STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 3 ↯

Enkele voorbeelden van berekening van waterbeweging onder invloed van wind.

door

D. van Dantzig

1956

KONINKL. NEDERL. AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN – AMSTERDAM
Overgenomen uit
het Verslag van de gewone vergadering der Afd. Natuurkunde, 65, No. 3, 1956

WISKUNDE

Report No TN 3 of the
Applied Mathematics Dept.
Mathematical Centre
Amsterdam

VOORDRACHT

ENKELE VOORBEELDEN VAN BEREKENING VAN WATER-BEWEGING ONDER INVLOED VAN WIND

DOOR

D. VAN DANTZIG

(Deze rede werd uitgesproken in de vergadering van 28 Januari 1956)

Deze mededeling behelst een beknopt overzicht over een deel van de berekeningen, onder leiding van spreker door Drs. G. VELTKAMP en Dr. H. A. LAUWERIER in de afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum verricht, over beweging van het water in een ondiepe zee onder invloed van gegeven door een windveld veroorzaakte krachten.

Ondersteld wordt, dat verticale waterbewegingen, afwijkingen van de hydrostatische drukverdeling langs een verticaal, en niet-lineaire termen in de bewegingsvergelijkingen verwaarloosbaar zijn. Voorts wordt op het probleem, wèlke krachten een gegeven windveld op de zeeoppervlakte uitoefent niet ingegaan; de door de dichtheid van het water gedeelde en met h vermenigvuldigde resultante $\vec{W}$ [1]) dezer krachten wordt als gegeven beschouwd. Zij h de diepte der zee op een bepaalde plaats, g de versnelling der zwaartekracht, $c^2 = gh$, $\vec{u}/h$ de gemiddelde snelheidsvector langs een verticale waterkolom, ζ de hoogte van het zee-oppervlak boven het evenwichtsniveau, Ω de coëfficiënt van CORIOLIS, λ een wrijvingscoëfficiënt, en $\vec{e}_3$ een verticaal naar boven gerichte eenheidsvector, dan is de gelineariseerde bewegingsvergelijking in vectorvorm:

$$(1) \qquad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lambda \, \vec{u} + \Omega \, \vec{e}_3 \times \vec{u} + c^2 \operatorname{grad} \zeta = \vec{W}$$

en de continuïteitsvergelijking:

$$(2) \qquad \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Kusten worden als ondoordringbaar beschouwd, zodat aldaar $\vec{u}$ zuiver tangentieel is, terwijl wordt toegelaten, dat de zee gedeeltelijk door een, oneindig diep onderstelde, oceaan begrensd is; aldaar is dan $\zeta = 0$. Door de linearisatie kan de getijdebeweging buiten beschouwing worden gelaten, daar deze — in de hier aanvaarde benadering — op de door $\vec{W}$

[1]) Vectoren worden aangegeven door een letter met erboven geplaatste pijlpunt.

veroorzaakte beweging gesuperponeerd wordt. De werkelijke, door niet-lineaire effecten beïnvloede waarde van ζ zal in de meeste gevallen lager zijn, d.w.z. de door superpositie gevonden waarden zijn doorgaans ,,aan de veilige kant". Tenslotte worden λ, Ω en c constant ondersteld, waarbij de onderstelling, dat h en λ constant zijn de ernstigste beperking inhoudt.

Het geval dat het ,,windveld" $\vec{W}$ en de stroming stationair zijn, d.w.z. dat $\vec{W}$, $\vec{u}$ en ζ niet van t afhangen, is door M. P. H. WEENINK (KNMI) en G. W. VELTKAMP onderzocht. Alleen het laatstgenoemde onderzoek wordt hier gedeeltelijk besproken. Door splitsing in een rotatievrij en een divergentievrij gedeelte kan $\vec{W}$ uit twee skalaire ,,windpotentialen" U en V worden afgeleid ($\vec{W} = -c^2$ (rot $U\,\vec{e}_3$ + grad V)), terwijl $\vec{u}$ tengevolge van (2) divergentievrij wordt: $\lambda\,\vec{u} = -c^2 \operatorname{rot} \Theta\,\vec{e}_3$. Er bestaat dan een complexe *analytische* functie $Z(z)$ van $z=x+iy$ (de ,,complexe potentiaal"), waaruit ζ wordt bepaald door middel van

$$(3) \qquad \zeta = \operatorname{Re}(\Omega\lambda^{-1}+i)(Z+U+iV) = \frac{\Omega}{\lambda}(U+\operatorname{Re} Z)-(V+\operatorname{Im} Z).$$

Als randvoorwaarden voor $Z(z)$ heeft men: $U+\operatorname{Re} Z$ constant langs iedere kust, en rechterlid van (3) gelijk nul langs iedere oceaanrand.

Bij een geheel gesloten zee volgt hieruit, dat *langs de kust* $\zeta = -V - \operatorname{Im} Z$ en dus onafhankelijk van de waarden van Ω en λ is.

Een voorbeeld, waarbij de functie $Z(z)$ op eenvoudige wijze berekenbaar is, en waarbij geen nauwkeurige aansluiting bij de realiteit nagestreefd is (b.v. drukgradiënt weggelaten), is gegeven door een zee in de vorm van een half vlak $y>0$, van constante diepte h, met een circulair divergentievrij singulariteitenvrij ,,windveld":

$$(4) \qquad U = -\frac{1}{2}\frac{b^3}{r^2+b^2}, \quad V=0, \quad r=|z-ia|$$

waarbij langs de kust

$$(5) \qquad \zeta(x,0) = -\frac{b^3}{2\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{x}{x^2+a^2+b^2}$$

wordt. Bij een zee (zonder eilanden) van constante diepte van willekeurige vorm kan bij een gegeven windveld de analytische functie Z, en daaruit ζ, door middel van een conforme afbeelding met behulp van de integraalvoorstelling van POISSON–SCHWARZ worden berekend. Voor het geval van een half vlak (oceaan) met daaraan grenzend een rechthoekige, loodrecht erop staande baai (Noordzee), beide van *dezelfde* constante diepte kan dit resultaat met behulp van elliptische functies (die, in het geval van de Noordzee vrijwel ontaarden in goniometrische functies) worden verkregen (VELTKAMP, 1953).

Indien de diepte van de oceaan constant, maar verschillend van (en wel zeer veel groter dan) die van de baai genomen wordt, blijft ζ aan de ons interesserende Zuidkust van de baai nog berekenbaar.

Voor het geval van een homogeen windveld $W_x = W \sin \psi$, $W_y = -W \cos \psi$ vindt men (voor $\lambda/\Omega = 0{,}19$) voor het midden van de zuidkust van een zee met breedte $2a$ en lengte $4a$ $\zeta = 4ac^{-2}W \cdot 1{,}022 \cos(\psi - 12°)$. Het maximum van ζ wordt dus bereikt indien de wind iets westelijk van de asrichting van de zee invalt. Ook voor het geval van een windveld, waarvan de componenten lineaire functies van x en y zijn is de berekening uitgevoerd. Is bv.

$$W_x = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{4}\,\frac{y+2a}{a}\right)\right\} W, \quad W_y = -\left(1 - \frac{5}{4}\,\frac{x}{a}\right) W$$

dan vindt men $\zeta = 4ac^{-2}W \cdot 1{,}203$, dat is een verhoging van 9 % ten opzichte van een homogeen windveld met dezelfde gemiddelde componenten. Kiest men echter bij een inhomogeen windveld de gemiddelde waarde van $(W_x^2 + W_y^2)^{\frac{1}{2}}$ over het oppervlak van de zee als maat voor de intensiteit van een storm, dan blijkt, dat de intensiteit van het genoemde inhomogene windveld 7 % groter is dan die van het bijbehorende homogene.

Algemeen kan men vragen naar de maximumwaarde van de verhoging ζ in het midden van de zuidkust voor een storm van gegeven intensiteit. Deze vraag is, zelfs als men zich beperkt tot de bovengenoemde lineair variërende windvelden niet zonder omvangrijk numeriek werk te beantwoorden. Beperkt men zich tot windvelden van het type

$$W_x = W \sin \psi \cdot \frac{1 - \alpha x/a}{f(\alpha)}, \quad W_y = -W \cos \psi \, \frac{1 - \alpha x/a}{f(\alpha)},$$

waarin $f(\alpha)$ voor de normering zorg draagt, dan vindt men als maximum $\zeta = 4ac^{-2}W \cdot 1{,}17$ en dit wordt bereikt voor $\alpha = 1{,}12$; $\psi = 16°$. Hier blijkt dus, dat de concentratie van de wind-intensiteit langs de westkust een storm gevaarlijker maakt (de waarde van ζ is hier 15 % groter dan bij een homogeen windveld van dezelfde intensiteit).

Bij niet-stationaire windvelden doen zich wezenlijk moeilijker problemen voor. Stellen we de operator $\partial/\partial t$ door p voor, of, wat hetzelfde is, voeren we een transformatie van Laplace uit, en elimineren we $\vec{u}$, dan vinden we voor ζ een inhomogene differentiaalvergelijking van Helmholtz, t.w.

$$\Delta\zeta - k^2\,\zeta = F \tag{6}$$

waarin F een (van p afhangende) lineaire combinatie van de divergentie en de rotatie van het windveld is, terwijl k^2 echter niet, zoals gewoonlijk, $= p^2/c^2$ is, maar gegeven is door

$$k^2 = \frac{p\{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}}{c^2(p+\lambda)}. \tag{7}$$

Voor $\lambda=0$ (λ is klein, b.v. $\approx 0{,}08$) wordt dit $k^2=(p^2+\Omega^2)/c^2$, en voor $\lambda=\Omega=0$ $k^2=p^2/c^2$. Een storingsrekening met Ω als parameter blijkt *niet* bruikbaar te zijn daar Ω te groot is ($\Omega=0{,}44$ uur^{-1}) tengevolge waarvan b.v. de drie eerste termen in een speciaal geval van gelijke grootte-orde blijken te zijn.

De bij (6) behorende functie van GREEN voor een in alle richtingen oneindig grote zee, steeds van constante eindige diepte (d.w.z. de functie ζ behorende bij een delta functie van DIRAC in het rechterlid van (6)) is een functie van BESSEL van de derde soort, t.w. $K_0(kr)$.

Wezenlijke moeilijkheden doen zich voor, zodra de zee door kusten wordt begrensd. De randvoorwaarde aan een kust houdt in, dat aldaar de afgeleide van ζ in een richting, die een hoek φ met de normaal op de kust maakt, een uit het gegeven windveld berekenbare waarde (t.w. de „windkracht" in dezelfde richting gedeeld door c^2) bezit, waarbij

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega}{p+\lambda} \tag{8}$$

is, dus φ nog van p afhangt. Voor $\Omega=0$ is dus de normale afgeleide gegeven.

Het eenvoudigste geval is wederom dat van het halve vlak, b.v. $y>0$, daar dan de richting φ langs de gehele kust (i.c. de x-as) constant is. Terwijl daar in het geval van een *normale* afgeleide de functie van GREEN verkregen wordt uit een (logarithmische BESSEL-) pool tezamen met zijn spiegelbeeld t.o.v. de kust, moet in het geval van de scheve afgeleide volgens een door VELTKAMP en LAUWERIER uitgevoerde analyse dit laatste met cos 2φ worden vermenigvuldigd, terwijl bovendien een in dit spiegelbeeld uitmondende halve lijn in de richting φ, belegd met daarop loodrechte dipolen in de constante dichtheid sin 2φ moet worden toegevoegd. Dit volgt uit het feit, dat een *dipool* in de richting $-\varphi$, tezamen met een daaraan tegengestelde maar evenwijdige in zijn spiegelbeeld aan de randvoorwaarde voldoet. De functie van GREEN voor een half vlak kan dientengevolge door een bepaalde integraal worden voorgesteld. Ook verdere eigenschappen van multipolen en homogeen daarmede belegde halve lijnen, in het bijzonder hun gedrag bij draaiingen, werden door VELTKAMP onderzocht.

Met behulp hiervan kan, zoals LAUWERIER (1955[1]) heeft aangetoond, de functie van GREEN worden bepaald voor een strook en wel hetzij begrensd door twee evenwijdige kusten („oneindig lange Noordzee"), hetzij door een kust en een daarmede evenwijdige oceaan („oneindig brede Noordzee"), terwijl zij voor het Noordzee probleem zelf bepaald kan worden uit een integraalvergelijking van FREDHOLM. De oplossing dezer vergelijking is echter alleen bruikbaar voor kleine waarden van p, overeenkomende met grote waarden van t, d.w.z. als de storm bijna over is, en daarom niet van voldoende betekenis om de zeer omvangrijke, volledige uitwerking ervan te rechtvaardigen.

Teneinde de moeilijkheden, die doorgaans aan het verkrijgen van een expliciete oplossing bij algemene gebieden en windvelden zijn verbonden, te vermijden, heeft LAUWERIER voorts een eenvoudig geval behandeld, waarin de waarde van ζ aan de kust rechtstreeks expliciet kan worden verkregen, t.w. het geval van een half vlak (b.v. $y > 0$), waarboven zich een ruimtelijk homogeen windveld bevindt, dat op eenvoudige wijze van de tijd afhangt, t.w.

$$W = e^{-t/T} \cdot t/T^2. \tag{9}$$

en dat nog een willekeurige, door de hoek α bepaalde, richting heeft. (Voor $T \approx 0$ wordt dit een plotselinge slechts een ogenblik durende windstoot). Ook hiervoor zijn de benodigde numerieke berekeningen door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum uitgevoerd.

Het blijkt, dat het maximale positieve windeffect (behalve als T zeer klein is) voor $\alpha \approx 170°$ bereikt wordt, zodat een wind loodrecht op de kust, tengevolge van de kracht van CORIOLIS, minder invloed heeft dan een die bijna evenwijdig is met de kust. Ook voor $\alpha > 180°$, dus *landwind*, heeft de kracht van CORIOLIS na enige tijd nog een *verhoging* tengevolge, terwijl voor kleine positieve α (zeewind), deze kracht na een aanvankelijke verhoging juist een *verlaging* veroorzaakt. Nadat het windeffect $\zeta(t)$ zijn maximum heeft bereikt, loopt het langzaam met zwakke slingeringen terug; alleen voor kleine T zijn de slingeringen wat meer geprononceerd. Zij hebben een periode van ongeveer $2\pi/\Omega$. Het maximum wordt, zoals al bekend was, enige tijd na het windmaximum bereikt. De vertraging („time-lag") hangt behalve van T ook nog van α af.

Beschouwt men het maximale windeffect als functie van de windrichting α met en zonder kracht van CORIOLIS, dan blijkt deze in het onderzochte geval op de *grootte* van dit maximum slechts weinig invloed te hebben, maar tot een *verschuiving* van de waarden van α over globaal 80° te leiden. Er is reden om aan te nemen, dat de kracht van CORIOLIS ook op de grootte van het maximum invloed zal hebben als reflecties tegen de Westkust in aanmerking worden genomen.

Tenslotte kan nog worden opgemerkt, dat de onderstelling, dat de zee een constante diepte heeft in vergelijking met een veranderlijke diepte, althans in enkele nader beschouwde gevallen, een *overschatting* van het maximale windeffect inhoudt.

LITERATUUR

M. P. H. WEENINK, (1954), Bijdrage tot de theorie der opwaaiing in een baai of randzee bij een inhomogeen windveld. K.N.M.I. Meteorologisch Rapport Stormvloed, 1e vervolg, pp. 40–57.

———, (1955), Grafieken ter bepaling van windeffecten langs de Nederlandse kust. Ibid., 2e vervolg, pp. 23–83.

G. W. VELTKAMP, (1953[1]), Een probleem in conforme afbeelding. Rapport TW 22 van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

G. W. VELTKAMP, (1953[2]), De invloed van stationaire windvelden op een zee van constante diepte. Ibid., TW 23.

———, (1954), De invloed van stationaire windvelden op een zee van op delen constante diepte. Ibid., TW 24.

———, (1955), Singuliere oplossingen van de Helmholtz-vergelijking in twee dimensies. Ibid., geen nummer.

H. A. LAUWERIER, (1955[1]), The motion of a shallow sea under influence of a non-stationary wind-field. Ibid., TW 31.

———, (1955[2]), The motion of a half-plane sea under influence of a non-stationary wind. Ibid., TW 32.

———, (1956[1]), The influence of a disturbance upon an infinitely large shallow sea of constant depth. Ibid., TW 34.