STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12a

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950, 3a;

Asymptotische ontwikkelingen met behulp van de Laplace-integraal.

B.J. de Jong

1949

Syllabus Coll.Asympt.Ontwikkelingen.
Voordracht te houden op Donderdag
27 Januari 1949 door den Heer
B. J.de Jong.

Asymptotische Ontwikkelingen met behulp van de Laplace-integraal.

In hoofdstuk III over Laplace-integralen (zie voor de definitie en aannamen omtrent de objectfunctie het begin van dat hoofdstuk) is bewezen (pag.27,stelling 10):

Indien $\mathcal{L}(F) \equiv \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ een halfvlak van voorwaardelijke convergentie bezit en

$$\lim_{\substack{t>0\\t\to 0}} t^{-\beta}F(t) = B\;(\beta>-1),$$

dan nadert $s^{\beta+1}\mathcal{L}(F)$ tot $B\Gamma(\beta+1)$,
als $|s|$ onbegrensd aangroeit met $|\arg s| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

Uit deze stelling is onmiddellijk een stelling af te leiden, die uit een asymptotische ontwikkeling van de objectfunctie $F(t)$ bij $t = 0$ concludeert tot een asymptotische ontwikkeling van de resultaatfunctie $\mathcal{L}(F)$ voor $s \to \infty$:

Stelling 1.: Indien $\mathcal{L}(F)$ een halfvlak van voorwaardelijke convergentie bezit, dan volgt uit

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda_n} \quad (-1<\lambda_0<\lambda_1<\cdots\to+\infty)$$

bij $t = 0$, d.w.z.

$$t^{-\lambda_{n+1}}\Big(F(t)-\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu t^\nu\Big)\to c_{n+1} \qquad \text{voor } t\to 0 \text{ en}$$

iedere niet-negatieve n)
de ontwikkeling

$$\mathcal{L}(F) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{s^{\lambda_n+1}}$$

voor onbegrensd toenemende $|s|$ met $|\arg s| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, d.w.z.

$$s^{\lambda_{n+1}+1}\Big(\mathcal{L}(F)-\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu\frac{\Gamma(\lambda_\nu+1)}{s^{\lambda_\nu+1}}\Big)\to c_{n+1}\Gamma(\lambda_{n+1}+1)$$

voor iedere niet-negatieve gehele n.

Voor het bewijs hoeft men de vorige stelling slechts toe te passen op $F(t)-\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu t^\nu$ i.p.v. op $F(t)$ met $\beta=\lambda_{n+1}$ en $B=c_{n+1}$

Tot nu toe is t reëel ondersteld. Om stelling 1 onder zekere aannamen uit te breiden tot complexe t, generaliseren we de Laplace-integraal door een complexe integratieweg toe te laten. Eerst bewijzen we nog:

Stelling 2: $f(s) = \mathcal{L}(F)$ is in het inwendige van het convergentie-halfvlak analytisch en er geldt:

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k\int_0^\infty e^{-st}t^kF(t)dt.$$

Voor het bewijs leiden we een aantal lemma's af:

Lemma 1.: $f_\alpha(s) = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} e^{-st} F(t)\,dt \; (\alpha > 1)$

is een gehele functie en

$$f_\alpha^{(k)}(s) = (-1)^k \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} e^{-st} t^k F(t)\,dt. \; (k = 1, 2, \ldots).$$

Wegens de gelijkmatige convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st)^n}{n!}$ op het integratie-interval is

$$f_\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} (-t)^n F(t)\,dt.$$

Elke term van deze reeks is een gehele functie en de reeks convergeert in ieder begrensd gebied gelijkmatig, dus is $f_\alpha(s)$ geheel en

$$f_\alpha^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} (-t)^n F(t)\,dt = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} e^{-st} (-t)^k F(t)\,dt$$

Lemma 2: $\mathcal{L}(F)$ convergeert in ieder begrensd gebied binnen het convergentie-halfvlak gelijkmatig aan de bovengrens.

Dit lemma is bevat in de hulpstelling van hoofdstuk III pag.23, waar de gelijkmatige convergentie zelfs bewezen wordt in elke hoek $|\arg(s - s_0)| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ als s_0 een convergentiepunt van de integraal is.

Lemma 3: $\mathcal{L}(F)$ convergeert in ieder halfvlak $\mathcal{R}s \geq \sigma$ (dus zeker in ieder begrensd gebied) gelijkmatig aan de benedengrens.

Omdat van $F(t)$ verondersteld is, dat ze aan de benedengrens absoluut-oneigenlijk integreerbaar is, is $\int_a^b |F(t)|\,dt$ willekeurig klein te maken, als $b > a > 0$ voldoende klein is. Maar dan is, wegens de in het halfvlak geldende ongelijkheid $|\int_a^b e^{-st} F(t)\,dt| \leq e^{|\sigma| b} \int_a^b |F(t)|\,dt$, het linkerlid willekeurig klein te maken.

Om nu het bewijs van stelling 2 te geven, slaan we om elk willekeurig punt van het inwendige van het convergentiehalfvlak van f(s) een binnen het halfvlak gelegen cirkel, waarin dus op grond van de lemma's 2 en 3 gelijkmatig geldt: $\lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha(s) = f(s)$. Op grond van de dubbelreeksenstelling van Weierstrass en lemma 1 is $f(s)$ binnen het cirkeltje analytisch en geldt:

$$f^{(k)}(s) \text{ bestaat en } f^{(k)}(s) = \lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty e^{-st} t^k F(t)\,dt$$

q.e.d.

We bewijzen nu:

Stelling 3: Is $F(t) = O(e^{a|t|})$ $(a \geq 0)$ voor $t \to \infty$ in $\alpha < \arg t < \beta$ $(\beta - \alpha < \pi)$ en is $F(t)$ daar regulier (behalve eventueel in $t = 0$ en $t = \infty$, als $F(t)$ dan maar langs iedere straal naar $t = 0$ absoluut i[ntegreerbaar is]) greerbaar is), dan convergeert de gegeneraliseerde Laplace-integra[al]

$\mathcal{L}^{(\varphi)}(F) \equiv \int_0^{\infty(\varphi)} e^{-st} F(t)\,dt \; (\alpha < \varphi < \beta)$ minstens voor $\mathcal{R}(e^{i\varphi} s) > a$, e[n is] daar analytisch. Voorts zijn alle functies $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$ elementen van [de] zelfde analytische functie.

Substitutie van $t = re^{i\varphi}$ (r reëel) in $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$ geeft:

$$e^{i\varphi}\int_0^\infty e^{-e^{i\varphi}sr}F(re^{i\varphi})\,dr.$$

Wegens $|F(t)| < Ae^{ar}$ (hetgeen uit het gegeven volgt), convergeert deze integraal minstens voor $\Re(e^{i\varphi}s) > \alpha$ en wel absoluut. Volgens stelling 2 is $\mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$ daar analytisch.

Beschouw nu de punten $T_1 = Re^{i\varphi_1}$ en $T_2 = Re^{i\varphi_2}$ (R reëel) met $\alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \beta$. Volgens de stelling van Cauchy is

$$\int_0^{T_2} e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^{T_1} e^{-st}F(t)\,dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st}F(t)\,dt.$$

(De integratieweg bij het eerste tweetal integralen zij rechtlijnig, die bij de derde zij de boog van de cirkel $|t| = R$).

Voor $R \to \infty$ nadert de eerste integraal tot $\mathcal{L}^{(\varphi_2)}(F)$, de tweede tot $\mathcal{L}^{(\varphi_1)}(F)$. De derde integraal nadert tot nul voor alle punten s, die op het in beide halfvlakken $\Re(e^{i\varphi_1}s) > \alpha$ en $\Re(e^{i\varphi_2}s) > \alpha$ gelegen deel van de bisectrise van de begrenzingsrechten dezer halfvlakken gelegen zijn: Immers voor die punten geldt:

$$\arg s = -\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \quad \text{en} \quad |s|\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} > \alpha$$

en wegens $\Re(st) = |s|\,R\cos(\varphi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}) \geq |s|R\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$ is:

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}F(t)\,dt\right| \leqslant R(\varphi_2-\varphi_1)\,e^{-|s|R\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}.Ae^{-\alpha R} =$$

$$A(\varphi_2-\varphi_1)\,e^{-R(|s|\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}-\alpha)}$$

Voor de beschouwde punten s nu, is de coëfficiënt van $-R$ in de exponent positief, dus nadert het rechterlid van de laatste ongelijkheid tot nul voor $l \to +\infty$. Twee willekeurige integralen $\mathcal{L}^{(\varphi_1)}(F)$ en $\mathcal{L}^{(\varphi_2)}(F)$ stemmen dus op een halve rechte overeen en zijn dus elementen van dezelfde analytische functie.

Bewijzen we nu de uitbreiding van stelling 1:

<u>Stelling 4</u>: Voldoet $F(t)$ aan de voorwaarden van stelling 3 en geldt bovendien

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda_n} \quad (-1 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \to +\infty)$$

voor $|t| \to 0$ bij vast $\arg t$ met $\alpha < \arg t < \beta$, dan geldt voor de in $-\beta - \frac{\pi}{2} < \arg s < -\alpha + \frac{\pi}{2}$ door $f(s) = \mathcal{L}^{(\varphi)}(F)$, $(\alpha < \varphi < \beta)$ gedefinieerde functie:

$$f(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{s^{\lambda_n+1}} \quad \text{voor } s \to \infty$$

gelijkmatig in $-\beta - \frac{\pi}{2} + \delta < \arg s < -\alpha + \frac{\pi}{2} - \delta$, bij iedere $\delta > 0$.

Stelt men $t = re^{i\varphi}$ (r reëel) $(\alpha < \varphi < \beta)$, dan is

$$\int_0^{\infty(\varphi)} e^{-st} F(t)\,dt = e^{i\varphi}\int_0^{\infty} e^{-se^{i\varphi}r} F(re^{i\varphi})\,dr$$

en

$$F(re^{i\varphi}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n\varphi} r^{\lambda_n}.$$

Toepassing van stelling 1 geeft:

$$f(s) \sim e^{i\varphi}\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n\varphi}\frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{(se^{i\varphi})^{\lambda_n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n+1)}{s^{\lambda_n+1}}$$

voor $|s| \to \infty$ met $-\varphi-\frac{\pi}{2}+\delta < \arg s < -\varphi+\frac{\pi}{2}-\delta\ (\delta>0)$

Dit geldt voor iedere φ met $\alpha<\varphi<\beta$ zodat de ontwikkeling geldt in $-\beta < \frac{\pi}{2}+\delta < \arg s < -\alpha+\frac{\pi}{2}-\delta\ (\delta>0)$

Syllabus Colloquium Asymptotische Ontwikkelingen

Spreker: B.J. de Jong, Kinderdijkstr.16 - Asd.Zd.

Een toepassing van stelling 4 vinden we in:

de reeks van Stirling voor $\log \Gamma(s)$

We beschouwen de voor $Rs > 0$ reguliere functie

$$f(s) = \log \Gamma(s) - s \log s + \tfrac{1}{2} \log s + s - \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$

en we veronderstellen bekend, dat

$$f(s) \rightarrow 0 \text{ voor } s \rightarrow +\infty \text{ (s reëel).}$$

Volgens Hoofdstuk III, pag.23, stelling 3 is dit zeker noodzakelijk, opdat $f(s)$ een Laplace-getransformeerde zij.

Uit $f'(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \log s + \dfrac{1}{2s}$ en

$\dfrac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \dfrac{1}{s}$ (volgt door differentiëren uit $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$)

volgt, dat $f(s)$ voldoet aan de differentievergelijking

$$y'(s+1) - y'(s) = -\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \qquad (1)$$

Voldoet ook $g(s)$ aan deze vergelijking, dan geldt, als we $g(s) - f(s) = v(s)$ stellen,

$$v'(s+1) - v'(s) = 0 \text{ en dus } v(s+1) - v(s) = c.$$

Slechts als $v(s) \equiv 0$ is, geldt $g(s) \rightarrow 0$ voor $s \rightarrow +\infty$ (s reëel).

Van alle functies, die aan (1) voldoen, kan dus $f(s)$ slechts een Laplace getransformeerde zijn. Veronderstel nu, dat er inderdaad een $F(t)$ is met $f(s) = L\{F(t)\}$. Volgens stelling 2 is dan $f'(s) = L\{-tF(t)\}$. Verder ziet men gemakkelijk in dat $f'(s+1) = L\{-te^{-t}F(t)\}$

Voorts is $\dfrac{1}{s} = L(1)$ en $\dfrac{1}{s+1} = L(e^{-t})$ en $\log\left(1 + \dfrac{1}{s}\right) = L\left(\dfrac{1-e^{-t}}{t}\right)$.

(Het laatste verifiëert men door het linkerlid in een reeks te ontwikkelen, en termsgewijze de bijbehorende objectfunctie te bepalen).

Dus moet $F(t)$ voldoen aan

$$-te^{-t}F(t) + tF(t) = -\frac{1-e^{-t}}{t} + \tfrac{1}{2}(1 + e^{-t}), \text{ zodat}$$

$F(t) = \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t} - \tfrac{1}{2}\right)$. Deze functie heeft als singulariteiten slechts polen en wel in $t = 2k\pi i$ $(k = \ldots, -2, -1, +1, +2, \ldots)$ en is dus in 't bijzonder in $|\arg t| < \pi/2$ regulier. Hier geldt zeker $F(t) = O(e^{\varepsilon|t|})$ voor $t \rightarrow \infty$ voor iedere $\varepsilon > 0$. Volgens stelling 3

3 heeft F (t) dus een L.-getransformeerde en deze moet aan (1) voldoen, zodat dus inderdaad f(s) = L (F).

In de omgeving van de oorsprong is F(t) (die een even functie is) in een machtreeks te ontwikkelen.

De ontwikkeling definiëert juist de getallen van Bernoulli B_{2n} :

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2(n-1)}$$

Volgens stelling 4 geldt dus in $|(\arg s)| < \pi$ en gelijkmatig in $|(\arg s)| < \pi - \delta$ $(\delta > 0)$:

$$f(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{B_{2n}}{(2n-1)(2n)} \cdot \frac{1}{s^{2n-1}} \qquad \text{ofwel}$$

$$\log \Gamma(s) \sim s \log s - \tfrac{1}{2} \log s - s + \tfrac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n-1)\, 2n} \cdot \frac{1}{s^{2n-1}}$$

voor $s \to \infty$.

Een toepassing van stelling 1 is:

<u>de asymptotische ontwikkeling van de Bessel-functies voor groot argument</u>.

Gaan we b.v. uit van $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

I.v.m. $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = B(\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi$, is

$$J_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2})\, 2^{2n}} (x\cos\varphi)^{2n}\, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi$$

Substitutie van $z = \cos\varphi$ geeft:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xz)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{ixz}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

Zet men $x = is$ en $z = t-1$, dan krijgt men:

$$J_0(is) = \frac{e^{s}}{\pi} \int_0^2 e^{-st} [t(2-t)]^{-\frac{1}{2}} dt$$

Uit de ontwikkeling $[t\,(2-t)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2^n\, n!} t^{n-\frac{1}{2}}$

in de omgeving van t = 0,

en stelling 1 volgt:

$$\pi e^{-s} J_0(is) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\Gamma(n+\frac{1}{2})\right)^2}{2^n\, n!} \cdot \frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

voor $s \to \infty$ in $|\arg s| < \pi$

of wel $J_0(x) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \cdot \frac{e^{-ni\frac{\pi}{2}}}{2^n\, n!} \cdot \frac{1}{x^n}\right) \frac{e^{-i(x-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi x}}$

voor $x \to \infty$ in $0 \leq \arg x < \pi$ gelijkmatig in

$0 < \delta \leq \arg x \leq \pi - \delta$

Om een ontwikkeling voor positieve x te vinden, schrijven we:

$$\pi e^{-s} J_0(is) = \int_0^{1+i} e^{-st} [t(2-t)]^{-\frac{1}{2}} dt + \int_{1+i}^{2} e^{-st} [t(2-t)]^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$f_1(s) + f_2(s) .$$

Voor f (s) vinden we dezelfde ontwikkeling als (1):

$$f(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\Gamma(n+\frac{1}{2})\right)^2}{2^n . n!} \cdot \frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (2),$$

echter nu voor $s \to \infty$ in $\frac{3}{4}\pi < \arg s < \frac{1}{4}\pi$

Substitutie van t = 2 + u, daarna $u = re^{i\varphi}$

met $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ in de integraal voor f_2 (s) geeft:

$$f_2(s) = -e^{i(\varphi+\pi/2)} \cdot e^{-2s} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-se^{i\varphi} r} \left[re^{i\varphi}(2+re^{i\varphi})\right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

Uit de ontwikkeling

$$(re^{i\varphi}(2+re^{i\varphi})]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!\, 2^n} e^{i(n-\frac{1}{2})\varphi} . r^{n-\frac{1}{2}}$$

in de omgeving van r = 0, en stelling 1 volgt:

$$f_2(s) \sim -\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2\pi s}} e^{-2s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\Gamma(n+\frac{1}{2}))^2}{2^n . n!} \cdot \frac{1}{s^n} \quad (3)$$

voor $s \to \infty$ in $-\frac{5}{4}\pi < \arg s < -\frac{1}{4}\pi$

Optelling van (2) en (3) geeft een ontwikkeling van $\pi e^{-s} J_0(is)$

die zeker op de negatieve imaginaire as geldig is.

Substitutie van x =is geeft de ontwikkeling, die zeker op de positieve

reële as geldig is:

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{\cos(x - \pi/4 + n.\pi/2)}{x^n}$$

Omdat Jo(x) even is, is nu dus voor alle x een asymptotische ontwikkeling afgeleid.

Een toepassing van stelling 4 is nog:

<u>de asymptotische ontwikkeling van de foutenfunctie van Gauss</u>

Uit: $L(\frac{1}{2} e^{-t^2/4}) = e^{s^2} \int_s^{\infty} e^{-u^2} du$ (waarbij de integratieweg evenwijdig met

de positieve reële as is),

en de ontwikkeling $\frac{1}{2} e^{-t^2/4} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n . n!}$ bij t = 0

en $e^{-t^2/4} = o(1)$ voor $|\arg t| \leq \alpha < \pi/4$

en stelling 4 volgt:

$$e^{s^2} \int_s^{\infty} e^{-u^2} du \sim \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n . n! \, s^{2n+1}} \quad \text{voor } s \to \infty \text{ in } |\arg s| \leq \vartheta < \frac{3}{4}\pi$$

Enige omvorming en $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ geeft:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^{\infty} e^{-u^2} du \sim 1 - \frac{1}{\pi} e^{-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{1}{2})}{s^{2n+1}} \qquad \text{voor reële } s \to +\infty$$

Indien f(s) = L (F(t)), kan men onder zekere voorwaarden omgekeerd de objectfunctie F(t) in de resultaatfunctie F(s) uitdrukken:

$F(t) = L^{-1} \{ f(s) \}$ en nu uit het asymptotisch gedrag van f(s) tot het gedrag van F(t) besluiten. Vele der omkeerformules berusten op het integraaltheorema van Fourier, dat we bekend veronderstellen:

<u>Stelling 5</u>: Is $G(t)$ in ieder eindig interval integreerbaar en bestaat $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|\,dt$, dan geldt in ieder punt, waarbij een omgeving aan te geven is, waarin $G(t)$ van begrensde variatie is:

$$\frac{G(t+0)+G(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\tau}\,G(\tau)\,d\tau$$

Met $G(t) = 0$ voor $t \leq 0$ en $G(t) = e^{-xt} F(t)$ voor $t > 0$ geeft dit, zo men $x+iy = s$ stelt:

<u>Stelling 6</u>: Convergeert $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$ voor $x > \sigma$ absoluut, dan geldt in ieder punt, waarbij een omgeving aan te geven is, waarbij $F(t)$ van begrensde variatie is:

$$\frac{F(t+0)+F(t-0)}{2} = \frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(x+iy)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s)\,ds \quad (x > \sigma)$$

<u>Stelling 7</u>: Is $L(F)$ voor $s = s_0$ convergent, dan geldt:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0}\,ds \qquad (x > Rs_0)$$

met $\Phi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\,d\tau$

Volgens Hoofdstuk III pag.20 is voor $Rs > Rs_0$

$$\frac{L(F)}{s-s_0} = \int_0^\infty e^{-st}\; e^{s_0 t}\,\Phi(t)\,dt$$

De integraal uit het rechterlid convergeert voor $Rs > Rs_0$ absoluut, wegens de begrensdheid van $\Phi(t)$ (die uit de ondersteIde convergentie van $\int_0^\infty e^{-s_0\tau} F(t)\,dt$ volgt). Toepassing van stelling 6 op $e^{s_0 t}\,\Phi(t)$, hetgeen een continue functie is, geeft het te bewijzene.

<u>Stelling 8:</u> Is $L(F)$ voor $s = s_0$ convergent en is $F(t)$ voor $t \geqq A$ continu, terwijl $G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s)\,ds$ met zekere $x_0 > Rs_0$ voor alle $t \geqq A$ convergeert en in ieder interval $A \leq t \leq T$ gelijkmatig, dan geldt voor $t \geqq A$:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s)\,ds$$ Rs

Op grond van de gelijkmatige convergentie is $G(t)$ in ieder interval $A \leq t \leq T$ continu en geldt er:

$$\int_A^T e^{-s_0 t}\,G(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(s)\,ds \int_A^T e^{t(s-s_0)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{T(s-s_0)} - e^{A(s-s_0)}}{s-s_0}\, f(s)\,ds = \int_A^T e^{-s_0 t} F(t)\,dt,$$

op grond van stelling 7.

Dit geldt voor iedere $T \geqq A$. Wegens de continuïteit van $G(t)$ en $F(t)$ voor $t \geqq A$ geldt voor $t \geqq A$:

$$F(t) = G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\,ds, \text{ q e.d.}$$

Toepassing van Hoofdstuk III stelling 5, pag.23 geeft:

<u>Stelling 9</u>: Is $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} f(x+iy)dy$ voor $t \geqq A$ gelijkmatig convergent, dan geldt: $I \to o$ voor $t \to \infty$.

Toepassing van de stellingen 8 en 9 geeft:

<u>Stelling 10</u>: Is $L(F)$ voor $s=s_o$ convergent en is $F(t)$ voor $t \geqq A$ continu, terwijl $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} f(x_o+iy)dy$ met zekere $x_o > Rs_o$ voor alle $t \geqq A$ gelijkmatig convergeert, dan is:

$$F(t) = o(e^{xt}) \text{ voor } t \to \infty$$

Alvorens deze stelling uit te breiden, leiden we af een

<u>Hulpstelling</u>: Convergeert $\int_{y_o}^{\infty} e^{iyt} g'(y)\,dy$ gelijkmatig voor $t \geqq A > o$ en geldt $g(y) \xrightarrow{y_o} o$ voor $y \to \infty$, dan convergeert $\int_{y_o}^{\infty} e^{iyt} g(y)dy$ en wel gelijkmatig voor $t \geqq A > o$.

<u>Bewijs:</u>

Uit $\int_a^b e^{ity} g(y)dy = \frac{1}{it} e^{ity}\Big]_b^a - \frac{1}{it}\int_a^b e^{ity} g'(y)dy$

volgt voor $t \geqq A$:

$$\left|\int_a^b e^{ity} g(y)dy\right| \leqq \frac{1}{A}\left(|g(a)| + |g(b)| + \left|\int_a^b e^{ity} g'(y)dy\right|\right.$$

Het rechterlid is, onafhankelijk van t, willekeurig klein, mits a en b maar voldoend groot zijn.

<u>Opmerking</u>: Een analoge stelling geldt bij $y = -\infty$

We breiden nu stelling 10 a.v. uit:

<u>Stelling 11</u>: Onder de aannamen:

1) $f(s) = L(F)$ is voor $s = s_o$ convergent
2) $F(t)$ is voor $t \geqq A$ continu.
3) $f(s)$ is in $Rs > a$ $(a \leq Rs_o)$ analytisch en $f(s)$ heeft voor $Rs \to a$ nog randwaarden $f(a+iy)$, zodat $f(s)$ in $Rs \geqq a$ continu is.
4) $f'_y(a+iy)$, $f''_y(a+iy)$, ..., $f^{(n)}_y(a+iy)$ bestaan en $f^{(n)}_y(a+iy)$ is in ieder eindig interval integreerbaar
5) $f^{(k)}_y(a+iy) \longrightarrow o$ voor $y \to \pm\infty$ $(k=o,1,\ldots,n-1)$
6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(n)}_y(a+iy)dy$ convergeert voor $t \geqq A$ gelijkmatig
7) $\int^{x_o+i\omega} e^{ts} f(s)ds$ en $\int^{x_o+i\omega} e^{ts} f(s)ds$ naderen met

gelijkmatig tot nul voor $\omega \to \infty$,

geldt: $F(t) = o(t^{-n} e^{at})$ voor $t \to \infty$

Bewijs: Voor $k = n$ volgt uit

$$\int_{-\omega}^{+\omega} e^{ity} f^{(k-1)}(a+iy)dy = \left. \frac{1}{it} e^{ity} f^{(k-1)}(a+iy)\right]_{-\omega}^{+\omega} - \frac{1}{it}\int_{-\omega}^{+\omega} e^{ity} f^{(k)}(a+iy)dy$$

wegens 5) en 6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(k-1)}(a+iy)dy = -\frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(k)}(a+iy)dy$$

en wegens 6) en de hulpstelling convergeert ook de integraal uit het linkerlid gelijkmatig voor $t \geq A$.

De laatste betrekking is nu achtereenvolgens ook voor $k = n-1, \ldots, 2, 1$ te bewijzen, zodat tenslotte geldt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(a+iy)dy = \left(-\frac{1}{it}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(n)}(a+iy)dy,$$ waarbij ook de integraal uit het linkerlid gelijkmatig voor $t \geq A$ convergeert.

Nu is $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(a+iy)dy = \frac{e^{-at}}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{ts} f(s)ds$, waarbij de laatste integraal in ieder interval $A \leq t \leq T$ gelijkmatig convergeert en wegens 7) en de wegens 3) toepasbare uitbreiding van de integraalstelling van Cauchy (waarbij de functie op de integratieweg zelf slechts continu ondersteld wordt) gelijk is aan $\frac{e^{-at}}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s)ds$. De laatste integraal convergeert weer in ieder interval $A \leq t \leq T$ gelijkmatig en dus geldt op grond van 1) en 2) en stelling 8 voor $t \geq A$:

$$2\pi e^{at} F(t) = \frac{1}{i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts} f(s)ds = 2\pi\left(-\frac{1}{it}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f^{(n)}(a+iy)dy,$$

op grond van het eerder bewezene.

Wegens 6) en stelling 9 nadert de integraal uit het laatste lid tot nul voor $t \to \infty$, waarmee het gestelde bewezen is.