STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12g

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950,3g;

Faculteitreeksen en Laplace-intergralen.

W.L.Scheen.

1949

Faculteitreeksen en Laplace-integralen.

1. Theorie van Hadamard over machtreeksen van eindige orde op de convergentiecirkel.

(Vgl. J. Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor; Journ.de math. pures et appl. VIII(1892) pag.101-186)

Hadamard beschouwt een machtreeks met eindige convergentiestraal

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

en zijn afgeleiden van willekeurige orde, gedefinieerd door

$$D_z^0 F(z) = F(z)$$
$$D_z^{\alpha} F(z) = \frac{1}{(-\alpha-1)!} \int_{z_0}^{z} (z-\xi)^{-\alpha-1} F(\xi)d\xi \quad (\alpha<0) \tag{12}$$
$$D_z^{\alpha} F(z) = \frac{d^p}{dz^p} D_z^{\alpha-p} F(z) \quad (0\le p-1<\alpha<p)$$

en noemt een functie er één met eindige wisseling (à écart fini) in een interval (a,b), als er een limes superior is aan te geven voor de integralen

$$m\int_{a'}^{b'} \cos mz\, f(z)\, dz \text{ en } m\int_{a'}^{b'} \sin mz\, f(z)dz,$$

waarin (a',b') een willekeurig onderinterval van het interval (a,b) is. Deze limes superior noemt hij de wisseling I (écart) van de functie in het interval (a,b).

Door op een willekeurige rectificeerbare kromme in het complexe vlak een functie als functie van de booglengte te beschouwen, kan hij op deze manier het begrip eindige wisseling ook op zo'n kromme definiëren.

Een functie met begrensde variatie heeft ook een eindige wisseling de omkering van deze stelling is niet bewezen.

Als orde ω van de functie F(z) definieert hij de ondergrens van de (reële) getallen λ, waarvoor geldt, dat $D_z^{-\lambda} F(z)$ langs de convergentiecirkel eindig en continu is en een eindige wisseling heeft.

Hij bewijst dan, dat

$$\omega = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|a_n|}{\log n} \tag{1.3}$$

Algemener definieert hij de orde $\omega(\alpha,\beta)$ langs een boog (α,β) van de convergentiecirkel, als de ondergrens van de (reële) getallen λ waarvoor geldt, dat $D_z^{-\lambda} F(z)$ langs die boog eindig en continu is en een eindige wisseling heeft. Tenslotte noemt hij de orde $\omega(z_0)$ van F(z) in een willekeurig punt z_0 van de convergentiecirkel de waarde van $\omega(\alpha,\beta)$ in een willekeurig klein boogje (α,β) om z_0.

Dan geldt, daar de orde in een regulier punt $-\infty$ zal zijn:

De orde ω van $F(z)$ is de bovengrens van de $\omega(z_k)$ in de singulariteiten z_k van $F(z)$ op de convergentiecirkel.

Hadamard toont dan nog aan, dat, indien de orde $\omega(\alpha,\beta)$ op een boog (α,β), waarin α en β de argumenten $\vartheta(\alpha)$ en $\vartheta(\beta)$ hebben, positief is, deze ook gedefinieerd kan worden als de ondergrens van de (reële) waarden λ waarvoor geldt, dat $(\rho-\rho')^{\lambda}\ F(\rho' e^{i\vartheta})$ en $(\rho-\rho')^{\lambda}\ I(\rho')$ eindig en begrensd blijven voor $\vartheta(\beta) < \vartheta < \vartheta(\alpha)$, als ρ' van de kleine kant tot de convergentiestraal ρ nadert. Hierin is $I(\rho')$ geschreven voor de wisseling van $F(z)$ op een boog met straal ρ' en argument tussen $\vartheta(\beta)$ en $\vartheta(\alpha)$.

Daar, als $F(z)$ de orde $\omega(\alpha,\beta)$ op een boog (α,β) heeft, $\frac{d^p}{dz^p}F(z)$ de orde $\omega(\alpha,\beta)+p$ heeft, kan men deze definitie ook uitbreiden t functies met negatieve orde, door eerst zo vaak te differentiëren dat een functie van positieve orde ontstaat, d.w.z. als $-p+1 \leq \omega(\alpha,$ $< -p$ zal men $\frac{d^p}{dz^p}F(z)$ beschouwen.

Als op een boogje (α,β) waar $z = z_1$ de enige singulariteit van $F(z)$ is, $(z - z_1)^{\lambda}\ F(z)$ continu en eindig is, zal de orde zeker niet groter zijn dan $\lambda + 1$.

Immers

$$D_z^{-\lambda-\varepsilon} F(z) = \frac{1}{(\lambda+\varepsilon-1)!}\int_{z_1}^{z}(z-\xi)^{\lambda-\varepsilon-1}\ F(\xi)\,d\xi$$

zal dan continu en eindig zijn voor willekeurig kleine positieve ε, en dus zal $D_z^{-\lambda-\varepsilon-1}F(z)$ als integraal van een continue eindi functie en begrensde variatie, ergo eindige wisseling hebben, en ook continu en eindig zijn.

Het product van een functie $F(z)$ van de orde $\omega(\alpha,\beta)$ op de boog (α,β) met een functie, die op die boog regulier is, is hoogstens weer van de orde $\omega(\alpha,\beta)$. De orde zal precies $\omega(\alpha,\beta)$ zijn, als de reguliere functie in die singulariteiten van $F(z)$ waar $F(z)$ de orde $\omega(\alpha,\beta)$ heeft en welke op de boog (α,β) liggen, geen nulpunten heeft.

Het product van **twee** functies van positieve orde heeft een orde, die hoogstens gelijk is aan de som van de orden der factoren.

Het product van een functie van positieve orde met een van niet-positieve orde heeft een orde, die hoogstens gelijk is aan de positieve orde.

Het product van twee functies van negatieve orde heeft een orde, die hoogstens gelijk is aan de grootste der orden van de factoren.

In het algemeen dus:

$$\omega(f \times g) \leq \max.\{\omega(f),\ \omega(g),\ \omega(f)+\omega(g)\}$$

Tenslotte zij opgemerkt, dat men voor (1.3) ook kan schrijven

$$\left.\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{\lambda-1}} &= 0 \qquad \text{als } \lambda > \omega \\ &= \infty \qquad \text{als } \lambda < \omega \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

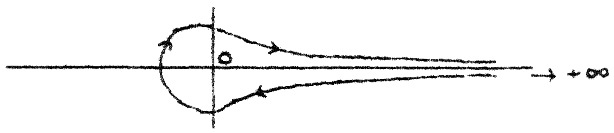
Functies van eindige orde zijn b.v.

$(1-z)^{-\mu} \ \log^p (1-z)$ orde $\omega = \mu$, als niet tegelijkertijd $p = 0$ en μ geheel niet-positief. (In het laatste geval is de functie analytisch)

2. Faculteitreeksontwikkelingen van Laplace-integralen.

(Vgl. N.E.Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung pag. 256-271)

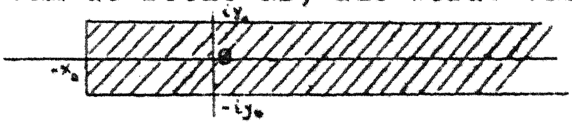
We beschouwen Laplace-integralen van een enigszins veralgemeend type. Het contour zal n.l. van $+\infty$ lopen langs de reële as, één keer in negatieve richting om de oorsprong, en dan weer terug naar $+\infty$



Zij nu

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(o-)} e^{-zx}\, g(x)\, dx \tag{2.1}$$

De eerste voorwaarde, die we aan $g(x)$ zullen opleggen, zal zijn, dat deze functie - met eventuële uitzondering van de oorsprong en het oneindige punt, analytisch zal zijn in een strook ter weerzijde van de reële as, die wordt vastgelegd door



$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\ x > -x_0 \qquad && x_0 > 0 \\ &|\mathrm{Im}\ x| < y_0 \qquad && y_0 > 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

We stellen nu met $\alpha > 0$

$$t = e^{-\alpha x} \tag{2.3}$$

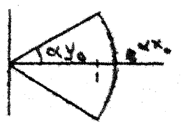
dan gaat (2,1) over in

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha} \int^{(1+)} t^{\frac{z}{\alpha}-1}\, g^*(t)\, dt \tag{2.4}$$

met $\quad g^*(t) = g\left(\frac{-\log t}{\alpha}\right)$

$g^*(t)$ zal in het algemeen een veelwaardige functie van t zijn, we moeten daarvan die tak kiezen, die correspondeert met de waarden van $g(x)$ voor reële x. (Dit kunnen evt.twee takken van de functie zijn als $x=0$ een vertakkingspunt van $g(x)$ was).

Deze tak(ken) zal (zullen) met evt. uitzondering van de punten $t=0$ en $t=1$ analytisch zijn in een sector om de oorsprong, die vastgelegd wordt door



$$\begin{aligned} &|t| < e^{\alpha x_0} \\ &|\arg t| < \alpha y_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

We zullen nu α zo kiezen, dat $e^{\alpha x_0} > 2$ en $\alpha y_0 > \frac{\pi}{2}$, d.i.

$$\alpha > \max\left(\frac{\pi}{2y_0}, \frac{\log 2}{x_0}\right) \tag{2,6}$$

Dan zal de eenheidscirkel om het punt $t=1$ geheel binnen de door (2.5) gedefinieerde sector vallen.

De uiteindelijke voorwaarde, die we nu aan $g(x)$ zullen stellen, zal zijn, dat voor zekere α, die aan (2.6) voldoet, (of evt. een kleine α, waarvoor $g^*(t)$ binnen en op de eenheidscirkel om $t=1$, met eventuële uitsluiting van $t=0$, regulier is) na de transformatie $t = e^{-\alpha x}$ $g^*(t)$ te schrijven zal zijn, als

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{p} (t-1)^{\nu} \log^{k}(t-1)\, h_k(t) \tag{2.7}$$

waarin de $h_k(t)$ in en op de cirkel $|t-1| = 1$ regulier zijn, met evt. uitsluiting van $t=0$, waar dan de orde eindig moet zijn.

Dit zal dan ook voor elke $\alpha_1 > \alpha$ gelden, stel n.l.

$$t_1 = e^{-\alpha_1 x}, \text{ dus } t = t_1^{\alpha/\alpha_1}$$

Dit gesubstitueerd in $g^*(t)$ levert

$$g_1^*(t_1) = g^*(t_1^{\alpha/\alpha_1}) = \sum_{k=0}^{p} (t_1^{\alpha/\alpha_1} - 1)^{\nu} \log^{k}(t_1^{\alpha/\alpha_1} - 1)\, h_k(t_1^{\alpha/\alpha_1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (t_1 - 1)^{\nu} \left(\frac{t_1^{\alpha/\alpha_1} - 1}{t_1 - 1}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \log^{j}(t_1 - 1) \log\left(\frac{t_1^{\alpha/\alpha_1} - 1}{t_1 - 1}\right) h_k(t_1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (t_1 - 1)^{\nu} \log^{k}(t_1 - 1)\, h_{k,1}(t_1)$$

waarin

$$h_{k,1}(t_1) = \left(\frac{t_1^{\alpha/\alpha_1} - 1}{t_1 - 1}\right)^{\nu} \sum_{j=k}^{p} \binom{j}{k} \log^{j-k}\left(\frac{t_1^{\alpha/\alpha_1} - 1}{t_1 - 1}\right) h_j(t_1^{\alpha/\alpha_1})$$

We zien, dat $h_{k,1}$ een som is van producten van de $h_j(t_1^{\alpha/\alpha_1})$ met functies, die in en op de eenheidscirkel om $t_1 = 1$ analytisch zijn, terwijl ook $h_j(t_1^{\alpha/\alpha_1})$ daar analytisch is, met evt. uitzondering van $t_1 = 0$, waar de orde eindig is Dus ook de $h_{k,1}(t_1)$ vertonen deze eigenschappen.

We zullen nu een bepaalde α-waarde, die aan (2.6) voldoet kiezen en van de integraal (2.4) dat deel, dat correspondeert met een bepaalde term

$(t-1)^{\nu} \log^{k}(t-1)\, h(t)$ trachten te ontwikkelen.

Zij $h(t)$ in een Taylor-reeks om $t=1$ ontwikkeld:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-1)^n \tag{2.8}$$

De orde van $h(t)$ zij ω.

We beschouwen dus:

$$G_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\alpha} \int_0^{(1+)} t^{\frac{z}{\alpha}-1} (t-1)^{\nu} \log^{k} (t-1)\, h(t)\, dt \qquad (2.9)$$

Hierin kunnen we formeel h(t) door de reeks (2.8) vervangen en term voor term integreren.

Dit levert

$$G_k(z) = \frac{1}{\alpha} \sum a_n \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} t^{\frac{z}{\alpha}-1} (t-1)^{\nu+n} \log^{k}(t-1)\, dt \qquad (2.10)$$

Zij nu eerst ν niet geheel positief of nul

Voor $\nu, \mu > -1$ geldt, mits ook hier ν niet geheel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} t^{\mu} (t-1)^{\nu}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_0^1 t^{\mu}(t-1)^{\nu}\, dt + e^{2\pi\nu i} \int_1^0 t^{\mu} (t-1)^{\nu}\, dt \right\}$$

$$= -\frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_0^1 t^{\mu} (1-t)^{\nu}\, dt$$

$$= \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \quad \frac{\mu!\,\nu!}{(\mu+\nu+1)!}$$

$$= \frac{\mu!}{(\mu+\nu+1)!\,(-\nu-1)!} \qquad (2.11)$$

(We hebben stilzwijgend aangenomen, dat we $(t-1)^{\nu}$ vastleggen door $\log(t-1) = -\pi i$ te nemen als we in $t=0$ beginnen). Formule (2.11) geldt door analytische voortzetting voor alle ν-waarden. Door k-maal naar ν te differentiëren vinden we dan tenslotte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} t^{\mu} (t-1)^{\nu} \log^{k}(t-1)\, dt = \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \nu^k} \quad \frac{\mu!}{(\mu+\nu+1)!\,(-\nu-1)!}$$

Substitueren we dit in (2.10) dan krijgen we

$$G_k(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial^k}{\partial \nu^k} \left\{ \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!\,(-\nu-n-1)!} \right\} \qquad (2.13)$$

Nu geldt ten eerste

$$\frac{\partial^k}{\partial \nu^k} \; \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!\,(-\nu-n-1)!} = O\left(n^{-\mathrm{Re}\, z/\alpha}\right) \qquad (2.14)$$

bijv.

$$\frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!\,(-\nu-n-1)!} = (-1)^n \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \; \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!\,(\nu+n)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!} = O\left(n^{-\mathrm{Re}\, z/\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \; \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!\,(\nu-n-1)!} = \frac{1}{\pi} \; \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!\,(\nu+n)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!} \Big\{ \psi(\nu+n) - \psi(\tfrac{z}{\alpha}+\nu+n) + (-1)^n \pi \cos \pi\nu \Big\}$$

waarin

$\psi(\nu+n) - \psi(\frac{z}{\alpha}+\nu+n) = O(\frac{1}{n})$, dus

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\ \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!}{(\frac{z}{\alpha}+\nu+n)!\,(\nu-n-1)} = O(n^{-Re\, z/\alpha}).$$

etc.

Maar $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{\lambda-1}} = 0$ als $\lambda > \omega$ volgens (1.4)

dus voor willekeurige $\varepsilon > 0$ is

$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon-1}} = 0$

Zij hierin $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$,

dan vinden we

$$\frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon_1}} = o(n^{-1-\varepsilon_2})$$

Dus als $b_n = O(n^{\omega+\varepsilon_1})$, zal de reeks $\sum \frac{a_n}{b_n}$ absoluut convergeren.

Door ε_1 willekeurig klein te maken vinden we voor de reeks (2.13) door rekening te houden met (2.14):

De door (2.13) gedefinieerde reeks voor $G_\kappa(z)$ convergeert absoluut in het halfvlak gedefinieerd door

$$Re\ z > \alpha\omega \tag{2.15}$$

Bovendien convergeert ze gelijkmatig in een halfvlak

$Re\ z > \alpha\omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

hiermee is het term voor term integreren gerechtvaardigd. (Als h(t) ook in t=0 analytisch is $\omega = -\infty$ en convergeert de reeks overal absoluut).

Ook als $Re\ z < \alpha\omega$ kan de reeks nog convergeren, daar een faculteit reeks gelijkmatig convergeert in ieder halfvlak, dat met zijn rand geheel binnen het convergentie halfvlak ligt, zal de reeks in het gehele convergentie halfvlak een analytische functie voorstellen.

In ieder geval zal de reeks voor $Re\ z < \alpha(\omega-1)$ divergeren, immers als $Re\ z = \alpha(\omega-1-\varepsilon)$, dan is de orde van de termen in (2.13)

$O\,(a_n/n^{\omega-1-\varepsilon})$ en volgens (1.4) is

$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{\omega-1-\varepsilon}} = \infty$, dus de termen naderen niet meer tot nul.

De convergentieabscis van de faculteitreeks kan zowel groter, kleiner of gelijk aan de convergentieabscis van de Laplace-integraal zijn.

Tenslotte zij opgemerkt, dat men in (2.9) i.p.v. h(t) ook $h(\mu,t) = t^{\mu}\,h(t)$ naar $(t-1)$ kan ontwikkelen. Dan is $h(\mu,t)$ weer een functie van eindige orde, men vindt een reeks analoog aan die in (2.13), echter met $\frac{z}{\alpha}$ door $\frac{z}{\alpha}-\mu$ vervangen.

Als $h(t)$ een positieve orde heeft en μ negatief is, zal de orde van $h(\mu,t)$ hoogstens $\omega - \mu$ zijn. We zien dus, dat de nieuwe reeks voor

$$Re(\tfrac{z}{\alpha} - \mu) > \omega - \mu$$

of $Re\, z > \alpha\omega$ zeker weer convergeert.

In het geval ν geheel positief of nul is, kunnen we het contour samentrekken tot de reële as van 0 tot 1 en terug. De enige verandering die optreedt als we teruggaan, is dat in de integrand van (2.9) log (t-1) om een bedrag $2\pi i$ veranderd is. Door nu beide stukken, heen en terug, samen te voegen, zien we, dat we een lineair compositum van integralen van het type

$$G_j^*(z) = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{z}{\alpha}-1}\ (1-t)^\nu\ \log^j\ (1-t)\ h(t)dt \qquad (2.16)$$

overhouden waarin $j \leq k-1$.

(Dit samentrekken kunnen we ook uitvoeren als $R_e\nu > -1$ maar niet geheel, dan wordt bij het teruggaan bovendien $(t-1)^\nu$ met een zekere factor vermenigvuldigd, dit heeft tengevolge, dat in (2.16) j ook nog gelijk k kan worden).

Dit samentrekken van het contour komt hiermee overeen, dat men in de oorspronkelijke vorm (2.1) van de Laplace-integraal het contour langs de reële as van 0 tot ∞ neemt.

Men stelt nu weer

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^*\ (1-t)^n \qquad (2.17)$$

en vindt

$$\begin{aligned} G_j^*(z) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \int_0^1 t^{z/\alpha - 1}\ (1-t)^{\nu+n}\ \log^j\ (1-t)\ dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*\ \frac{\partial^j}{\partial\nu^j}\ \frac{(\frac{z}{\alpha}-1)!\,(\nu+n)!}{(\nu+n+\frac{z}{\alpha})!} \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Voor de convergentie geldt hetzelfde als bij niet gehele positieve ν.

Nörlund's bewering, dat een Laplace-integraal

$$G(z) = \int_0^\infty e^{-xz}\, g(x)\ dx,$$

waarin $g(x)$ in een strook om de reële as, als door (2.2) gedefinieerd analytisch is, terwijl hierin voor zekere k gelijkmatig geldt:

$$\lim_{|x|\to\infty}\ e^{-kx}\ g(x) = 0$$

voor te stellen is door een faculteitreeks, volgt hieruit onmiddellijk. De transformatie $t = e^{-\alpha x}$ levert nu een $g^*(t)$ die analytisch is in de sector (2.5), terwijl $t^{k/\alpha}\ g^*(t)$ continu is in die sector, met inbegrip van t=0. Door α aan de voorwaarde (2.6) te laten voldoen, valt de cirkel $|t-1| = 1$ geheel binnen deze sector, zodat $g^*(t)$ in en op deze cirkel, met evt.uitzond. van t=0 analytisch is, terwijl $t^{k/\alpha}\ g^*(t)$ op deze cirkel continu is. Volgens het in de eerste paragraaf gezegde is dus $g^*(t)$ van eindige orde.

3. Verband met asymptotische ontwikkelingen. Voorbeelden:

We beschouwen gemakshalve een integraal van het type: (2.16) met $\nu = j = 0$. De ster en de index j weg latend, hebben we dus

$$G(z) = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{z}{\alpha}-1} h(t)dt \qquad (3.1)$$

met

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-t)^n \qquad (3.2)$$

Voor (2.18) vinden we dan

$$G(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{\frac{z}{\alpha}(\frac{z}{\alpha}+1)\dots(\frac{z}{\alpha}+n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n . \alpha^n . \, n!}{z(z+\alpha)\dots(z+n\alpha)} \qquad (3.3)$$

Vergroten van de α-waarde kan geen kwaad zo als we in paragraaf 2 reeds zagen, echter wel verkleinen, doordat op deze wijze andere singulariteiten dan $t = 0$ op of in de cirkel $|t - 1| = 1$ ingevoerd kunnen worden.

Dit verklaart, waarom faculteitreeksen convergeren, terwijl asymptotische reeksen met ontwikkelingen naar $\frac{1}{z^n}$, die dus met $\alpha = 0$ corresponderen, divergeren.

Een eenvoudig voorbeeld van een faculteitreeks is (vgl. N.E. Nörlund loc.cit.)

$$\frac{(z+\rho)!}{(z-1)!\, z^{\rho+1}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \binom{\rho+s-1}{s} B_s^{(\rho+s)}}{(z+\rho+1)\dots(z+\rho+s)} \qquad (3.4)$$

waarin $B_s^{(\rho+s)}$ de getallen van Bernouilli van de orde $(\rho + s)$ zijn.

Deze reeksvoorstelling volgt uit

$$\frac{\rho\,!}{z^{\rho+1}} = \int_0^1 t^{z-1}\left\{-\log t\right\}^{\rho} dt$$

$$(-\log t)^{\rho} = \rho\,(1-t)^{\rho}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s\,!}\frac{B_s^{(\rho+s)}}{(\rho+s)}(1-t)^s \,.$$

Een andere is

$$\frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} = \sum_{s=n}^{\infty}\binom{s}{n}\frac{B_{s-n}^{(s+1)}(\alpha+s)}{z(z+1)\dots(z+s)} \qquad (3.5)$$

Een voorbeeld van een functie, waarvoor ook de ontwikkeling naar $\frac{1}{z^n}$ convergeert is $e^{-1/z}$.

Men heeft $e^{-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, z^n}$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!\, z^n}$$

Voor $n > 1$ is

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 t^{z-1} (-\log t)^{n-1}\, dt. \text{ (vgl. boven), dus}$$

$$e^{-1/z} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+1)!} \int_0^1 t^{z-1} (-\log t)^n\, dt$$

$$= 1 + \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{\log t}} J_1 (2\sqrt{-\log t})\, dt, \qquad (3,6)$$

of als $t = e^{-x}$

$$e^{-1/z} = 1 + \int_0^{\infty} e^{-xz} \frac{J_1(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \qquad (3.7)$$

$\frac{J_1(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ is een gehele functie, en in iedere strook om de reële as nadert $e^{-kx} \cdot \frac{J_1(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ gelijkmatig naar nul als $|x| \to \infty$ voor elke $k > 0$, dus is $e^{-1/z}$ in een faculteitreeks ontwikkelbaar.

Uit (3.6) vindt men:

$$e^{-1/z} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad (3.8)$$

waarin de a_n de ontwikkelingscoefficienten zijn van $\frac{J_1(2\sqrt{-\log t})}{\sqrt{-\log t}}$ naar $(1-t)$:

$$\frac{J_1(2\sqrt{-\log t})}{\sqrt{-\log t}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-t)^n . \qquad (3.8')$$

Een interessanter voorbeeld krijgen we, als we onvolledige Gamma-functies beschouwen. We definieren deze door

$$\Gamma_p(z) = \int_z^{\infty} e^{-\xi} \xi^{p-1}\, d\xi \qquad (3.9)$$

Zij hierin nu

$$\xi = z(x+1), \text{ dan vinden we}$$

$$\Gamma_p(z) = e^{-z} z^p \int_0^{\infty} e^{-zx} (1+x)^{p-1}\, dx. \qquad (3.9')$$

waarin $(1+x)^{p-1}$ regulier is in een halfvlak met $\mathrm{Re}\, x > -1$, terwijl voor elke $k > 0$ $e^{-kx} (1+x)^{p-1}$ gelijkmatig tot nul nadert als $|x| \to \infty$ in een strook van willekeurige breedte om de reële as. We krijgen dus, dat (3.9) naar een faculteitreeks van het type (3.3) is te ontwikkelen, als maar $\alpha > \log 2$ wordt gekozen. Bij $\alpha < \log 2$ wordt de reeks divergent, inderdaad vinden we voor $= 0$ een divergente asymptotische reeks.

We zullen het geval van $p = 0$, waarbij we $-\mathrm{E\,i}(-z)$ krijgen nader uitwerken.

$$- \mathrm{E\,i}(-z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi$$

$$= e^{-z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zx}}{1+x}\, dx \qquad (3.10)$$

We stellen $t = e^{-\alpha x}$ en krijgen

$$- \mathrm{E\,i}(-z) = \frac{e^{-z}}{\alpha} \cdot \int_0^1 t^{z/\alpha - 1} \left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1} dt \qquad (3.11)$$

We zullen nu $\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1}$ naar $\tau = 1 - t$ ontwikkelen.

Stelt men $1 - \frac{\log t}{\alpha} = \sum b_n \tau^n$

$$\text{en} \left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1} = \sum a_n \tau^n, \qquad (3.12)$$

$$\text{dan geldt } b_0 = 1,\ b_n = \frac{1}{n\alpha} \quad n \geq 1 \qquad (3.13)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{en } a_0\, b_0 &= 1 \\ a_n\, b_0 &= - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_{n-k} \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

Op deze wijze vindt men achtereenvolgens

$$a_0 = 1$$

$$\alpha\, a_1 = -1$$

$$\alpha^2 a_2 = \frac{2-\alpha}{2!}$$

$$\alpha^3 a_3 = -\frac{6-6\alpha+2\alpha^2}{3!}$$

$$\alpha^4 a_4 = \frac{24-36\alpha+22\alpha^2-6\alpha^3}{4!}$$

$$\alpha^5 a_5 = -\frac{120-240\alpha+210\alpha^2-100\alpha^3+24\alpha^4}{5!}$$

$$\alpha^6 a_6 = \frac{720-1800\alpha+2040\alpha^2-1350\alpha^3+548\alpha^4-120\alpha^5}{6!}$$

$$\alpha^7 a_7 = -\ \underline{5040-15120\alpha+21000\alpha^2-17640\alpha^3+9744\alpha^4-3528\alpha^5+720\alpha^6}$$

$$\alpha^8 a_8 = \frac{40320-141120\alpha+231840\alpha^2-235200\alpha^3+162456\alpha^4-78792\alpha^5}{8!}$$

$$\underline{+26136\alpha^6-5}$$

en dus voor $-\mathrm{E\,i}(-z)$ de ontwikkeling

$$- \mathrm{E\,i}(-z) = e^{-z}\Big[\frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+\alpha)} + \frac{2-\alpha}{z(z+\alpha)(z+2\alpha)} - \frac{6-6\alpha+2\alpha^2}{z(z+\alpha)(z+2\alpha)(z+3\alpha)}$$

$$+ \frac{24-36\alpha+22\alpha^2-6\alpha^3}{z(z+\alpha)\ldots(z+4\alpha)} - \frac{120-240\alpha+210\alpha^2-100\alpha^3+24\alpha^4}{z(z+\alpha)\ldots(z+5\alpha)}$$

$$+ \frac{720-1800\alpha+2040\alpha^2-1350\alpha^3+548\alpha^4-120\alpha^5}{z(z+\alpha)\ldots(z+6\alpha)}$$

$$- \underline{5040-15120\alpha+21000\alpha^2-17640\alpha^3+9744\alpha^4-3528\alpha^5+720\alpha^6}$$

$$+ \frac{40320-141120\alpha+231840\alpha^2-235200\alpha^3+162456\alpha^4-78792\alpha^5+26136\alpha-5040\alpha^7}{z(z+\alpha)\ \ldots\ (z+8\alpha)}$$

$$- \ \ldots\Big]. \qquad (3.15)$$

Voor $\alpha = 0$ krijgen we inderdaad de gewone reeks.

De ontwikkelingscoëfficiënten werden berekend voor $\alpha = 1$ en $\alpha = 2$, wat convergente ontwikkelingen levert, verder voor $\alpha = \log 2$, welke net op de grens van convergentie ligt, en voor $\alpha = 0{,}5$, waarvoor we divergente ontwikkelingen krijgen.

Hieronder is een tabel van de gevonden waarden van de tellers, met als vergelijking die voor de asymptotische reeks ($\alpha = 0$)

n	0	0,5	log 2	1	2
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	1,5	1,30685	1	0
3	6	3,5	2,80202	2	2
4	24	10,75	7,61852	4	- 8
5	120	41,5	26,7774	14	64
6	720	191,75	110,173	38	-592
7	5040	1035	539,193	216	6768
8	40320	6380,25	2968,92	600	-90624

Bovendien bepaalden we uit de eerste 9 termen van de reeks, zonder de factor e^{-z}, de som voor $z = 1,2,3$. Voor $\alpha = \log 2$ en $\alpha = 0{,}5$ werd hierbij na een geschikte term het Euler-proces toegepast, voor $\alpha = 0$ (asymptotische reeks naar $\frac{1}{z^n}$) pasten we (bij gebrek aan kennis van een beter proces) het Euler-proces na de term met kleinste absolute waarde toe, hierdoor ontstaat een nieuwe alternerende reeks, waarop op dezelfde wijze het Euler-proces werd toegepast, enz., tot men tenslotte niet meer verder komt. Voor $\alpha = 1$ en 2 pasten we het Euler-proces niet toe, omdat het hier geen voordelen opleverde.

De begin convergentie was voor $\alpha = 1$ het beste, bij $\alpha = 2$ was zij zeer slecht . Het Euler-proces zorgt bij de lage α -waarden er voor, dat de met de eerste 9 termen toch nog een behoorlijk resultaat behaald kan worden.

Voor $\alpha = \log 2$ is de reeks nog convergent, daar de orde van de singulariteit voor $t = 2$ dan eindig, n.l. 1 is. De orde van de singulariteit in $t = 0$ is nul, daar $t^{\lambda}\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1}$ continu is in $t = 0$ voor $\lambda \geq 0$, maar niet voor $\lambda < 0$. Stelt men verder $t = 1 - e^{i\varphi}$ langs de cirkel $|1 - t| = 1$, dan vindt men (voor)

$$\left\{1 - \frac{\log t}{\alpha}\right\}^{-1} = \left\{1 - \frac{\log(2\cos\frac{\varphi}{2})}{\alpha} - i\frac{\varphi}{2\alpha}\right\}^{-1}$$

wat een begrensd varierende functie is.

Als $\alpha > \log 2$ is er dus zeker (absolute) convergentie voor $\mathrm{Re}\, z > 0$, als $\mathrm{Re}\, z < 0$ kan de reeks niet meer convergeren, daar ze de logarithmische singulariteit in $z = 0$ niet kan voorstellen.

Als $\alpha = \log 2$ zijn we zeker van (absolute) convergentie voor $\mathrm{Re}\, z > \log 2$.

Het heeft dus inderdaad zin de reeks te beschouwen voor $\alpha = \log 2$. Voor $\alpha = 0{,}5$ krijgen we divergentie. Oneindig veel termen van de reeks gedragen zich ongeveer als $(e^{\frac{1}{2}} - 1)^{-n}\, n^{2\mathrm{Re}\, z}$, waarin $e^{\frac{1}{2}} - 1 < 1$). Of het toepassen van de sommatiemethode van Euler zin heeft, is nog een open vraag. Hierbij dient echter reeds opgemerkt te worden, dat de methode van Euler de machtreeks voor $\{1 - 2\log t\}^{-1}$ overvoert in een reeks, die nog tot $t = 0$ convergeert.

Het onderstaande tabelletje geeft de resltaten met de exacte waarden van $-e^{z}\, E\, i(-z)$. Hieruit blijkt, dat $\alpha = 0{,}5$ verreweg de beste resultaten oplevert.

$z \backslash \alpha$	0	0,5	log 2	1	2	exact
1	0,6019	0,5969	0,5983	0,6011	0,6216	0,5963
2	0,36111	0,36135	0,36143	0,36162	0,36421	0,36133
3	0,262088	0,262081	0,262095	0,262124	0,262675	0,262084

Als laatste voorbeelden diene de logarithme van de faculteit en haar afgeleide, de ψ -functie.

Hier kan men de integraalvoorstelling van Gausz voor de ψ -functie gebruiken

$$\psi(z) = \int_0^{\infty}\left\{\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x(z+1)}}{1-e^{-x}}\right\} d\,x = -\int_0^{1}\left\{\frac{1}{\log t} + \frac{t^{z}}{1-t}\right\} dt \quad (3.16)$$

Nörlund geeft al aan, hoe men met behulp hiervan een faculteitreeks voor $\psi(z+\mu)-\psi(z)$ kan vinden. Immers men heeft

$$\psi(z+\mu)-\psi(z)=\int_0^\infty e^{-(z+1)x}\,\frac{1-e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\,dx$$

$$=\int_0^1 t^z\,\frac{1-t^\mu}{1-t}\,dt \tag{3.17}$$

Dit levert, zoals men gemakkelijk ziet, de faculteitreeks

$$\psi(z+\mu)-\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)} \tag{3.18}$$

Voor log z! geldt de integraalvoorstelling van Plana :

$$\log z! = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\left\{z-\frac{1-e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right\}dx$$

$$= -\int_0^1\left\{z-\frac{1-t^z}{1-t}\right\}\frac{dt}{\log t} \tag{3.19}$$

Maakt men tenslotte nog gebruik van

$$\log(z+1)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-(z+1)x}}{x}\,dx$$

$$=-\int_0^1\frac{1-t^z}{\log t}\,dt \tag{3.20}$$

dan vindt men

$$\psi(z)-\log(z+1)=-\int_0^1 t^z\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\log t}\right]dt \tag{3.21}$$

$$\log z! - (z+\tfrac{1}{2})\log(z+1) =$$

$$-\int_0^1\left\{t^z\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}+z\right]-\frac{1}{1-t}-\frac{1}{2}\right\}\frac{dt}{\log t}$$

In de laatste integraal nemen we eerst eens de grenzen 0 en $a<1$
Nu is

$$\int_0^a \frac{zt^2}{\log t}\,dt = \frac{a^{z+1}}{\log a} - \int_0^a t^z \left[\frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log^2 t}\right] dt$$

Verder gebruik makend van

$$\int_0^a \frac{dt}{t \log^2 t} = -\frac{1}{\log a}$$ vinden we

$$\int_0^a \left\{t^2\left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} + z\right] - \frac{1}{1-t} - \frac{1}{2}\right\} \frac{dt}{\log t} =$$

$$\int_0^a \frac{t^z}{\log t}\left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} - \frac{1}{2}\right] dt - \int_0^a \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{t \log t}\right] \frac{dt}{\log t}$$

$$- \frac{1-a^{z+1}}{\log a}\,.$$

In beide integralen is nu de integrand eindig voor $a = 1$, we kunnen dus de limiet overgang $a \to 1$ uitvoeren. Op deze wijze blijkt

$$\log z! - (z+\tfrac{1}{2}) \log (z+1) = -\int_0^1 \frac{t^z}{\log t}\left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} - \frac{1}{2}\right] dt$$

$$- (z+1) + \int_0^1 \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{t \log t}\right] \frac{dt}{\log t}$$

De eerste integraal zullen we in een faculteitreeks ontwikkelen, die een in zeker halfvlak $\mathrm{Re}\, z > z_0$ naar nul strevende functie definieert. Stirling's asymptotische formule levert dan

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{t \log t}\right] \frac{dt}{\log t} = \frac{1}{2} \log 2\pi$$

Dus

$$\log z! = (z+\tfrac{1}{2}) \log (z+1) - (z+1) + \frac{1}{2} \log 2\pi - \int_0^1 \frac{t^z}{\log t} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\log t} - \frac{1}{2}\right] dt \quad (3.$$

Met behulp van de integraalvoorstellingen (3.21) en (3.22) kan men $\Psi(z)$ en $\log (z+1)!$ na de substitutie $t_1 = t^\alpha$ in faculteitreeksen van de algemene vorm (3.3) ontwikkelen, die de asymptotische reeksen van Stirling vervangen. Ook hier is een ondergrens voor de α-waarden aan te geven waarvoor de reeks in zeker halfvlak convergeert. Neem b.v. de Ψ-functie, na de substitutie $t_1 = t^\alpha$ krijgen we de integraalvoorstelling:

$$\Psi(z) - \log (z+1) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 t_1^{\frac{z+1}{\alpha} - 1} \left[\frac{1}{1-t_1^{1/\alpha}} + \frac{\alpha}{\log t_1}\right] dt_1$$

De singulariteiten van $\dfrac{1}{1-t_1^{1/\alpha}} + \dfrac{\alpha}{\log t_1}$ zijn de punten t_1

waarvoor $t_1^{1/\alpha} = 1$, behalve het punt $t_1 = 1$, als hiervoor log t_1 gedefinieerd wordt met $-\pi < \arg t_1 < \pi$. De gevonden reeks ontwikkeling zal nu divergeren, als zo'n singulariteit in de eenheidscirkel om $t_1 = 1$ komt te liggen èn op het blad van het Riemann-opp., waar we de integrand beschouwen, d.i. dus bijv. $-\pi < \arg t_1 < \pi$. Stel men dus zo'n singulariteit t voor door $e^{i\vartheta}$, dan moet dus voor de grenswaarde α gelden

$$\vartheta/\alpha = k \times 2\pi \qquad (3.23)$$

voor een ϑ-waarde, die tussen $-\pi$ en $+\pi$ ligt, en waarvoor ook geldt dat

$$|1 - e^{i\vartheta}| = 1 \qquad (3.24$$

terwijl de betrekking (3.23) niet geldt voor een ϑ-waarde met kleinere absolute waarde.

De enige ϑ-waarden, die aan (3.24) voldoen en tussen $-\pi$ en $+$ liggen, zijn $\vartheta = \pm\frac{\pi}{3}$. Dat de betrekking (3.23) niet voor ϑ's met kleinere absolute waarde mag gelden, betekent, dat men $k = \pm 1$ moet nemen. Zo vindt men

$$\alpha = \frac{2}{3}.$$

Voor $\alpha = \frac{2}{3}$ is de orde nog eindig n.l. 1. Dan is (absolute) convergentie gewaarborgd voor Re $z > -\frac{1}{3}$.

Op dezelfde gronden als bij de expotentieel-integraal vindt men dat voor $\alpha > \frac{2}{3}$ de convergentie blijft bestaan zolang Re $z > -1$, voor Re$z < -1$ is er divergentie, weer vanwege de logarithmische singulariteit in $z = -1$.

Hetzelfde geldt voor de faculteitreeks voor log $z!$

Voor $\alpha = 1$ krijgt men de volgende reeksen.

$$\Psi(z) = \log(z+1) - \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{12(z+1)(z+2)} - \frac{1}{12(z+1)(z+2)(z+3)}$$

$$- \frac{19}{120(z+1)(z+2)\dots(z+4)} - \frac{9}{20(z+1)(z+2)\dots(z+5)} + \dots (3$$

$$\log z! = (z+\tfrac{1}{2})\log(z+1) - (z+1) + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12(z+1)}$$

$$- \frac{1}{360(z+1)(z+2)(z+3)} - \frac{1}{120(z+1)(z+2)\dots(\dots}$$

$$+ \dots \quad (3.26)$$

4. Machtreeksen waarvan de coëfficiënten door faculteitreeksen voorgesteld kunnen worden.

a) Machtreeksen met eindige convergentiestraal.

Zij $f(t)$ analytisch in een sector van een cirkel met straal > 1, welke sector het punt 1 in zijn inwendige bevat. Het gehele getal $k_0 = 0$ worde zo gekozen dat $t^q f(t)$ voor ieder vast getal $q > k_0 - 1$ tot nul nadert, als t in genoemde sector tot de oorsprong nadert.

Stel voor iedere gehele $k \geq k_0$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} t^k (t-1)^\nu \log^p (t-1) f(t)\, dt$$

waarin $\arg(t-1)$ in het punt $t = 0$ gelijk aan $-\pi$ gekozen wordt, en waarbij de integratieweg binnen genoemde sector ligt. Volgens § 2 kan dan a_k ontwikkeld worden in een faculteitreeks. De convergentiestraal van de reeks

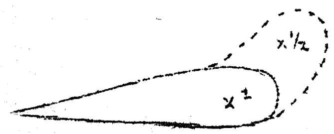
$$F(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k z^k$$

is gelijk aan 1 en voor $|z| \leq 1$ geldt:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} (1-zt)^{-1} (zt)^{k_0} (t-1)^\nu \log^p (t-1) f(t)\, dt$$

Dit levert ons de analytische voortzetting van $F(z)$ in het complexe z-vlak met een snede langs de positieve reële as vanaf $z = 1$. Het integratiepad van (4.3) moet zo gekozen worden, dat het geheel binnen het boven omschreven regulariteitsgebied van $f(t)$ ligt en bovendien het punt $t = \frac{1}{z}$ er buiten valt.

Ligt z dicht genoeg in de buurt van 1, dan ligt $\frac{1}{z}$ binnen de genoemde sector. Men kan dan naast de oorspronkelijke contour er een beschouwen, die geheel binnen de sector ligt, maar het punt $\frac{1}{z}$ wel omsluit. Dit betekent, dat men aan de integraal (4.3) het residu van de integrand in $t = \frac{1}{z}$ toevoegt.



Dus

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)(\frac{1}{z}+)} (1-zt)^{-1} (zt)^{k_0} (t-1)^\nu \log^p (t-1) f(t)\, dt + \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-1\right)^\nu \cdot \log^p\left(\frac{1}{z}-1\right) f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1+)(\frac{1}{z}+)} (1-zt)^{-1}(zt)^{k_0}(t-1)^{\nu}\log^{p}(t-1)f(t)\,dt$$
$$+ z^{-\nu-1}(1-z)^{\nu}\left\{\log(1-z)-\log z\right\}^{p} f\left(\tfrac{1}{z}\right)$$

Hierin kunnen we de integratieweg onafhankelijk van z kiezen, als z tot 1 nadert, en we vinden dus

$$F(z) = z^{-\nu-1}(1-z)^{\nu}\left\{\log(1-z)-\log z\right\}^{p} f\left(\tfrac{1}{z}\right) + \overset{*}{H}(z)$$

waarin $\overset{*}{H}(z)$ een in de omgeving van $z = 1$ reguliere functie is.

Vervangen we in het bovenstaande z door ϑz, waarin $\vartheta \neq 0$, dan vinden wij dat de functie

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \vartheta^k z^k$$

in de omgeving van het punt $z = \frac{1}{\vartheta}$ geschreven kan worden in de gedaante

$$\vartheta^{-\nu-1} z^{-\nu-1}(1-\vartheta z)^{\nu}\left\{\log(1-\vartheta z)-\log \vartheta z\right\}^{p} f\left(\frac{1}{\vartheta z}\right) + H(z)$$

waarbij $H(z)$ in de omgeving van $z = \frac{1}{\vartheta}$ regulier is.

Als voorbeeld diene de opgave de aard van de op de eenheidscirkel gelegen singulariteiten te bepalen van de functie

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{\lambda}}$$

Als λ niet geheel positief is, geldt de formule

$$\frac{1}{k^{\lambda}} = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\pi i}\int_0^{(1+)} t^{k-1}(\log t)^{\lambda-1}\,dt,$$

dus

$$F(z) = \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\pi i}\, z\int_0^{(1+)} (1-zt)^{-1}(\log t)^{\lambda-1}\,dt$$

zodat volgens het bovenstaande $F(z)$ in de omgeving van het punt $z = 1$ afgezien van een reguliere functie, gelijk is aan $\Gamma(1-\lambda)\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\lambda-1}$

Is λ echter wel geheel positief, dan is

$$\frac{1}{k^{\lambda}} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1+)} t^{k-1}\log(t-1)(-\log t)^{\lambda-1}\,dt$$

dus

$$F(z) = \frac{1}{(\lambda-1)!}\,\frac{z}{2\pi i}\int_0^{(1+)} (1-zt)^{-1}\log(t-1)(-\log t)^{\lambda-1}\,dt$$

zodat in dat geval $F(z)$ in de omgeving van het punt $z = 1$, op een reguliere functie na, gelijk is aan $\frac{1}{(\lambda-1)!}\cdot\log(1-z).\ \log^{\lambda-1}(z)$. In dit speciale geval treedt dus in het punt $z = 1$ een logarithmische singulariteit op.

Het bovenstaande kan omgekeerd ook worden toegepast om onder bepaalde voorwaarden met behulp van het functietheoretisch karakter van de functie

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k z^k \qquad (k_0 \text{ geheel } \geq 0)$$

iedere coëfficiënt b_k approximatief door een faculteitreeks voor te stellen. Zij gegeven, dat $G(z)$ op de convergentiecirkel met straal R een eindig aantal singulariteiten j bezit. In de omgeving van zulk een singulariteit gelde

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{\mu} \left(\frac{z}{j}\right)^{-\nu_\mu - 1} \left(1 - \frac{z}{j}\right)^{\nu_\mu} \log^{p_\mu}\left(\frac{j}{z} - 1\right) f_\mu\left(\frac{j}{z}\right)$$

de som $\sum_{\mu}$ wordt uitgestrekt over een eindig aantal waarden van μ ; de exponenten ν_μ en p_μ en de functie f_μ hangen niet alleen van μ , doch mogen ook van j afhangen. Daarbij wordt verondersteld, dat $f_j(t)$ analytisch is in een sector van een cirkel met straal > 1, welke sector het punt 1 in zijn inwendige bevat; voor iedere vaste $q > k_0 - 1$ nadert $f_\mu(t)$ tot nul, als t in genoemde sector tot de oorsprong nadert.

De bewering is dat onder deze voorwaarden iedere coëfficiënt b_k bij benadering voorgesteld kan worden door eindige vorm van faculteitreeksen van de gedaante

$$\sum_{j} \sum_{\mu} j^{-k} a_{k,\mu}(j),$$

waarin

$$a_{k,\mu}(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} t^k (t-1)^{\nu_\mu} \log^{p_\mu}(t-1) f_\mu(t)\, dt$$

en wel zo dat de afwijking gelijk is aan $O(\rho^{-k})$, waarin ρ een geschikt gekozen van k, p en j onafhankelijk getal $> R$ voorstelt.

Het bewijs is heel eenvoudig. De functie

$$\mathcal{G}(z) - \sum_{j} \sum_{\mu} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k,\mu}(j)\, z^k$$

is n.l. niet alleen analytisch binnen de cirkel $|z| = R$, maar ook op die cirkel zelfs in de singuliere punten j van $G(z)$. Genoemde functie is dus analytisch binnen en op een cirkel met de oorsprong tot middelpunt en met een straal $\rho > R$. Hieruit volgt de bewering.

(1) Zij $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1+)} t^k (t-1)^{\beta-1}\, \psi(t)\, dt$

waarin de integratieweg in de oorsprong begint en eindigt en één positieve slag om het punt 1. Men begint in t=0 met arg.t=0 en arg.(t-1) = $-\pi$. Verder zal de integratieweg binnen de cirkel met straal 1 om het punt 1 liggen. Binnen deze cirkel is $\psi(t)$ analytisch verondersteld, terwijl voor elk punt t in die cirkel bij geschikt gekozen positieve ε zal gelden

(2) $$|\psi(t)| < c_1 (1-|1-t|)^{-1+\varepsilon}$$

c_1 en de hieronder volgende $c_2,\dots,c_5$ zullen geschikt gekozen positieve constanten voorstellen. [illegible] De genoemde voorwaarden sluiten in, dat a_k voor $\mathrm{Re}\,k \geq 0$ gedefinieerd is en in dat gebied in een gegeneraliseerde faculteitreeks ontwikkelbaar.

Verder zij

(3) $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

een in de cirkel $|z| < R$ analytische functie. Op en buiten deze cirkel zal G(z) de singulariteiten j bezitten, waarvan geen twee op dezelfde halfstraal vanuit 0 liggen.

Uit het asymptotisch gedrag van de a_k volgt, dat de machtreeks

(4) $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$

eveneens een convergentiestraal R bezit.

We snijden nu het z-vlak open, door vanuit iedere singulariteit j van G(z) een snede aan te brengen, die in het verlengde loopt van de straal die 0 met j verbindt.

We bewijzen nu de volgende stelling:

Zij $\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t-1)^k$, dan zal in het opengesneden z-vlak F(z) een analytische functie van z zijn, die kan worden ontwikkeld in de reeks

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{(1+)} G(zt)(t-1)^{\beta-1+k}\, dt$$

Hierin wordt de integratieweg gekozen langs de reële as van 0 to 1-δ, waarin $0 < \delta < 1$, dan langs een cirkeltje met straal δ positief om 1, en weer terug langs de reële as naar nul. Hierbij zal δ zo gekozen worden, dat geen der singulariteiten van G(zt) binnen de contour valt. (N.B. Door het opensnijden van het z-vlak zal geen der punten $t=\frac{j}{z}$, welke de singulariteiten van G(zt) zijn, op de reële tussen 0 en 1 liggen).

Bewijs:

We kiezen de integratieweg van (1) zodanig, dat ze aan dezelfde eisen voldoet, als die van de integraal in de stelling.

Zij nu allereerst $|z| < R$, dan kunnen we δ zo kiezen, dat ook op de integratieweg van (1) $|zt| < R$ is. In

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{c}^{(1+)} b_k z^k t^k (t-1)^{\beta-1} \psi(t)\, dt$$

is dan de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k t^k$ absoluut en gelijkmatig convergent, evenals elk van de integralen. We kunnen dus integratie en sommatie van volgorde verwisselen en vinden

(5) $$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c}^{(1+)} G(zt)(t-1)^{\beta-1} \psi(t)\, dt.$$

We kunnen nu voor $\psi(t)$ schrijven

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \alpha_k (t-1)^k + (t-1)^l S_l(t)$$

waarin

$$S_l(t) = \sum_{k=l}^{\infty} \alpha_{k,l} (t-1)^k$$

Is nu $0 < r < 1$ en K_r de omtrek van een cirkel met 1 als middelpunt en straal r, dan geldt

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \psi(w) (w-1)^{-k-1}\, dw$$

en dus voor iedere t binnen K gelegen

$$S_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{\psi(w)\, dw}{(w-1)^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-1)^k}{(w-1)^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{\psi(w)\, dw}{(w-1)^l (w-t)}$$

Dus, gebruik makend van de ongelijkheid (2),

(6) $$|S_l(t)| < \frac{c_1}{2\pi} (1-r)^{-1+\varepsilon} r^{-l} \int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|}$$

We voeren nu in de transformatie

$$1-w = (1-t) \frac{r}{\rho} e^{i\varphi}$$

waarin $\rho = |1-t|$, dus $0 \leq \rho < r$

dit levert dan voor de integraal in het rechterlid van bovenstaande ongelijkheid

$$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} = 2r \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}}$$

Hierin is

$$r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2 = (r-\rho)^2 + 4r\rho\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \geqq (r-\rho)^2$$
en ook $$\geqq 4r\rho\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \geqq \frac{4}{\pi^2} r\rho\varphi^2$$

Is $\rho \leqq r(2-\sqrt{3})$, dan is

$$r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2 \geqq (r-\rho)^2 \geqq r^2(\sqrt{3}-1)^2$$

zodat dan $$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{3}-1}$$

Als daarentegen $\rho > r(2-\sqrt{3})$, dan is er in het eerste kwadrant een hoek $\frac{1}{2}\alpha$ te vinden met $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{r-\rho}{\sqrt{2r\rho}}$, zodat dan

$$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} \leqq 2r \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{r-\rho} + 2r \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\pi}{2\sqrt{r\rho}} \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{2r\alpha}{r-\rho} + \pi\sqrt{\frac{r}{\rho}} \log\pi + \pi\sqrt{\frac{r}{\rho}} \log\frac{1}{\alpha}.$$

In de laatste uitdrukking zijn de eerste en tweede term begrensd terwijl de laatste term van de orde $\log\frac{2}{1-\rho}$ is. Onder alle omstandigheden geldt dus

$$\int_{K_r} \frac{|dw|}{|w-t|} < c_2 \log\frac{2}{1-\rho},$$

en dus volgens (6)

(7) $$|S_\ell(t)| < c_3\, r^{-\ell}\,(1-r)^{-1+\varepsilon} \log \frac{2}{r-\rho}$$

Deze ongelijkheid geldt voor iedere r tussen $\rho = |1-t|$ en 1.

We passen (7) nu toe in de integraal voorstelling (5) van F(z), die geschreven kan worden in de vorm

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha_k \int_0^{(1+)} G(zt)\,(t-1)^{\beta-1+k}\,dt + H$$

met $$H = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} G(zt)\,(t-1)^{\beta-1+\ell}\, S_\ell(t)\,dt$$

Daarbij worde allereerst l zo groot gekozen, dat

$\mathrm{Re}(\beta-1+\ell) > 0$ is, we hebben dan

(8) $$|H| < \frac{1}{\pi} \int_0^1 |G(zt)|\,(1-t)^{\mu+\ell}\,dt$$ als $\mu = \mathrm{Re}(\beta-1)$

Voor $t \geq \frac{1}{\ell}$ kiezen we in (7) $r = 1 - \frac{1}{\ell}$, dus $r-\rho \geq 1 - \frac{1}{2\ell}$

, en omdat $r^{-\ell}$ dan begrensd is als l onbegrensd toeneemt, vinden we voor $t \geq \frac{1}{\ell}$ $$|S_\ell(t)| < c_4\, \ell^{1-\varepsilon} \log 4\ell .$$

Als daarentegen $t < \frac{1}{\ell}$, nemen we in (7) $r = \frac{1}{2}(1+\rho)$, dus $1-r = r-\rho = \frac{1}{2}(1-\rho)$ Omdat dan

$$r^{-\ell} \leq r^{-\frac{2}{1-\rho}} = \left(1 - \frac{1-\rho}{2}\right)^{-\frac{2}{1-\rho}}$$

begrensd is vinden we voor $t < \frac{1}{\ell}$

$$|S_\ell(t)| < c_5\,(1-\rho)^{-1+\varepsilon} \log \frac{4}{1-\rho} = c_5\, t^{-1+\varepsilon} \log \frac{4}{t}$$

De gevonden resultaten in (8) substituerende, vinden we

$$|H| < \frac{1}{\pi} c_4\, \ell^{1-\varepsilon} \log 4\ell \int_{\ell^{-1}}^1 G(zt)(1-t)^{\mu+\ell}\,dt + \frac{c_5}{\pi} \int_0^{\ell^{-1}} G(zt)(1-t)^{\mu+\ell}\, t^{-1+\varepsilon} \log \frac{4}{t}\,dt$$

Zij $M = \max\limits_{0<t<1} G(zt)$, dan is dus

$$|H| < \frac{c_4}{\pi} \frac{\ell^{1-\varepsilon}}{\mu+\ell} M \log 4\ell + \frac{c_5}{\pi} M \int_0^{\ell^{-1}} t^{-1+\varepsilon} \log \frac{4}{t}\,dt .$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid nadert tot nul als l onbeperkt aangroeit, dus ook H. Hierbij is dus inderdaad bewezen, dat

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{(1+)} G(zt)\,(t-1)^{\beta-1+k}\,dt$$

Toepassingen.

Zij $G(z) = e^z$, dus $b_k = \frac{1}{k!}$. Dan is G(z) en dus ook F(z) een gehele functie. Men heeft

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{(1+)} e^{zt}\,(t-1)^{\beta-1+k}\,dt$$

Hierin is als $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} e^{zt}(t-1)^{\lambda-1}\,dt = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \int_0^1 e^{zt}(1-t)^{\lambda-1}\,dt = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \frac{e^z}{z^\lambda} \Gamma(z;\lambda)$$

waarin

$$\Gamma(z;\lambda) = \int_0^{z} e^{-t}\, t^{\lambda-1}\,dt$$

de onvolledige Gamma-functie voorstelt.

Door analytische voortzetting geldt dit ook voor $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$

We vinden zo

$$F(z) = \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \frac{e^z}{z^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \alpha_k \frac{\Gamma(z;\beta+k)}{z^k}$$

Als $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, zal als $|z| \to \infty$ de onvolledige Gamma-functie $\Gamma(z\,;\beta+k)$ tot de volledige Gamma-functie $\Gamma(\beta+k)$ naderen. Het is het vervangen van de onvolledige Gamma-functie door de volledige, wat de convergente ontwikkeling in een divergente asymptotische ontwikkeling doet overgaan.

Is n.l. $Re\,\lambda > 0$ dan is $\Gamma(z\,;\lambda) = \Gamma(\lambda) - \int_z^\infty e^{-t}\, t^{\lambda-1}\, dt$
Hierin zijn zowel $\Gamma(z\,;\lambda)$, $\Gamma(\lambda)$ als $\int_z^\infty e^{-t}\, t^{\lambda-1}\, dt$ analytische functies van λ, dus bovenstaande relatie blijft ook gelden als $Re\,\lambda \leq 0$. We vinden dus zo

$$\Gamma(z\,;\lambda) = \Gamma(\lambda) + O(e^{-z}\, z^{\lambda-1})$$

en $$e^{z}\,\Gamma(z\,;\lambda) = \frac{e^{z}\,\Gamma(\lambda)}{z^{\lambda}} + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

We zien dus dat het vervangen van de onvolledige Gammafunctie door de volledige een fout introduceert, die is van kleinere orde in z, dan welke term van de reeksontwikkeling ook.

Nadert $|z|$ tot oneindig met $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}$, dan zal de term $O\left(\frac{1}{z}\right)$ de hoofdbijdrage leveren, in de reeksontwikkeling worden alle termen van dezelfde orde.

Als tweede toepassing nemen we $G(z) = \cosh z$, dus

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{k!} \qquad k \text{ even} \\ &= 0 \qquad k \text{ oneven} \end{aligned}$$

In dit geval vinden we

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} (\cosh zt)\,(t-1)^{\beta-1}\, \psi(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k\geq 0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{(1+)} (\cosh zt)\,(t-1)^{\beta-1+k}\, dt \\ &= \frac{\sin \pi\beta}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \alpha_k \left\{ \frac{e^{z}\,\Gamma(z\,;\beta+k)}{z^{\beta+k}} + \frac{e^{-z}\,\Gamma(-z\,;\beta+k)}{(-z)^{\beta+k}} \right\} \end{aligned}$$

Hierin is

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{e^{z}\,\Gamma(z\,;\beta+k)}{z^{\beta+k}} + \frac{e^{-z}\,\Gamma(-z\,;\beta+k)}{(-z)^{\beta+k}} \\ &= e^{z}\,\Gamma(\beta+k)\, z^{-\beta-k} + e^{-z}\,\Gamma(\beta+k)(-z)^{-\beta-k} + O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Als $|z| \to \infty$ met $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, krijgt men een asymptotische reeks door $P(z)$ door $e^{z}\,\Gamma(\beta+k)\, z^{-\beta-k}$ te vervangen; als $|z| \to \infty$ met $|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}$ krijgt men een asymptotische reeks, door $P(z)$ door $e^{-z}\,\Gamma(\beta+k)(-z)^{-\beta-k}$ te vervangen.

Als voorbeeld van de laatste toepassing nemen we

$$a_k = \frac{k!}{2^k \left(\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}+n\right)!}$$

en dus

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,(k+n)!} = 2^n \frac{I_n(z)}{z^n}$$

- Toepassing van de duplicatieformule

$$k! = 2^k \frac{\left(\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}}$$

levert

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{k}{2}+n\right)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)!}{\left(\frac{k}{2}+n\right)!\left(-n-\frac{1}{2}\right)!} \left(-n-\frac{1}{2}\right)!$$

$$= \frac{\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} u^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} (u-1)^{n-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{2\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} t^k (t-1)^{n-\frac{1}{2}} (t+1)^{n+\frac{1}{2}}\, dt$$

In dit voorbeeld is dus

$$\beta = n + \frac{1}{2}$$

$$\psi(t) = \frac{2\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} (t+1)^{n+\frac{1}{2}}$$

en we vinden

$$\left(\frac{2}{z}\right)^n I_n(z) = \frac{2\left(-n-\frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(1+)} (\cosh zt)(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, dt$$

wat overeenkomt met de integraalvoorstelling van Poisson voor de Be functies.

Tenslotte

$$\alpha_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-n-\frac{1}{2}\right)!\; 2^{n-\frac{1}{2}-k} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!}{\left(n-\frac{1}{2}-k\right)!\, k!}$$

dus vinden we de reeksontwikkeling

$$I_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k!\left(n-\frac{1}{2}-k\right)!} \left\{(-)^k \frac{e^z \Gamma\left(z;\, n+k+\frac{1}{2}\right) + (-)^n e^{-\frac{1}{2}\pi i} e^{-z}}{z^k}\right]$$

Beschouwen we alleen de eerste term tussen de haken en nemen we $\Gamma(n+k+\frac{1}{2})$ i.p.v. de onvolledige Gammafunctie, dan krijgen we

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{2^{-k}(n-\frac{1}{2}+k)!}{k!\,(n-\frac{1}{2}+k)!\,z^k}$$

$$= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{2^{-k}(n+\frac{1}{2})\cdots(n-\frac{1}{2}+k)(n-\frac{1}{2})\cdots\cdots(n-k+\frac{1}{2})}{k!\;z^k}$$

$$= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{2^{-k}\left(n^2-\frac{1^2}{4}\right)\left(n^2-\frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(n^2-\frac{(2k-1)^2}{4}\right)}{k!\;z^k}$$

$$= \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\cdots(n^2-(2k-1)^2)}{k!\;(8z)^k}$$

wat de bekende asymptotische reeks is.

Men kan de stelling van pag. 22 op de volgende manier generaliseren: Zij $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, $\lambda+\mu > 0$ en $a_h = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1+)} t^{\alpha-1+\lambda h}(t-1)^{\beta-1+\mu h}\,\psi(t)\,dt$

Hierin stelt $\psi(t)$ een functie voor, die in de cirkel $|1-t|<1$ eenwaardig en analytisch is, terwijl bovendien binnen die cirkel geldt

$$|\psi(t)| < c\,|t|^{-\operatorname{Re} q}\,(1-|1-t|)^{-p}$$

waarin $p \geqq 0$ en q van t onafhankelijke getallen voorstellen die voldoen aan $\operatorname{Re}\alpha - p - \operatorname{Re} q > 0$

Zij verder $t^q\,\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (t-1)^k$ de machtreeksontwikkeling van $\psi(t)$ om het punt 1.

Zij $G(z) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h z^h$ een functie, die binnen de cirkel $|z|<R$ analytisch en eenwaardig is, terwijl we bovendien onderstellen, dat na het aanbrengen van een eindig aantal coupures langs halfrechten, die een punt j met $j\infty$ verbinden, $G(z)$ inhet gehele opengesneden z-vlak analytisch en eenwaardig is.

Dan is de functie $F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h z^h$ in een z-vlak, dat opengesneden is door coupures aan te brengen langs de halfrechten, die de punten $j\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^\lambda\mu^\mu}e^{-\mu\pi i}$ met $j\,e^{-\mu\pi i}\infty$ verbinden en langs de halfrechten, die de punten $j\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^\lambda\mu^\mu}e^{+\mu\pi i}$ met $j\,e^{+\mu\pi i}\infty$ verbinden een analytische en eenwaardige functie, die voor te stellen is door de integraal

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1+)} G\left(zt^\lambda(t-1)^\mu\right) t^{\alpha-1}(t-1)^{\beta-1}\,\psi(t)\,dt$$

of door de reeks

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k \int_0^{(1+)} G\left(zt^\lambda(t-1)^\mu\right) t^{\alpha-1-q}(t-1)^{\beta-1+k}\,dt$$

De integralen zijn hierbij genomen langs integratiewegen, die in O beginnen, langs de reele as lopen tot $1-\delta$ $(0<\delta<1)$, dan in positieve richting langs de omtrek van een cirkeltje met straal δ en middelpunt 1, en tenslotte langs de reele as terug naar O. Hierin wordt δ zo klein gekozen, dat binnen en op de integratie - contour geen singulariteiten van $G(z\,t^{\lambda}(1-t)^{\mu})$ liggen.

Het bewijs is analoog aan dat van de eerste stelling.

Is bovendien gegeven dat $\lim (1-t)^{\beta-\varepsilon}\,\psi(t)=0$ bij geschikt gekozen $\varepsilon>0$, dan kan men i.p.v. a_h invoeren

$$a_h^{*}=\int_0^1 t^{\alpha-1+\lambda h}(1-t)^{\beta-1+\mu h}\,\psi(t)\,dt$$

Men vindt dan, dat $F^{*}(z_1)=\sum a_h^{*}\, b_h\, z_1^{h}$ analytisch is voort te zetten in een z_1 -vlak opengesneden door coupures aan te brengen langs halfrechten, die $j\,\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^{\lambda}\mu^{\mu}}$ met $j\,\infty$ verbinden, en daar voor te stellen door

$$F^{*}(z_1)=\int_0^{c} G\left(z_1 t^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right)t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\psi(t)\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^{k}\gamma_k\int_0^1 G\left(z_1 t^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right)t^{\alpha-1-q}(1-t)^{\beta-1+k}\,dt$$

Zij nu $\psi(t)$ een functie, die zowel in de cirkel $|t|<1$ als in de cirkel $|1-t|<1$ eenwaardig en analytisch is. Bovendien geldt in de cirkel $|t|<1$

$$|\psi(t)|<c_0\,(1-|t|)^{-p_0}\,|1-t|^{-\operatorname{Re} q_0}$$

waarin $p_0\geq 0$, en in de cirkel $|1-t|<1$

$$|\psi(t)|<c_1\,(1-|1-t|)^{-p_1}\,|t|^{-\operatorname{Re} q_1}$$

waarin $p_1\geq 0$.

Verder zij α een complex getal met $\operatorname{Re}\alpha>p_1+\operatorname{Re} q_1$ en β een complex getal met $\operatorname{Re}\beta>p_0+\operatorname{Re} q_0$.

Met gegeven $\lambda\geq 0$ en $\mu\geq 0$, waarvan minstens een >0 is, definieren we nu

$$a_h=\int_0^1 t^{\alpha-1+\lambda h}(1-t)^{\beta-1+\mu h}\,\psi(t)\,dt$$

De functie $G(z)$ en de daarbij behorende punten j en de bijbehorende coupures definieren we evenals in het voorafgaande. Is dan

$F(z_1)=\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, b_h\, z_1^{h}$, dan is de door deze machtreeks gedefinieerde functie analytisch voort te zetten in een z_1 -vlak, dat opengesneden is door coupures aan te brengen langs de halfrechten, die $j\,\frac{(\lambda+\mu)^{\lambda+\mu}}{\lambda^{\lambda}\mu^{\mu}}$ met $j\,\infty$ verbinden, door de integraalvoorstelling

$$F(z_1)=\int_0^1 G\left(z_1 t^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right)t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\psi(t)\,dt$$

of de reeks

$$F(z_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\int_0^1 G\left(z_1 t^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right)t^{\alpha-1-q_1}(1-t)^{\beta-1+k}\,dt$$

als de de ontwikkelingscoefficienten zijn in

$$t^{q_1}\,\psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\,(1-t)^{k}$$

Echter is ook

$$a_k = \int_0^1 t^{\beta-1+\mu h}(1-t)^{\alpha-1+\lambda h}\,\chi(t)\,dt$$

waarin $\chi(t) = \psi(1-t)$ in de cirkel $|1-t|<1$ eenwaardig en analytisch is en voldoet aan $|\chi(t)| < c_0\,(1-|1-t|)^{-p_0}\,|t|^{-\mathrm{Re}\,q_0}$ met $\mathrm{Re}\,\beta - p_0 - \mathrm{Re}\,q_0 > 0$

Dit levert dan de reeksontwikkeling

$$F(z_1) = \sum \delta_k \int_0^1 G_1\left(z_1 t^{\mu}(1-t)^{\lambda}\right) t^{\beta-1-q_0}(1-t)^{\alpha-1+k}\,dt$$
$$= \sum \delta_k \int_0^1 G_1\left(z_1 t^{\lambda}(1-t)^{\mu}\right) t^{\alpha-1+k}(1-t)^{\beta-1-q_0}\,dt$$

waarin de δ_k de ontwikkelingscoefficienten zijn in

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k (1-t)^k \;;\; \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k t^k$$

We nemen weer als toepassing $b_k = \frac{1}{k!}$; $G_1(z_1) = e^{z_1}$

Verder zij $\mu = p_0 = p_1 = 0$; $q_0 = \beta-1, q_1 = \alpha-1$ en $\lambda = 1$.

We vinden dan ten eerste weer

$$F(z_1) = \sum \gamma_k \int_0^1 e^{zt}(1-t)^{\beta-1+k}\,dt$$
$$= \sum \gamma_k\, e^{z} z^{-\beta-k}\,\Gamma(z;\beta+k)$$

welke reeks het karakter van een asymptotische reeks heeft voor $|\arg z_1| < \frac{\pi}{2}$

De tweede reeksontwikkeling is

$$F(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \int_0^1 e^{zt}\, t^{\alpha-1+k}\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k}{(-z_1)^{\alpha+k}}\,\Gamma(-z;\alpha+k)$$

Nu is weer

$$\frac{\Gamma(-z_1;\alpha+k)}{(-z_1)^{\alpha+k}} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{(-z)^{\alpha+k}} + O\left(\frac{e^{z}}{z_1}\right)$$

als dus $|\arg(-z_1)| < \frac{\pi}{2}$ maken we in iedere term van de laatstgenoemde reeks een fout die van kleinere orde in z_1 is, dan welke term van de reeksontwikkeling ook, indien we de onvolledige Gammafunctie door de volledige vervangen. Zo krijgen we voor $|\arg(-z_1)| < \frac{\pi}{2}$ de asymptotische reeks

$$F(z_1) = \sum \delta_k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{(-z)^{\alpha+k}}$$

Oplossing van differentievergelijkingen door Faculteitreeksen.

Beschouw de differentievergelijking van de n-de orde

$$(1) \qquad \sum_{l=0}^{n} P_l(x+l)\,u(x+l) = 0$$

waarin de $P_l(x)$ polynomen zijn.
We zullen deze differentievergelijking normaal noemen als
1^0 De graad van P_0 en P_n gelijk zijn, bijvoorbeeld p, en die van de andere P_l's zeker niet hoger.
2^0 Is dan $P_l(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_{l,k}\, x(x+1)\ldots(x+k-1)$, dan wordt verondersteld, dat de differentiaalvergelijking

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{p} \left\{ (-1)^k t^k \varphi^{(k)}(t) \cdot \sum_{l=0}^{n} \alpha_{l,k}\, t^l \right\} = 0$$

er één van het Fuchs'se type is, dies één met uitsluitend punten "der Bestimmtheit".

We trachten nu de differentievergelijking (1) op te lossen door voor u(x) de integraalvoorstelling

$$(3) \qquad u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(a+)} t^{x-1} \varphi(t)\, dt$$

te substitueren. Door gebruik te maken van

$$x(x+1)\cdots(x+k-1) \cdot \int_0^{(a+)} t^{x-1} \varphi(t)\, dt = (-1)^k \int_0^{(a+)} t^{x+k-1} \varphi^{(k)}(t)\, dt$$

gaat (1) over in

$$\int_0^{(a+)} dt\; t^{x-1} \left[\sum_{k=0}^{p} \left\{ (-1)^k t^k \varphi^{(k)}(t) \sum_{l=0}^{n} \alpha_{l,k}\, t^l \right\} \right] = 0$$

Een integraalvoorstelling (3) voor u zal dus zeker aan (1) voldoen als φ aan de differentiaalvergelijking (2) voldoet. Deze oplossingen van (2) hebben allen een eindige orde in t = 0, dus bij voldoend grote x zal de integraalvoorstelling (3) inderdaad zin hebben.

Opdat echter deze integraal geen nul oplevert, zullen we voor a een singulier punt van $\varphi(t)$ moeten nemen. Behalve t = 0 en $\pm\infty$ zijn dit nog de punten, die voldoen aan de vergelijking

$$(4) \qquad \sum_{l=0}^{n} \alpha_{l,p}\, t^l = 0$$

Daar $\alpha_{n,p} \neq 0$ en $\alpha_{0,p} \neq 0$, vinden we in het algemeen, dus n van deze punten, en bovendien, weer in het algemeen, in elk van die punten een bijbehorende singuliere oplossing $\varphi(t)$ van de differentiaalvergelijking. Daar dan

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\, a^x \int_0^{(1+)} v^{x-1} \varphi(av)\, dv$$

in een faculteitreeks te ontwikkelen vindt men bovendien, aan de hand van hun asymptotisch gedrag, dat de gevonden n oplossingen onafhankelijk zijn.

Is daarentegen een speciale waarde van a bijvoorbeeld een dubbelwortel van de vergelijking (4), dan zal men in het algemeen ook twee bijbehorende singuliere oplossingen $\varphi(t)$ vinden en men houdt het gewenste aantal onafhankelijke oplossingen u(x) van de differentievergelijking.

Lastiger wordt het echter als bij een oplossing t = a van (4) geen in dat punt singuliere $\varphi(t)$ behoort. Een extreem geval krijgt men bijvoorbeeld, als

$$P_\ell(x) = c_\ell P_o(x)$$

en dus

$$\alpha_{\ell,k} = c_\ell \alpha_{o,k}$$

In dat geval wordt de vergelijking (4)

(4')
$$\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell t^\ell = 0$$

terwijl men de differentiaalvergelijking (3) kan schrijven als

$$\sum_{k=0}^{r} \left\{ (-1)^k \alpha_{o,k} t^k \varphi^{(k)}(t) \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell t^\ell \right\} = 0 \qquad \text{of}$$

(2')
$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \alpha_{o,k} t^k \varphi^{(k)}(t) = 0$$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn de functies $\varphi(t) = t^\rho$ waarin ρ bepaald wordt door

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \alpha_{o,k} \rho(\rho-1)\cdots(\rho-k+1) = 0$$

of wel $P_o(-\rho) = 0$

Voor geen van deze oplossingen is een oplossing van de vergelijking (4') een singulier punt. Dat er toch oplossingen u(x) van de differentievergelijking (1) zijn, die voor te stellen zijn in de vorm (3) blijkt aldus:

$$u(x) = \frac{\vartheta^x}{P_o(x)}$$ is een oplossing van de differentievergelijking, mits ϑ voldoet aan

$$\sum c_\ell \vartheta^\ell = 0$$

Dit blijkt direct door substitutie in de differentievergelijking. Waar de $P_o(x)$ een polynoom is, blijkt direct, dat u(x) in de vorm

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{(\vartheta+)} t^{x-1} \varphi(t)\, dt$$

is te schrijven.

Is bijvoorbeeld $P_o(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_n)$, met alle ξ_n verschillend, dan is

$$u(x) = \vartheta^x \left\{ \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)} \cdot \frac{1}{x-\xi_1} + \cdots \right\}$$

en dus

$$= \frac{\vartheta^x}{2\pi i}\int_0^{(1+)} v^{x-1}\left\{\frac{v^{-\xi_1}}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)}+\cdots\right\}\log(v-1)\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(\vartheta+)} t^{x-1}\left\{\frac{\vartheta^{\xi_1}t^{-\xi_1}}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)}+\cdots\right\}\log\left(\frac{t}{\vartheta}-1\right)dt$$

zodat men

$$\varphi(t)=\left\{\frac{\vartheta^{\xi_1}t^{-\xi_1}}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)}+\cdots\right\}\log\left(\frac{t}{\vartheta}-1\right)$$

mag nemen.

De oorzaak van deze moeilijkheid ligt hierin, dat de eis waaraan $\varphi(t)$ moest voldoen luidde

$$\int_0^{(1+)} t^{x-1}\left[\sum_{k=0}^{p}\left\{(-1)^k t^k\varphi^{(k)}(t)\sum_{l=0}^{n}\alpha_{l,k}t^l\right\}\right]dt=0$$

waaraan niet alleen voldaan is, als $\varphi(t)$ aan de differentiaal (2) voldoet, maar ook als men deze door een algemenere vervangt, waarin het rechterlid nul door een willekeurige binnen en op de contour van bovenstaande integraal, met de uitzondering van t = 0, reguliere functie wordt vervangen. In t = 0 moet deze functie een eindige orde hebben (of orde = $-\infty$). Deze functie H(t) noemende krijgt men dus

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\alpha_{0,k}t^k\varphi^{(k)}(t)=\frac{H(t)}{\sum_{l=0}^{n}c_l t^l}$$

De homogene vergelijking had de oplossingen $\varphi=t^{\rho}$, waarin ρ voldoet aan P $(-\rho)$ = 0, d.i. dus $\rho=-\xi_1,-\xi_2,\ldots,-\xi_n$. Past men dus de methode van variatie der constanten toe, om de inhomogene vergelijking op te lossen, dan vindt men, als $\varphi(t)=\sum c_k(t)t^{-\xi_k}$ wordt gesteld

$$c_1' t^{-\xi_1}+\cdots+c_p' t^{-\xi_p}=0$$

$$\xi_1 c_1' t^{-\xi_1}+\cdots+\xi_p c_p' t^{-\xi_p}=0$$

$$\xi_1(\xi_1+1)c_1' t^{-\xi_1}+\cdots+\xi_p(\xi_p+1)c_p' t^{-\xi_p}=0 \quad\therefore\quad \xi_1^2 c_1' t^{-\xi_1}\cdots+\xi_p^2 c_p' t^{-\xi_p}=0$$

. . . .

$$\xi_1(\xi_1+1)\cdots(\xi_1+p-3)c_1' t^{-\xi_1}+\cdots+\xi_p(\xi_p+1)\cdots(\xi_p+p-3)c_m' t^{-\xi_p}=0$$

$$\xi_1(\xi_1+1)\cdots(\xi_1+p-2)c_1' t^{-\xi_1}+\cdots+\xi_p(\xi_p+p-2)c_p' t^{-\xi_p}=\frac{(-1)^p H(t)}{\alpha_{0,k}\,t\sum_{l=0}^{n}c_l t^l}$$

$$\therefore\quad \xi_1^{p-1}c_1' t^{-\xi_1}+\cdots\ \xi_p^{p-1}c_p' t^{-\xi_p}=\frac{(-1)^p H(t)}{\alpha_{0,k}\,t\sum c_l t^l}$$

Daar ϑ een enkelvoudig nulpunt van $\sum c_l t^l$ moet zijn, geldt dus in de omgeving van ϑ

$$(-1)^{r}\frac{H(t)}{\alpha_{0,k}\, t \sum_{l=0}^{n} c_l t^{l}} = \frac{c}{t-\vartheta}$$ + in de omgeving van $t=\vartheta$ reguliere functie $\psi(t)$.

Oplossingen van het bovenstaande vergelijkingstelsel levert

$$c_1' t^{-\xi_1} = \frac{c(t-\vartheta)^{-1} + \psi(t)}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)}, \ldots \text{etc}$$

of

$$c_1' = \frac{c\,\vartheta^{\xi_1}(t-\vartheta)^{-1} + \chi_1(t)}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)}, \ldots \text{etc}$$

waarin de $\chi_k(t)$ in de omgeving van $t=\vartheta$ regulier zijn.

Tenslotte

$$c_1 = c\,\frac{\vartheta^{\xi_1}\log\left(\frac{t}{\vartheta}-1\right)}{(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_n)} + \Psi_1(t), \ldots \text{etc}$$

waarin de $\Psi(t)$ in de omgeving van $t=\vartheta$ regulier zijn.

De nu gevonden vorm van $\varphi(t)$ stemt met de reeds eerder gevondene overeen.