De transformatie van Vekua

G.W. Veltkamp

1. Het hyperbolische randwaarde-probleem

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - k^2\Phi = 0 \text{ voor } x>0,\ y>0,$$

$$\Phi(x,0) = \Psi(x) \text{ voor } x>0,$$

$$\Phi(0,y) = \Psi(0) \text{ voor } y>0$$

(met continue $\Phi(x)$)

heeft als oplossing (te verkrijgen m.b.v. integratie-methode van Riemann of met Laplace-transformatie)

$$\Phi(x,y) = \Psi(x) - \int_0^x \Psi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi} I_0(k\sqrt{(x-\xi)y})d\xi. \tag{1}$$

2. Zij $\Psi(z)$ een analytische functie van z in een zeker gebied D dat de oorsprong bevat.
Dan voldoet voor z in D en w willekeurig complex

$$\Phi(z,w) = \Psi(z) - \int_0^z \Psi(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta} I_0(k\sqrt{(z-\zeta)w})d\zeta \tag{2}$$

(integratieweg willekeurig in D)
aan de vergelijking

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial w} - k^2\Phi = 0 \tag{3}$$

Zij nu $z=x+iy$, $w=\bar{z}=x-iy$.
Dan luidt (2)

$$\Phi(z,\bar{z}) = \Psi(z) - \int_0^z \Psi(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta} I_0(k\sqrt{(z-\zeta)\bar{z}})d\zeta, \tag{4}$$

en Φ, opgevat als functie van x en y voldoet aan

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - k^2\Phi = 0 \tag{5}$$

(Φ is in het algemeen "complex-valued").

Zij D stergebied t.o.v. de oorsprong, en zij

$$\text{Re }\Phi(z,\bar{z}) = F(x,y)$$

$$\text{Re }\Psi(z) = G(x,y)$$

Dan is $G(x,y)$ harmonisch en $F(x,y)$ voldoet aan (5), terwijl uit (4) volgt

$$F(x,y) = G(x,y) - \int_0^1 G(tx,ty)\frac{\partial}{\partial t} I_0(kr\sqrt{1-t})dt \tag{6}$$

met $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$L_q . g = (1 - k^2/4q^2) L_s . f$$

En dezelfde relatie blijkt uit (8) te volgen. Waarmee, aangezien f en g continu zijn, bewezen is, dat de in (8) gegeven transformatie de omkering is van die uit (7).

Opmerking. Daar I_o een even en J_1 een oneven functie van z'n argument is, zijn alle wortelvormen slechts schijn. De integraalkernen in (7) en (8) zijn gehele functies van r en ϱ en k^2.

4. Zij $f(r,\varphi)$ gedefinieerd voor $0 < r < \infty$, $\theta_1 < \varphi < \theta_2$ en exponentieel begrensd voor $r \to \infty$. Zij k een complex getal. Definieer de operator M_k door

$$M_k . f \stackrel{\text{def}}{=} (q - k^2/4q) \, L_{q+k^2/4q} . f = \qquad (13)$$

$$= (q - k^2/4q) \int_0^\infty e^{-r(q+k^2/4q)} f(r,\varphi) dr$$

(hierin ligt q in een zeker gebied van het complexe q-vlak, zodanig dat de integraal convergeert. Dit gebied bevat zeker een naar rechts onbegrensd deel van de reële as).

Vergelijking (12) kan dan geschreven worden als

$$M_o . g = M_k . f,$$

zodat de door (7) gegeven transformatie van Vekua geschreven kan worden als

$$f = V_k g \text{ met } V_k \stackrel{\text{def}}{=} M_k^{-1} . M_o \qquad (14)$$

Stelling. Onder milde restricties betreffende de toelaatbare functies $f(r,\varphi)$ geldt

$$\left\{ \left(q \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} . M_k = M_k . \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 r^2 \right\} . \qquad (15)$$

Gevolg: Voor de transformatie van Vekua geldt

$$\left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 r^2 \right\} . V_k = V_k . \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} .$$

Opmerking. Een door PETERS aangegeven transformatie luidt

$$P_k . f(r,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} k \operatorname{sh} p \int_0^\infty e^{-kr \operatorname{ch} p} f(r,\varphi) dr .$$

Hiervoor geldt dus

$$P_k = \left[M_k \right]_{q = \frac{1}{2} k e^p}$$

Uit (15) volgt dan (daar uit $q = \frac{1}{2} k e^p$ volgt $q \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p}$)

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} . P_k = P_k \left\{ \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 r^2 \right\} .$$

5. <u>Stelling</u>. Er geldt

$$M_k \; . \; r\frac{\partial}{\partial r} = -\, q \frac{\partial}{\partial q} \; . \; \frac{q^2+k^2/4}{q^2-k^2/4} \, M_k \; . \tag{16}$$

Dus speciaal $M_o . \; r\frac{\partial}{\partial r} = -q \frac{\partial}{\partial q} M_o .$

<u>Gevolg</u>: Er geldt

$$V_k^{-1} \; . \; r\frac{\partial}{\partial r} \; V_k = r\frac{\partial}{\partial r} - U_k \; ,$$

waarin U_k gedefinieerd is door

$$U.g(r,\varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} \tfrac{1}{2}k^2 r \int_0^r \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}\, k(r-\rho) g(\rho,\varphi) d\rho \; .$$

<u>Bewijs</u>. Uit (14) en (16) volgt

$$V_k^{-1} \; r\frac{\partial}{\partial r} \; V_k = M_o^{-1} \; M_k \; r\frac{\partial}{\partial r} M_k^{-1} \; M_o =$$

$$= -\, M_o^{-1} q \; \frac{\partial}{\partial q} \; . \; \frac{q^2+k^2/4}{q^2-k^2/4} \, M_o = r\frac{\partial}{\partial r} \; . \; M_o^{-1} \left\{ 1 + \frac{k^2/2}{q^2+k^2/4} \right\} M_o =$$

$$= r\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{\partial}{\partial r} \, L_q^{-1} . \; \frac{k^2/2}{q^2+k^2/4} \, L_q$$

(daar $M_o = q \, L_q$, $M_o^{-1} = L_q^{-1} \, q^{-1}$).

Nu is $L_q^{-1} \; \dfrac{k^2/4}{q^2+k^2/4} = k \operatorname{sh} \tfrac{1}{2} kr.$

Dus $r\dfrac{\partial}{\partial r} L_q^{-1} \; \dfrac{k^2/2}{q^2+k^2/4} \; L_q .g = kr \dfrac{\partial}{\partial r} \; (g * \operatorname{sh} \tfrac{1}{2}kr) =$

$$= \tfrac{1}{2} \, kr^2 \int_0^r \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}k(r-\rho) . g(\rho,\varphi) d\rho = U_k . g, \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Gevolg</u>: Voldoet de functie $f(r,\varphi)$ voor $\varphi = \theta_j$ $(j=1,2)$ aan de randvoorwaarden

$$\cos \mu_j \; r\frac{\partial f}{\partial r} - \sin \mu_j \frac{\partial f}{\partial \varphi} = h_j(r), \; j=1,2$$

dan voldoet de functie $g(r,\varphi) = V_k^{-1} . f(r,\varphi)$ voor $\varphi = \theta_j$ aan de randvoorwaarden

$$\cos \mu_j \; r\frac{\partial g}{\partial r} - \sin \mu_j \frac{\partial g}{\partial \varphi} - \cos \mu_j . \; \tfrac{1}{2}k^2 r \int_0^r \operatorname{ch} \tfrac{1}{2}k(r-\rho) g(\rho,\varphi_j) d\rho = V_k^{-1} \, h_j$$

(de operator $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ commuteert met V_k).