STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 020

Voordracht in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

H.J.A. Duparc

17 oktober

Enige toepassingen van de stelling van Casey uit de vlakke meetkunde

1951

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestraat 49
Amsterdam O.

Rapport Z.W. 1951-020

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

17 October ; voordracht door
H.J.A.Duparc
over:

Enige toepassingen van de stelling van Casey uit de vlakke meetkunde.

De stelling van Ptolemaeus zegt dat voor 4 punten A,B, C en D, gelegen op een cirkel R, waarbij A en C door B en D worden gescheiden, geldt

$$t_{AC}t_{BD}=t_{AD}t_{BC}+t_{AB}t_{CD}.$$

Hierin geeft t_{AB} de afstand van A en B aan.

De stelling van Casey zegt, dat deze relatie ook blijft bestaan, als de vier punten worden vervangen door vier cirkels, die allen aan R raken, en hun afstanden door de lengten van hun gemeenschappelijke raaklijnen. Hierbij neme men de gemeenschappelijke uitwendige of inwendige raaklijn, alnaargelang die twee cirkels gelijksoortig of ongelijksoortig aan R raken.

Deze stelling volgt uit de stelling van Ptolemaeus. Beschouw nl. 4 cirkels A,B,C en D, die b.v. alle uitwendig raken aan R in de punten A',B',C', resp. D' met stralen a,b,c en d. Zij r de lengte van de straal van R. Dan heeft men zoals men meetkundig of algebraïsch gemakkelijk inziet

$$t_{AB}=t_{A'B'}\sqrt{\left(1+\frac{a}{r}\right)\left(1+\frac{b}{r}\right)},\ \text{enz.}$$

waarna uit de Ptolemaeusrelatie onmiddellijk de Caseyrelatie volgt.

Men kan de stralen a,b,c en d tot nul laten naderen, waarna de Caseyrelatie weer overgaat in de Ptolemaeusrelatie. Van belang blijken ook die gevallen, waarbij een of meer, maar niet alle stralen a,b,c en d gelijk zijn aan nul.

Wij geven nu een aantal toepassingen van de stelling van Casey en bewijzen allereerst de volgende stelling:

Beschouw een driehoek ABC met zijn twee aangeschreven cirkels I_a en I_b. Laat een willekeurige cirkel U gelijksoortig raken aan deze cirkels. De vier snijpunten van cirkel U en de voldoende verlengde zijden AC en BC zijn dan de hoekpunten van een volledige vierhoek, waarvan twee overstaande zijden evenwijdig lopen met de beide uitwendige gemeenschappelijke raaklijnen van de cirkels I_a en I_b.

Voor het bewijs passe men de stelling van Casey toe op de figuur I_aPQI_b. Hierin is P een snijpunt van de cirkel U en BC en Q dat snijpunt van cirkel U en AC, waarvoor de figuur I_aPQI_b in de neergeschreven volgorde een Casey-figuur is. Dan heeft men volgens Casey

$$(CQ+s-b)(CP+s-a)=PQ(a+b)+(CP-s+b)(CQ-s+a), \text{ dus } (CP+CQ):PQ=(a+b):c,$$

dus PQ is parallel of antiparallel met AB. In het laatste geval loopt PQ evenwijdig met de andere gemeenschappelijke uitwendige raaklijn van de cirkels I_a en I_b.

Wij gaan nu iets precieser de relatie tussen PQ en AB na. Hiertoe houden wij de driehoek ABC en zijn aangeschreven cirkels vast, maar laten de cirkel U variëren (deze blijft echter gelijksoortig raken aan de cirkels I_a en I_b). Cirkel U snijdt BC in 2 punten; door het ene gaat zoals in de zojuist bewezen stelling bleek, een koorde evenwijdig met AB (dat punt noemen wij een P-punt), door het andere een koorde antiparallel met AB (dat punt noemen wij een R-punt). Tussen de afstanden CP en CR bestaat een bilineair verband, dat men onmiddellijk vindt door op de figuur I_bPI_aR de stelling van Casey toe te passen.

Beweegt dus cirkel U, dan doorlopen P en R collocale projectieve puntenreeksen. Het projectieve verband tussen P en R is hyperbolisch want R valt met P samen zowel indien P gekozen wordt in het raakpunt T_a van cirkel I_a en BC als in het raakpunt U_a van cirkel I_b en BC.

Laten wij nu cirkel U, dus P, bewegen over BC. Valt P in B, dan is R oneigenlijk; loopt P van B naar U_a, dan beweegt R zich via B naar U_a en haalt hier P in. Loopt P van U_a naar T_a, dan blijft steeds R liggen tussen T_a en P om pas weer in U_a door P te worden ingehaald. Is P oneigenlijk, dan ligt R in het snijpunt S van BC en de andere uitwendige gemeenschappelijke raaklijn van cirkel I_a en I_b. Wij vinden dus:

Snijdt een cirkel U, die de aangeschreven cirkels I_a en I_b van een driehoek ABC gelijksoortig raakt, de zijde BC ten minste eenmaal tussen B en C, dan ligt het op BC door cirkel U bepaalde P-punt dichter bij het raakpunt U_a van cirkel I_a en BC, dan het R-punt.

Hieruit volgt onmiddellijk de stelling:

De cirkel N, die de drie aangeschreven cirkels van een driehoek uitwendig raakt, is de negenpuntscirkel van die driehoek.

Allereerst merke men op dat cirkel N, ieder der zijden van de driehoek in ten minste één punt zelf moet snijden. (Immers cirkel N raakt cirkels I_a en I_b uitwendig, dus P ligt tussen B en S; zou P niet tussen B en C liggen, dan lag P tussen C en S en ook R lag op het aan de zijde van C verlengde deel van BC; om gelijke redenen zouden echter P en R op het aan de zijde van B verlengde deel van BC moeten liggen.)
Zoek nu de 3 snijpunten van cirkel N en de zijden op, die het dichtste liggen bij de raakpunten der aan die zijden aangeschreven cirkels.

Deze vormen dan een driehoek waarvan de zijden parallel zijn met die van driehoek ABC; de 3 snijpunten zijn dus de middens der zijden van driehoek ABC. Cirkel N is dus de negenpuntscirkel van driehoek ABC. De overige 3 snijpunten van cirkel N en de zijden van driehoek ABC vormen een driehoek, waarvan de zijden antiparallel zijn met die van driehoek ABC, zodat cirkel N ook gaat door de voetpunten der hoogtelijnen van driehoek ABC.

Uit de omkering van de stelling van Casey blijkt tenslotte nog, dat de cirkel N ook raakt aan de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

Men kan zich afvragen, welke de 8 raakcirkels zijn der 3 aangeschreven cirkels van driehoek ABC. Bekend zijn:

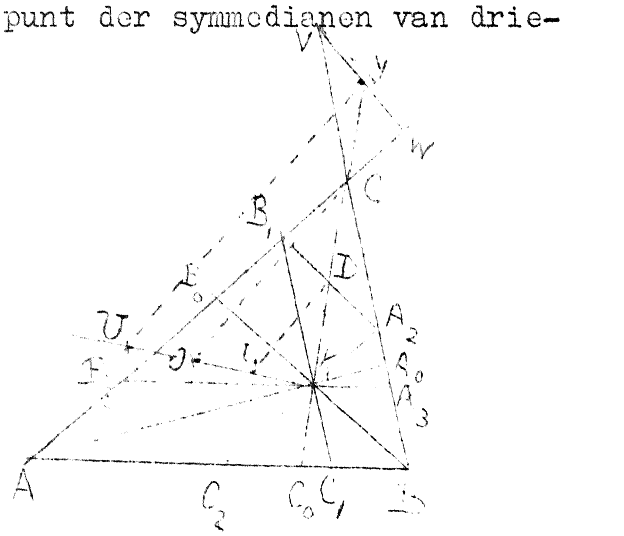
1°: de drie zijden van de driehoek zelve.

2°: de negenpuntscirkel N.

Wij kunnen nu zoeken naar de 4 overige raakcirkels. Zoals bekend ontstaan die uit de bovenopgesomde 4 cirkels door een inversie die de cirkels I_a, I_b en I_c invariant laat (dus een inversie ten opzichte van hun gemeenschappelijke orthogonaalcirkel T).

Hiertoe onderzoeken wij eerst de ligging van die cirkel T. Men heeft de volgende gemakkelijk te bewijzen eigenschappen:

Projecteer A,B en C op de buitenbisectrices van driehoek ABC. De zes voetpunten liggen dan op één cirkel, de cirkel van Taylor van driehoek $I_aI_bI_c$. Het middelpunt T ervan ligt zo op het verlengde van ZI, dat $TZ=\frac{1}{2}ZI$ (I is middelpunt ingeschreven cirkel en Z is zwaartepunt van driehoek ABC). De cirkel van Taylor staat inderdaad loodrecht op elk dier cirkels I_a, I_b en I_c. De uit cirkel N door inversie ten opzichte van cirkel T ontstane raakcirkel U heeft zijn middelpunt dus op de rechte TN, dat is op de rechte door N evenwijdig met OI (O centrum omgeschreven cirkel van driehoek ABC). De cirkel U raakt I_a, I_b en I_c inwendig. De eerst afgeleide stelling leert ons dat deze de verlengden der zijden van driehoek ABC snijdt in 6 punten, drie verbindingslijnen waarvan evenwijdig lopen met de zijden van driehoek ABC. (Drie der andere zijden van de zeshoek dier 6 punten lopen antiparallel met de zijden van driehoek ABC en blijken, alweer door Casey toe te passen, een lengte s te bezitten.) Een gevolg hiervan is dat de cirkel U zijn middelpunt heeft op de rechte OK (K snijpunt der symmedianen van driehoek ABC).



Trekt men nl. door K rechten evenwijdig met de zijden van driehoek ABC, dan heeft men (zie tekening) B_1A_2 antiparallel AB. Liggen V en W op cirkel U en is VW antiparallel met AB en VW=s, dan ligt het midden Y van VW op CK en men heeft voor het snijpunt U van OK en de middenloodlijn van VW de evenredigheid

$$UK:OK=YK:CK=(YC+2CD):2CD=\frac{s}{2B_1A_2}+1.$$

Verder is

$$BC_0=\frac{a^2c}{a^2+b^2}\ ;\ KA_3=\frac{a^2c}{a^2+b^2+c^2}\ ;\ B_1C=\frac{a^2b}{a^2+b^2+c^2}\ ;\ B_1A_2=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Dus UK is symmetrisch in a,b en c, dus het punt U is middelpunt van de gezochte raakcirkel.

Wij drukken verder de straal u van cirkel U uit in de elementen van driehoek ABC. Allereerst merken wij hiertoe op dat voor de straal t van de cirkel T van Taylor geldt $4t^2=r^2+s^2$, zoals meetkundig direct blijkt uit het feit dat een koorde ter lengte s van die cirkel op een afstand $\frac{1}{2}r$ gelegen is van zijn middelpunt.

Laat nu TN de negenpuntscirkel snijden in X en Z. Door inversie met T als centrum gaan X en Z over in twee tegenpunten X' en Z' van cirkel U, dus de straal u van cirkel U is gelijk aan

$$u=\tfrac{1}{2}X'Z'=\tfrac{1}{2}(X'T+Z'T)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{t^2}{XT}+\frac{t^2}{ZT}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\frac{1}{2}R-TN}+\frac{t^2}{\frac{1}{2}R+TN}\right)=\frac{2t^2R}{R^2-4TN^2}=$$

$$=\frac{2t^2R}{R^2-OI^2}=\frac{2t^2R}{2rR}=\frac{t^2}{r}=\frac{r^2+s^2}{4r}.$$

Voor de straal u_a van de raakcirkel, die door inversie ten opzichte van cirkel T uit de zijde BC ontstaat, vindt men

$$u_a=\frac{t^2}{2e},$$

waarin e de afstand aangeeft van T tot de zijde BC. Zij f de afstand van Z tot BC dan heeft men op grond van de ligging der punten T,Z en I

$$r+2e=3f=\frac{2\mathcal{O}}{c},$$

dus

$$e=\frac{\mathcal{O}}{c}-\frac{\mathcal{O}}{a+b+c}=\frac{\mathcal{O}(a+b)}{c(a+b+c)}=\frac{r(a+b)}{2c},$$

dus

$$u_a=\frac{t^2c}{r(a+b)}=\frac{(r^2+s^2)c}{4r(a+b)},\ \text{enz. cycl.}$$

Analoge beschouwingen geven ons de cirkels die raken aan de cirkels I, I_a en I_b, welke blijken te zijn:

De drie zijden van de driehoek; de negenpuntscirkel; de hieruit door inversie te vinden cirkels waarvan er weer drie gaan door het centrum van inversie, dat is het middelpunt T_a van de cirkel van Taylor van driehoek II_aI_b. De vierde cirkel heeft zijn middelpunt nu liggen op de rechte T_aN en de rechte OK.

Op de rechte OK vindt men de volgende 15 merkwaardige punten:

O,K,L (centrum cirkel van Lemoine), Ω (midden der verbindingsrechte*) der punten van Brocard Ω_1 en Ω_2), centra van 4 raakcirkels, door inversie uit de negenpuntscirkel te vinden;

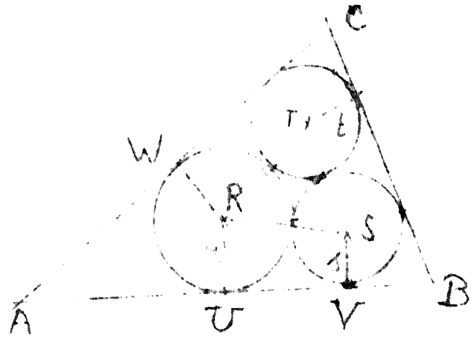
*) Verg. Rapport ZW 1950-002 van G.W.Decnop uit deze serie.

de beide punten van Apollonius;

het hoogtepunt van de voetpuntsdriehoek van 3 bisectrices of van 2 buiten- en 1 binnenbisectrix;

het snijpunt der rechten die een hoekpunt van de driehoek verbinden met het punt op de overstaande zijde, dat deze verdeelt in de verhouding der vierde machten der aanliggende zijden.

Wij geven thans nog een geheel andere toepassing van de stelling van Casey. Wij bepalen nl. de stralen der cirkels van Malfatti, dat zijn drie elkaar uitwendig rakende cirkels, die ieder aan twee der drie zijden van een driehoek raken.



Zijn de stralen dezer cirkels R, S en T resp. r, s en t, dan heeft men voor de afstand der op AB gelegen raakpunten U en V de relatie

$$UV=2\sqrt{rs}.$$

Zij W het raakpunt van cirkel R en AC. Dan geldt voor de lengte t_{WS} der raaklijn uit W aan cirkel S de betrekking

$$t_{WS}^2=WS^2-s^2=(r\cos\alpha+r-s)^2+(r\sin\alpha+2\sqrt{rs})^2-s^2$$

$$=2r^2(1+\cos\alpha)+4r\sin\alpha\sqrt{rs}+2rs(1-\cos\alpha)$$

$$=4r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+8r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{rs}+4rs\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

dus

$$t_{WS}=2r\cos\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{rs}\sin\frac{\alpha}{2};$$

evenzo

$$t_{UT}=2r\cos\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{rt}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Pas nu Casey toe op de figuur WTSU (der cirkels of puntcirkels, die raken aan cirkel R). Dan vindt men

$$\left(2r\cos\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{rs}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(2r\cos\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{rt}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=4\sqrt{rt}\sqrt{rs}+4\sqrt{st}\,r\cos\frac{\alpha}{2}$$

dus

$$r\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}(\sqrt{rs}+\sqrt{rt})=\sqrt{st}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

dus

$$r\cot\frac{\alpha}{2}+\sqrt{rs}+\sqrt{rt}-\cot\frac{\alpha}{4}\sqrt{st}=0.$$

Evenzo

$$s\cot\frac{\beta}{2}+\sqrt{st}+\sqrt{sr}-\cot\frac{\beta}{4}\sqrt{rt}=0.$$

Dus na optellen, in verband met $c=r\cot\frac{\alpha}{2}+s\cot\frac{\beta}{2}+2\sqrt{rs}$, vinden wij $(\cot\frac{\alpha}{4}-1)\sqrt{st}+(\cot\frac{\beta}{4}-1)\sqrt{rt}=c$. Hieruit en uit de door cyclische permutatie eruit af te leiden formules vindt men

$$\sqrt{rs}=\frac{s-c}{\cot\frac{\gamma}{4}-1}\text{ en cycl., dus }r=\frac{(s-b)(s-c)}{s-a}\,\frac{\cot\frac{\alpha}{4}-1}{(\cot\frac{\beta}{4}-1)(\cot\frac{\gamma}{4}-1)}\text{ en cycl.}$$