stichting
mathematisch
centrum

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TC 56/76 JULI
(DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS)

T.H. KOORNWINDER

# OVERZICHT VAN EEN AANTAL BEGRIPPEN EN STELLINGEN UIT DE FUNCTIONAALANALYSE EN DE DISTRIBUTIETHEORIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

*Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.*

*The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.*

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 46-01, 46A05, 46F05, 46F10

# Overzicht van een aantal begrippen en stellingen uit de functionaalanalyse en de distributietheorie

door

T.H. Koornwinder

## 1. INLEIDING

Deze syllabus is bedoeld als aanvulling op het boek *Basic linear partial differential equations* van F. TREVES. De definities en stellingen uit de functionaalanalyse en de distributietheorie die in dat boek bekend worden verondersteld, zullen hier zoveel mogelijk worden samengevat. Alle stellingen zullen worden geformuleerd zonder bewijs. Wel zal echter bij elke stelling gerefereerd worden aan een plaats waar het bewijs te vinden is. We zullen zoveel mogelijk verwijzen naar het boek:

W. RUDIN, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973,

in de tekst aan te duiden met RUDIN. Als tweede referentie zal gelden:

F. TREVES, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.

Overal in de tekst zal een verwijzing naar TREVES op dit boek slaan.

Deze syllabus bevat drie hoofdonderdelen over resp. functionaalanalyse, distributies en Fouriertransformaties. De notatie is grotendeels in overeenstemming met hetgeen op pp. xiii t.m. xvii van het boek *Basic linear partial differential equations* wordt afgesproken. De conventies betreffende multi-indices op p. 14 van dit boek zullen gevolgd worden en we zullen schrijven:

$$D_j := -\sqrt{-1}\ \partial/\partial x^j,$$

$$D^\alpha := (D_1)^{\alpha_1} \ldots (D_n)^{\alpha_n}.$$

Met $\Omega$ wordt altijd een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ bedoeld. Bij notaties als $\mathcal{D}'(\Omega)$ schrijven we zondermeer $\mathcal{D}'$ indien $\Omega = \mathbb{R}^n$. Met een vectorruimte zal altijd een vectorruimte over de complexe getallen worden bedoeld.

## 2. FUNCTIONAALANALYSE

### 2.1. TOPOLOGISCHE VECTORRUIMTES

Een *topologische vectorruimte* is een vectorruimte X die een topologie bezit zo dat

(a) elk punt van X een gesloten verzameling is,

(b) de afbeelding $(x,y) \to x + y$ continu is van $X \times X$ in X,

(c) de afbeelding $(\alpha,x) \to \alpha x$ continu is van $\mathbb{C} \times X$ in X.

Een *lokale basis* van X is een collectie $\gamma$ bestaande uit open omgevingen van 0 zodat iedere omgeving van 0 een element uit $\gamma$ als deelverzameling bevat. Zo'n lokale basis bepaalt de topologie van X volledig, immers de open deelverzamelingen van X zijn juist de verenigingen van verzamelingen van het type $x + U$ $(x\in X,\ U\in\gamma)$.

Een verzameling $C \subset X$ heet *convex* als $tx + (1-t)y \in C$ voor iedere $x,y \in C$ en $t \in [0,1]$.

Een verzameling $B \subset X$ heet *gebalanceerd* als $\alpha x \in B$ voor iedere $x \in B$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ met $|\alpha| \le 1$. We kunnen altijd een lokale basis van X kiezen bestaande uit gebalanceerde verzamelingen (RUDIN, §1.14).

Een verzameling $E \subset X$ heet *begrensd* als er voor iedere omgeving V van 0 een getal $t > 0$ is zodat $E \subset tV$.

Een *Cauchyrij* in X is een rij $\{x_n\}$ in X zodat er bij iedere omgeving V van 0 een natuurlijk getal N te vinden is waarvoor geldt dat $x_n - x_m \in V$ als $n,m > N$. Elke convergente rij is een Cauchyrij.

Cauchyrijen in X en compacte deelverzamelingen van X zijn voorbeelden van begrensde verzamelingen (RUDIN, §1.15 en §1.29).

Als de topologie van X geïnduceerd wordt door een *invariante metriek* d (d.w.z. $d(x+z,y+z) = d(x,y)$) dan is bovengenoemde definitie van Cauchyrijen $\{x_n\}$ equivalent met de uitspraak dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N te vinden is zodat $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ als $n,m > N$ (RUDIN, §1.25). De metriek heet *volledig* als iedere Cauchyrij een convergente rij is.

We noemen X een *lokaal convexe* (topologische vector)*ruimte* als X een lokale basis heeft bestaande uit convexe verzamelingen. Dan heeft X ook een lokale basis bestaande uit gebalanceerde convexe verzamelingen (RUDIN, §1.14).

Een *Fréchetruimte* is een lokaal convexe ruimte waarvan de topologie geïnduceerd wordt door een volledige invariante metriek.

## 2.2. SEMINORMEN, NORMEN, INWENDIGE PRODUCTEN

Laat X een vectorruimte zijn. Een *seminorm* op X is een functie $p : X \to [0,\infty)$ zodat voor alle $x,y \in X$ en $\alpha \in \mathbb{C}$ geldt dat

(a) $\quad p(x+y) \le p(x) + p(y)$,

(b) $\quad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$.

Als bovendien geldt dat

(c) $\quad p(x) \ne 0 \qquad$ als $x \ne 0$,

dan heet p een *norm* op X.

Een familie $P$ van seminormen op X heet *separerend* als er voor iedere $x \ne 0$ een $p \in P$ is met $p(x) \ne 0$. Een norm is dus een seminorm p zodat de familie $\{p\}$ separerend is.

Een *inwendig product* op X is een afbeelding $(.,.)$ van $X \times X$ in $\mathbb{C}$ zodat

(a) $\quad (\alpha x+\beta y,z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$,

(b) $\quad (y,x) = \overline{(x,y)}$,

(c) $\quad (x,x) > 0 \qquad$ als $x \ne 0$.

Dan is de afbeelding $x \to \sqrt{(x,x)}$ een norm op X.

## 2.3. LOKAAL CONVEXE TOPOLOGIEËN GEDEFINIEERD DOOR SEMINORMEN

Laat $P$ een separerende familie van seminormen op een vectorruimte X zijn. Dan vormt de collectie van verzamelingen $\{y \in X;\ p(y-x) < n^{-1}\}$

($x \in X$, $p \in \mathcal{P}$, $n=1,2,3,\ldots$) een basis voor een topologie op X die X tot een lokaal convexe ruimte maakt. In deze topologie zijn de begrensde verzamelingen juist de deelverzamelingen van X waarop iedere $p \in \mathcal{P}$ begrensd is. Zie RUDIN, §1.37.

Als de separerende familie $\mathcal{P}$ bestaat uit aftelbaar veel seminormen $p_i$ $(i=1,2,\ldots)$ dan is

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$$

een invariante metriek op X die dezelfde topologie op X induceert als $\mathcal{P}$.

Als de separerende familie $\mathcal{P}$ bestaat uit één enkele norm p dan is $d(x,y) := p(x-y)$ een invariante metriek op X. In dit geval heet X, voorzien van de norm p, een *genormeerde vectorruimte*. Indien de metriek d bovendien volledig is dan heet X een *Banachruimte*. Elke Banachruimte is dus een Fréchetruimte. Een *Hilbertruimte* is een vectorruimte met inwendig product $(.,.)$ zo dat de metriek $d(x,y) := \sqrt{(x-y,x-y)}$ volledig is.

## 2.4. LINEAIRE AFBEELDINGEN

Laten X en Y topologische vectorruimtes zijn en $T : X \to Y$ een lineaire afbeelding. Dan heet T *begrensd* als voor iedere begrensde verzameling $E \subset X$ geldt dat $T(E)$ een begrensde deelverzameling van Y is.

Als bovendien de topologie van X geïnduceerd wordt door een metriek dan zijn voor een lineaire afbeelding $T : X \to Y$ de begrippen *begrensd* en *continu* equivalent (RUDIN, §1.32).

Als X en Y Fréchetruimtes zijn, $T : X \to Y$ een lineaire afbeelding is en $\{(x,Tx);\ x \in X\}$ een gesloten deelverzameling is van $X \times Y$ dan is T continu (*closed graph theorem*, RUDIN, §2.15).

## 2.5. DUALE RUIMTES

Een *lineaire functionaal* op een topologische vectorruimte X is een lineaire afbeelding van X in $\mathbb{C}$. De *duale ruimte* X' van X is de vectorruimte van alle continue lineare functionalen op X. Als $x \in X$, $x' \in X'$ dan schrijven we

$$\langle x',x\rangle := x'(x).$$

We zeggen dat $X'$ de punten op $X$ *separeert* als er voor elke $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$ een $x' \in X'$ bestaat zodat $x'(x_1) \neq x'(x_2)$. Als $X$ een lokaal convexe ruimte is dan separeert $X'$ de punten op $X$ (RUDIN, §3.4).

Indien $X'$ de punten op $X$ separeert dan definiëren we de *zwakke topologie* op $X$ door de familie van seminormen

$$p_{x'}(x) \quad := \quad |\langle x',x\rangle| \qquad\qquad (x' \in X').$$

Laat $X$ een topologische vectorruimte zijn met duale ruimte $X'$. De *sterke topologie* op $X'$ wordt gedefinieerd door de familie van seminormen

$$p_E(x') \quad := \quad \sup_{x\in E} |\langle x',x\rangle| \qquad\qquad (E \text{ begrensd in } X).$$

Als $X$ een genormeerde vectorruimte is met norm $\|.\|$ dan wordt $X'$ in de sterke topologie een Banachruimte met norm

$$\|x'\| \quad := \quad \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x',x\rangle|.$$

Als $X$ een Hilbertruimte is met inwendig product $(.,.)$ dan kunnen we $X'$ met $X$ identificeren volgens de regel $\langle y,x\rangle := (x,y)$.

De *zwak*-topologie* op $X'$ wordt gedefinieerd door de familie van seminormen

$$p_x(x') \quad := \quad |\langle x',x\rangle| \qquad\qquad (x \in X).$$

## 2.6. DUALE LINEAIRE AFBEELDINGEN

Laten $X$ en $Y$ topologische vectorruimtes zijn en laat $T : X \to Y$ een continue lineaire afbeelding zijn. De *duale afbeelding* $T' : Y' \to X'$ wordt gedefinieerd door

$$\langle T'y',x\rangle \quad := \quad \langle y',Tx\rangle \qquad\qquad (x \in X,\ y' \in Y').$$

De afbeelding $T'$ is continu t.o.v. de sterke topologieën van $Y'$ en $X'$. Als $\{Tx;\ x \in X\}$ dicht is in $Y$ dan is $T'$ injectief.

# 3. DISTRIBUTIES

## 3.1. DE RUIMTES $C^m(\Omega)$, $C_c^m(K)$ EN $C_c^m(\Omega)$

Laat $m = 0,1,2,\ldots$ of $\infty$. De ruimte $C^m(\Omega)$ bestaat uit alle m keer continu differentieerbare functies op $\Omega$ en wordt voorzien van een lokaal convexe topologie door middel van de seminormen

$$(3.1) \qquad p_{j,K}(f) \;:=\; \sup\{|D^\alpha f(x)|;\; x \in K,\; |\alpha| \le j\}$$

$$(j = m \text{ als } m < \infty \text{ of } j = 0,1,\ldots \text{ als } m = \infty;\; K \subset \Omega \text{ en compact})$$

Indien we compacte verzamelingen $K_i \subset \Omega$ $(i=1,2,\ldots)$ kiezen zodat $K_i$ bevat is in het inwendige van $K_{i+1}$ en $\Omega = \cup K_i$ dan wordt dezelfde topologie op $C^m(\Omega)$ gedefinieerd door de aftelbare collectie seminormen $\{p_{j,K_i}\}$. De ruimte $C^m(\Omega)$ is een Fréchetruimte (TREVES, Chap. 10).

De *drager* van een functie f op $\Omega$ is de afsluiting in $\Omega$ van de verzameling $\{x \in \Omega;\; f(x) \neq 0\}$.

Laat voor compacte $K \subset \mathbb{R}^n$ de ruimte $C_c^m(K)$ bestaan uit alle $C^m$-functies op $\mathbb{R}^n$ waarvan de drager bevat is in K. De ruimte $C_c^\infty(K)$ wordt voorzien van een lokaal convexe topologie d.m.v. de in (3.1) gedefinieerde seminormen $p_{j,K}$ $(j= 0,1,\ldots)$. Als m eindig is dan wordt $C_c^m(K)$ een genormeerde vectorruimte met norm $p_{m,K}$. Als $K \subset \Omega$ dan geldt voor elke m dat $C_c^m(K)$ een gesloten deelruimte is van $C_c^m(\Omega)$ en dat de topologie van $C_c^m(K)$ dezelfde is als de door $C_c^m(\Omega)$ geïnduceerde topologie. Dus $C_c^m(K)$ is een Fréchetruimte (of Banachruimte als m eindig is).

Laat $C_c^m(\Omega)$ bestaan uit alle $C^m$-functies op $\Omega$ met compacte drager. We geven aan $C_c^m(\Omega)$ een lokaal convexe topologie d.m.v. een lokale basis bestaande uit al die convexe gebalanceerde verzamelingen $W \subset C_c^m(\Omega)$ die voor alle compacte $K \subset \Omega$ de eigenschap hebben dat $W \cap C_c^m(K)$ open is in $C_c^m(K)$ (TREVES, Chap. 13). De ruimte $C_c^\infty(\Omega)$ wordt ook wel aangeduid met $\mathcal{D}(\Omega)$ en zijn elementen heten *testfuncties* op $\Omega$.

De topologie die $C_c^m(\Omega)$ op $C_c^m(K)$ $(K\subset\Omega)$ induceert is gelijk aan de originele topologie van $C_c^m(K)$ (TREVES, Chap. 13).

Een lineaire functionaal op $C_c^m(\Omega)$ is continu dan en slechts dan als voor elke compacte $K \subset \Omega$ zijn restrictie tot $C_c^m(K)$ continu is (TREVES, Chap. 13).

Als E een begrensde deelverzameling van $C_c^m(\Omega)$ is dan $E \subset C_c^m(K)$ voor zekere compacte $K \subset \Omega$ (TREVES, Prop. 14.6).

Een rij $\{x_i\}$ convergeert dientengevolge in $C_c^m(\Omega)$ dan en slechts dan als voor zekere compacte $K \subset \Omega$ de rij in $C_c^m(K)$ bevat is en convergeert in de topologie van $C_c^m(K)$.

## 3.2. DE RUIMTES $\mathcal{D}'(\Omega)$ EN $\mathcal{M}(\Omega)$

Een *distributie* op $\Omega$ is een continue lineaire functionaal op $C_c^\infty(\Omega)$. De ruimte van alle distributies op $\Omega$ wordt aangeduid met $\mathcal{D}'(\Omega)$, de duale ruimte van $C_c^\infty(\Omega)$.

Een lineaire functionaal T op $C_c^\infty(\Omega)$ is een distributie op $\Omega$ dan en slechts dan als er voor iedere compacte $K \subset \Omega$ een geheel getal $j \geq 0$ en een reëel getal $C > 0$ bestaan zodat

$$|\langle T,\phi\rangle| \leq C \sup\{|D^\alpha\phi(x)|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \leq j\} \tag{3.2}$$

voor elke $\phi \in C_c^\infty(K)$ (RUDIN, §6.8). Als in bovengenoemde karakterisering van een distributie T een vaste j onafhankelijk van K gekozen kan worden dan wordt de kleinst mogelijke j de *orde* van T genoemd. Indien zo'n j niet bestaat dan zeggen we dat T *oneindige orde* heeft.

Een verzameling $E \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ is begrensd in de sterke topologie dan en slechts dan als E begrensd is in de zwak$^*$-topologie (TREVES, Theorem 33.2). Op een begrensde deelverzameling van $\mathcal{D}'(\Omega)$ induceren de sterke en de zwak$^*$-topologie dezelfde topologie (TREVES, Prop. 34.6). Dientengevolge is voor een rij in $\mathcal{D}'(\Omega)$ sterke convergentie equivalent met zwak$^*$-convergentie.

Een *Radonmaat* op $\Omega$ is een continue lineaire functionaal op $C_c^0(\Omega)$. De verzameling van alle Radonmaten op $\Omega$ wordt aangeduid met $\mathcal{M}(\Omega)$, de duale ruimte van $C_c^0(\Omega)$. Een lineaire functionaal $\mu$ op $C_c^0(\Omega)$ is een Radonmaat dan en slechts dan als er voor iedere compacte $K \subset \Omega$ een $C > 0$ bestaat zodat (3.2) geldt voor $j = 0$ en elke $\phi \in C_c^0(K)$ (TREVES, Chap. 21). Een Radonmaat opgevat als een lineaire functionaal op $C_c^\infty(\Omega)$ is een distributie op $\Omega$ van orde 0. Omgekeerd kan iedere distributie op $\Omega$ van orde 0 op een unieke wijze uitgebreid worden tot een continue lineaire functionaal op $C_c^0(\Omega)$, dus tot een Radonmaat (TREVES, Chap. 21).

Laat $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (d.w.z. lokaal absoluut Lebesgue-integreerbaar op $\Omega$). Dan definieert de lineaire functionaal

$$\phi \to \int_\Omega \phi f \, dx \qquad (\phi \in C^0_c(\Omega))$$

een Radonmaat op $\Omega$ en dus ook een distributie op $\Omega$ die we zullen aanduiden met $T_f$.

## 3.3. DE DRAGER VAN EEN DISTRIBUTIE

We zeggen dat een distributie T *identiek nul* is op een open verzameling $U \subset \Omega$ als $\langle T,\phi\rangle = 0$ voor alle $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$ met drager bevat in U. Twee distributies $T_1$ en $T_2$ zijn aan elkaar *gelijk* op U als $T_1 - T_2$ identiek nul is op U.

De *drager* van een distributie T op $\Omega$ is het complement van de grootste open deelverzameling van $\Omega$ waarop T identiek nul is.

Laat $\mathcal{E}'(\Omega)$ de ruimte aanduiden van distributies op $\Omega$ met *compacte drager*. Iedere $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, opgevat als een lineaire functionaal op $C^\infty_c(\Omega)$, kan op een unieke wijze uitgebreid worden tot een continue lineaire functionaal op $C^\infty(\Omega)$. Omgekeerd is de restrictie van een continue lineaire functionaal op $C^\infty(\Omega)$ tot $C^\infty_c(\Omega)$ een element van $\mathcal{E}'(\Omega)$ (TREVES, Theorem 24.2). Iedere distributie op $\Omega$ met compacte drager heeft eindige orde (RUDIN, §6.24).

## 3.4. DE AFGELEIDE VAN EEN DISTRIBUTIE

Laat $\alpha$ een multiindex zijn en $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dan is de lineaire functionaal $D^\alpha T$, gedefinieerd door

$$\langle D^\alpha T,\phi\rangle \;:=\; (-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha\phi,T\rangle \qquad (\phi \in C^\infty_c(\Omega))$$

ook een distributie op $\Omega$. Als $f \in C^m(\Omega)$ en $|\alpha| \le m$ dan

$$D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$$

(RUDIN, §6.13, §6.14).

Laat $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ en $f \in C^\infty(\Omega)$. Dan is de lineaire functionaal fT, gedefinieerd door

$$\langle fT,\phi\rangle \;:=\; \langle T,f\phi\rangle \qquad\qquad (\phi \in C_c^\infty(\Omega))$$

ook een distributie op $\Omega$. Er geldt de *formule van Leibniz*

$$D^\alpha(fT) = \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha,\beta}\,(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta T)$$

met $c_{\alpha,\beta}$ positief geheel (RUDIN, §6.15).

Als f een continue functie op $\Omega$ is dan bedoelen we met de *distributionele afgeleide* $D^\alpha f$ de distributie $D^\alpha T_f$. Iedere distributie op $\Omega$ van eindige orde is te schrijven als $D^\alpha f$ voor zekere multiïndex $\alpha$ en $f \in C^0(\Omega)$. Als T een distributie op $\Omega$ is van oneindige orde dan is er bij iedere open verzameling $\Omega' \subset \Omega$ waarvan de afsluiting in $\Omega$ compact is een multiïndex $\alpha$ en een $f \in C^0(\Omega)$ te vinden zodat T op $\Omega'$ gelijk is aan $D^\alpha f$ (TREVES, Chap. 24).

We definiëren de *Diracdistributie* $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ door

$$\langle\delta,\phi\rangle \;:=\; \phi(0) \qquad\qquad (\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\,).$$

De distributies op $\mathbb{R}^n$ met drager $\{0\}$ zijn juist de eindige lineaire combinaties van de afgeleiden van $\delta$ (TREVES, Theorem 24.6).

## 3.5. CONVOLUTIE

Voor dit onderdeel verwijzen we naar de paragrafen 6.29 tot/met 6.37 in RUDIN. Als $\phi$ een functie op $\mathbb{R}^n$ is, laat dan

$$\check{\phi}(y) \;:=\; \phi(-y), \qquad\qquad (\tau_x\phi)(y) \;:=\; \phi(y-x).$$

Als $T \in \mathcal{D}'$ en $\phi \in C^\infty$ zodat minstens één van beide compacte drager heeft dan kunnen we een functie $T * \phi$ op $\mathbb{R}^n$ definiëren door

$$(T * \phi)(x) \;:=\; \langle T,\tau_x\check{\phi}\rangle.$$

Dit is een $C^\infty$-functie. Als T en $\phi$ beide compacte drager hebben dan heeft $T * \phi$ compacte drager, dus $T * \phi \in C_c^\infty$.

Laat $S,T \in \mathcal{D}'$ zodat minstens één van beide compacte drager heeft. Definieer de lineaire functionaal $S * T$ op $C_c^\infty$ door

$$\langle S * T, \phi\rangle \quad := \quad (S * (T * \check{\phi}))(0) \qquad\qquad (\phi \in C_c^\infty).$$

Dan $S * T \in \mathcal{D}'$. Voorts geldt dat

$$D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T = S * (D^\alpha T).$$

Als $S, T \in \mathcal{E}'$ dan $S * T \in \mathcal{E}'$.

## 4. FOURIERTRANSFORMATIES

### 4.1. DE RUIMTES $\mathcal{S}$ EN $\mathcal{S}'$

We noemen een continue functie f op $\mathbb{R}^n$ *snel dalend* als voor elke $k = 0,1,2,\ldots$ geldt dat

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |f(x)| < \infty.$$

Laat $\mathcal{S}$ de klasse van $C^\infty$-functies f op $\mathbb{R}^n$ zijn zodat $D^\alpha f$ snel dalend is voor elke multiïndex $\alpha$. We geven aan $\mathcal{S}$ een lokaal convexe topologie met behulp van de seminormen

$$p_{k,j}(f) \quad := \quad \sup\{(1+|x|^2)^k |D^\alpha f(x)|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \le j\} \qquad (k,j = 0,1,2,\ldots).$$

Dan is $\mathcal{S}$ een Fréchetruimte (RUDIN, §7.4), $C_c^\infty$ is dicht in $\mathcal{S}$ en de inbedding van $C_c^\infty$ in $\mathcal{S}$ is continu (RUDIN, §7.10). Iedere continue lineaire functionaal op $C_c^\infty$ kan dus op hoogstens één manier uitgebreid worden tot een continue lineaire functionaal op $\mathcal{S}$.

Een *getemperde distributie* is een distributie op $\mathbb{R}^n$ die de restrictie is tot $C_c^\infty$ van een continue lineaire functionaal op $\mathcal{S}$. De ruimte van getemperde distributies wordt aangeduid met $\mathcal{S}'$ en kan geïdentificeerd worden met de duale ruimte van $\mathcal{S}$.

De klassen $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$ zijn gesloten onder vermenigvuldiging met een polynoom en onder differentiatie.

Een continue functie f op $\mathbb{R}^n$ heet *langzaam stijgend* als

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-k}|f(x)| < \infty \qquad \text{voor zekere } k.$$

De getemperde distributies zijn juist de distributies van de vorm $D^\alpha f$ voor zekere multiïndex $\alpha$ en langzaam stijgende continue functie f (TREVES, Theorem 25.4).

Iedere distributie op $\mathbb{R}^n$ met compacte drager is getemperd en iedere getemperde distributie is een distributie van eindige orde.

## 4.2. DE FOURIERTRANSFORMATIE OP $S$ EN $S'$

Definieer de *Fouriergetransformeerde* $\hat{\phi} = F\phi$ van $\phi \in S$ als

$$(F\phi)(\xi) = \hat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\phi(x)dx.$$

Dan is $F : S \to S$ bijectief en de inverse Fouriertransformatie $F^{-1} : S \to S$ wordt gegeven door

$$(F^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\psi(\xi)d\xi.$$

Voorts zijn de afbeeldingen $F$ en $F^{-1}$ continu (RUDIN, §7.7).

Definieer de *Fouriergetransformeerde* $FT$ van $T \in S'$ als de lineaire functionaal

$$\langle FT,\phi\rangle := \langle T,F\phi\rangle \qquad (\phi \in S).$$

Dan is $F : S' \to S'$ bijectief en $F$ en $F^{-1}$ zijn continu t.o.v. de zwak$^*$-topologie van $S'$ (RUDIN, §7.15).

Als P een polynoom is dan geldt:

$$F(P(D)T) = PFT$$

en

$$F(PT) = P(-D)FT.$$

## 4.3. STELLINGEN VAN PALEY EN WIENER

Laat $r > 0$. De Fouriertransformatie $\mathcal{F}$ is een bijectie tussen de klasse van $C^\infty$-functies op $\mathbb{R}^n$ met drager bevat in $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \le r\}$ en de klasse van restricties tot $\mathbb{R}^n$ van gehele functies $f$ op $\mathbb{C}^n$ zo dat er voor elke $k = 0,1,2,\ldots$ een $c > 0$ is met de eigenschap dat

$$|f(z)| \le c(1+|z|)^{-k} e^{r|\mathrm{Im}\, z|} \qquad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Zie RUDIN, §7.22.

Laat $T \in \mathcal{E}'$ en schrijf

$$e_\xi(x) \quad := \quad e^{ix.\xi}.$$

Dan geldt dat

$$(\mathcal{F}T)(\xi) = \langle T, e_\xi \rangle,$$

d.w.z. dat de getemperde distributie $\mathcal{F}T$ te identificeren is met een functie op $\mathbb{R}^n$ (RUDIN, §7.23).

Laat $r > 0$. De Fouriertransformatie $\mathcal{F}$ is een bijectie tussen de klasse van distributies op $\mathbb{R}^n$ met drager bevat in $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \le r\}$ en de klasse van restricties tot $\mathbb{R}^n$ van gehele functies $f$ op $\mathbb{C}^n$ zo dat voor zekere gehele $k \ge 0$ en reële $c > 0$ geldt dat

$$|f(z)| \le c(1+|z|)^{k} e^{r|\mathrm{Im}\, z|} \qquad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Zie RUDIN, §7.23.