$$

Hieruit volgt:

107.2 $$-\nabla.\nabla\varphi = \nabla.\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi\rho\,\nabla.\vec{r} = 4\pi\rho f .$$

Het is nu gemakkelijk in te zien dat de vergelijking

107.3 $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\pi f\rho$$

altijd geldt, ook voor niet homogene massaverdeling. Want in een bepaald punt zal de grootste bijdrage voor φ afkomstig zijn van de materie in een kleine omgeving om P, en ten opzichte van die bijdrage (r komt in den noemer voor) zal de rest te verwaarloozen zijn. We komen dus tot deze conclusie:

In de klassieke mechanica is de gravitatiekracht de afgeleide van een potentiaal en voor deze potentiaal geldt de vergelijking van Laplace met een rechter lid dat alleen afhangt van de plaatselijke dichtheid van de materie en nul is voor punten waar zich geen materie bevindt.

Gravitatieveld ontstaande door afwijking van de $g_{\lambda\kappa}$ van de waarden -1, 0 en c.

Indien de $g_{\lambda\kappa}$ overal de waarden

107.4 $$\mathring{g}_{11} = \mathring{g}_{22} = \mathring{g}_{33} = -\mathring{g}_{44} = -1 \; ; \; \mathring{g}_{\lambda\kappa} = 0 \text{ voor } \lambda \neq \kappa$$

hebben, hebben we te maken met een gewone Minkowskische R_4 met een orthogonaal cartesisch coördinatenstelsel. We beschouwen nu een ruimtetijdwereld met een coördinatenstelsel t.o. waarvan de $g_{\lambda\kappa}$ slechts weinig van de $\mathring{g}_{\lambda\kappa}$ verschillen (eerste onderstelling)

107.5 $$g_{\lambda\kappa} = \mathring{g}_{\lambda\kappa} + \varepsilon_{\lambda\kappa}$$

en dat de waarnemer het coördinatenstelsel ξ^κ als zijn x, y, z, t beschouwt.

De wereldlijn van een massapunt moet van het coördinatenstelsel onafhankelijk zijn en kan dus alleen een geodetische lijn zijn:

108.1 $$\frac{d^2\xi^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\frac{d\xi^\mu}{d\tau}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau}$$

108.2 $$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu d\xi^\lambda$$

Verder nemen we aan, dat de snelheid van het massapunt klein is t.o. van de lichtsnelheid, dat wil dus hier zeggen dat de richting van de wereldlijn niet in de nabijheid van den plaatselijken nulkegel van $g_{\lambda\kappa}$ ligt. (tweede onderstelling)

Daar

108.3 $$c^2 = \left(\frac{d\xi^1}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\xi^2}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\xi^3}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^4}{d\tau}\right)^2 + \varepsilon_{\lambda\kappa}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau}\frac{d\xi^\kappa}{d\tau}$$

is dan $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}$, $\alpha = 1,2,3$ een kleine grootheid en $\frac{1}{c}\frac{d\xi^4}{d\tau}$ een grootheid die weinig van 1 verschilt.

[illegible]

Teuslotte nemen we aan, dat $\varepsilon_{\lambda\kappa}$ slechts langzaam in den tijd verandert vergeleken met de verandering in de ruimte (derde onderstelling).

Recapitulatie der onderstellingen:

1. $\varepsilon_{\lambda\kappa}$ klein.
2. snelheid massapunt klein t.o. van c.
3. $\varepsilon_{\lambda\kappa}$ verandert langzaam in den tijd.

Dan is $\partial_4 \varepsilon_{\lambda\kappa}$ te verwaarloozen t.o. van $\partial_\alpha \varepsilon_{\lambda\kappa}$, $\alpha = 1,2,3$.

We rekenen nu $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}$ uit en verwaarloozen daarbij grootheden die van de tweede orde klein zijn. Aangezien

108.4 $$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = \tfrac{1}{2} g^{\kappa\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\lambda\mu}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} g^{\kappa\rho}\left(\partial_\mu \varepsilon_{\rho\lambda} + \partial_\lambda \varepsilon_{\rho\mu} - \partial_\rho \varepsilon_{\mu\lambda}\right)$$

en

109.1 $$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\frac{d\xi^{\mu}}{d\tau}\frac{d\xi^{\lambda}}{d\tau} = -\Gamma^{\alpha}_{44}\frac{c^2\xi^4}{d\tau}\frac{d\xi^4}{d\tau} = -c^2\Gamma^{\alpha}_{44}$$

is ($\xi^4 = ct$)

109.2 $$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\xi^{\alpha}}{dt^2} = -\Gamma^{\alpha}_{44} = -\tfrac{1}{2}\partial_{\alpha}g_{44} \qquad \alpha = 1,2,3.$$

zoodat $\frac{1}{2}c^2 g_{44}$ hier de rol speelt van de gravitatiepotentiaal in de vergelijking van de versnelling van een massapunt met massa 1. In eerste benadering bepaalt dus <u>het veld van de componente g_{44} alleen</u> de beweging van een massapunt.

We moeten nu nog zien ook in de algemeene theorie de $g_{\mu\nu}$ vast te leggen aan de massaverdeeling. Voor de gravitatiepotentiaal bestond een vergelijking van de tweede orde

109.3 $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = 4\pi\rho f$$

We moeten dus verwachten dat er differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in de $g_{\mu\nu}$ bestaan, waarvan de rechter zijde iets bevat dat van de materie in den meest algemeenen zin van het woord dus van massa's en electromagnetische velden afhangt. Deze differentiaalvergelijkingen moeten natuurlijk den invarianten vorm hebben en moeten er 10 zijn, omdat er 10 onbekenden zijn, n.l. de $g_{\mu\nu}$. De keuze is dus niet erg groot. Komitanten van $g_{\mu\nu}$ die alleen van de afgeleiden van $g_{\mu\nu}$ tot de tweede orde afhangen, zijn alleen $K^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda}$, $K_{\mu\lambda}$, K en $g_{\mu\nu}$ zelf en functie's van deze grootheden. $K^{\cdots\kappa}_{\nu\mu\lambda}$ zelf komt als hebbende 20 kentallen niet in aanmerking. Practisch blijft alleen de mogelijkheid, dat links een tensor (10 kentallen) komt te staan, die uit $K_{\mu\lambda}$, K en $g_{\mu\nu}$ is opgebouwd en die nul moet worden op plaatsen waar materie en electromagnetisch veld ontbreken. Rechts moet er een tensor komen te staan, die voor materie en electromagnetisch veld karakteristiek is

De electromagnetische impulsenergietensor.

Voor het electromagnetische veld is die tensor aangewezen De vergelijkingen van Maxwell laten zich n.l. in algemeen covarianten vorm schrijven. De vergelijking (46.2 I)

110.1 $$\text{I} \qquad \boxed{\partial_\nu F_{\lambda\varkappa} + \partial_\lambda F_{\varkappa\nu} + \partial_\varkappa F_{\nu\lambda} = 0}$$

heeft den invarianten vorm al (verg. 87.3). De vergelijking (46.2 II) voor cartesische coördinaten in een R_n kan ook geschreven worden

110.2 $$\partial_j f^{jk} = -\sigma^k$$

110.3 $$f^{jk} = g^{\frac{1}{2}} F^{jk} \; ; \quad \sigma^k = g^{\frac{1}{2}} s^k \; , \quad g = -\mathrm{Det}(g_{\mu\nu}) > 0$$

want g is in deze coördinaten een constante. Voor algemeene coördinaten is g een dichtheid van het gewicht +2 en f^{jk} en σ^k zijn dus respectievelijk een bivectordichtheid en een vectordichtheid van het gewicht +1 . De vergelijking (110.1) heeft dus nu den algemeen covarianten vorm en kan geschreven worden (verg. 88.1 I)

110.4 $$\text{I} \qquad \boxed{\partial_\mu S^{\mu\varkappa} = \nabla_\mu S^{\mu\varkappa} = -\sigma^\varkappa}$$

Uit F leiden we als op blz. 95 den tensor

110.5 $$S^{\varkappa\lambda} = -F^{\varkappa}_{\cdot\mu} F^{\mu\lambda} + \tfrac{1}{4} g^{\varkappa\lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

af. Dan gaat de uitdrukking voor den vierdimensionalen krachtvector (55.6) over in

110.6 $$k^\varkappa = -\nabla_\mu S^{\mu\varkappa}$$

De materieele impuls-energietensor.

We moeten nu een dergelijken tensor voor de materie afleiden. Is ρ de rustdichtheid van de materie, dan is het eenvoudigste tensorveld dat zich laat vormen

110.7 $$T^{\varkappa\lambda} = \rho \frac{d\xi^\varkappa}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau}$$

Nemen we eens aan dat we in een Minkowskische R_4 zijn met gewone coördinaten $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$. Dan is het verband tusschen rustmassa en massa (60.5)

III.1 $$\mathring{m} = m\sqrt{1-\beta^2} = m\frac{d\tau}{dt}$$

Nu wordt echter een rustend volume, beoordeeld door een waarnemer met snelheid u in de bewegingsrichting, verkort gezien met een factor $\sqrt{1-\beta^2}$. Dientengevolge zijn de volumina waardoor we m resp. $\mathring{m}$ moeten deelen om de gewone dichtheid μ resp. de rustdichtheid $\mathring{\mu}$ te krijgen, niet dezelfde, zoodat

III.2 $$\mathring{\mu} = \mu\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$$

Dit geeft, ingevuld in (110.7) (cartesisch orthogonaal coördinatenstelsel)

III.3 $$T^{kl} = \mathring{\mu}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = \mu\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} \qquad [\text{Dim. } ML^{-1}T^{-2}]$$

Stel nu dat we materie met atomistische structuur hebben, waarvan de deeltjes snelheden hebben die veel van elkaar verschillen.[1] Dan zullen we voor $\frac{dx^k}{dt}$, dat is dus voor u^1 , u^2 , u^3 , c in elk punt zekere middelwaarden moeten nemen over een zeker gebied, waarvan het zwaartepunt in het beschouwde punt ligt. Zij de snelheid van dat zwaartepunt $\overset{\circ}{u}{}^p$ en de snelheid van een deeltje t.o.v. van het zwaartepunt v^p dan is

III.4 $$u^p = \overset{\circ}{u}{}^p + v^p$$

en de uitdrukking μv^p verdwijnt bij sommatie over het heele gebied. In de uitdrukking

III.5 $$\mu u^p u^q = \mu \overset{\circ}{u}{}^p \overset{\circ}{u}{}^q + \mu v^p v^q + (\mu \overset{\circ}{u}{}^p v^q + \mu v^p \overset{\circ}{u}{}^q)$$

---

1) Verg. Eddington, The mathematical Theorie of Relativity, p. 116 e.v.

verdwijnen dus bij de sommatie de termen tusschen de haakjes. De vorm $\Sigma \mu v^p v^q$ verdwijnt echter niet. Neem bijv. $\Sigma \mu v^1 v^2$, welke uitdrukking voor een waarnemer, die met het zwaartepunt meebeweegt gelijk is aan $\Sigma \mu \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$. Door een oppervlakje $dx\,dz$ stroomen per tijdseenheid de deeltjes aanwezig in een volume $dx\,dz\,\frac{dy}{dt}$ en deze hebben samen een x-impuls $\mu\, dx\, dz\, \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt}$. Per tijdseenheid en oppervlakte eenheid is er dus in de y-richting een strooming van de x-impuls groot $\mu \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$. Bijgevolg stelt $\Sigma \mu \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$ voor de gemiddelde stroomingsdichtheid in de y-richting van den x-impuls. Daar impulsverandering per tijdseenheid kracht is, heeft dus $\Sigma \mu v^1 v^2$ de beteekenis van een spanning in de x-richting in het xx-vlak of ook van kracht per oppervlaktee eenheid, dat is een spanning (schuifspanning) in de y-richting in het yx-vlak. Noemen we deze spanningen p^{pq} (p^{11} is dus een druk- of trekspanning), dan heeft nu T^{kl} de volgende matrix

112.1
$$\begin{array}{cccc}
p^{11} + \mu u_0^1 u_0^1 & p^{21} + \mu u_0^2 u_0^1 & p^{31} + \mu u_0^3 u_0^1 & \mu c u_0^1 \\
p^{12} + \mu u_0^1 u_0^2 & p^{22} + \mu u_0^2 u_0^2 & p^{32} + \mu u_0^3 u_0^2 & \mu c u_0^2 \\
p^{13} + \mu u_0^1 u_0^3 & p^{23} + \mu u_0^2 u_0^3 & p^{33} + \mu u_0^3 u_0^3 & \mu c u_0^3 \\
\mu c u_0^1 & \mu c u_0^2 & \mu c u_0^3 & \mu c^2
\end{array}$$

Aan de zijden van de matrix treedt (met een factor c) de vierdimensionale impulsvector μu_0^1, μu_0^2, μu_0^3, μc op (verg. blz. 61), waarvan de impulsdichtheidsvector μu_0^1, μu_0^2, μu_0^3 de ruimtelijke komponente is [1]. ~~[illegible]~~

---

1) Op blz. 61 in (61.5a) moet staan $m \frac{dx^p}{dt}$ in plaats van $m \frac{dx^p}{d\tau}$, immers $\frac{\overset{\circ}{m}}{m} = \frac{d\tau}{dt}$.

De factor c maakt dat de impulsenergietensor der materie dezelfde physische dimensie [$ML^{-1}T^{-2}$ · energiedichtheid] krijgt als die van het electromagnetische veld (verg. blz. 57). Aangezien door $dx\,dx$ per tijdseenheid de deeltjes stroomen aanwezig in een volume $dx\,dx\,\frac{dy}{dt}$ en deze een energie $\mu\,dx\,dx\,\frac{dy}{dt}c^2$ hebben, is er in de y richting een strooming van energie per oppervlakte-eenheid groot $\mu c^2 \mathfrak{u}^2$. De impulsvector is dus gelijk aan c^2 maal den energiestroomvector (verg. blz. 61).

Gaan we nu na of de divergentie $\partial_l T^{li}$ van den impulsenergietensor verdwijnt, evenals in het electrodynamische geval. Nemen we $i = 4$ dan is

113.1 $$\frac{1}{c}\partial_l T^{l4} = \frac{\partial(\mu \mathfrak{u}^1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{u}^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{u}^3)}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

en dit is de bekende „continuiteitsvergelijking" der hydrodynamica. Voor $i = 1$ ontstaat

113.2 $$\partial_l T^{l1} = \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{u}^1 \mathfrak{u}^1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{u}^2 \mathfrak{u}^1)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \mathfrak{u}^3 \mathfrak{u}^1)}{\partial x} + \frac{\partial \mu \mathfrak{u}^1}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \mu\left(\mathfrak{u}^1\frac{\partial \mathfrak{u}^1}{\partial x} + \mathfrak{u}^2\frac{\partial \mathfrak{u}^1}{\partial y} + \mathfrak{u}^3\frac{\partial \mathfrak{u}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}^1}{\partial t}\right) =$$

of $$= \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{21}}{\partial y} + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \mu\frac{d\mathfrak{u}^1}{dt} = 0$$

113.3 $$\mu\frac{d\mathfrak{u}^p}{dt} = -\partial_q p^{qp} \quad ; \quad p, q = 1, 2, 3$$

en dit is de bekende vergelijking (elastische kracht = massa maal versnelling) uit de elasticiteitsleer voor het geval er geen uitwendige krachten werken. Het verdient te worden opgemerkt, dat μc^2 de energie per volumeenheid is die zou ontstaan indien de geheele materie in energie omgezet zou worden F ~~($9 \cdot 10^{20}$ erg = negenduizend billioen kgm per seconde per gram materie)~~ en dat T^{44} dus bij normale elastische spanningen en kleine snelheden veel en veel grooter is dan alle andere componenten van T^{li}. In het algemeene geval is

113.4 $$k = -\partial_l T^{li}$$

F ($9 \cdot 10^{20}$ erg = 25 millioen K.W.uur per gram materie)

de vierdimensionale krachtvector der materie. $k^i \neq 0$ wil zeggen, dat er in (113.2) uitwendige krachten optreden en in (113.1) een verandering van de massa door toegevoerde energie.

De gravitatievergelijkingen van Einstein.

Stel nu dat er behalve mechanische en electromagnetische verschijnselen geen andere verschijnselen in de natuur bestaan, dan zijn alle „uitwendige" krachten in het electromagnetische van mechanischen aard en omgekeerd. Voor het totale mechano- electromagnetische verschijnsel bestaan er dan geen uitwendige krachten, d.w.z. de divergentie van de som van $S^{\kappa\lambda}$ en $T^{\kappa\lambda}$ moet nul zijn. Schrijven we nu dus voor dezen totalen tensor $T^{\kappa\lambda}$ dan moet in algemeene coördinaten gelden

114.1 $$\nabla_\mu T^{\mu\lambda} = 0$$

en deze vergelijking moet het behoud van totalen impuls en totalenergie voorstellen. Inderdaad is

114.2 $$\nabla_\mu T^{\mu\lambda} = \partial_\mu T^{\mu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\rho} T^{\rho\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} T^{\mu\rho}$$

en de vergelijking (114.1) gaat bij gebruik van normaalcoördinaten in eenig punt (blz. 102) over in

114.3 $$\partial_\mu T^{\mu\lambda} = 0 ,$$

de gewone vorm der impuls-energievergelijking.

Deze totale tensor $T^{\kappa\lambda}$ is de eenvoudigste dien wij aan de rechterzijde van de gezochte differentiaalvergelijking voor de $g_{\lambda\kappa}$ kunnen verwachten. Links moet dus een tensor met louter meetkundige beteekenis komen te staan, afgeleid uit $K_{\ldots\mu\lambda}^{\ldots\kappa}$, $K_{\mu\lambda}$ en K en de divergentie van dezen tensor moet nul zijn. Inderdaad hebben we nu zoo'n tensor, namelijk $G_{\mu\lambda}$. De eenvoudigst denkbare vorm van de gravitatievergelijkingen is dus

115.1 $$G_{\mu\lambda} = K_{\mu\lambda} - \tfrac{1}{2} K g_{\mu\lambda} = \frac{\kappa}{c^2} T_{\mu\lambda}$$ [1]

hierin is κ een constante, die we zullen berekenen. Daartoe nemen we weer het gravitatieveld van blz 107 waarbij de $g_{\lambda\kappa}$ weinig van -1 , -1 , -1 , $+1$ verschillen. De vergelijking (115.1) laat zich ook schrijven

115.2 $$K_{\mu\lambda} = \frac{\kappa}{c^2}\left(T_{\mu\lambda} - \tfrac{1}{2} T g_{\mu\lambda}\right) \; ; \quad T = T_{\lambda\kappa} g^{\lambda\kappa}$$

Ten opzichte van de componente $T_{44} = \mu c^2$ (verg. blz 112) zijn alle verdere componenten in eerste benadering te verwaarlozen. De belangrijkste van alle vergelijkingen (115.2) is dus

115.3 $$K_{44} = \frac{\kappa}{c^2} T_{44} - \tfrac{1}{2}\frac{\kappa}{c^2} T g_{44} = \frac{\kappa}{c^2} T_{44} - \tfrac{1}{2}\frac{\kappa}{c^2} T_{44} g^{44} g_{44} = \tfrac{1}{2}\frac{\kappa}{c^2} T_{44}$$
$$= \tfrac{1}{2}\kappa\mu$$

Nu is

115.4 $$K_{\mu\lambda} = 2\,\partial_{[\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\mu]\lambda} + 2\,\Gamma^{\kappa}_{[\kappa|\rho|}\Gamma^{\rho}_{\mu]\lambda}$$

dus

115.5 $$K_{44} = 2\,\partial_{[\kappa}\Gamma^{\kappa}_{4]4} + 2\,\Gamma^{\kappa}_{[\kappa\rho]}\Gamma^{\rho}_{4]4}$$

en in deze vergelijking kan alles verwaarloosd worden behalve

115.6 $$K_{44} = \partial_\kappa \Gamma^{\kappa}_{44} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{44} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Ingevolge (92.6) is dus

115.7 $$K_{44} = \tfrac{1}{2}\sum_\alpha \partial_\alpha \partial_\alpha g_{44} = \tfrac{1}{2}\Delta g_{44} \; ; \text{ dimensie } [L^{-2}]$$

en dus volgt voor de uitdrukking $\frac{1}{2}c^2 g_{44}$, die de rol van potentiaal spelen moet

115.8 $$\Delta\left(\tfrac{1}{2}c^2 g_{44}\right) = \tfrac{1}{2}c^2\kappa\mu \; ; \text{ dim. } [T^{-2}]$$

---

1) Men vindt dikwijls de formule $G_{\mu\lambda} = \kappa T_{\mu\lambda}$, deze ontstaat wanneer men $c = 1$ stelt en dus een andere eenheid van tijd neemt of ook indien men $T_{\mu\lambda}$ anders normeert (dimensie $[M L^{-1}]$ = massadichtheid).

(P is potentiaal per eenheid v. massa)

We weten echter (blz. 107) dat voor de potentiaal P geldt

116.1 $$\Delta P = 4\pi f \rho \quad ; \text{ dimensie } [T^{-2}]$$

waarin f de gravitatieconstante van Newton is [1] en dus volgt voor de gravitatieconstante κ van Einstein

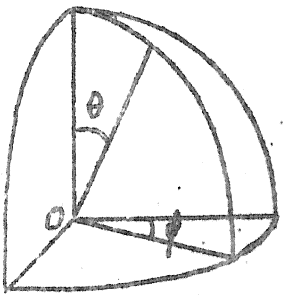
116.2 $$\kappa = \frac{8\pi f}{c^2} = 2{,}07 \cdot 10^{-27} \quad ; \text{ dimensie } [M^{-1}L]$$

Inderdaad leert nu (115.8) dat de gravitatievergelijking van Einstein in het grensgeval overgaat in de vergelijking $\Delta P = 4\pi\rho f$ der klassieke mechanica, zooals het correspondentie-principe dat verlangt.

Het gravitatieveld van een rustend massapunt.

Van een rustend massapunt mogen we verwachten dat het gravitatieveld bolsymmetrie heeft. Is er geen massapunt, dan is de dr^2 euclidisch, dus in t en gewone bolcoördinaten:

116.3 $$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$



Nu brengen we het massapunt in O en verlangen dat de bolsymmetrie bewaard blijft. Dan moet $c^2 d\tau^2$ dus noodzakelijk den vorm hebben

116.4 $$c^2 d\tau^2 = f(r)\, c^2 dt^2 - g(r)\, dr^2 - h(r)\,(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

waar f , g en h willekeurige functies van r zijn. In plaats van r voeren we nu in een coördinaat r' :

116.5 $$r'^2 = r^2 h(r)$$

dan krijgt de uitdrukking den vorm

116.6 $$c^2 d\tau^2 = k(r)\, c^2 dt^2 - l(r)\, dr^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

[1] $f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$, dimensie $[M^{-1}L^3T^{-2}]$ ~~gr.⁻¹ cm³ sec⁻²~~ gr.⁻¹ K³ sec⁻² 10^{-3} . 10^{6}

Voor de functies $k(r')$ en $l(r')$ schrijven we e^{κ} en e^{λ} en voor r' eenvoudigheidshalve weer r ; dan wordt

IIγ.1 $$c^2 dt^2 = e^{\kappa} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

en bijgevolg

IIγ.2 $$g_{11} = -e^{\lambda} \; , \; g_{22} = -r^2 \; , \; g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \; , \; g_{44} = e^{\kappa}$$

wanneer r , θ , φ en ct als ξ^1 , ξ^2 , ξ^3 , ξ^4 genomen worden en

IIγ.3 $$-g = e^{\kappa+\lambda} r^4 \sin^2\theta$$

Nu gaan we de 40 uitdrukkingen $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ uitrekenen. Het blijkt dat er 31 nul zijn en dat voor de overige 9 geldt

IIγ.4
$$\Gamma^1_{11} = \tfrac{1}{2}\lambda' \; ; \; \lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$$
$$\Gamma^1_{12} = -r e^{-\lambda}$$
$$\Gamma^1_{33} = -r \sin^2\theta \, e^{-\lambda}$$
$$\Gamma^1_{44} = \tfrac{1}{2} e^{\kappa-\lambda} \kappa' \; ; \; \kappa' = \frac{d\kappa}{dr}$$
$$\Gamma^2_{12} = r^{-1}$$
$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta \cos\theta$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta$$
$$\Gamma^4_{14} = \tfrac{1}{2}\kappa' \; ; \; \kappa' = \frac{d\kappa}{dr}$$

De vector e^{κ}_1 ligt langs de parameterlijnen van r . Daar

IIγ.5 $$e^{\mu}_1 D_{\mu} e^{\kappa}_1 = \partial_1 e^{\kappa}_1 + \Gamma^{\kappa}_{11} = \Gamma^{\kappa}_{11} = \Gamma^1_{11} e^{\kappa}_1 = \lambda' e^{\kappa}_1$$

zijn de parameterlijnen <u>geodetisch</u>. De van O uit gemeten lengte langs zoo'n straal tusschen $r = r_1$ en $r = r_2$ is $\int_{r_1}^{r_2} e^{\frac{1}{2}\lambda} dr$, hieruit volgt dat r niet de natuurlijk gemeten afstand tot O is.

De vector e^{κ}_4 ligt langs de parameterlijnen van ct . Daar

IIγ.6 $$e^{\mu}_4 D_{\mu} e^{\kappa}_4 = \partial_4 e^{\kappa}_4 + \Gamma^{\kappa}_{44} = \Gamma^{\kappa}_{44} = \Gamma^{\kappa}_{44} e^{\kappa}_4 = \tfrac{1}{2} e^{\kappa-\lambda} \kappa' e^{\kappa}_4$$

volgt dat deze parameterlijnen in het algemeen niet meer geodetisch zijn, d.w.z. dat een massapunt in het gravitatieveld niet in rust blijft t.o.v.an het ruimtelijk coördinatenstelsel r , θ , φ .

Nu waren de functies $\kappa(r)$ en $\lambda(r)$ nog willekeurig. Zij moeten zoo bepaald worden dat

1e $G_{\mu\lambda} = 0$ overal, behalve in de lijn van het gravitatiecentrum

2e $c^2 dr^2$ nadert tot een euklidisch lijnelement voor groote waarden van r , d.w.z. λ en κ naderen tot 0 voor $r = \infty$.

De berekening leert, dat alleen G_{11} , G_{22} , G_{33} , en G_{44} niet voor iedere waarde van λ en κ nul worden. Voor deze componenten vindt men

$$G_{11} = -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{14} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\log\sqrt{-g} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g}$$

$$G_{22} = -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma^1_{22} + 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\sqrt{-g} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g} \qquad 118.1$$

$$G_{33} = -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma^1_{33} - \frac{\partial}{\partial\theta}\Gamma^2_{33} + 2\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31} + 2\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{33}\log\sqrt{-g} - \Gamma^2_{33}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\sqrt{-g}$$

$$G_{44} = -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma^1_{44} + 2\Gamma^1_{41}\Gamma^4_{41} - \Gamma^1_{44}\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{-g}$$

en daaruit volgt na substitutie

$$a)\quad G_{11} = \tfrac{1}{2}\kappa'' - \tfrac{1}{4}\lambda'\kappa' + \tfrac{1}{4}\kappa'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0$$

$$b)\quad G_{22} = e^{-\lambda}\left\{1 + \tfrac{1}{2}r(\kappa' - \lambda')\right\} - 1 = 0 \qquad 118.2$$

$$c)\quad G_{33} = \sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left\{1 + \tfrac{1}{2}r(\kappa' - \lambda')\right\} - \sin^2\theta = 0$$

$$d)\quad G_{44} = e^{\kappa-\lambda}\left(-\tfrac{1}{2}\kappa'' + \tfrac{1}{4}\lambda'\kappa' - \tfrac{1}{4}\kappa'^2 - \frac{\kappa'}{r}\right) = 0$$

(c) volgt uit (b). Uit (a) en (d) volgt $\kappa' = -\lambda'$ en daar beide in het oneindige nul moeten zijn

$$\kappa = -\lambda \qquad 118.3$$

Dan gaat (b) over in

$$e^{\kappa}\left(1+r\kappa'\right) = e^{\kappa} + r\frac{de^{\kappa}}{dr} = 1 \qquad \text{(g.1)}$$

waaruit bij integratie volgt

$$e^{\kappa} = 1 - \frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha \text{ heeft de dimensie } [L]) \qquad \text{(g.2)}$$

waarin α een integratieconstante is waaraan we voorloopig nog geen physische beteekenis hechten. Substitutie van deze oplossing in (a), d.w.z. in

$$\frac{1}{r}\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa'^2 + \frac{\kappa'}{r} = 0 \qquad \text{(g.3)}$$

leert dat ook aan deze vergelijking voldaan is.

Daarmede hebben we een oplossing gevonden van den vorm

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \qquad \text{(g.4)}$$

Dit lijnelement verliest zijn beteekenis voor $r = \alpha$.

Perihelbeweging

We zullen de beteekenis van α nagaan. De vergelijking van een geodetische lijn is

$$\frac{d^2\xi^{\kappa}}{d\tau^2} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\frac{d\xi^{\mu}}{d\tau}\frac{d\xi^{\lambda}}{d\tau} = 0 \qquad \text{(g.5)}$$

Deze vergelijking staat voor de vier vergelijkingen

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\lambda'\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} - r e^{-\lambda}\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{2\kappa}\kappa' c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \qquad \text{(g.6)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + 2\operatorname{cotg}\theta\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

$$c\frac{d^2 t}{d\tau^2} + c\kappa'\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0$$

Nemen we nu een deeltje, dat in den aanvang beweegt in het vlak $\theta = \frac{\pi}{2}$, met een snelheid u, dan is $\cos\theta = 0$ en $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$. Daaruit volgt $\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 0$ en θ blijft dus constant en gelijk aan $\frac{\pi}{2}$. Verder is $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}$. Voor de wereldlijn van het deeltje geldt:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\kappa'\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} - r e^{+\kappa}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{2}e^{2\kappa}\kappa' c^2\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0 \qquad \text{(g.7)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

120.1

$$\frac{d^2 A}{d\tau^2} + \kappa' \frac{dr}{d\tau}\frac{dA}{d\tau} = 0 \qquad \left(N.B.\ \kappa' \frac{dr}{d\tau} = \frac{d\kappa}{d\tau}\right)$$

De twee laatste vergelijkingen laten zich onmiddellijk eenmaal integreeren en geven dan de twee eerste integralen

$$\alpha) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = c_1$$

120.2

$$\beta) \qquad \frac{dA}{d\tau} = c_1 e^{-\kappa} = \frac{c_2}{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

waar c_1 en c_2 integratieconstanten zijn. We zouden nu de eerste vergelijking moeten integreeren. In plaats daarvan nemen we liever de vergelijking

120.3 $$1 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{\frac{1}{r}} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 ; \left(N.B.\ \theta = \frac{\pi}{2}, d\theta = 0\right)$$

die evenzoo een eerste integraal is en elimineeren. Elimineeren we $d\tau$ en dA met behulp van de andere twee eerste integralen (120.2), dan ontstaat

120.4 $$\frac{c_1}{c r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{c_1^2}{c^2 r^2} = c_2^2 - 1 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{r}\frac{c_1^2}{c^2 r^2} ,$$

of voor $r = \frac{1}{\rho}$

120.5 $$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 = e^2 \frac{c_2^2 - 1}{c_1^2} + \frac{c^2 \alpha}{c_1^2}\rho + \alpha\rho^3 .$$

Differentiatie naar φ geeft

120.6 $$\boxed{\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{1}{2}\frac{\alpha c^2}{c_1^2} + \frac{3}{2}\alpha\rho^2} \qquad (\text{Dimensie: } [L^{-1}])$$

waarnaast we nog eens de eerste integraal (120.2α) beschouwen, nu in den vorm

120.7 $$\boxed{r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}} ; \qquad (\text{Dim.} : [L^2 T^{-1}]) .$$

Vergelijken we nu deze beide vergelijkingen (120.6) en (120.7) met de vergelijkingen voor een deeltje ~~met massa 1~~ in een gravitatieveld van een massa m in O, bewegende in het vlak $\theta = \frac{\pi}{2}$.

In de klassieke mechanica is

121.1 $$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{fm}{r^2}$$ (m = massa attractiecentrum;

121.2 $$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$ f = gravitatieconstante v. Newton).

waarin r de betekenis heeft van den gewonen voerstraal. Twee eerste integralen zijn

121.3 $$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 2f\frac{m}{r} + \text{constante (energiewet)};\ [L^2T^{-2}]$$

121.4 $$\boxed{r^2\dot{\varphi} = h} = \text{constant (perkenwet)};\ [L^2T^{-1}]$$

Met behulp van (121.4) zetten we (121.3) om in een differentiaalvergelijking, die alleen r en φ bevat:

121.5 $$h^2\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2 + h^2p^2 = 2fmp + C \qquad ; p = \frac{1}{r}$$

en hier werken we de constante uit door differentiatie naar φ

121.6 $$\boxed{\frac{d^2p}{d\varphi^2} + p = \frac{fm}{h^2}} \qquad ; [L^{-1}]$$

Voor kleine snelheden ($u \ll c$) en grooten afstand van het attractie-centrum moeten de vergelijkingen (120.6) en (120.7) overgaan in de klassieke vergelijkingen (121.6) en (121.4). Uit (120.7) en (121.4) volgt dus

121.7 $$c_1 = h$$

en uit (120.6) en (121.6) (de term met p^2 is te verwaarloozen):

121.8 $$\frac{1}{r^2}\frac{dc^2}{c_1^2} = \frac{fm}{h^2}$$

of

121.9 $$d = 2f\frac{m}{c^2}$$

Voor de zon is

121.10
$$m = 3{,}99 \cdot 10^{33} \qquad ; [M]$$
$$f = 6{,}7 \cdot 10^{-8} \qquad ; [M^{-1}L^3T^{-2}]$$
$$c = 3{,}00 \cdot 10^{10} \qquad ; [LT^{-1}]$$
$$d = 2{,}94 \cdot 10^5 = 2{,}94\ KM. \qquad ; [L]$$

Voor de aarde is

122.1 $\alpha = 0{,}43'' = 4{,}6$ mm

We hebben hier zonder meer de r uit de klassieke mechanica geïdentificeerd met de r in (120.7), hoewel de natuurlijk gemeten afstand in werkelijkheid $\int \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}}$ bedraagt. Nu is echter

122.2 $$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}} = r_2\sqrt{1-\frac{\alpha}{r_2}} - r_1\sqrt{1-\frac{\alpha}{r_1}} - \tfrac{1}{2}\alpha \log \frac{\{r_2+r_2(1-\frac{\alpha}{2r_2})\}\{r_1-r_1(1-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r_1})\}}{\{r_2-r_2(1-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r_2})\}\{r_1+r_1(1-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r_1})\}}$$

voor $r_1 > \alpha$, $r_2 > \alpha$, en deze uitdrukking is voor grote waarden van r_1 en r_2 (t.o.v. van α) in eerste benadering gelijk aan $r_2 - r_1$.

De vergelijking

122.3 $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2} + \tfrac{3}{2}\alpha\rho^2$$

is de differentiaalvergelijking van de baan. Als eerste benadering nemen we de oplossing van

122.4 $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}$$

De oplossing van de gereduceerde vergelijking

122.5 $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$$

is van den vorm

122.6 $$\rho = \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2} + e\cos(\varphi-\beta)$$

en hierbij komt voor het rechter lid een B.I. $\frac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}$, zodat de oplossing van (122.4) luidt:

122.7 $$\rho = \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}\left(1 + e\cos(\varphi-\beta)\right).$$

Dit is een kegelsnede. We onderstellen, dat we met een ellips te maken hebben : $e < 1$. De integratie-constanten e en β hebben de beteekenis van excentriciteit en waarde van φ voor het perihelium. De afstand van centrum tot perihelium resp.

aphelium is $\frac{2k^2}{\alpha c^2(1+e)}$ resp. $\frac{2k^2}{\alpha c^2(1-e)}$ en de groote as is dus $2a = \frac{4k^2}{\alpha c^2(1-e^2)}$. Deze eerste benadering wordt in den tweeden term van het rechter lid van (122.3) gesubstitueerd. (122.3 gaat dan over in

123.1
$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2} + \tfrac{3}{8}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}\left(1+2e\cos(\varphi-\beta)+\tfrac{1}{2}e^2(1+\cos 2(\varphi-\beta)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2} + \tfrac{3}{16}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}(2+e^2) + \tfrac{3}{4}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}e\cos(\varphi-\beta) + \tfrac{3}{16}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}e^2\cos 2(\varphi-\beta)$$

De B.I., die hier aan de oplossing der gereduceerde vergelijking moet worden toegevoegd, is gemakkelijk te berekenen. De term met $\cos(\varphi-\beta)$ is in resonnantie en levert in de B.I. een term met $\varphi\sin(\varphi-\beta)$. Voor de totale oplossing vinden we

$$\rho = \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}\left(1+e\cos(\varphi-\beta)\right) + \tfrac{3}{16}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}(2+e^2) + \tfrac{3}{8}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}e\varphi\sin(\varphi-\beta) -$$
$$- \tfrac{1}{16}\alpha^3\frac{c^4}{k^4}e^2\cos 2(\varphi-\beta)$$

123.2
$$= \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}\left(1+\tfrac{3}{8}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}(2+e^2)\right)\left(1+e'\cos(\varphi-\beta)+\tfrac{3}{4}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}e'\varphi\sin(\varphi-\beta)\right) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}\cdot\tfrac{1}{8}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}e^2\cos 2(\varphi-\beta)$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}\left(1+\tfrac{3}{8}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}(2+e^2)\right)\left\{1+e'\cos(\varphi-\beta-\varepsilon)\right\} - \tfrac{1}{2}\alpha\frac{c^2}{k^2}\cdot\tfrac{1}{8}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}e^2\cos 2(\varphi-\beta)$$

waar

$$\varepsilon = \sin\varepsilon = \tfrac{3}{4}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}\varphi \ll 1$$

123.3
$$e = \left\{1+\tfrac{3}{8}\alpha^2\frac{c^2}{k^2}(2+e^2)\right\}e'$$

Aangezien $\frac{\alpha^2c^2}{k^2} = \frac{2\alpha}{a(1-e^2)}$ is voor de planeten inderdaad $\frac{\alpha^2c^2}{k^2} \ll 1$ want $\alpha \ll a$. De eerste term stelt, wanneer we eerst eens van ε afzien, een ellips voor met excentriciteit e' (weinig verschillend van e) en een periheliumafstand weinig verschillend van $\frac{2k^2}{\alpha c^2(1+e)}$. De tweede term stelt een kleine schommeling met de dubbele periode voor, die dus de baan iets van een ellips doet afwijken, maar de richting van centrum tot perihelium niet met den tijd doet veranderen. Het optreden van ε in den eersten term maakt echter, dat de voerstraal

van het perihelium langzaam draait. Het maximum van $\frac{1}{r}$ treedt namelijk op voor $\varphi - \varepsilon = \beta, \beta + 2\pi, \ldots$ dus telkens wanneer $\varphi\left(1 - \frac{3}{4}\alpha^2\frac{c^2}{l^2}\right)$ met 2π is toegenomen, d.w.z wanneer φ is toegenomen met $2\pi\left(1 + \frac{3}{4}\alpha^2\frac{c^2}{l^2}\right)$. Voor de planeet Mercurius geeft dit een vooruitloopen van het perihelium met 42.9 seconde per eeuw. De werkelijk waargenomen afwijking (die verkregen wordt nadat alle klassiek-mechanische correcties voor de storingen door andere planeten zijn aangebracht) bedraagt volgens Newcomb 41.24 seconde met een nauwkeurigheid van ± 2.09 seconde.[1]

We leiden nog een andere formule af voor de periheliumafwijking. Klassiek geldt voor den omlooptijd $T = \frac{2\pi}{\sqrt{f_m}} a\sqrt{a}$ en dus ingevolge (121.9):

124.1 $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2c^2}} a\sqrt{a}$$

en daaruit volgt voor de periheliumafwijking $2\pi\frac{\varepsilon}{\varphi}$ per omloop

124.2 $$2\pi\frac{\varepsilon}{\varphi} = 2\pi\,\frac{3}{4}\alpha^2\frac{c^2}{l^2} = \frac{3\pi\alpha}{a(1-e^2)} = \frac{24\pi^3a^2}{c^2T^2(1-e^2)}$$

waarin alleen halve groote as, omlooptijd en excentriciteit voorkomen.

Lichtstraalafwijking. Voor een lichtstraal is $dr = 0$ en dus tengevolge van (120.2α) $e_1 = \infty$. De vergelijking (120.6) gaat dus over in

124.3 $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{3}{2}\alpha\rho^2$$

Nemen we weer als eerste benadering een oplossing van de gereduceerde vergelijking en wel de kromme

124.4 $$\rho = \frac{\cos\varphi}{R}$$

die t.o.v. van de poolcoördinaten ρ, φ een „rechte lijn" is op

1) Enc. der Math. Wis. VI 2.22 a, F. Kotter.

een afstand $\frac{1}{R}$ van het centrum, dan kunnen we hier wel van een integratieconstante β afzien (vgl. (122 6)) aangezien het er toch niet toe doet in welke richting de lichtstraal langs de zon gaat. Deze oplossing gesubstitueerd in het rechter lid van (124.3) geeft de vergelijking

125.7 $$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{3}{2}\alpha\frac{\cos^2\varphi}{R^2}$$

met de B.I. $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{R^2}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)$ en dus met de oplossing

125.2 $$\rho = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R^2}(2 - \cos^2\varphi)$$

De maximale waarde van ρ is $\frac{1}{R}(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R})$ voor $\varphi = 0$. ρ wordt 0 voor

125.3 $$\cos\varphi = \frac{R}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{R^2}{\alpha^2} + 2}$$

de eerste wortel is > 1 voor $\frac{\alpha}{R} << 1$ en dus onbruikbaar, de andere is in eerste benadering

125.4 $$\frac{R}{\alpha}\left(1 - \sqrt{1 + 2\frac{\alpha^2}{R^2}}\right) = \frac{R}{\alpha}\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{R^2}\right) = \frac{\alpha}{R}$$

We hebben dus twee asymptotische richtingen:

125.5 $$\cos\varphi_1 = \frac{\alpha}{R} \quad ; \quad \sin\varphi_1 = +1$$
$$\cos\varphi_2 = \frac{\alpha}{R} \quad ; \quad \sin\varphi_2 = -1$$

en de hoek tusschen deze beide bedraagt

125.6 $$\varphi_1 - \varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{R}$$

Voor een lichtstraal die langs de oppervlakte van de zon voorbijschiet is $\alpha = 2.94.10^5$ en $R = 697.10^8$ waaruit volgt $\varphi_1 - \varphi_2 = 1.75$ seconde. De gemeten waarden zijn

Sobral expeditie	1.98 ± 0.12	seconde [1]
Principe expeditie	1.61 ± 0.30	

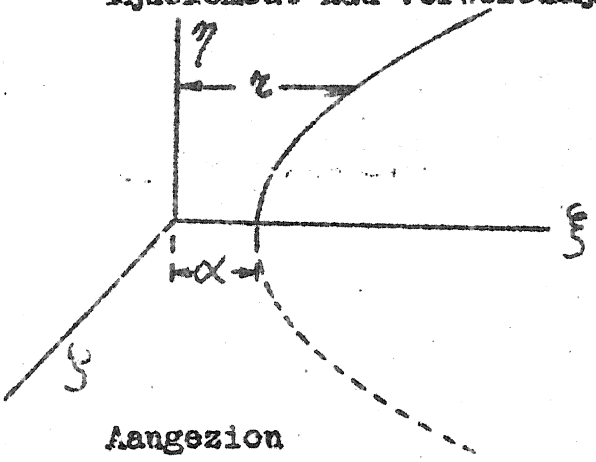
1) Enc. d. Math. Wiss. VI 2, 22a, F. Kottler.

Het ruimtelijk lijnelement om de zon.

Voor t = constant krijgen we het ruimtelijk lijnelement

126.1 $$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{a}{r}}\,dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

L. Flamm heeft aangetoond hoe men een ruimte met een dergelijk lijnelement kan verwezenlijken. Neem in de gewone ruimte een gewoon rechthoekig assenstelsel ξ, η, ζ en beschouw in het $\xi\eta$-vlak de parabool



126.2 $$\eta^2 = 4\alpha(\xi - \alpha)$$

die de ξ-as snijdt in $\xi = \alpha$.

Aangezien

126.3 $$2\eta\, d\eta = 4\alpha\, d\xi$$

is het lijnelement van de parabool

126.4 $$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\xi \sqrt{1 + \frac{16\alpha^2}{16\alpha(\xi-\alpha)}} = d\xi \sqrt{\frac{\xi}{\xi-\alpha}} =$$

$$= \frac{d\xi}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\xi}}}$$

Laat men dus deze parabool wentelen om de η as, dan is het lijnelement voor het ontstane omwentelingsoppervlak

126.5 $$ds^2 = \frac{dz^2}{1-\frac{\alpha}{z}} + z^2 d\varphi^2$$

wanneer φ de hoek van wenteling is gemeten vanaf het $\xi\eta$-vlak en z de afstand tot de η-as. Neemt men nu nog een vierde as χ, loodrecht op ξ, η en ζ en laat men het omwentelingsoppervlak nogmaals wentelen om het $\eta\zeta$-vlak, dan is het lijnelement voor het driedimensionale omwentelingsoppervlak dat in de $\xi\eta\zeta\chi$-ruimte ontstaat

126.6 $$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{a}{r}}\,dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

wanneer θ de tweede hoek van wenteling is gemeten vanaf de

$\xi\eta\zeta$ - ruimte. De ruimte om het gravitatiecentrum van $r = \alpha$ tot $r = \infty$ beeldt zich dus volkomen maatgetrouw af op de helft van dit hyperoppervlak, die ontstaat uit de bovenste (of ook de onderste) helft van den parabool.

Men moet nu natuurlijk vooral niet denken dat de baan van een massapunt of een lichtstraal in deze driedimensionale ruimte geodetisch zou zijn. Eerst de wereldlijn in de ruimte, die ontstaat door aan de verkregen ruimte nog een t - as toe te voegen is in die aldus verkregen ruimte geodetisch en de banen zijn slechts projecties in de richting van de t - as. Uit de figuur is duidelijk te zien dat voor twee punten in het $\xi\eta$ - vlak $r_2 - r_1$ volstrekt niet de natuurlijk gemeten afstand is, maar ook dat $r_2 - r_1$ hoe langer hoe dichter tot dien afstand nadert, wanneer r_1 en r_2 groot worden t.o.van α .

De verschuiving der spectraallijnen.

Uit het vierdimensionale lijnelement volgt voor den eigentijd $d\tau$ voor een rustend punt (r , ϑ en φ constant)

127.1 $$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$

en dus voor twee punten op afstanden r_1 en r_2 en waarden dt , die bij eenzelfde waarde $d\tau$ hooren

127.2 $$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_1}}}$$

Uit deze vergelijking volgt dat een klok des te langzamer loopt, naarmate de afstand tot het gravitatiecentrum kleiner is. Wat voor een klok geldt moet ook voor een atoom gelden, de spectraallijnen van licht dat van het oppervlak van de zon komt, moeten dus naar het rood verschoven zijn. Is ν_1 frequentie van een spectraallijn op de zon, ν_2 die van dezelfde spectraallijn op aarde, R de straal van de zon en r_2 de straal van de aardbaan, dan is

127.3 $$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{R}}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_2}}} \simeq \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R}}{1}$$

en dus

$$120.1 \quad \Delta\nu = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{R} = -2{,}12 \cdot 10^{-6} \quad 1)$$

welke waarde even groot is als die van een Doppler effect behoorende bij een snelheid van 0 63 km per seconde. Het effect is buitengewoon moeilijk te meten omdat er tal van andere oorzaken zijn die een verschuiving der lijnen kunnen veroorzaken, als druk, Doppler effect, storing door naburige lijnen, anomale dispersie. De onderzoekingen moeten als nog niet afgesloten beschouwd worden.

Het praecessie-effect.

Er is nog een vierde effect, waarvan het bestaan het gemakkelijkste kan worden ingezien aan de hand van de door Flamm geconstrueerde afbeelding van de ruimte om de zon. Stel eens, dat men een lokaal assenstelsel in deze ruimte pseudoparallel in een cirkel om de zon voert. Dan zullen begin en eindstand niet samenvallen omdat de ruimte niet euklidisch is en men berekent gemakkelijk dat de afwijkingshoek bij één omloop $\pi \frac{\alpha}{r}$ bedraagt. Voor de aarde zou dit beteekenen dat de aarde bij elken omloop een afwijking van 0,013 boogseconde zou krijgen. Nu zou die redeneering heelemaal juist zijn, indien in het vierdimensionale lijnelement $c^2 d\tau^2$ de term $c^2 dt^2$ stond en niet $c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2$. Deze term maakt echter dat de tijd ook meedoet en men niet maar zoo zonder meer met pseudoparallele verplaatsingen in de driedimensionale ruimte mag rekenen. In werkelijkheid moet men een pseudoparallele verplaatsing in vier afmetingen langs de wereldlijn uitvoeren. Wordt dit gedaan, dan vindt men een praecessieeffect dat anderhalf maal zoo groot is, dus $\frac{3}{2}\pi\frac{\alpha}{r}$ en dus voor de aarde 0,019 boogseconde bedraagt. Aangezien men de geheele bewerking ook kan toepassen op het

1) Enc. der Math. Wiss. VI 2 22a, F. Kottler.

stelsel aarde - maan, bestaat er ook een dergelijke afwijking voor de beweging van de maan.[1] Beide afwijkingen (1,9 boogseconde per eeuw) zijn niet te klein voor de waarneming. In de berekening van de praecessie voor de aarde komen echter voor, de massa van de maan μ en een grootheid H, die van de traagheidsmomenten van de aarde afhangt. De onzekerheid van μ levert (1918) al een fout die 1½ maal de nieuwe praecessie is. Ook de grootheid H is nog zeer onnauwkeurig bekend, men zou met de nauwkeurigheid een decimaal verder moeten zijn om de waarde te kunnen gebruiken. Ook de afwijking van de praecessie van de maan ligt vooralsnog binnen het gebied van onzekerheden in de constanten.

Eddington heeft uit het bestaan der praecessieafwijking de volgende belangrijke theoretische slotsom getrokken. Indien men met behulp van gyrostatische instrumenten de draaiing van de aarde zou meten, dan zou men vinden de draaiing t.o.v. van een geodetisch (d.i. pseudoparallel) meebewegend stelsel en niet die t.o.v. van de vaste sterren. De beweging t.o.v. van de vaste sterren kan dus alleen door astronomische metingen gevonden worden.

---

[1] Enc. der Math. Wiss. VI 2. 22a, F. Kottler.