STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

T.N. 31

Warmteopname door een homogene metalen bol bij wisselende temperatuur.

door

C. Hoede

september 1963

§1. Inleiding.

Deze technische notitie behandelt een probleem, gesteld door de landbouwhogeschool in Wageningen.
Een metalen homogene bol met straal R, geleidingsvermogen λ , soortelijke warmte C en dichtheid μ , is geplaatst in een medium, waarvan de temperatuur schommelt rond een temperatuur T_0. Indien de frequentie en de amplitude van de temperatuurschommeling gegeven worden door $f = \omega/2\pi$ resp. A, dan geldt voor de temperatuur op het oppervlak van de bol: $T(R,t) = A \sin \omega t + T_0$. Bij het stijgen van de temperatuur neemt de bol, in een halve periode, een warmte Q op. In de daarop volgende halve periode wordt deze warmte weer afgestaan.
Gevraagd wordt de afhankelijkheid van de parameters A, λ, C, f en μ te bepalen. Daartoe wordt in de paragrafen 2 en 3 de temperatuursverdeling in de bol berekend en met behulp van dit resultaat wordt in paragraaf 4 Q als functie van de bovengenoemde parameters bepaald.

§2 De warmtegeleidingsvergelijking met begin- en randvoorwaarden.

Voor de warmtestroom dQ door oppervlakteelement dO in het tijdsinterval dt, bij een temperatuursgradient $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$, waarbij $\vec{n}$ de normaalvector tegengesteld aan de stroomrichting is, geldt de vergelijking

$$dQ = - K . \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} . dO . dt \qquad (2.1),$$

waarbij K[cal graad^{-1} cm^{-1} sec^{-1}] een evenredigheidsconstante is. Hieruit volgt, dat de warmte, opgenomen door een volumeelement dV in het tijdsinterval dt, gegeven wordt door

$$dQ = K . \Delta T . dV . dt \qquad (2.2),$$

waarbij Δ de Laplace-operator is. De opgenomen warmte kan ook geschreven worden als

$$dQ = \mu . C . dT . dV \qquad (2.3),$$

waarbij μ[gram cm^{-3}] de dichtheid en C [cal gram^{-1} graad^{-1}] de soortelijke warmte is.
Uit (2.2) en (2.3) volgt nu de vergelijking, die bekend staat als warmtegeleidings- of diffusievergelijking:

$$K \Delta T = \mu C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.4).$$

Door invoeren van het geleidingsvermogen $\lambda = K/\mu$ verkrijgt men tenslotte:

$$\lambda / C . \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.5).$$

Omdat het gestelde probleem radiaal-symmetrisch is, is de temperatuursverdeling T een functie van alleen r en t, waarin r de afstand van het middelpunt van de bol is. De diffusievergelijking (2.5), uitgedrukt in de coördinaten r en t, laat zich nu schrijven als

$$\lambda / C \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.6)$$

Na de substitutie $S(r,t)= r\, T(r,t)$ krijgen we de vergelijking:

$$\lambda/C \, . \, \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (2.7).$$

Voeren we tenslotte in de dimensieloze variabelen

$$\rho = r/R \quad \text{en} \quad \tau = \omega t \qquad ,$$

dan gaat (2.7) over in

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} = \beta \frac{\partial S}{\partial \tau} \qquad (2.8),$$

waarin

$$\beta = CR^2 \; \omega/\lambda \qquad (2.9)$$

een dimensieloze grootheid is.

De randvoorwaarden voor deze vergelijking zijn in het onderhavige geval

$$S(0,\tau) = 0. \quad T(0,\tau) = 0$$
$$S(1,\tau) = AR\, e^{\,i\tau} \qquad (2.10)$$

Hierbij is de irrelevante constante T_o gelijk aan nul gesteld. Ter vereenvoudiging van de berekeningen is de sinus vervangen door de exponentiaalfunctie. In onze afleidingen is het zuiver imaginaire deel het physisch zinvolle deel.

Ten aanzien van de tijd zijn er twee mogelijkheden, welke wij beide zullen uitwerken.

1). Het probleem wordt opgevat als een beginwaardeprobleem, waarvoor geldt $S = 0$ ten tijde $t = 0$. In dit geval kunnen we het probleem oplossen met behulp van de Laplacetransformatie

$$L\left\{S(\rho,\tau)\right\} = S(\rho,p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} S(\rho,\tau)\, d\tau \quad .$$

2). We veronderstellen, dat de temperatuursverdeling $S(\rho,\tau)$ van de volgende gedaante is:

$$S(\rho,\tau) = S'(\rho)\, e^{i\tau} \qquad (2.11).$$

Substitutie van (2.11) in (2.8), levert voor $S'(\rho)$ de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 S'}{\partial \rho^2} = i\,\beta S' \qquad (2.12).$$

Oplossing van deze vergelijking met randvoorwaarden, die gemakkelijk uit (2.10) volgen, geeft de functie $S'(\rho)$, die tenslotte in (2.11) gesubstitueerd wordt. De aldus gevonden oplossing voor $S(\rho,\tau)$ staat bekend als de quasistationnaire oplossing.

§3. Oplossing van de differentiaalvergelijkingen.

1). De oplossing van het beginwaardeprobleem.

Beschouw het beginwaardeprobleem met $S(\rho,0) = 0$, dan geldt:

$$L\left\{\frac{\partial}{\partial\tau} S(\rho,\tau)\right\} = p\, S(\rho,p) - S(\rho,0) = p\, S(\rho,p)$$

$$L\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} S(\rho,\tau)\right\} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} S(\rho,p)$$

Toepassing van de Laplacetransformatie op de differentiaalvergelijking (2.8) geeft dus

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\rho^2} = \beta\, p\, S \qquad (3.1).$$

De randvoorwaarden (2.10) gaan na transformatie over in

$$\begin{aligned} S(0,p) &= 0 \\ S(1,p) &= AR/p-i \end{aligned} \qquad (3.2).$$

De temperatuursverdeling T in de bol als functie van ρ en τ wordt nu verkregen door de vergelijkingen (3.1) en (3.2) oplossen, de gevonden oplossing terug te transformeren en het resultaat ten slotte te delen door ρR.

De algemene oplossing van (3.1) luidt:

$$S(\rho,p) = C_1\, e^{q\rho} + C_2^{\;-q\rho} \qquad (3.3),$$

waarin $q = \sqrt{\beta p}$.

De randvoorwaarden (3.2) geven voor de coëfficienten C_1 en C_2 de volgende vergelijkingen:

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 \epsilon^{q} + C_2 e^{-q} = AR/p-i$$

zodat

$$C_1 = \frac{2\ AR}{(p-i)\sinh q} \quad \text{en} \quad C_2 = \frac{-2\ AR}{(p-i)\sinh q} \qquad (3.4).$$

Substitutie van (3.4) in (3.3) levert voor de Laplace-getransformeerde van de functie $S(\rho,\tau)$ het resultaat:

$$S(\rho,p) = \frac{AR}{p-i} \cdot \frac{\sinh q\rho}{\sinh q} \qquad (3.5).$$

Terugtransformatie geeft voor $S(\rho,\tau)$ de integraaluitdrukking:

$$S(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\tau} S(\rho,p)\, dp \qquad (3.6).$$

De integratieweg is een rechte, evenwijdig aan de imaginaire as en rechts van de polen van $S(\rho,p)$. Om de integraal (3.6) te berekenen wordt de integratieweg gesloten door een grote halve cirkel, die niet door de polen van de integrand gaat. De integraal over deze halve cirkel levert geen bijdrage, als we de straal van deze cirkel onbegrensd laten toenemen. Toepassing van de residustelling van Cauchy levert de oplossing; deze is gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen in de polen $p=i$ en $p= -n^2\pi^2/\beta (n=1,2,\ldots)$. Indien we slechts geïnteresseerd zijn in het gedrag van de oplossing voor grote waarden van de tijd, dan is alleen de pool in het punt $p=i$ van belang. Deze pool geeft nl. aanleiding tot een factor $e^{i\tau}$ in het residu, terwijl de andere polen residuen leveren, met factoren $e^{-n^2\pi^2\tau/\beta}$, die voor toenemende waarden van de tijd snel afnemen. Deze laatste bijdrage representeert het z.g. inschakeleffect.

Voor de temperatuursverdeling in de bol vinden we tenslotte de uitdrukking:

$$T(\rho,\tau) = \frac{A}{\rho} \cdot \frac{\sinh \rho\sqrt{i\beta}}{\sinh \sqrt{i\beta}} \cdot e^{i\tau} \qquad (3.7).$$

Het zal blijken, dat deze benaderde oplossing, geldig voor voldoende grote waarden van de tijd, overeenstemt met de z.g. quasistationnaire oplossing, gedefinieerd in paragraaf 2.

2). De quasistationnaire oplossing

De quasistationnaire oplossing wordt gegeven door de oplossing van de differentiaalvergelijking (2.12), nml:

$$S(\rho,\tau) = \{C_1 e^{\alpha\rho} + C_2 e^{-\alpha\rho}\}. e^{i\tau} \qquad (3.8),$$

met $\alpha^2 = i\beta$.

De randvoorwaarden (2.10) leveren voor de coëffecienten C_1 en C_2 de betrekkingen:

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = AR$$

waaruit volgt:

$$C_1 = \frac{2AR}{\sinh \alpha} \quad \text{en } C_2 = \frac{-2\ AR}{\sinh \alpha} \qquad (3.9).$$

Substitutie van (3.9) in (3.8) levert voor de functie $S(\rho,\tau)$ de uitdrukking:

$$S(\rho,\tau) = AR \cdot \frac{\sinh \alpha\rho}{\sinh \alpha} \cdot e^{i\tau} \quad ,$$

waaruit tenslotte, na deling door ρR, de temperatuursverdeling in de bol volgt:

$$T(\rho,\tau) = \frac{A}{\rho} \cdot \frac{\sinh \rho\sqrt{i\beta}}{\sinh \sqrt{i\beta}} \; e^{i\tau} \qquad (3.10),$$

welk resultaat volledig overeenstemt met de benaderde oplossing, behandeld in 1). Indien men slechts in het quasistationnaire geval geinteresseerd is, levert deze methode sneller resultaat op.

§ 4. De warmteoverdrachtsfunctie.

Voor de, in een halve periode, opgenomen warmte Q geldt volgens (2.1):

$$Q = -K.\ 4\pi R^2\ \ \mathrm{Im}\left[\int_{-1/4f}^{1/4f} \frac{\partial T}{\partial r}(R,t)dt\right] =$$

$$= -\frac{4\pi KR}{\omega}\ \ \mathrm{Im}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial T}{\partial \rho}(1,\tau)d\tau\right] = \qquad (4.1).$$

$$= \frac{8\pi KRA}{\omega}\ \ \mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{i\beta}\ \cosh\sqrt{i\beta}}{\sinh\sqrt{i\beta}} - 1\right]$$

Na vermenigvuldiging van teller en noemer met

$$e^{(1-i)\sqrt{\beta/2}} - e^{-(1-i)\sqrt{\beta/2}}$$

ziet men gemakkelijk, dat we voor de overdrachtsfunctie de uitdrukking krijgen:

$$Q = \frac{2KRA}{f}\ .\ \sqrt{2\beta}\ \left\{\frac{\sinh\sqrt{2\beta} - \sin\sqrt{2\beta}}{\cosh\sqrt{2\beta} - \cos\sqrt{2\beta}}\right\} =$$

$$= 8\pi\mu R^3\ AC\ .\ \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\ \left\{\frac{\sinh\sqrt{2\beta} - \sin\sqrt{2\beta}}{\cosh\sqrt{2\beta} - \cos\sqrt{2\beta}}\right\} \qquad (4.2).$$

Bij ideale warmteoverdracht, wordt de opgenomen warmte Q_0 maximaal het verschil van de warmteinhouden van de bol bij de temperaturen $T_0 + A$ en $T_0 - A$, d.w.z.

$$Q_0 = 2A.\ \frac{4}{3}\ .\ \pi R^3 \mu C = \frac{8}{3}\pi\mu R^3 Ac \qquad (4.3).$$

Deze waarde van Q_0 nemen we als referentiewarmteopname. De ideale warmteoverdrachtsfunctie is altijd groter dan de werkelijke overdrachtsfunctie (4.2), en we hebben de relatie

$$Q_0 = \lim_{\beta \to 0} Q \qquad (4.4).$$

Deze laatste betrekking ziet men gemakkelijk als volgt:

$$\lim_{\beta\to 0} Q = \lim_{\beta\to 0} \; 8\pi\mu\, R^3 AC \; . \left\{ \frac{\frac{2}{3!}(\sqrt{2\beta})^3 + \ldots\ldots}{\sqrt{2\beta}\;\;(\frac{2}{2!}(\sqrt{2\beta})^2 + \ldots\ldots)} \right\} =$$

$$= 8\;\pi\mu R^3 AC .\; \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\;\pi\mu R^3\; AC = Q_0$$

De afhankelijkheid van de warmteopname van de grootheid β, wordt nu weergegeven door

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{3}{\sqrt{2\beta}} \; . \left\{ \frac{\sinh\sqrt{2\beta} - \sin\sqrt{2\beta}}{\cosh\sqrt{2\beta} - \cos\sqrt{2\beta}} \right\} \qquad (4.5).$$

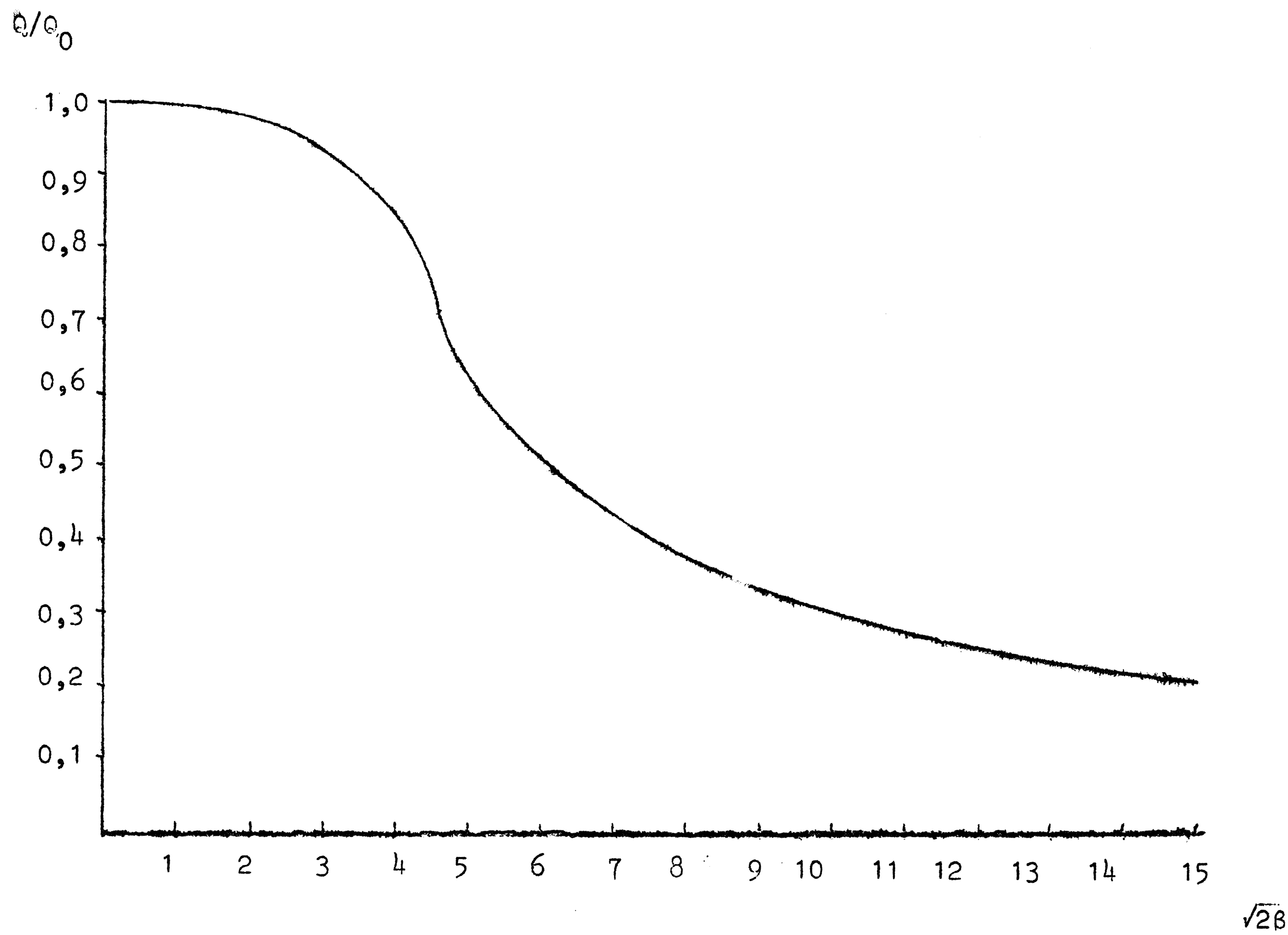
Omdat de warmteoverdracht alleen door de waarde van de parameter β bepaald wordt, heeft deze parameter het karakter van een gelijkvormigheidsparameter. Ontwikkelen we naar machten van β dan volgt

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2}{315}\,\beta^2 + \frac{1}{15400}\,\beta^4 + \ldots \qquad (4.6),$$

voor kleine waarden van β . Voor grote waarden van β ($\beta > 20$) is het gedrag:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{3}{\sqrt{2\beta}}\;(\,1+\Delta\,) \qquad (4.7)$$

met $0<\Delta< 0{,}01$. Numerieke waarden van $\frac{Q}{Q_0}$ als functie van $\sqrt{2\beta}$ zijn gegeven in de grafiek op bladzijde 10.


Q/Q_0
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
√2β