TW

stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TW TC 54/73 SEPTEMBER

M. BAKKER

TOEPASSING VAN DE KOMPLEXE REKENING IN DE WISSELSTROOMTHEORIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Voorwoord

In deze syllabus, die de toepassing van de komplexe rekening in de theorie van wisselstroomketens behandelt, wordt de inhoud van de syllabus Complex rekenen, door D.S. Fokkema en E. Slagt bekend verondersteld. De stof van deze syllabus beslaat vijf lesuren.

Amsterdam, september 1973.

§1 Wisselstroomschakelingen

Voor een spoel geldt, dat een verandering van het door de spoel omvatte magnetische veld (de zogenaamde magnetische flux Φ) een spanning (en een stroom) tot gevolg heeft. In formulevorm schrijven we hiervoor

(1) $$V = -\frac{d}{dt}\Phi$$

Nu is $\Phi = LI$, waarbij L de konstante koëfficiënt van zelfinduktie is en I de stroomsterkte. Formule (1) wordt dus

(2) $$V = -L\frac{dI}{dt} .$$

Voor de stroomketen met Ohmse weerstand R en zelfinduktie L van figuur 1 heeft de uitgebreide wet van Ohm de vorm

$$E_{ind} + E = IR ,$$

waarbij E_{ind} de spanning over de spoel is en E de elektronotorische kracht (emk., de spanning tussen de aansluitklemmen)

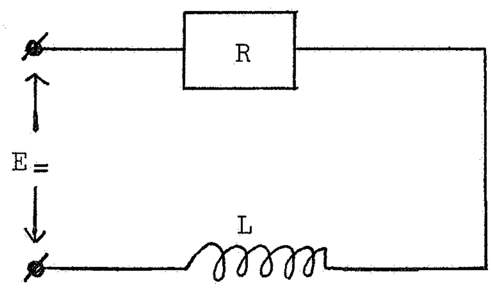


fig.1

Het verband tussen E en I is hier

(3) $$E = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Als E de konstante waarde E_0 heeft (gelijkspanning) en I = 0 op het tijdstip t = 0, dan heeft (3) als oplossing

(4) $$I = \frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \approx \frac{E_0}{R} \quad , \quad t \gg \frac{L}{R}$$

Opgave: Kontroleer (4) in (3).

Voor een kondensator met kapaciteit C geldt de formule

$$Q = CV,$$

waarbij Q de lading van de kondensator is en V de spanning tussen de platen. Omdat

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dV}{dt}\,,$$

is het verband tussen I en V

$$V = \frac{1}{C}\int I(t)dt\,.$$

Voor een RC-keten met emk. E geldt de formule

(5) $$E = V_R + V_C = RI + \frac{1}{C}\int I(t)dt.$$

* * *

We onderzoeken nu de wisselstroomketen met een zelfinduktie L en een weerstand R van figuur 2. De emk. is gegeven door de formule

$$E = V_0 \cos \omega t\ ,\quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}\,,$$

waarbij T de periode is en ν de frekwentie; ω heet de hoekfrekwentie.

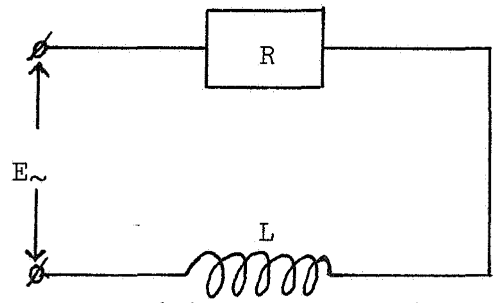


fig.2

Passen we formule (3) toe, dan krijgen we

(6) $$V_0 \cos \omega t = RI + L\,\frac{dI}{dt}\,.$$

Omdat E periodiek is met periode T, ligt het voor de hand, dat I ook periodiek is met dezelfde periode (we verwaarlozen inschakelverschijnselen).

I hoeft evenwel niet noodzakelijk op hetzelfde tijdstip als E zijn maximale waarde aan te nemen. We proberen daarom de oplossing

$$I = I_0 \cos \omega(t-t_0) \ ,$$

waarbij I_0 en t_0 nog onbepaalde konstanten zijn. I_0 heet de amplitudo van de stroomsterkte, t_0 heet het fazeverschil tussen I en V.
In de elektriciteit is het gebruikelijk om in plaats van met t_0 met de grootheid ωt_0 te werken; ωt_0 heet de fazehoek en wordt aangegeven met ϕ. Bovenstaande formule wordt dus

$$I = I_0 \cos(\omega t-\phi) \ . \tag{7}$$

Vullen we (7) in (6) in, dan krijgen we

$$V_0 \cos \omega t = I_0\{R \cos(\omega t-\phi) - \omega L \sin(\omega t-\phi)\} \ . \tag{8}$$

Werken we (8) uit, dan krijgen we

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= I_0 R(\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi) \\ &\quad - I_0 \omega L(\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) = \\ &= I_0 \cos \omega t(R \cos \phi + \omega L \sin \phi) \\ &\quad + I_0 \sin \omega t(R \sin \phi - \omega L \cos \phi) \ . \end{aligned}$$

Omdat (9) een identiteit is, zijn de koëfficiënten van $\sin \omega t$ en $\cos \omega t$ in linker- en rechterlid gelijk. Hieruit volgt, dat

$$\begin{cases} V_0 = I_0(R \cos \phi + \omega L \sin \phi) \ , \\ 0 = I_0(R \sin \phi - \omega L \cos \phi) \ . \end{cases} \tag{10}$$

Voor I_0 en ϕ vinden we dan, dat

$$\begin{cases} \cos \phi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \ , \quad \sin \phi = \dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \ , \\ I_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \end{cases} \tag{10a}$$

De grootheid $\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ noemt men de impedantie van de LR-keten, notatie $|Z|$. $|Z|$ is blijkbaar gelijk aan $\frac{V_0}{I_0}$. Algemeen definiëert men de impedantie van een *wisselstroomketen* als het quotiënt van de amplitudo's van de spanning en de stroomsterkte dus

$$|Z| = \frac{V_0}{I_0} .$$

Opgave 1. Ga na, dat bij een wisselstroomketen met kondensator C, weerstand R, hoekfrekwentie ω en spanningsamplitudo V_0 de impedantie en de fazehoek worden gegeven door

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}} , \qquad ,$$

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}} , \quad \sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}} .$$

Gebruik hiervoor formule (5).

Opgave 2. Bekijk achtereenvolgens een wisselstroomketen, waarin alleen een spoel en waarin resp. alleen een kondensator zijn opgenomen; in beide gevallen is de spanningsamplitudo V_0 en de hoekfrekwentie ω. Ga na, dat in het eerste geval de fazehoek gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$ en in het tweede geval $-\frac{\pi}{2}$.

* * *

We bekijken nu een wisselstroomketen met een spoel, een weerstand en een kondensator, zie figuur 3.

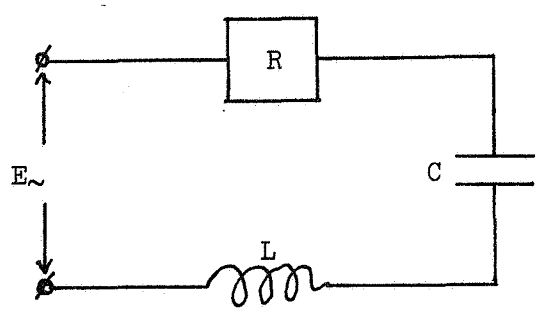


fig.3

De vergelijking voor de stroomsterkte wordt nu

$$V_0 \cos \omega t = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt \tag{11}$$

Stellen we weer $I = I_0 \cos(\omega t-\phi)$, dan krijgen we

$$V_0 \cos \omega t = I_0\{R \cos(\omega t-\phi) + (\frac{1}{\omega C} - \omega L) \sin(\omega t-\phi)\} .$$

Uitwerking hiervan geeft

$$V_0 \cos \omega t = I_0 \cos \omega t\{R \cos \phi + (\omega L-\frac{1}{\omega C}) \sin \phi\}$$

$$+ I_0 \sin \omega t\{R \sin \phi - (\omega L-\frac{1}{\omega C}) \cos \phi\} .$$

Hieruit volgen voor I_0 en ϕ de formules

$$\left\{\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}} , \\ \cos \phi &= \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}} , \\ I_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}} . \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Terwijl in een RL-keten de fazehoek positief is $(\phi<\frac{\pi}{2})$ en die in een RC-keten negatief $(>-\frac{\pi}{2})$, kan de fazehoek in een LCR-keten alle waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$ aannemen.

Het kan blijkbaar voorkomen, dat $\phi = 0$, dus dat

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} .$$

In dat geval gedraagt de LCR-keten zich schijnbaar als een R-keten ondanks de aanwezigheid van de spoel en de kondensator. We spreken dan van resonantie tussen de spoel en de kondensator.

§2 Verband tussen impedantie, fazehoek en komplexe getallen

We bekijken in het komplexe vlak de getallen

$$Z_1 = R + i\omega L \quad ,$$

$$Z_2 = R - \frac{i}{\omega C} \quad ,$$

$$Z_3 = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \quad ,$$

met argumenten ϕ_1, ϕ_2 en ϕ_3

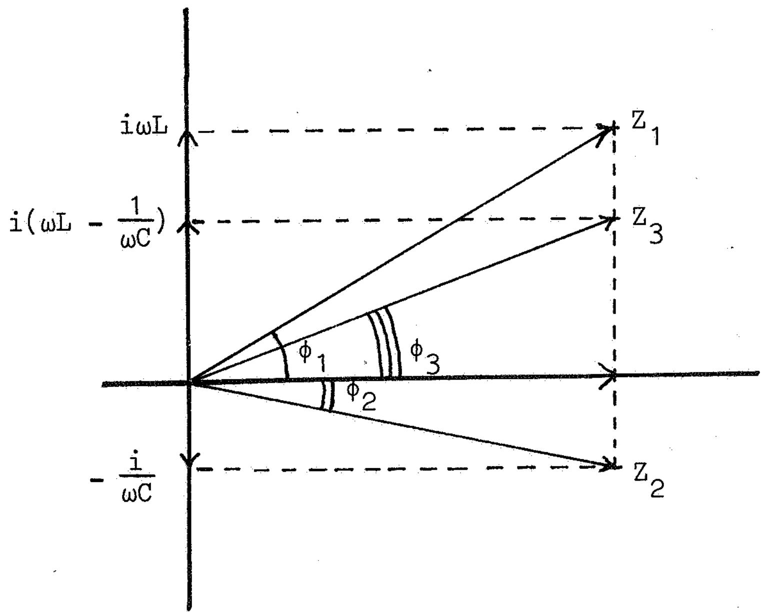


fig.4

Van deze getallen merken wij op dat

$$|Z_1| = \sqrt{R^2+\omega^2L^2}, \quad \cos\phi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}, \quad \sin\phi_1 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \quad ,$$

$$|Z_2| = \sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}, \quad \cos\phi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}, \quad \sin\phi_2 = \frac{-1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}},$$

$$|Z_3| = \sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}, \quad \cos\phi_3 = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}, \quad \sin\phi_3 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}.$$

We zien nu, dat de modulus en het argument van Z_1 overeenkomen met de impedantie en de fazehoek van een LR-keten. Evenzo komen de modulus en het argument van Z_2 resp. Z_3 overeen met de impedantie en fazehoek van een RC-keten, resp. van een RCL-keten.

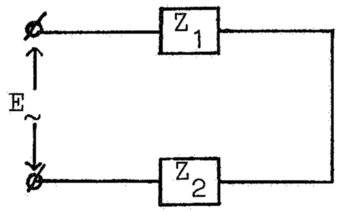
Opgave: Ga na, dat de moduli en argumenten van de getallen R, $i\omega L$ en $-\frac{i}{\omega C}$ overeenkomen met de impedanties en fazehoeken van een R-keten, resp. een L-keten en een C-keten.

Aan deze drie voorbeelden zien we, dat een wisselstroomketen in beginsel volledig kan worden beschreven door een komplex getal Z (impedantie = $|Z|$, fazehoek = $\arg(Z)$). Dit getal Z heet de *komplexe impedantie* van de wisselstroomketen (niet te verwarren met de eerder gedefiniëerde impedantie).

Voor deze komplexe impedantie gelden de volgende rekenregels

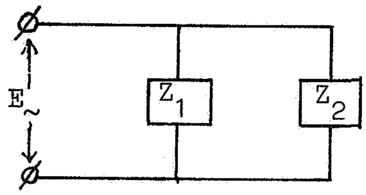
1) $Z_R = R \quad ; \quad Z_L = i\omega L \quad ; \quad Z_C = \frac{-i}{\omega C}$

2) Serieschakeling:



$$Z_{tot} = Z_1 + Z_2 \ .$$

3) Parallelschakeling:



$$\frac{1}{Z_{tot}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \ .$$

De regels 2) en 3) kunnen ook uitgebreid worden voor meer dan twee impedanties.

We illustreren nu het gemak van een komplexe impedantie aan de hand van een LR-keten.

We vatten V en I op als de reële delen van de komplexe getallen

$$\tilde{V} = V_0 \, e^{i\omega t} \quad , \quad \tilde{I} = I_0 \, e^{i(\omega t - \phi)} \quad ,$$

waarbij V_0 en I_0 weer positief zijn. We kunnen nu formule (6) toepassen op $\tilde{V}$ en $\tilde{I}$ en krijgen dan

$$V_0\, e^{i\omega t} = RI_0\, e^{i(\omega t-\phi)} + i\omega L\, I_0\, e^{i(\omega t-\phi)} .$$

$$= I_0\, e^{i(\omega t-\phi)}\, (R+i\omega L) .$$

Delen we links en rechts door $e^{i\omega t}$, dan krijgen we

$$V_0 = I_0\, e^{-i\phi}\, (R+i\omega L) . \tag{13}$$

Aangezien linker- en rechterlid van (13) reëel en positief moeten zijn, krijgen we door reëel en imaginair deel gelijk te stellen

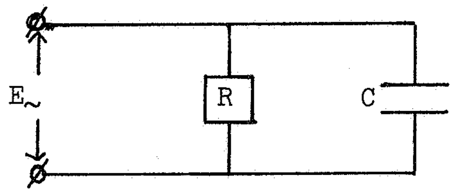
$$V_0 = I_0\, (R \cos \phi+\omega L \sin\phi) \quad ,$$

$$0 = - R \sin \phi + \omega L \cos \phi \quad ,$$

wat precies overeenkomt met (1.10). Het is dus duidelijk, dat met behulp van komplexe getallen de fazehoek en de impedantie van een wisselstroomschakeling aanzienlijk sneller gevonden kunnen worden.

Tot slot berekenen we de impedantie en fazehoek van twee eenvoudige schakelingen.

a)



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{\frac{-i}{\omega C}} + \frac{1}{R} = i\omega C + \frac{1}{R} \ ;$$

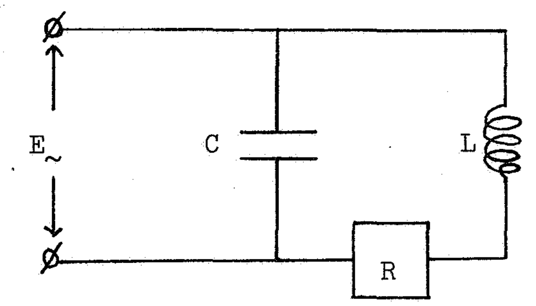
$$Z = \frac{R}{1+i\omega CR} = \frac{R(1-i\omega CR)}{1+\omega^2C^2R^2} \quad ;$$

$$\text{impedantie} = |Z| = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}} \ ;$$

$$\text{fazehoek} = \arg(z) = \phi = \arg(1-i\omega CR) \quad ;$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}} \quad ; \quad \sin\phi = \frac{-\,\omega CR}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}} \; .$$

b)



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L+Z_R} = i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L} \quad ;$$

$$Z = \frac{1}{i\omega C+\frac{1}{R+i\omega L}} = \frac{R+i\omega L}{1-\omega^2LC+i\omega CR} = \frac{R+i\,[L(1-\omega^2LC)-CR^2]}{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2C^2R^2} \quad ;$$

$$\text{impedantie} = |Z| = \frac{|R+i\omega L|}{|1-\omega^2LC+i\omega CR|} = \sqrt{\frac{R^2+\omega^2L^2}{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2C^2R^2}} \quad ;$$

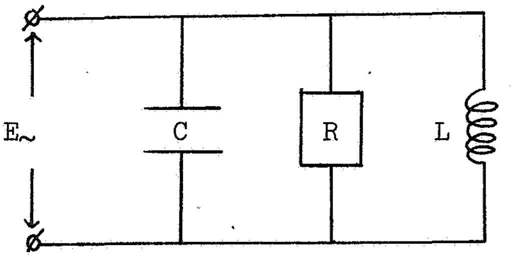
$$\text{fazehoek} = \arg(z) = \arg(R+i\omega[L(1-\omega^2C^2L^2)-CR^2]) \; ;$$

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2[L(1-\omega^2C^2L^2)-CR^2]^2}} \quad ;$$

$$\sin\phi = \frac{\omega[L(1-\omega^2C^2L^2)-CR^2]}{\sqrt{R^2+\omega^2[L(1-\omega^2C^2L^2)-CR^2]}} \; .$$

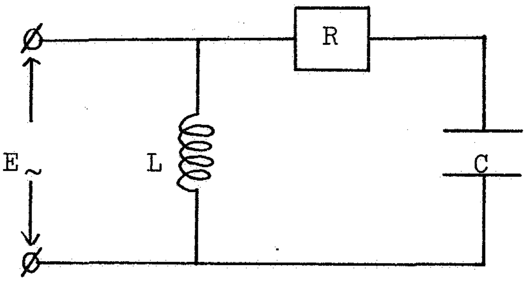
<u>Opgave</u>: Bereken in de volgende schakelingen de impedantie en de fazehoek. In alle gevallen is $E = V_0 \cos \omega t$.

(a)



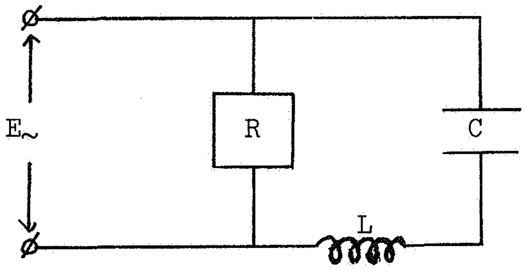
;

(b)



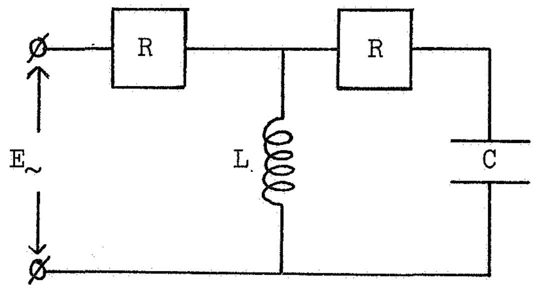
;

(c)



;

(d)



.