STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TOEGEPASTE WISKUNDE

Korte mededeling T.N. 19

Een stromingsprobleem

door

D.J. Hofsommer

december 1960

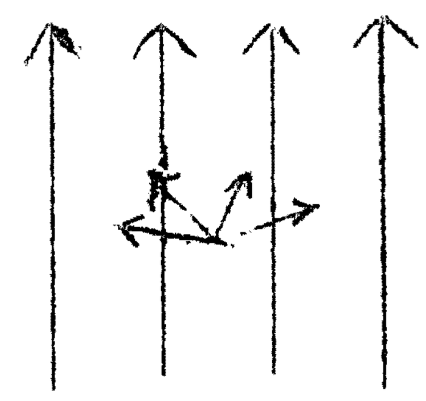

fig.1

In een uniforme parallelstroming bevindt zich een bron welke deeltjes uitzendt. Gevraagd wordt het aantal deeltjes dat zich in een stilstaand volume bevindt.

We beschouwen eerst een model, waarbij de snelheid van de uitgezonden deeltjes in alle richtingen hetzelfde is en waarin ook in alle richtingen hetzelfde aantal deeltjes wordt uitgezonden.
Zij deze snelheid $\vec{v}_o$ en zij het aantal deeltjes, dat per sec in een ruimtehoekje $d\omega$ wordt uitgezonden $q_o d\omega$. De driftsnelheid tengevolge van de parallelstroming zij $\vec{u}_o$. De component van de snelheid van de deeltjes in de richting van de parallelstroming is dan (fig.2)

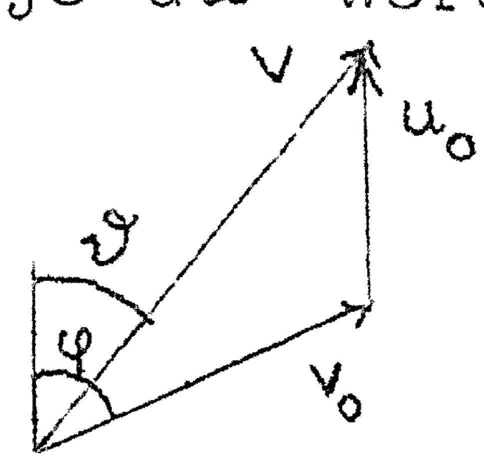

fig.2

1) $v_{/\!/} = v \cos\vartheta = v_o \cos\varphi + u_o$

en de component loodrecht op die richting

2) $v_\perp = v \sin\vartheta = v_o \sin\varphi$

als $\vec{v}$ de totale snelheid van de deeltjes is, ϑ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{u}_o$ en φ de hoek tussen $\vec{v}_o$ en $\vec{u}_o$.

Uit 1) en 2) volgen

3) $v^2 = u_o^2 + v_o^2 + 2u_o v_o \cos\varphi$

4) $\cos\vartheta = \frac{v_{/\!/}}{v} = \frac{u_o + v_o\cos\varphi}{\sqrt{u_o^2+v_o^2+2u_o v_o\cos\varphi}}$.

Het aantal deeltjes, dat zich in een bolschilelement ter dikte dr, en met middelpunt in de deeltjesbron, bevindt is gelijk aan

$$\frac{q_o}{v}\, d\omega\, dr = \frac{q_o}{r^2 v}\, dV$$

waarin dV een volumeelement is. Het totaal aantal deeltjes in een gegeven volume bedraagt dus

5) $$I = \iiint \frac{q_o}{r^2 v}\, dV = \iiint \frac{q_o}{v} \sin\vartheta\; d\vartheta\; d\psi\; dr .$$

We beschouwen nu een rond deel van een bolschil symmetrisch t.o.v. de as ϑ=0 met dikte h en begrensd door een kegel met halve openingshoek θ. Integratie over de polaire hoek ψ kan wegens de rotatiesymmetrie gemakkelijk worden uitgevoerd. Omdat q_o en v onafhankelijk van r zijn, is integratie over r eveneens eenvoudig. We vinden

6) $$I = 2\pi\, q_o h \int_0^{\theta} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{u_o^2+v_o^2+2u_o v_o\cos\varphi}} = 2\pi\, q_o h \int_0^{\theta} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{v}\ .$$

Uit (4) volgt, dat

7) $$\sin\vartheta\ d\vartheta = \frac{v_o^2 \sin\varphi\,(v_o+u_o\cos\varphi)}{(u_o^2+v_o^2+2u_o v_o\cos\varphi)^{3/2}}\, d\varphi$$

zodat

8) $$I = 2\pi\, q_o h v_o^2 \int_0^{\emptyset} \frac{\sin\varphi\,(v_o+u_o\cos\varphi)\,d\varphi}{(u_o^2+v_o^2+2u_o v_o\cos\varphi)^2}$$

met

$$v_o\cos\emptyset = -u_o\sin^2\theta + \cos\theta\sqrt{v_o^2-u_o^2\sin^2\theta}\ .$$

Voer nu nog in

9) $$v^2 = u_o^2+v_o^2+2u_o v_o\cos\varphi$$

$$\sin\varphi\ d\varphi = -v\ dv/u_o v_o$$

dan wordt 8)

10) $$I = \frac{\pi q_o}{u_o} \int_{v_1}^{v_2} (v^2+v_o^2-u_o^2)\,v^{-3}dv$$

waarin

11a) $$v_1 = u_o\cos\theta + \sqrt{v_o^2-u_o^2\sin^2\theta}$$

de totale snelheid in de richting θ is (zie fig.3) en

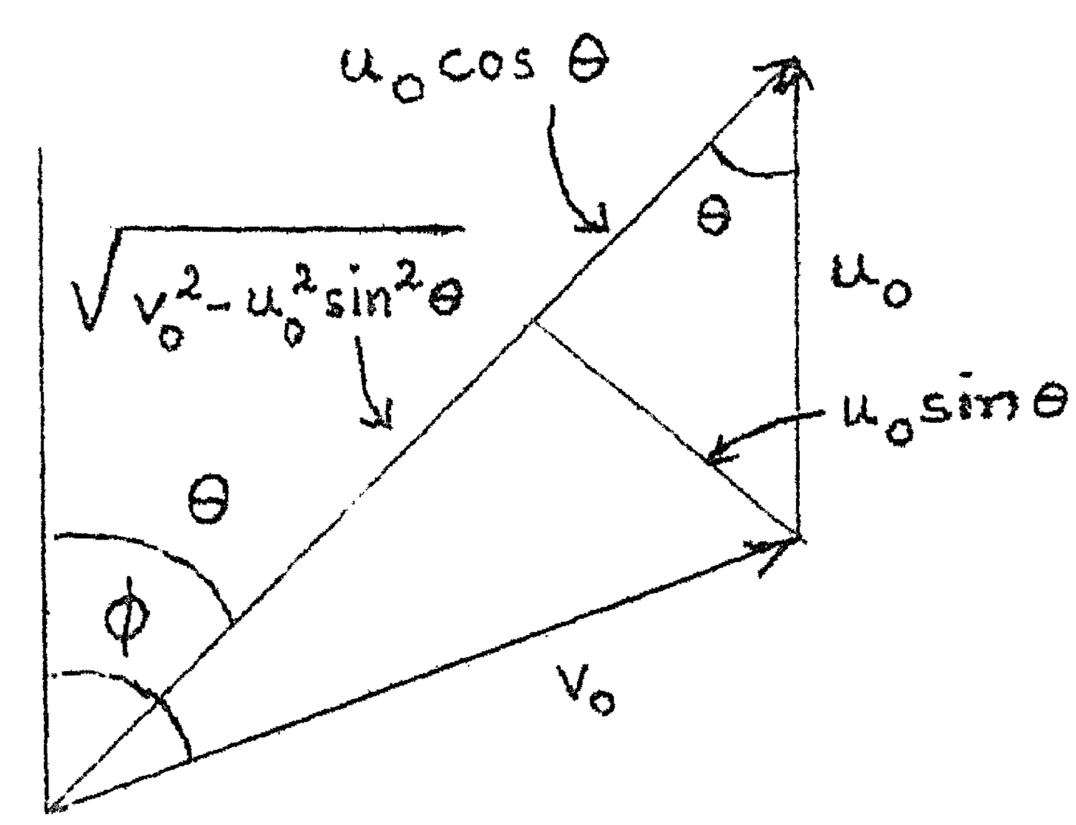

fig.3

12) $$v_2 = u_o+v_o$$

de totale snelheid langs de as $\theta=0$ is.

Indien θ groot is, zullen er binnen een kegel met halve openingshoek θ richtingen vallen, waarin geen deeltjes worden uitgezonden. In dat geval wordt v_1 niet meer door (11a) gegeven. Veronderstellen we, dat $\emptyset$ ten hoogste $\frac{1}{2}\pi$ is, d.w.z. dat de bron alleen deeltjes in een half-ruimte uitzendt, d.i. in een ruimtehoek 2π, dan wordt (zie fig.3)

11b) $$v_1 = \sqrt{u_o^2+v_o^2} \quad \text{als} \quad \mathrm{tg}\ \theta > v_o/u_o\ .$$

Integratie van (10) levert

12) $$I = \pi\, q_o h/u_o \left[\ln(v_2/v_1)+\tfrac{1}{2}(u_o^2-v_o^2)(v_2^{-2}-v_1^{-2})\right]\ .$$

De constante q_o kan worden uitgedrukt in het totaal per sec uitgezonden aantal deeltjes Q. Immers, uit de gemaakte veronderstelling dat alleen deeltjes worden uitgezonden binnen een ruimtehoek 2π volgt onmiddellijk dat

13) $$Q = 2\pi q_o.$$

Substitutie van 12) in 11) geeft tenslotte

14) $$I = \tfrac{1}{2}Qh/u_o\left[\ln(v_2/v_1) + \tfrac{1}{2}(u_o^{\,2}-v_o^{\,2})(v_2^{\,-2}-v_1^{\,-2})\right].$$

Als tweede model nemen we het geval dat de uittreesnelheden van de deeltjes volgens een cosinuswet met de richting verandert, d.w.z. dat de uittreesnelheid w gelijk is aan

$$w = v_o\cos\varphi$$

als φ de uittreerichting is.

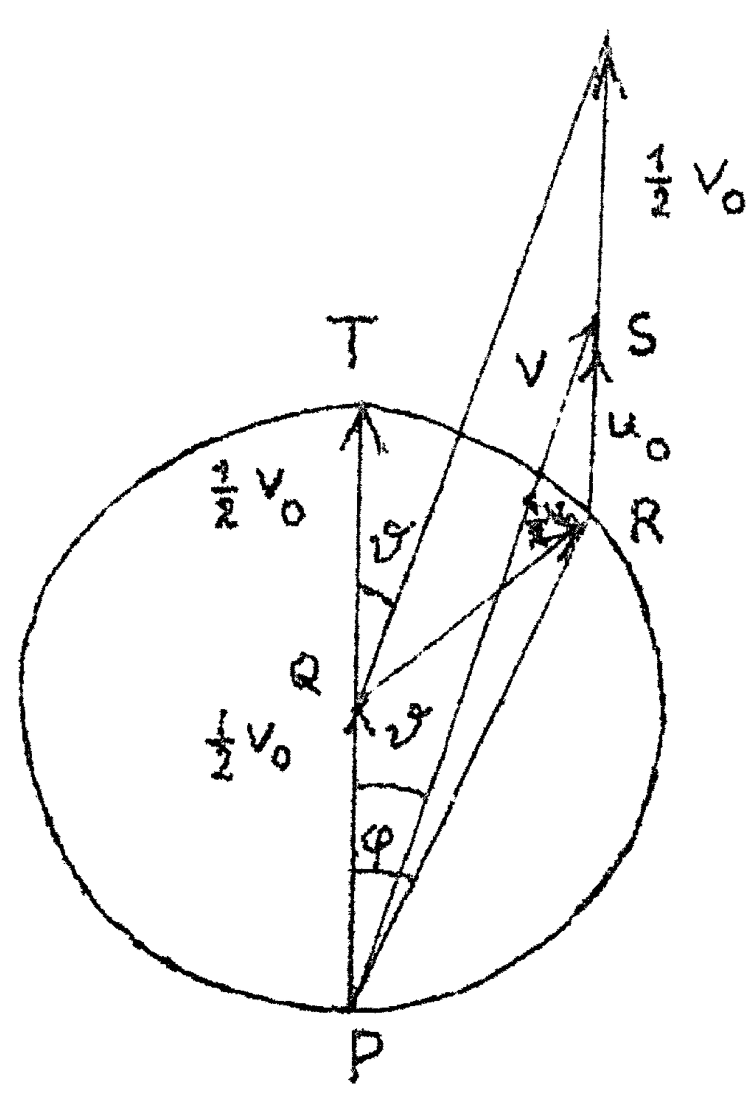

fig.4

Het snelheidsdiagram is in fig.4 aangegeven. PR is de uittreesnelheid, PT=v_o de maximale uittreesnelheid. RS=u_o de driftsnelheid en PS=v de totale snelheid. Uit de figuur blijkt dat we dezelfde totale snelheid verkrijgen als we een constante uittreesnelheid $\frac{1}{2}v_o$ nemen en een driftsnelheid $u_o+\frac{1}{2}v_o$. Dit betekent, dat we de resultaten voor het tweede model uit die voor het eerste model kunnen verkrijgen indien we u_o door $u_o+\frac{1}{2}v_o$ en v_o door $\frac{1}{2}v_o$ vervangen. We hebben dus

15) $$I = \frac{Qh}{2u_o+v_o}\left[\ln(v_2/v_1) + u_o(u_o+v_o)(v_2^{\,-1}-v_1^{\,-2})\right]$$

waarin

16) $$v_1 = (u_o+\tfrac{1}{2}v_o)\cos\theta + \sqrt{(\tfrac{1}{2}v_o)^2-(u_o+\tfrac{1}{2}v_o)^2\sin^2\theta}$$

weer de totale snelheid in de richting θ is en

17) $$v_2 = u_o+v_o$$

de totale snelheid langs de as is.

In dit geval is de richting van de totale snelheid aan geen beperkingen onderhevig.

Als derde model nemen we het geval, dat zowel de uittreesnelheden w als de aantallen van de deeltjes volgens een cosinuswet met de richting veranderen, d.w.z. dat

$$w = v_o\cos\varphi$$

de uittreesnelheid is en dat

18) $$q\,d\omega = q_o\cos\varphi\,d\omega$$

het aantal deeltjes is, dat per sec in een ruimtehoekje $d\omega$ wordt uitgezonden.

Een redenering als voor het eerste model geeft de integraal

$$\text{19)}\qquad I = \pi q_o h\, v_o^2 \int_0^{\emptyset} \frac{\sin^2\varphi \cos\varphi\left[\tfrac{1}{2}v_o+(u_o+\tfrac{1}{2}v_o)\cos 2\varphi\right]}{\left[u_o^2+u_o v_o+\tfrac{1}{2}v_o^2+v_o(u_o+\tfrac{1}{2}v_o)\cos 2\varphi\right]^2}\,d\varphi$$

$$= \pi q_o h\, v_o^2 \int_0^{\emptyset} \frac{\sin\varphi \cos^2\varphi\left[(2u_o+v_o)\cos^2\varphi - u_o\right]}{\left[u_o^2+v_o(2u_o+v_o)\cos^2\varphi\right]^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{2\pi q_o h}{2u_o+v_o}\left[I_o - \frac{2u_o+v_o}{u_o} I_1 + \frac{u_o+v_o}{2u_o} I_2 \right]$$

waarin

$$\text{20)}\qquad \left\{ \begin{aligned} I_o &= \int_0^{\emptyset} \sin\varphi\, d\varphi = 1-\cos\emptyset \\ I_1 &= \int_0^{\emptyset} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1+a^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a(1-\cos\emptyset)}{1+a^2\cos^2\emptyset} \\ I_2 &= 2\int_0^{\emptyset} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(1+a^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{1-\cos\emptyset}{1+a^2}\,\frac{1-a^2\cos\emptyset}{1+a^2\cos^2\emptyset} + \\ &\qquad + \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a(1-\cos\emptyset)}{1+a^2\cos^2\emptyset} \end{aligned} \right.$$

met

$$a^2 = \frac{(2u_o+v_o)v_o}{u_o^2}$$

$$v_o\cos 2\emptyset = -(u_o+\tfrac{1}{2}v_o)\sin^2\theta + \cos\theta\sqrt{(\tfrac{1}{2}v_o)^2-(u_o+\tfrac{1}{2}v_o)^2\sin^2\theta}$$

of

$$\text{21)}\qquad \cos\emptyset = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{2u_o+v_o}{v_o}\sin\theta\right)(1-\sin\theta)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{2u_o+v_o}{v_o}\sin\theta\right)(1+\sin\theta)}$$

als θ weer de halve openingshoek is van de kegel, die het beschouwde deel van een bolschil begrenst.

De constante q_o kan weer worden uitgedrukt in het totaal per sec uitgezonden aantal deeltjes Q. We hebben

$$Q = \int q\, d\omega$$

$$\text{22)}\qquad = q_o \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi \sin\varphi\; d\varphi\; d\psi$$

$$= \pi q_o\ .$$

Substitutie van 20) en 22) in 19) levert tenslotte

$$\text{23)}\qquad I = \frac{Qh}{u_o+\tfrac{1}{2}v_o}\left[(1-\cos\emptyset)\left(1+\frac{\tfrac{1}{2}u_o}{u_o+v_o}\,\frac{1-a^2\cos\emptyset}{1+a^2\cos^2\emptyset}\right) - \frac{3u_o+v_o}{2u_o a}\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{a(1-}{1+}\right.$$

met

$$a = \frac{1}{u_o}\sqrt{(2u_o+v_o)v_o}$$