stichting mathematisch centrum

MC

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TD 8/75 JULI

WERKBESPREKINGEN IN EERSTE HELFT 1974

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

Werkbespreking 17 januari 1974

J. Grasman

HET LIMIETGEDRAG VAN EEN EPIDEMIE BIJ EEN WILLEKEURIG KLEINE BESMETTING

Een populatie bestaat uit een aantal gezonde exemplaren met dichtheid $\alpha(t)$ en een aantal zieke exemplaren met dichtheid $y(t)$. De totale dichtheid $x(t) + y(t) = n$ wordt konstant verondersteld. De zieke exemplaren hebben een besmettelijkheid $A(t)$, die een functie is van de tijd dat een exemplaar ziek is. Verondersteld wordt dat

$$\int_0^\infty A(t)\, dt = \gamma < \infty.$$

Voor het verloop van de epidemie geldt de volgende differentiaal-integraal-vergelijking

$$x'(t) = x(t) \left\{ \int_0^t x'(t-\tau)\, A(\tau)\, d\tau - y(0)\, A(t) \right\}.$$

Integratie levert

$$\log \frac{x(t)}{x(0)} = \int_0^t x(t-\tau)\, A(\tau)\, d\tau - n \int_0^t A(\tau)\, d\tau.$$

Het blijkt dat alleen voor $n\gamma \geq 1$ de epidemie zich werkelijk ontwikkelt. Voor $y(0) \to 0$ wordt de epidemie uitgesteld voor een periode $-(\log y(0))/\beta$, waarin β zodanig gekozen wordt dat

$$\int_0^\infty e^{-\beta\tau} A(\tau)\, d\tau = \frac{1}{n}.$$

Daarna neemt de dichtheid van de zieke exemplaren toe volgens een vaste limietfunctie.

Werkbespreking 31 januari 1974

N.M. Temme

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN VAN DE INCOMPLETE GAMMAFUNKTIES EN DE INCOMPLETE BETAFUNKTIE

Voor de incomplete gammafunkties

$$(1)\qquad \gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t}\, t^{a-1}\, dt, \qquad \Gamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-t}\, t^{a-1}\, dt$$

zijn voor grote waarden van de parameters a en/of x asymptotische ontwikkelingen bekend, die hun bruikbaarheid verliezen als de verhouding x/a nagenoeg gelijk is aan 1. Een bekend voorbeeld is de asymptotische reeks

$$(2)\qquad \Gamma(a,x) \sim x^{a-1}\, e^{-x}\left(1 + \frac{a-1}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} + \ldots\right), \qquad x \to \infty,$$

die uit (1) volgt met behulp van partiële integratie; (2) is alleen zinvol als $a = o(x)$. Een benadering voor $a \to \infty$ kan het beste gevonden worden via $\gamma(a,x)$. Ook hier is het belangrijk te veronderstellen $x = o(a)$, $a \to \infty$.

Het is de bedoeling te laten zien hoe uniforme ontwikkelingen verkregen kunnen worden. Uitgangspunt is de integraalrepresentatie

$$\frac{\Gamma(a,x)}{\Gamma(a)} = \frac{e^{-x}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx}\, s^{-a}\, \frac{ds}{1-s}, \qquad 0 < c < 1.$$

Met behulp van zadelpuntsmethoden wordt nu een asymptotische ontwikkeling afgeleid van de gedaante

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a,x)}{\Gamma(a)} \sim \tfrac{1}{2}\mathrm{erfc}(\zeta) + \sum c_k(\lambda)\, a^{-k-\frac{1}{2}} \\[2ex] \dfrac{\gamma(a,x)}{\Gamma(a)} \sim \tfrac{1}{2}\mathrm{erfc}(-\zeta) - \sum c_k(\lambda)\, a^{-k-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$\lambda = x/a$, $\zeta = \{a(\lambda - 1 - \ln \lambda)\}^{\frac{1}{2}}$ en ζ heeft voor reële λ hetzelfde teken als $(\lambda - 1)$. De hoofdbijdrage in (4) komt van de errorfunktie erfc gedefinieerd door

$$\mathrm{erfc}(x) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$$

en de ontwikkeling geldt voor $x \to \infty$ en/of $a \to \infty$ uniform in $0 \leq \lambda \leq \infty$.

Het resultaat in (4) is een verbetering van resultaten van TRICOMI *), die een ontwikkeling gaf analoog aan (4) voor kleine waarden van $(\lambda-1)$.

Een soortgelijk resultaat als (4) kan verkregen worden voor de incomplete betafunktie $\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$.

*) F.G. TRICOMI, *Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion*, Math. Zeitschrift, 53 (1950) 136-148.

<u>Werkbespreking 14 februari 1974</u>

T.H. Koornwinder

HARMONISCHE ANALYSE VOOR ONTWIKKELINGEN IN JACOBI-FUNCTIES

Bekijk voor $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\rho = \alpha + \beta + 1$, $t > 0$ de differentiaalvergelijking

$$(1) \qquad (\Delta(t))^{-1} \frac{d}{dt} \left(\Delta(t) \frac{du(t)}{dt}\right) = -(\lambda^2+\rho^2)\, u(t),$$

waarbij $\Delta(t) = (e^t-e^{-t})^{2\alpha+1}\,(e^t+e^{-t})^{2\beta+1}$. Jacobi-functies $\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ en $\Phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)$ zijn de oplossingen van (1) zo dat

$$\phi_\lambda(0) = 1, \quad \phi_\lambda'(0) = 0, \quad \alpha \neq -1,-2,\ldots$$

en

$$\Phi_\lambda(t) = e^{(i\lambda-\rho)t}(1+o(1)) \quad \text{als } t \to \infty,\ i\lambda \neq 1,2,\ldots\ .$$

Jacobi-functies zijn uit te drukken als hypergeometrische functies. Laat $c(\lambda)$ zo zijn dat $\pi^{\frac{1}{2}}(\Gamma(\alpha+1))^{-1}\ \phi_\lambda(t) = \frac{1}{2}c(\lambda)\ \Phi_\lambda(t) + \frac{1}{2}c(-\lambda)\Phi_{-\lambda}(t))$ ($i\lambda$ niet geheel). Voor $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$ geldt:

$$(2) \qquad (\Gamma(\alpha+1))^{-1}\ \Delta(t)\ \phi_\lambda(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \cos \lambda s\ A(s,t)\ ds,$$

$$(3) \qquad e^{i\lambda s} = (c(-\lambda))^{-1} \int_s^\infty \Phi_\lambda(t)\ A(s,t)\ dt, \qquad \operatorname{Im} \lambda > 0,$$

waarbij

$$(4) \qquad A(s,t) = \frac{2^{3\alpha+5/2}\ \sinh 2t}{\Gamma(\alpha-\beta)\ \Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\ \cdot$$

$$\cdot \int_s^t (\cosh 2t - \cosh 2w)^{\beta-\frac{1}{2}}(\cosh w - \cosh s)^{\alpha-\beta-1}\ \sinh w\ dw.$$

Laat de Fourier-Jacobi-transformatie gedefinieerd zijn door

$$(5) \qquad f^\wedge(\lambda) = (2^{\frac{1}{2}}/\Gamma(\alpha+1)) \int_0^\infty f(t)\ \phi_\lambda(t)\ \Delta(t)\ dt.$$

Laat C_0^∞ de klasse zijn van even C^∞-functies op $\mathbb{R}$ met compacte drager. Laat H de klasse zijn van even gehele functies g zo dat voor zekere $A > 0$ en $n = 0,1,2,\ldots$.

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}\{(1+|\lambda|)^n\, e^{-A|\mathrm{Im}\,\lambda|}\, |g(\lambda)|\} < \infty.$$

Uit (2), (4) en (5) volgt voor $f \in C_0^\infty$ en $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$:

$$(6)\quad f^\wedge(\lambda) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \cos \lambda s\, ds \cdot \frac{2^{3\alpha+3/2}}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_s^\infty (\cosh w - \cosh s)^{\alpha-\beta-1} \cdot$$

$$\cdot\, d(\cosh w) \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})} \int_w^\infty f(t)(\cosh 2t - \cosh 2w)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot d(\cosh 2t).$$

Dus de Jacobi-transformatie bestaat uit twee achtereenvolgende fractionele integraaltransformaties van Weyl en een cosinus-transformatie. De eerste twee afbeeldingen zijn bijecties van C_0^∞ op zichzelf, de laatste afbeelding is volgens Paley en Wiener bijectief van C_0^∞ op H. Gevolg: De Jacobi-transformatie is bijectief van C_0^∞ op H.

Definieer voor $g \in H$ en $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$

$$(7)\qquad g^\vee(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty g(\lambda)\, \phi_\lambda(t)\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{i\eta-\infty}^{i\eta+\infty} g(\lambda)\, \Phi_\lambda(t)(c(-\lambda))^{-1}\, d\lambda, \qquad \eta \geq 0.$$

Dan $g^\vee \in C_0^\infty$ en wegens (3)

$$\int_s^\infty g^\vee(t)\, A(s,t)\, dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{i\eta-\infty}^{i\eta+\infty} g(\lambda)\, e^{i\lambda s}\, ds.$$

Door van beide leden de cosinus-getransformeerde te nemen volgt er dat $(g^\vee)^\wedge = g$, dus (7) geeft de inversieformule voor de Jacobi-transformatie.

Uit (5) en (7) volgt voor $f \in C_0^\infty$, $g \in H$ dat

$$\int_0^\infty f(t)\, g^\vee(t)\, \Delta(t)\, dt = \int_0^\infty f^\wedge(\lambda)\, g(\lambda)\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda.$$

Dus voor $f_1, f_2 \in C_0^\infty$ geldt Parseval's formule:

$$(8) \qquad \int_0^\infty f_1(t)\, \overline{f_2(t)}\, \Delta(t)\, dt = \int_0^\infty f_1^\wedge(\lambda)\, \overline{f_2^\wedge(\lambda)}\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda.$$

Aangezien C_0^∞ dicht ligt in $L^2(\Delta)$ en H in $L^2(|c(\lambda)|^{-2})$ is de Jacobi-transformatie uit te breiden tot een isometrie van $L^2(\Delta)$ op $L^2(|c(\lambda)|^{-2})$ (Stelling van Plancherel).

Zie voor gedetailleerde bewijzen: *"A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform"*, (rapport TW 143/74, zal ook verschijnen in Arkiv för Matematik).

Werkbespreking 28 februari 1974

G.M. Willems

EEN TOEPASSING VAN BIFURCATIETHEORIE OP TURING-SYSTEMEN

Geen manuscript ontvangen.

Werkbespreking 28 maart 1974

S.J.H. Thesingh

EEN REAKTIE DIFFUSIEVERGELIJKING MET EEN INTERFACE CONDITIE OP EEN BOL-OPPERVLAK

Gegeven is het volgende, in standaard vorm gebrachte, begin-randwaarde-probleem met als binnengebied een bol (diffusie coëfficient D_2) en een onbegrensd buitengebied (diffusie-coëfficient D_1):

$$Y_t = \Delta Y, \; 0 < r < 1$$
$$X_t = \Delta X, \; r > 1$$
$$\left.\begin{array}{l} X = aY \\ \theta X_r = Y_r \end{array}\right\} r = 1,$$
$$Y_r = 0 \quad \text{voor } r = 0, \; \lim_{r\to\infty} X(r,t) = 1,$$
$$\left.\begin{array}{l} Y = 0 \\ X = 1 \end{array}\right\} t = 0,$$

met $\theta = \dfrac{D_1}{D_2}$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ en $a > 0$ een kleine parameter.

Dit probleem werd uitgewerkt in samenwerking met G.M. Willems.

Substitutie van $X = \dfrac{v}{r} + 1$ en $Y = \dfrac{w}{ar}$ gevolgd door Laplace-transformatie levert:

(1.a) $\qquad \bar{v}(r,s) = A \exp(-\sqrt{s/\theta}\; r),$

(1.b) $\qquad \bar{w}(r,s) = B \sinh r\sqrt{s}.$

Omdat de inverse transformatie i.v.m. de vorm van A en B grote moeilijkheden oplevert zullen we een numerieke methode gebruiken. Om van beschikbare procedures gebruik te kunnen maken is het nodig de singulariteit in r = 1 op te heffen en tevens de discontinuiteit in de beginvoorwaarde kwijt te

raken. Daartoe gaan we als volgt te werk.
Vervang (1.b) door $\bar{w}(r,s) = B'e^{r\sqrt{s}}$. De inverse transformatie is nu eenvoudig en geeft aanleiding tot "oplossingen"

$$\tilde{X} = \frac{v}{r} \quad \text{en} \quad \tilde{Y} = \frac{w}{a}\,\psi(r),$$

met $\psi(r) = \frac{1}{r}$ voor $r > \ell$, $0 < \ell < 1$ en

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 1/\ell \\ \psi' &= -1/\ell^2 \\ \psi'' &= 2/\ell^3 \end{aligned}\right\} r = \ell.$$

Voeren we nu in $Z_1 = \frac{X - \tilde{X}}{a}$ en $Z_2 = Y - \tilde{Y}$ dan hebben we het volgende beginrandwaardeprobleem:

voor $0 < r < \ell$ $\quad \frac{\partial Z_2}{\partial t} = \Delta Z_2 + \Delta\tilde{Y} - \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t}$, met

(2) $\quad \Delta\tilde{Y} - \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} = -\frac{2}{a}\left\{(\frac{\psi''}{2} + \frac{\psi'}{r})w + (\frac{\psi}{r} + \psi')\frac{\partial w}{\partial r}\right\},$

voor $\ell < r < 1$ $\quad \frac{\partial Z_2}{\partial t} = \Delta Z_2,$

voor $r > 1$ $\quad \frac{\partial Z_1}{\partial t} = \Delta Z_1,$

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= Z_2 \\ a\theta\,\frac{\partial Z_1}{\partial r} &= \frac{\partial Z_2}{\partial r} \end{aligned}\right\} r = 1,$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial r} = -\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial r} \quad \text{voor} \quad r = 0, \quad \lim_{r\to\infty} Z_1(r,t) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= 0 \\ Z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} t = 0.$$

Eerste orde discretisatie van de plaatscoördinaat (afstand netpunten h) levert een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = DU + F \\ U = 0 \quad \text{voor} \quad t = 0 \end{cases}$$

U en F vectorfuncties met componenten u_j resp. f_j, $j = 0,\ldots,m$.

$$\frac{du_0}{dt} = 1/h^2\ (-6u_0+6u_1) + f_0, \quad f_0 = \frac{1}{h^2}\ \{-6\tilde{Y}(0,t)+6\tilde{Y}(h,t)\}.$$

Voor $j = 1,\ldots,n-1$ waarbij $n = 1/h$ hebben we

$$\frac{du_j}{dt} = 1/h^2 \left(\frac{j-1}{j}\ u_{j-1} - 2u_j + \frac{j+1}{j}\ u_{j+1}\right) + f_j$$

waarbij f_j rechtstreeks volgt uit (2).

$$\frac{du_n}{dt} = 1/h^2\ (u_{n-1} - (1+a\theta)u_n + a\theta u_{n+1}).$$

Voor $j = 1,\ldots,m-1$

$$\frac{du_j}{dt} = \theta/h^2 \left(\frac{j-1}{j} - 2u_j + \frac{j+1}{j}\ u_{j+1}\right)$$

$$\frac{du_m}{dt} = \theta/h^2 \left(\frac{m-1}{m} - 2u_m\right).$$

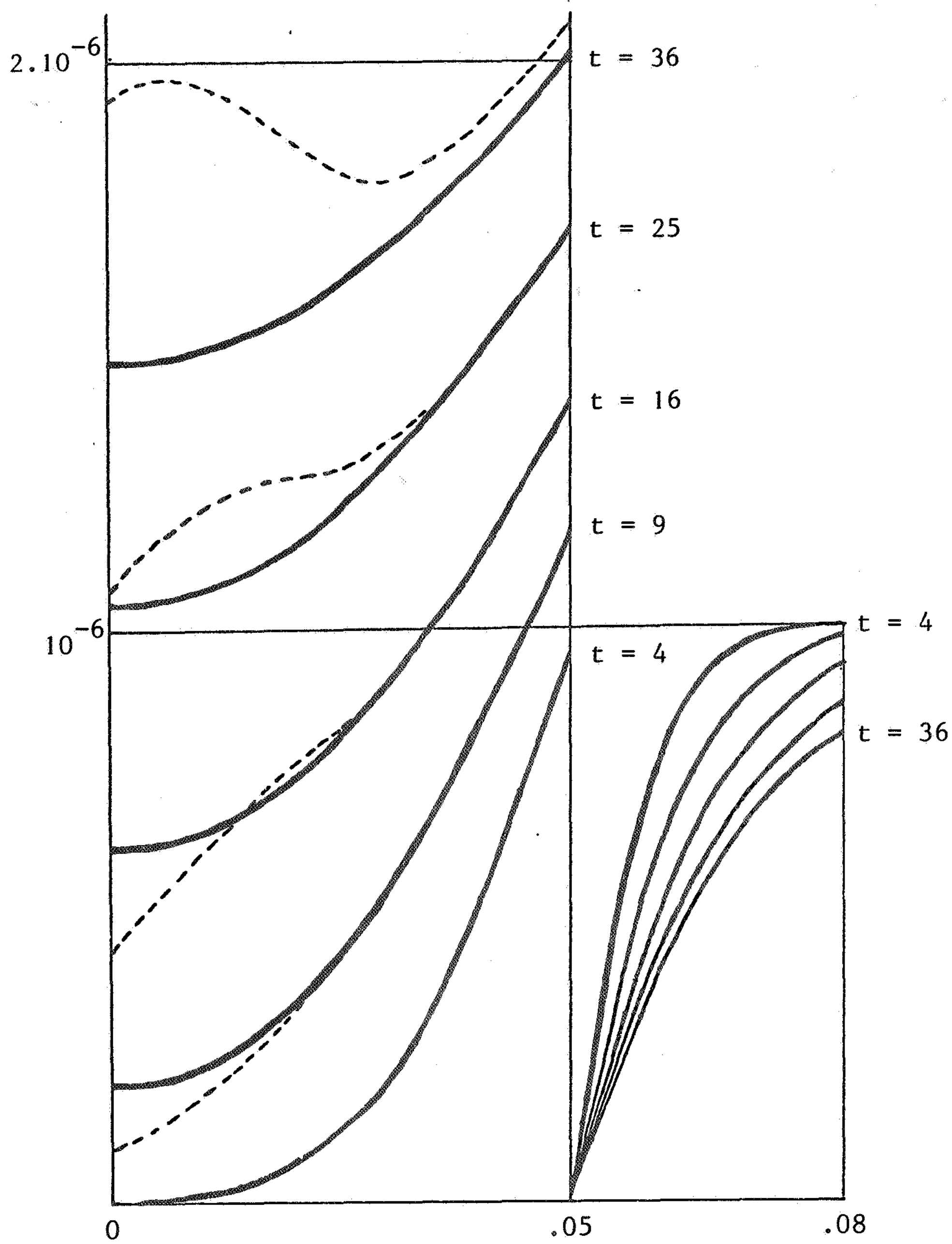
Om het stelsel (3) op te lossen werd gebruik gemaakt van de procedure modified runge kutta.

Van belang is hierbij de spectraalradius σ van de matrix D die in de procedure meegegeven dient te worden. D is een tridiagonale matrix met reële eigenwaarden. M.b.v. het theorema van Gersgorin volgt $\sigma = 6$.

Voor de functie $\psi(r)$ werd een 2e-graads polynoom genomen. Gerekend werd met de volgende waarden van de parameters:
$D_1 = 1/9\ .\ 10^{-4}$, $D_2 = 1/4\ .\ 10^{-4}$, $a = 10^{-2}$.

Voor de straal van het binnengebied werd de waarde 1/20 genomen terwijl X de beginwaarde 10^{-6} kreeg.

De resultaten zijn geschetst voor enkele waarden van t. Tevens is, voor de waarden van t waarvoor het numeriek bepaalde deel van de oplossing voldoende betekenis heeft, het analytisch bepaalde deel $\tilde{Y}$ geschetst als onderbroken lijn.



Werkbespreking 17 oktober 1974

N.M. Temme

ASYMPTOTIEK VAN INTEGRALEN MET BEHULP VAN FRACTIONELE AFGELEIDEN

De voordracht is gebaseerd op een artikel van A. ERDÉLYI, *Asymptotic evaluation of integrals involving a fractional derivative*, SIAM J. Math. Anal. 5 (1974) 159-171.

De integraal

$$F(z,a) = \int_a^\infty e^{-a(t-a)} t^{\lambda-1} g(t)dt \tag{1}$$

wordt beschouwd voor $z \to \infty$ en $a \geq 0$. Voor vaste a kan onderscheid gemaakt worden tussen $a = 0$ en $a > 0$, en de asymptotische ontwikkeling is dan eenvoudig aan te geven. Er kan een uniforme ontwikkeling afgeleid worden in termen van incomplete gammafuncties. Als daarbij gebruik gemaakt wordt van fractionele integralen, worden niet alleen de resultaten bijzonder overzichtelijk, maar tevens kan gemakkelijk een schatting van de restterm gegeven worden. In plaats van (1) beschouwt ERDÉLYI de integraal

$$F(z,a) = \int_a^\infty e^{-z(t-a)} I^{\lambda-1} f(t)dt.$$

Hij bespreekt het verband tussen f en g en geeft als resultaat

$$F(z,a) = \sum_{k=1}^{n-1} z^{-k} I^{\lambda} f^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} f^{(k)}(0)Q + R_n,$$

met $Q = \dfrac{e^{az}\Gamma(\lambda,az)}{\Gamma(\lambda)z^{\lambda}}$, een incomplete gammafunctie. Voor R_n wordt een schatting afgeleid die uniform geldig is voor $a \geq 0$.

De resultaten worden gebruikt bij de asymptotische ontwikkeling van een integraal vergelijking.

Werkbespreking 21 november 1974

J.W. de Roever

FREDHOLM ALTERNATIEF VOOR STELSELS DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

We beschouwen niet homogene stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, dus een $r_0 \times r_1$ matrix $P(D)$ bestaande uit polynomen in $D = (-i\partial/\partial\xi_1,\dots,-i\xi_n)$. We onderzoeken onder welke voorwaarden er een oplossing bestaat in een bepaalde ruimte H, als het rechterlid ook tot H behoort. Het zal blijken dat de vergelijking

$$P(D)u = f$$

met $f \in H^{r_1}$ d.e.s.d. een oplossing $u \in H^{r_0}$ heeft als f aan de zogenaamde comptabiliteitsvoorwaarden voldoet en wel er is een $r_1 \times r_2$ matrix $P_1(D)$ bestaande uit polynomen in D, zodat f voldoet aan

(1) $$P_1(D)f = 0.$$

Dus de volgende rij moet exact zijn (het beeld van de ene afbeelding is de kern van de volgende)

(2) $$H^{r_0} \xrightarrow{P(D)} H^{r_1} \xrightarrow{P_1(D)} H^{r_2}$$

Voor H kunnen we iedere ruimte nemen, de Fouriergetransformeerde van welks duale (of de duale van welks Fouriergetransformeerde) uit holomorfe functies bestaat.

Laat nu H de ruimte zijn van functies f, die holomorf zijn in $\mathbb{R}^n + iC$, met C een convexe kegel in $\mathbb{R}^n$, en die voor iedere $\varepsilon > 0$ en compacte deelkegel C' van C, voldoen aan

$$|f(\zeta)| \leq K(\varepsilon,C')e^{a(\zeta)}, \quad \zeta \in C' \quad \text{en} \quad |\mathrm{Im}\,\zeta| > \varepsilon$$

voor een of andere homogene convexe functie $a(\zeta)$ in C. Laat

$$\Omega = \{z \mid \mathrm{Im} - z.\zeta \leq a(\zeta),\ \zeta \in C\} \subset \mathbb{C}^n$$

en laat A de ruimte zijn van functies ϕ, die elk holomorf zijn in een open omgeving Ω_k van Ω en waarvoor de norm

$$(3) \qquad \|\phi\|_k = \sup_{z\in\Omega_k} |\phi(z)|e^{1/k|z|} < \infty.$$

We schrijven A als de vereniging van de ruimtes $A(M_k,\Omega_k)$ van holomorfe functies ϕ, die aan (3) voldoen (k=1,2,...). Dan is H de Fouriergetransformeerde van de duale ruimte A' van A.

Indien we van functies uit H de randwaarden op $\mathbb{R}^n$ beschouwen, behoort ook een zekere klasse distributies tot H. (Als we ons tot dit geval beperken mogen we i.p.v. (3) nemen $|\phi(z)| \leq M_m(1+|z|)^{-m}$ voor alle $m = 0,1,2,\ldots$.) Deze distributies vormen een belangrijke klasse in de veldentheorie, dus is het zinvol deze ruimte H te beschouwen.

Inverse Fouriertransformatie van (2) geeft

$$(4) \qquad A'^{r_0} \xrightarrow{P(z)} A'^{r_1} \xrightarrow{P_1(z)} A'^{r_2}$$

welks duale rij is

$$(5) \qquad A^{r_0} \xleftarrow{P'(z) \overset{\text{not}}{=} Q(z)} A^{r_1} \xleftarrow{P_1'(z)} A^{r_2}.$$

Laat $A(\omega)$ de ruimte zijn van holomorfe functies in een open verzameling ω in $\mathbb{C}^n$.

Uit de stelling van Oka volgt dat in een omgeving ω van ieder punt in $\mathbb{C}^n$ de kern van de afbeelding

$$A(\omega)^{r_1} \xrightarrow{Q} A(\omega)^{r_0}$$

een basis $S_k = (S_{1k},\ldots,S_{r_1 k})$, $k = 1,\ldots,r_\omega$, heeft bestaande uit polynomen. Voor iedere $k \in \{1,\ldots,r_\omega\}$ voldoet S_k dus aan

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{r_1} Q_{ij}(z)S_{jk}(z) = 0$$

voor $z \in \omega$, dus ook voor alle z. Alle polynoom vektoren $S_k = (S_{1k},\ldots,S_{r_1k})$, die aan (6) voldoen (i.h.b. alle polynomen die een basis zijn in de omgevingen ω) vormen een moduul over de polynoomring en zij zijn afhankelijk van eindig veel polynoom vektoren, omdat deze ring Noethers is, waaruit volgt dat ieder moduul eindig wordt voortgebracht. Dus er is een matrix $S = (S_{jk})_{k=1,\ldots,r_2}^{j=1,\ldots,r_1}$ bestaande uit polynomen, zodat alle holomorfe vektorfuncties $A(\omega)^{r_1}$ uit de kern van Q het beeld zijn van de afbeelding

$$A(\omega_i)^{r_2} \xrightarrow{S} A(\omega_i)^{r_1}$$

waar ω_i de verzameling doorloopt van voldoend kleine omgevingen ω_i van alle punten z_i.

Uit (5) en (6) volgt

$$\sum_{j=1}^{r_1} \bar{S}_{jk}(D)P_{ji}(D) = 0,$$

dus $P_1 = S'$ en (1) is zeker een noodzakelijke voorwaarde. S brengt de nulruimte van de geadjungeerde van P voort en f moet "loodrecht staan" op deze nulruimte, d.w.z. $S'f = 0$. Vandaar de analogie met het Fredholm alternatief.

Laat $\Omega \subset C^n$ nu even een pseudoconvexe open verzameling zijn. Laat $\phi \in A(\Omega)^{r_1}$ uit het beeld van S zijn, d.w.z. voor voldoend kleine omgevingen ω_i van ieder punt z_i in Ω geldt

(7) $$\phi(z) = S(z)h_i(z) \qquad \text{voor } z \in \omega_i \subset \Omega,\ h_i \in A(\omega_i)^{r_2}.$$

In $\omega_i \cap \omega_j$ kan h_i nog verschillend zijn van h_j, dus het is niet direkt duidelijk, of er ook functies $h \in A(\Omega)^{r_2}$ zijn met

$$\phi(z) = S(z)\,h(z) \qquad \text{voor } z \in \Omega,\ h \in A(\Omega)^{r_2}.$$

Hulpstelling: Omdat Ω pseudoconvex is, geldt dit wel, zodat de volgende rij exact is

$$A(\Omega_k)^{r_0} \xleftarrow{Q} A(\Omega_k)^{r_1} \xleftarrow{S} A(\Omega_k)^{r_2}.$$

Bewijsschets: (7) geldt natuurlijk ook voor kleinere verzamelingen ω_i. Omdat Ω 2n (reëel)-dimensionaal is, heeft iedere open overdekking een verfijning bestaande uit open verzamelingen zó, dat de doorsnede van meer dan $2n + 1$ van deze verzamelingen leeg is.

Duidt de kern van Q aan met R_Q, die van S met R_S, enz. R_S wordt weer voortgebracht door een matrix S_2, enz. Dus er is zoals boven voor iedere m een rij $(S_1=S)$

$$(8) \quad A(\omega_i)^{r_m} \xrightarrow{S_{m-1}} A(\omega_i)^{r_{m-1}} \xrightarrow{S_{m-2}} \ldots \longrightarrow A(\omega_i)^{r_2} \xrightarrow{S_1} A(\omega_i)^{r_1} \xrightarrow{Q} A(\omega_i)^{r_0},$$

waarbij de omgevingen ω_i van de punten z_i van Ω voldoende klein zijn, afhankelijk van m. We nemen nu $m = 2n + 1$ en van de dan verkregen overdekking van Ω door de verzamelingen ω_i nemen we een verfijning (genoteerd als $\{\tilde{\omega}_i\}_{i=1}^{\infty}$), zodat de doorsnede van meer dan $2n + 1$ verzamelingen $\tilde{\omega}_i$ leeg is.

We hebben $\phi = Qh_j^0$ in $\tilde{\omega}_j$, dus $Q(h_i^0-h_j^0) = \phi - \phi = 0$ in $\tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j$. Beschouw $g_{ij}^1 = h_i^0 - h_j^0$; de verzameling g^1 van alle g_{ij}^1's bestaat uit holomorfe functies, gedefinieerd op de doorsnijdingen van telkens twee verzamelingen $\tilde{\omega}$. We schrijven $g^1 = \delta_0 h^0$ en dus $g^1 \in R_Q$, zodat er holomorfe functies h^1 zijn (gedefinieerd op de doorsnijdingen $\tilde{\omega}_j \cap \tilde{\omega}_k$ van twee $\tilde{\omega}$'s) met $g^1 = S_1 h^1$; dit volgt uit (8) met $\tilde{\omega}_i$ vervangen door $\tilde{\omega}_j \cap \tilde{\omega}_k \subset \omega_i$ voor zekere i afhankelijk van j en k. We bekijken nu de verschillen op de doorsnijdingen van drie $\tilde{\omega}$'s. namelijk in $\tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j \cap \tilde{\omega}_k$ definieren we

$$g_{ijk}^2 = h_{ij}^1 - h_{ik}^1 + h_{jk}^1.$$

Dan geldt

$$S_1 g_{ijk}^2 = g_{ij}^1 - g_{ik}^1 + g_{jk}^1 = h_i^0 - h_j^0 - h_i^0 + h_k^0 + h_j^0 - h_k^0 = 0$$

Alle g_{ijk}^2's vormen een verzameling g^2 van holomorfe functies gedefinieerd op de doorsnijdingen van telkens drie verzamelingen $\tilde{\omega}$. We schrijven weer $g^2 = \delta_1 h^1$ en dus $g^2 \in R_{S_1}$, zodat er holomorfe functies h^2 zijn (gedefinieerd op alle $\tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j \cap \tilde{\omega}_k$) met $g^2 = S_2 h^2$, enz. We krijgen tenslotte holomorfe functies g^{k+1} gedefinieerd op de doorsnijdingen van $k + 2$ verzameling $\tilde{\omega}$

$$(9) \qquad \delta_k h^k = g^{k+1} \in R_{S_k}, \qquad k = 0,1,2,\dots,2n,\ S_0 = Q,$$

zodat

$$g^{k+1} = S_{k+1} h^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,\dots,2n-1.$$

Omdat de doorsnijding van meer dan $2n + 1$ $\tilde{\omega}$'s leeg is, is $g^{2n+1} = 0$; dus dan is g^{2n+1} zeker te schrijven als $g^{2n+1} = \delta_{2n}\tilde{g}^{2n}$, met $\tilde{g}^{2n} \in R_{S_{2n}}$ gedefinieerd op de doorsnijdingen van $2n + 1$ verzamelingen $\tilde{\omega}$. Stel dat voor $k \leq 2n$ geldt

$$(10) \qquad g^{k+1} = \delta_k \tilde{g}^k \qquad \text{met } \tilde{g}^k \in R_{S_k}.$$

Neem nu andere h^k's, nl. $\tilde{h}^k = h^k - \tilde{g}^k$, dan geldt wegens (9) en (10)

$$\delta_k \tilde{h}^k = g^{k+1} - g^{k+1} = 0.$$

We gebruiken nu een eigenschap die we hier niet zullen bewijzen, nl. als voor holomorfe functies $\tilde{h}^k$, gedefinieerd op de doorsnijdingen van $k + 1$ $\tilde{\omega}$'s, geldt $\delta_k \tilde{h}^k = 0$, dan is $\tilde{h}^k$ te schrijven als $\tilde{h}^k = \delta_{k-1} f^{k-1}$, waarbij f^{k-1} holomorfe functies zijn, die gedefinieerd zijn op de doorsnijdingen van slechts k $\tilde{\omega}$'s. (Deze eigenschap berust op existentie-stellingen van niet-homogene Cauchy-Riemann vergelijkingen, waarbij de pseudoconvexheid van Ω gebruikt wordt.)

Definieer nu

$$\tilde{g}^{k-1} = S_k f^{k-1},$$

dan

$$\tilde{g}^{k-1} \in R_{S_{k-1}}$$

en

$$\delta_{k-1}\tilde{g}^{k-1} = S_k \delta_{k-1} f^{k-1} = S_k \tilde{h}^k = S_k h^k - S_k \tilde{g}^k = g^k.$$

Dus (10) geldt voor alle k, i.h.b. voor $k = 0$:

$$g^1 = \delta_0 \tilde{g}^0,$$

d.w.z. in $\tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j$ geldt

$$h_i^0 - h_j^0 = g_{ij}^1 = \tilde{g}_i^0 - \tilde{g}_j^0 \tag{11}$$

met $\tilde{g}^0 \in R_Q$, dus $Q(z)\tilde{g}_i^0(z) = 0$ voor $z \in \tilde{\omega}_i$. Daarom geldt

$$\phi = Q(h_i^0 - \tilde{g}_i^0) \qquad \text{in } \tilde{\omega}_i$$

$$\phi = Q(h_j^0 - \tilde{g}_j^0) \qquad \text{in } \tilde{\omega}_j.$$

In $\tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j$ is wegens (11) $h_i^0 - \tilde{g}_i^0 = h_j^0 - \tilde{g}_j^0$, dus er zijn holomorfe functies h in Ω met $\phi(z) = Q(z)h(z)$, $z \in \Omega$, nl. $h = h_i^0 - \tilde{g}_i^0$ in $\tilde{\omega}_i$. □

We kunnen dezelfde stappen herhalen en dan letten op de afschattingen waaraan h moet voldoen, als ϕ eraan voldoet. We krijgen dan de volgende stelling:

<u>Stelling</u>: *Zij* $\phi \in A(M_k,\Omega_k)^{r_1}$ *met* $\phi = Sh$ *voor zekere functies* $h \in A(\Omega_k)^{r_2}$, *dan zijn er functies* $\tilde{h} \in A(M_{k+1},\Omega_{k+1})^{r_2}$ *met* $\phi = S\tilde{h}$ *en voor zekere constante* K

$$\|\tilde{h}\|_{k+1} \leq K \|\phi\|_k.$$

Als $\phi \in A^{r_1}$, en wel $\phi \in A(M_k,\Omega_k)^{r_1}$, met $Q\phi = 0$, dan is er volgens de hulpstelling een $h \in A(\Omega_k)^{r_2}$ met $Sh = \phi$ in Ω_k, en volgens de stelling is er een $\tilde{h} \in A(M_{k+1},\Omega_{k+1})^{r_2}$ met $S\tilde{h} = \phi$ in Ω_{k+1}, dus ook $\tilde{h} \in A^{r_2}$. De rij (5) is nu exact

$$A^{r_0} \xleftarrow{Q} A^{r_1} \xleftarrow{S} A^{r_2}.$$

Om hieruit te concluderen dat de duale rij (4) exact is, waaruit volgt dat (2) exact is, moeten we nog aantonen dat het beeld van Q gesloten is in A^{r_0}.

Neem een rij functies ϕ_j uit het beeld van Q, die naar ϕ convergeert in A^{r0}; dan is er een k met $\phi_j \to \phi$ in $A(M_k,\Omega_k)^{r0}$ en $\phi_j = Qg_j$ voor $g_j \in A^{r1}$. Er geldt $\|\phi_j\|_k \le M$ en $\|\phi\|_k \le M$ voor zekere $M > 0$ (een convergente rij is begrensd). Dan zijn er volgens de stelling functies $\tilde{g}_j \in A^{r1}$ (en wel $\tilde{g}_j \in A(M_{k+1},\Omega_{k+1})^{r1}$) met

$$\phi_j = Q\tilde{g}_j \quad \text{en} \quad \|\tilde{g}_j\|_{k+1} \le KM.$$

Dus de rij $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ is begrensd in $A(M_{k+1},\Omega_{k+1})^{r1}$, dan is hij compact in $A(M_{k+2},\Omega_{k+2})^{r1}$ en heeft een convergente deelrij $\{\tilde{g}_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ met $\tilde{g}_{j_k} \to g$ in $A(M_{k+2},\Omega_{k+2})^{r1}$. De rij $\{g_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergeert ook naar g in A^{r1} en omdat $\phi_{j_k} \to \phi$, geldt

$$\phi = \lim_{k\to\infty} \phi_{j_k} = \lim_{k\to\infty} Qg_{j_k} = Qg.$$

Dus $\phi \in \text{Im } Q$, d.w.z. Im Q is gesloten.

Tenslotte hebben we een exacte rij gekregen (H^P is de kern in H^{r0} van P(D)):

$$0 \longrightarrow H^P \longrightarrow H^{r0} \xrightarrow{P(D)} H^{r1} \xrightarrow{P_1(D)} H^{r2} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{rm-1} \xrightarrow{P_{m-1}(D)} H^{rm} \longrightarrow 0,$$

die afbreekt voor $m \le n$, omdat de afbeelding S_{m-1} in (8) injectief is volgens het "Hilbert sygyzy theorema" voor een $m \le n$.

Werkbespreking 19 december 1974

T.H. Koornwinder

JACOBI-POLYNOMEN EN STELSELS LIJNEN MET EEN GEGEVEN AANTAL ONDERLINGE HOEKEN

DELSARTE, GOETHALS & SEIDEL [2] bewezen o.a. het volgende: Als X een stelsel is van $|X|$ lijnen in $\mathbb{R}^d$ gaande door de oorsprong en als de onderlinge hoeken tussen deze lijnen n verschillende waarden tussen 0 en $\pi/2$ aannemen dan geldt:

$$(1) \qquad |X| \le \binom{d+2n-1}{d-1}.$$

Voor $n = 1$ en $d = 2, 3, 7, 23$ zijn voorbeelden van X bekend zo dat de bovengrens in (1) wordt aangenomen.

Laat (x,y) het inwendig produkt van $x,y \in \mathbb{R}^d$ zijn en duid met Ω de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^d$ aan. Equivalent met bovenstaand resultaat is

STELLING 1. *Laat* $X \subset \Omega$ *en definieer* $A = \{(\xi,\eta)^2 \mid \xi, \eta \in X, \xi \neq \eta\}$. *Als* A *is bevat in het interval* $(0,1)$ *en* $|A| = n$ *dan geldt ongelijkheid* (1).

Deze stelling wordt in [2] bewezen met behulp van de theorie van de sferische harmonischen. We vermelden enige begrippen en resultaten uit deze theorie.

Neem vaste dimensie d. Laat $d\omega$ het rotatie-invariante volumenelement op Ω zijn zo dat $\int_\Omega d\omega(\xi) = 1$. Definieer voor kontinue funkties f,g op Ω het inwendig produkt

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(\xi)g(\xi)d\omega(\xi).$$

Laat H_k de klasse van sferische harmonischen van graad 2k op Ω zijn, d.w.z. de restrikties tot Ω van de harmonische homogene polynomen van graad 2k op $\mathbb{R}^d$. Laat $N_k = \dim H_k$. Als $k \neq \ell$ dan zijn H_k en H_ℓ onderling orthogonaal.

Laat $w(x) = \text{const.}\ x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}(d-3)}$ zo dat $\int_0^1 w(x)dx = 1$. Voor $\eta \in \Omega$ en en voor kontinue funkties f op $[0,1]$ geldt dat

$$\int_0^1 f(x)w(x)dx = \int_\Omega f((\xi,\eta)^2)d\omega(\xi).$$

Definieer orthogonale polynomen $p_k(x)$, $K = 0,1,2,\ldots$, t.o.v. de gewichtsfunctie $w(x)$ op het interval $(0,1)$ zo dat $p_k(1) = 1$. Dit zijn Jacobi-polynomen met verschoven argument. Voor een willekeurige orthonormale basis $f_1^{(k)},\ldots,f_{N_k}^{(k)}$ van H_k geldt de additieformule

$$N_k p_k((\xi,\eta)^2) = \sum_{i=1}^{N_k} f_i^{(k)}(\xi)f_i^{(k)}(\eta), \qquad \xi,\eta \in \Omega. \tag{2}$$

Merk op dat

$$\int_0^1 (p_k(x))^2 w(x)dx = N_k^{-1}. \tag{3}$$

Laat

$$M_n = N_0 + N_1 + \ldots + N_n. \tag{4}$$

Beschouw de Christoffel-Darboux-kern

$$K_n(x,y) = M_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} N_k p_k(x)p_k(y) \tag{5}$$

en de polynomen

$$q_n(x) = K_n(x,1) = M_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} N_k p_k(x). \tag{6}$$

De polynomen $q_n(x)$ zijn orthogonaal t.o.v. de gewichtsfunktie $(1-x)w(x)$ op het interval $(0,1)$ zo dat $q_n(1) = 1$. Dit zijn wederom Jacobi-polynomen met verschoven argument. Duidt voor vaste n de nulpunten van $q_n(x)$ aan met $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Laat $\alpha_0 = 1$.

Neem nu X en A als in stelling 1. Gebruik makend van (2) bewijst men in [2] dat $|X| \leq M_n$. Berekening van M_n geeft het rechter lid van (1). Voorts wordt in [2] bewezen:

STELLING 2. *Als* $|X| = M_n$ *dan bestaat* A *uit de nulpunten* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *van* $q_n(x)$.

STELLING 3. *Laat* $|X| = M_n$. *Er zijn getallen* $c^r_{s,t}$, $r,s,t = 0,1,\ldots,n$, *zo dat voor alle* $\xi,\eta \in X$ *met* $(\xi,\eta)^2 = \alpha_r$ *geldt dat*

$$|\{\zeta \in X \mid (\xi,\zeta)^2 = \alpha_s,\ (\eta,\zeta)^2 = \alpha_t\}| = c^r_{st}. \tag{7}$$

De in Stelling 3 geformuleerde eigenschap maakt X tot een z.g. associatieschema, cf. DELSARTE [1].

Voor het geval dat $|X| = M_n$ kan ik een aantal verdere eigenschappen formuleren

STELLING 4. *Laat* $|X| = M_n$. *Dan geldt voor elke* $f \in H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_{2n}$ *dat*

$$\int_\Omega f(\xi)d\omega(\xi) = |X|^{-1} \sum_{\xi\in X} f(\xi). \tag{8}$$

STELLING 5. *Laat* $|X| = M_n$. *Laat voor* $i = 0,1,\ldots,n$, $v_i = c^0_{ii}$ (cf.(7)). *Dan geldt:*

$$\int_0^1 f(x)w(x)dx = M_n^{-1} \sum_{i=0}^n v_i f(\alpha_i) \tag{9}$$

voor elk polynoom $f(x)$ *van graad* $\le 2n$;

$$M_n^{-1} \sum_{i=0}^n v_i p_k(\alpha_i) p_\ell(\alpha_i) = \delta_{k,\ell} N_k^{-1}, \qquad k,\ell = 0, 1, \ldots, n; \tag{10}$$

$$K_n(\alpha_i,\alpha_j) = M_n^{-1} \sum_{k=0}^n N_k p_k(\alpha_i) p_k(\alpha_j) = \delta_{ij} v_i^{-1}, \qquad i,j = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Formules (8) en (9) geven kwadratuurformules voor funkties op een sfeer, resp. op een interval. Merk op dat (9) verschilt van de Gauss-kwadratuur omdat de nulpunten van $q_n(x)$ en het randpunt 1 i.p.v. de nulpunten van $p_n(x)$ worden genomen. Uit (10) blijkt dat de polynomen $p_0(x),\ldots,p_n(x)$ beperkt tot $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ als diskrete orthognale polynomen beschouwd kunnen worden. Als speciaal geval van (11) hebben we

(12) $$v_i^{-1} = K_n(\alpha_i,\alpha_i),$$

een expliciete uitdrukking voor de gewichten v_i.

Los van de meetkundige interpretatie kan ik bewijzen:

STELLING 6. *Beschouw orthogonale polynomen* $p_k(x)$ *t.o.v. een (willekeurige) gewichtsfunktie* $w(x)$ *op het interval* $(0,1)$ *zo dat* $p_k(1) = 1$, $\int_0^1 w(x)dx = 1$. *Definieer* N_k, M_n, $K_n(x,y)$, $q_n(x)$, v_i *met behulp van resp. de formules* (3), (4), (5), (6), (12). *Dan gelden de formules* (9), (10) *en* (11).

Stelling 6 is in de literatuur bekend als een generalisatie van de z.g. Radau-kwadratuur, zie bijv. KOPAL [3, pp. 390-397].

Tenslotte geef ik als toevoeging bij Stelling 3 de formule

(13) $$v_s^{-1}v_t^{-1}c_{s,t}^r = M_n^{-1}\sum_{k=0}^{n} N_k p_k(\alpha_r)p_k(\alpha_s)p_k(\alpha_t),$$

$$r,s,t = 0,1,\ldots,n.$$

Dus we hebben een "expliciete" analytische uitdrukking voor de kombinatorische konstante $c_{s,t}^r$. De eis dat $c_{s,t}^r$ geheel en ≥ 0 moet zijn levert noodzakelijke voorwaarden op voor n en d opdat $|X| = M_n$. Anderzijds zou het een aantrekkelijk resultaat zijn als los van de meetkundige interpretatie bewezen kan worden dat het rechterlid van (13) niet-negatief is. Dit rechterlid is de konvolutiekern voor de diskrete orthogonale polynomen $p_k(\alpha_i)$, $i,k = 0,1,\ldots,n$.

REFERENTIES

[1] DELSARTE, P., *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*. Philips Res. Repts. Suppl. 1973, No. 10.

[2] DELSARTE, P., J.M. GOETHALS & J.J. SEIDEL, *Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials*. To appear.

[3] KOPAL, Z., *Numerical analysis*. Chapman & Hall, London, 1955.