STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 42

De tweede methode van Lyapunov en haar toepassing op het stabiliteitsprobleem bij stelsels partiële differentiaalvergelijkingen

door

J.F. Frankena

augustus 1965

Inhoud

De tweede methode van Lyapunov en haar toepassing op het stabiliteits-probleem bij stelsels partiële differentiaalvergelijkingen

"Lyapunov's Process is one of the major instruments of dynamical stability! You really know where you are. For the first time in history. Community, Identity, Stability. If we could Lyapunovskify indefinitely the whole problem would be solved!"

Vrij naar Huxley: Brave New World.

Inleiding

In deze scriptie wordt een overzicht gegeven van enkele der belangrijkste resultaten uit de stabiliteitsleer voor stelsels partiële differentiaalvergelijkingen, zoals deze tot nu toe o.a. aan de hand van Lyapunov's tweede methode is ontwikkeld door voornamelijk Russische geleerden als Zubov, Yerugin, Nemytskii, Barbashin, Krasovskii, S.L. Sobolev, e.a. Het onderzoek in deze richting is nog verre van afgesloten.

De volgorde en keuze der onderwerpen, voor een groot gedeelte ontleend aan Zubov [1], zijn aangepast aan het doel, zo snel mogelijk te geraken tot de toepassingen op stelsels partiële differentiaalvergelijkingen. Het leek ons hierbij echter nuttig, enkele voornaamste elementaire begrippen uit de stabiliteitsleer volgens Lyapunov vooraf te behandelen.

I. Fundamentele begrippen uit de stabiliteitsleer

1. Dynamische systemen in de Euclidische ruimte E_n

Alvorens met de behandeling van dynamische systemen in een metrische ruimte te beginnen geven we in §§1 en 2 enige speciale voorbeelden.

Zij E_n een n-dimensionale Euclidische ruimte met elementen

$$X = (x_1, \ldots, x_n)\ , \quad -\infty < x_s < \infty\ , \quad s = 1, \ldots, n,$$

en $F(X) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$ een vectorfunctie met op E_n gedefiniëerde en continue componenten. Wanneer deze functies in een begrensd gebied $D \subset E_n$ voldoen aan een Lipschitz voorwaarde m.b.t. de variabelen $x_1, \ldots, x_n$, i.e.

$$|f_s(x_1, \ldots, x_n) - f_s(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)| < L_D \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}_i|, \quad s = 1, \ldots, n,$$

met $X \in D$, $\bar{X} \in D$ en L_D constant; dan wordt door het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n)\ , \quad s = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

een familie integraalkrommen bepaald. We noteren $X(t, X^{(0)})$ voor de oplossing met $X(0, X^{(0)}) = X^{(0)}$. Indien alle componenten van F begrensd zijn,

$$|f_s(x_1, \ldots, x_n)| < m\ , \quad s = 1, \ldots, n\ , \quad X \in E_n,$$

is iedere integraalkromme van (1.1) gedefiniëerd voor $t \in (-\infty, \infty)$. Dit is altijd te bereiken door b.v. uitgaande van (1.1) de volgende coördinatentransformatie toe te passen

$$d\tau = dt \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, \ldots, x_n)\right),$$

zodat (1.1) overgaat in

$$\frac{dx_s}{d\tau} = \frac{f_s(x_1, \ldots, x_n)}{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, \ldots, x_n)}\ . \tag{1.2}$$

De oplossingen van (1.2), aangegeven door $\overline{\overline{X}}(\tau,X^{(0)})$, vormen meetkundig dezelfde familie als die van (1.1) en zijn gedefiniëerd voor $-\infty < \tau < \infty$. Is $\overline{\overline{X}}(\tau,X^{(0)})$ een oplossing van (1.2), dan is $\overline{\overline{X}}(\tau+c,X^{(0)})$, met c een reële constante, dit ook. Blijkbaar wordt door het stelsel (1.1) in E_n een familie integraalkrommen gedefiniëerd met de volgende eigenschappen:

a. Voor iedere eindige waarde van $|X^{(0)}|$ is $\overline{\overline{X}}(\tau,X^{(0)})$ voor alle $\tau \in (-\infty,\infty)$ gedefiniëerd en $\overline{\overline{X}}(0,X^{(0)}) = X^{(0)}$;

b. De vectorfunctie $\overline{\overline{X}}(\tau,X^{(0)})$ is continu in zijn definitiegebied. Dit is een gevolg van de continue afhankelijkheid van de beginvoorwaarden;

c. Voor alle waarden van τ en τ_1 is

$$\overline{\overline{X}}(\tau+\tau_1,X^{(0)}) = \overline{\overline{X}}(\tau,\overline{\overline{X}}(\tau_1,X^{(0)})).$$

Voor vaste τ, $-\infty < \tau < \infty$ en voor alle $X^{(0)} \in E_n$ kunnen we $\overline{\overline{X}}(\tau,X^{(0)})$ opvatten als een transformatie van E_n in zichzelf. Aldus wordt voor variabele τ door het stelsel (1.1) een één-parametrige groep van transformaties gegenereerd. Aan twee elementen $\overline{\overline{X}}(\tau_1,X^{(0)})$ en $\overline{\overline{X}}(\tau_2,X^{(0)})$ de som

$$\overline{\overline{X}}(\tau_1,\overline{\overline{X}}(\tau_2,X^{(0)})) = \overline{\overline{X}}(\tau_1+\tau_2,X^{(0)})$$

toegevoegd; de optelling is associatief; het nulelement van de groep is de identieke afbeelding $\overline{\overline{X}}(0,X^{(0)}) = X^{(0)}$; de inverse van $\overline{\overline{X}}(\tau,X^{(0)})$ is $\overline{\overline{X}}(-\tau,X^{(0)})$.

Definitie. Een één-parametrige groep van transformaties van E_n in zichzelf met de eigenschappen a t/m c heet een dynamisch systeem in E_n.

2. Dynamische systemen in functie ruimten

Het is mogelijk om een dynamisch systeem te definiëren op geheel andere ruimten dan E_n. Beschouw b.v. de ruimte Φ van continu differentiëerbare, voor $X \in E_n$ gedefiniëerde functies $\phi(X) = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, welke uniform begrensd zijn in het oneindige, en waarvoor een constante L_ϕ, $|L_\phi| < \infty$ bestaat zodat

$$\lim_{||X|| \to \infty} \phi(X) = L_\phi.$$

In de ruimte Φ voeren we een norm in door de definitie

$$||\phi|| \overset{d}{=} \sup_{X \in E_n} |\phi|.$$

Met deze normering is Φ een Banachruimte.
Beschouw nu voorts de lineaire partiële differentiaalvergelijking

$$(2.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = au + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

waarin a, b_1, ..., b_n reële constanten zijn. Voor iedere functie $\phi \in \Phi$ kunnen we een oplossing $u(\phi,t)$ van (2.1) met $u(\phi,0) = \phi$ vinden, t.w.

$$(2.2) \qquad u(\phi,t) = e^{at}\,\phi(x_1+b_1t, \ldots, x_n+b_nt).$$

Voor vaste t kunnen we $u(\phi,t)$ beschouwen als een transformatie van in zichzelf. Deze transformatie heeft de eigenschappen:

a. De functies $u(\phi,t)$ zijn continu in elk punt (ϕ,t) in beide variabelen, i.e. bij iedere $\varepsilon > 0$ zijn $\delta_1 > 0$ en $\delta_2 > 0$ te vinden zodat

$$||u(\phi_1,t_1) - u(\phi_2,t_2)|| < \varepsilon$$

indien $|t_1-t_2| < \delta_1$ en $||\phi_1-\phi_2|| < \delta_2$, $\delta_1 = \delta_1(\phi_1,t_1)$, $\delta_2 = \delta_2(\phi_1,t_1)$;

b. $u(u(\phi,t_1),t_2) = u(\phi,t_1+t_2)$;

c. Voor elke willekeurige $\phi \in \Phi$ bestaat er één en slechts één oplossing (2.2), welke uniform differentiëerbaar naar alle argumenten is, zó dat $u(\phi,0) = \phi$.

We noemen een één-parametrige groep transformaties van Φ in zichzelf met de eigenschappen a t/m c een dynamisch systeem in de functie ruimte Φ.

Een ander voorbeeld van een dynamisch systeem, gedefiniëerd in een functie ruimte vormt het stelsel oplossingen van

$$(2.3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

met

$$(2.4) \qquad u(x,0) = \phi(x), \quad v(x,0) = \psi(x).$$

Zij Ψ de ruimte der paren (ϕ,ψ), waarbij de functies $\phi(x)$ en $\psi(x)$ gedefiniëerd en continu differentieerbaar zijn voor $-\infty < x < +\infty$ en zowel $\phi(x)$ als $\psi(x)$ voor $|x| \to \infty$ eindig zijn. In Ψ definiëren we

$$||(\phi,\psi)|| \overset{d}{=} \sup|\phi| + \sup|\psi|, \quad -\infty < x < \infty.$$

De functies

$$(2.5) \qquad \begin{cases} u(\phi,\psi,t) = \frac{1}{2}(\phi(x-t) + \phi(x+t) + \psi(x+t) - \psi(x-t)), \\ v(\phi,\psi,t) = \frac{1}{2}(\psi(x-t) + \psi(x+t) + \phi(x+t) - \phi(x-t)) \end{cases}$$

vormen een oplossing van het Cauchy probleem (2.3), (2.4) in die zin, dat $u(\phi,\psi,0) = \phi(x)$ en $v(\phi,\psi,0) = \psi(x)$.
Opgevat als transformaties van Ψ in zichzelf (voor vaste t) vormen de oplossingen (2.5) een dynamisch systeem in Ψ met de eigenschappen:

a. $u(\phi,\psi,t)$ en $v(\phi,\psi,t)$ zijn gedefiniëerd voor $-\infty < t < +\infty$ en elk element $(\phi,\psi) \in \Psi$; $(u(\phi,\psi,0), v(\phi,\psi,0)) = (\phi,\psi)$;

b. $u(u(\phi,\psi,t_1), v(\phi,\psi,t_1), t_2) = u(\phi,\psi,t_1+t_2)$,
$v(u(\phi,\psi,t_1), v(\phi,\psi,t_1), t_2) = v(\phi,\psi,t_1+t_2)$;

c. Wegens het gedrag van ϕ en ψ voor $|x| \to \infty$ zijn $\phi(x)$ en $\psi(x)$ uniform continu in x als $(\phi,\psi) \in \Psi$, $u(\phi,\psi,t)$ en $v(\phi,\psi,t)$ zijn continu in (ϕ,ψ) en t.

3. Dynamische systemen in een metrische ruimte

In deze paragraaf zullen we eigenschappen van dynamische systemen in een willekeurige metrische ruimte R bestuderen. Hierbij zullen de voornaamste begrippen uit de stabiliteitsleer van zulke systemen worden geïntroduceerd.

Definitie 1. Een dynamisch systeem in een metrische ruimte R met metriek ρ is een één-parametrige familie transformaties F_t, waarbij $t \in (-\infty,\infty)$, welke gedefiniëerd zijn in R en waarvoor geldt:

a. $p \in R$ en $t \in (-\infty,\infty)$ impliceert $F_t(p) \in R$, en $F_0(p) = p$;

b. $F_t(p)$ is continu in p en t, i.e. bij willekeurige $\varepsilon > 0$ zijn $\delta_1 > 0$ en $\delta_2 > 0$ te vinden zodat $\rho(F_{t_1}(p), F_{t_2}(q)) < \varepsilon$ als $\rho(p,q) < \delta_1$ en $|t_1-t_2| < \delta_2$, $\delta_1 = \delta_1(p,t_1)$ en $\delta_2 = \delta_2(p,t_1)$;

c. $F_{t_1}(F_{t_2}(p)) = F_{t_1+t_2}(p)$.

Het beeld van p onder F_t wordt vaak genoteerd als $f(p,t)$. De transformaties f vormen een groep met parameter t. De optelling in deze groep is gedefiniëerd door

$$f(f(p,t_1),t_2) = f(p,t_1+t_2),$$

het nulelement is

$$f(p,0) = p.$$

De inverse van $f(p,t)$ wordt bepaald door

$$f(f(p,t),-t) = f(p,0) = p.$$

Voor vaste $p \in R$ heet de continue afbeelding $f(p,t)$ een <u>beweging</u>, de verzameling punten $f(p,t) \in R$, $-\infty < t < \infty$, de <u>baan</u> of <u>trajectorie</u> van het dynamische systeem. Een punt $p \in R$ heet een <u>evenwichtspunt</u> indien $f(p,t) = p$ voor alle t; de beweging $f(p,t)$ heet <u>periodiek</u> met periode τ indien $f(p,t+\tau) = f(p,t) \not\equiv p$.

We zullen ons bezig houden met de bestudering van z.g. invariante verzamelingen in R.

<u>Definitie 2</u>. Een <u>invariante verzameling</u> $M \in R$ van een dynamisch systeem in R is een verzameling welke geheel uit (gehele) banen bestaat, d.w.z.

$$p \in M \Longrightarrow f(p,t) \in M\ , \quad -\infty < t < \infty.$$

<u>Definitie 3</u>. Een gesloten invariante verzameling $M \subset R$ heet <u>stabiel</u> (in de zin van Lyapunov) indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon) > 0$ te vinden is, zó dat $\rho(f(p,t),M) < \varepsilon$ als $\rho(p,M) < \delta$ voor alle $t \geq 0$.

<u>Definitie 4</u>. Als bovendien

$$\lim_{t\to\infty} \rho(f(p,t),M) = 0,$$

dan heet M <u>asymptotisch stabiel</u> (weer: in de zin van Lyapunov, deze toevoeging laten we voortaan achterwege).

<u>Definitie 5</u>. Een gesloten invariante verzameling $M \subset R$ heet <u>instabiel</u> indien bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon) > 0$ te vinden is zodanig dat voor minstens één element p uit de δ-omgeving $S(M,\delta)$ van M, $\rho(f(p,t),M) \geq \varepsilon$ voor een zekere $t > 0$.

De verzameling A van alle punten $p \in R$, $p \notin M$ waarvoor $\lim_{t\to\infty} \rho(f(p,t),M) = 0$, terwijl M asymptotisch stabiel is, noemen we het <u>gebied van asymptotische stabiliteit</u> van M. Men kan bewijzen dat A een open verzameling is, welke een (voldoend kleine) omgeving van M bevat. De rand van A is de niet-lege verzameling

$$\{q \mid q \in \bar{A} \setminus A,\ q \notin M\}.$$

Enkele belangrijke begrippen, welke later nog ter sprake zullen komen zijn uniforme asymptotische stabiliteit en uniforme aantrekkendheid.

<u>Definitie 6</u>. Een asymptotisch stabiele gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ heet <u>uniform asymptotisch stabiel</u> indien er een getal $\delta > 0$ te vinden is, zó dat bij willekeurige $\varepsilon > 0$ een $T(\varepsilon) > 0$ te vinden is met

$$\rho(p,M) < \delta \Longrightarrow \rho(f(p,t),M) < \varepsilon \text{ voor alle } t \geq T.$$

<u>Definitie 7</u>. Een asymptotisch stabiele gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ noemen we <u>uniform aantrekkend</u> als er een getal $\delta > 0$ bestaat, zodat voor willekeurige ε, $0 < \varepsilon < \delta$, getallen $T > 0$ en $\alpha > 0$ te vinden zijn zodat

$$\varepsilon < \rho(p,M) < \delta \Longrightarrow \rho(f(p,t),M) > \alpha \text{ voor alle } t \in [0,T].$$

Ter afsluiting van deze paragraaf geven we in de vorm van twee stellingen enkele eigenschappen van asymptotisch stabiele gesloten invariante verzamelingen.

<u>Stelling 1</u>. Als een gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ uniform asymptotisch stabiel is, bestaat er voor alle $t \in (-\infty,\infty)$ een continue functie $L(t)$, welke voor van $-\infty$ tot $+\infty$ toenemende t sterk monotoon afneemt van $+\infty$ tot 0, met de eigenschap

$$\rho(f(p,t),M) \leq L(t) \text{ als } t \geq 0 \text{ en } \rho(p,M) < \delta,$$

waar δ de grootheid uit Definitie 6 van deze paragraaf is.

Het (constructieve) bewijs levert de volgende functie $L(t)$ op:

voor $t \in [t_k, t_{k+1}]$ is

$$L(t) = l_k(t) = \frac{d\ 2Ct_{k+1} - C(t_k+t)}{2^k(t_{k+1}-t_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

waarin C een positieve constante is, bepaald door

$$\lambda(t) = \sup_{p \in S(M,\delta)} \rho(f(p,t),M) \leq C$$

en $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ een rij is met $t_1 = -\infty$, $t_2 \geq 0$, $t_k \to +\infty$ als $k \to \infty$.

Stelling 2. Een asymptotisch stabiele gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(\gamma,t)$ is, indien M een voldoend kleine compacte omgeving bezit, uniform asymptotisch stabiel en uniform aantrekkend.

4. Voorbeelden

In deze paragraaf geven we aan de hand van een viertal eenvoudige voorbeelden een toelichting op de in de voorafgaande paragrafen geïntroduceerde begrippen. Hierbij zal het vierde voorbeeld in het kort behandeld worden, aangezien hierop in § 10 nog uitvoerig teruggekomen wordt.

1. Beschouw het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

met

$$f_s(0, \ldots, 0) = 0.$$

We nemen aan dat hierdoor in E_n een dynamisch systeem wordt gedefiniëerd; het punt $X = 0$ is hiervan een evenwichtspunt, en wel een gesloten invariante verzameling. $X = 0$ is stabiel indien bij willekeurige $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon) > 0$ bestaat, zó dat $|X(t,X^{(0)})| < \varepsilon$ als $|X^{(0)}| < \delta$ voor alle $t \geq 0$. Stel voorts dat het stelsel (4.1) een periodieke oplossing bezit, met periode ω, $0 < \omega < \infty$:

$$X = X(t,Y^{(0)}) = X(t+\omega,Y^{(0)});$$

deze vormt een gesloten invariante verzameling van het dynamische systeem, welke stabiel is indien voor willekeurige $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon) > 0$ bestaat met voor alle $t \geq 0$

$$\inf_{t \in [0,\omega]} |X^{(0)}-X(t,Y^{(0)})| < \delta \Longrightarrow \inf_{\tau \in [0,\omega]} |X(t,X^{(0)})-X(\tau,Y^{(0)})| < \varepsilon.$$

2. Zij $g(t)$ een op $(-\infty,\infty)$ gedefiniëerde en continue functie met de eigenschappen

$$g(t) \leq 0 \;, \quad \int_{t_0}^{t} g(t)dt \to -\infty \text{ als } t \to \infty \;, \quad t_0 \text{ vast.}$$

De gewone differentiaalvergelijking $\dot{x} = g(t)x$ gaat door de transformatie $d\tau = dt$ over in het stelsel

(4.2) $$\frac{dx}{d\tau} = g(t)x \;, \quad \frac{dt}{d\tau} = 1.$$

Dit stelsel definiëert het volgende dynamische systeem in het (x,t)vlak $(-\infty < x,t < +\infty)$

$$\begin{cases} x = x_0 \exp \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\tau} g(\theta)d\theta, \\ t = \tau + t_0. \end{cases}$$

De as $x = 0$ is hiervan een asymptotisch stabiele invariante verzameling. Een nodige en voldoende voorwaarde voor uniforme asymptotische stabiliteit van $x = 0$ is

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} g(\theta)d\theta \to -\infty \text{ als } \tau \to +\infty,$$

uniform m.b.t. $t_0 \in (-\infty,\infty)$. Voor bijvoorbeeld $g(t) = -(1 + |t|)^{-1}$ is $x = x_0(1+t_0)/(t_0+\tau+1)$, $t = t_0+\tau$, $t_0 \geq 0$, $\tau \geq 0$. Maar hoewel $\lim |x| = 0$ voor $\tau \to \infty$ geldt dit niet uniform in t_0.

Een nodige en voldoende voorwaarde voor de uniforme aantrekkendheid van $x = 0$ is dat $\int_{t_0}^{t_0+\tau} g(\theta)d(\theta)$ m.b.t. $t_0 \in (-\infty,\infty)$ uniform naar beneden begrensd is voor elke eindige waarde van $\tau > 0$. Zo is b.v. voor $g(t) = -|t|$ en voor $t_0 \geq 0$, $\tau \geq 0$

$$\begin{cases} x = x_0 \exp(-\tau t_0 - \tfrac{1}{2}\tau^2), \\ t = t_0 + \tau, \end{cases}$$

zodat voor alle $\tau > 0$, $\lim_{t_0 \to \infty} |x| = 0$. Dus is hier $x = 0$ niet uniform aantrekkend.

3. De generalisatie van voorbeeld 2 wordt geleverd door het stelsel

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t) \;, \; s = 1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

waarin de rechterleden gedefiniëerd en continu differentiëerbaar zijn in een zeker gebied $||X|| \leq h$ van een metrische ruimte, en $t \geq 0$. Door elk punt (X,t_0) gaat precies één integraalkromme. Indien

$$f_s(0, \ldots, 0, t) \equiv 0 \;, \quad s = 1, \ldots, n$$

heeft (4.3) de nuloplossing. Deze heet uniform stabiel m.b.t. $t_0 \geq 0$ indien bij willekeurige $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon) > 0$ te vinden is, zó dat

$$||X^{(0)}|| < \delta \implies ||X(t, X^{(0)}, t_0)|| < \varepsilon \text{ voor } 0 \leq t_0 \leq t.$$

Men kan in de (X,t)-ruimte een dynamisch systeem construeren, corresponderend met (4.3), zodanig dat de nuloplossing van (4.3) dan en slechts dan stabiel is indien de invariante verzameling $X = 0$ van het dynamisch systeem dat is. Daartoe definiëert men

$$\bar{f}_s(x_1,\ldots,x_n,t) = \begin{cases} f_s(x_1, \ldots, x_n, t) \text{ voor } t \geq 1 \text{ en } ||X|| \leq h_1 < h_2, \text{ en} \\ 0 \quad \text{voor} \quad t \leq -1 \text{ en } ||X|| < \infty; \\ \dfrac{3f_s - 2f'_s}{4}(t+1)^2 + \dfrac{f'_s(X,1) - f_s(X,1)}{4}(t+1)^3 \quad \text{voor} \\ \qquad -1 < t < +1, \; ||X|| \leq h_1. \end{cases}$$

We zetten de functies $\bar{f}_s$ met behoud van continue differentiëerbaarheid voort in het gebied $t \geq -1$, $||X|| > h_1$, zó dat $\bar{f}_s \equiv 0$ als $||X|| \geq h$.
Voorts transformeren we t naar s volgens

$$ds = dt \sqrt{1 + \sum_{s=1}^{n} f_s^2}\,.$$

Nu definiëert het stelsel

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\bar{f}_k(x_1, \ldots, x_n, t)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^2}}\,, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^2}}\,, \quad k = 1, \ldots, n,$$

in de (X,t)-ruimte een dynamisch systeem

$$X = X(s, X^{(0)}, t_0)\,, \quad t = t(s, X^{(0)}, t_0)$$

met $X = 0$ als invariante verzameling en de gewenste eigenschappen.

4. De rechterleden van het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen

$$(4.4) \qquad \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j})\,,$$

$$i, s = 1, \ldots, n\,; \quad j = 1, \ldots, k,$$

veronderstellen we continu in hun definitiegebied, bevat in een N-dimensionale Euclidische ruimte (N groot genoeg). Voorts nemen we aan dat door (4.6) in een zekere functionalen ruimte Φ een dynamisch systeem wordt gegenereerd met evenwichtspunt $U = 0$. $U = 0$ is stabiel indien voor willekeurige $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met

$$||\phi|| < \delta \Longrightarrow ||U(\phi, t)|| < \varepsilon \text{ voor } 0 < t < \infty \text{ en } \phi \in \Phi.$$

Zoals opgemerkt wordt het stelsel (4.4) uitvoerig behandeld bij de toepassingen in Hoofdstuk IV, en wel in § 10.

II. De tweede methode van Lyapunov

5. De twee methoden van Lyapunov

In 1892 publiceerde Lyapunov een tweetal methoden voor het oplossen van het stabiliteitsprobleem voor gewone differentiaalvergelijkingen. Later hebben vooral Russische auteurs veel gepubliceerd wat bijdroeg om de oorspronkelijke theorie te generaliseren en te abstraheren. Zo werden o.a. de stellingen van Lyapunov, welke in deze paragraaf ter sprake zullen komen, in meer algemene vorm gegeven voor dynamische systemen, en, vooral door toedoen van Zubov [1], voor algemene systemen. Deze uitbreidingen zullen ter sprake komen, voor wat Lyapunov's tweede methode betreft, in §6 resp. 9. Over zijn eerste methode zullen we kort zijn. Deze gaat uit van de veronderstelling dat de rechterleden van een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen, bijvoorbeeld

$$(5.1) \qquad \frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t) \;, \quad s = 1, \ldots, n,$$

voor voldoend kleine waarden van $|x_s|$ $(s = 1, \ldots, n)$, $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ en $t \geq 0$ in convergente machtreeksen naar x_s ontwikkelbaar zijn. Getracht wordt dan een oplossing te vinden in de vorm van een voor $t \geq 0$ convergente reeks, en het stabiliteitsonderzoek op deze oplossing te verrichten.

Bij de tweede methode echter tracht men de nodige informatie direct uit de gegeven differentiaalvergelijking te verkrijgen. Beschouw b.v. het stelsel (5.1) (wegens het voorkomen van t in het rechterlid vaak niet-autonoom genoemd). De nuloplossing, aanwezig indien $f_s(0, \ldots, 0, t) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, n)$, noemde Lyapunov <u>stabiel</u> indien bij willekeurige $\varepsilon > 0$ en gegeven $t_0 \geq 0$ een grootheid $\delta > 0$ te vinden is zodat

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^{(0)^2} < \delta \Longrightarrow \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0) < \varepsilon.$$

Teneinde criteria voor deze situatie te geven maakte Lyapunov gebruik van <u>positief definiete functies $V(x_1, \ldots, x_n, t)$</u> met de eigenschappen:

1. $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ is éénwaardig, continu en gedefiniëerd in een gebied

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leq R \;,\quad t \geq T;$$

2. $V(0, \ldots, 0, t) \equiv 0;$
3. Er bestaat een functie $V_1(x_1, \ldots, x_n)$ met $V_1(0, \ldots, 0) = 0$, $V_1 > 0$ indien $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leq R$ en $V(x_1, \ldots, x_n, t) \geq V_1(x_1, \ldots, x_n)$.

Indien V continu differentiëerbaar is naar alle argumenten is de totale afgeleide langs de integraalkromme

$$(x_1(t,x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},t_0), \ldots, x_n(t,x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},t_0))$$

gedefiniëerd door

$$\frac{dV}{dt} \overset{d}{=} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = W(x_1,\ldots,x_n,t). \tag{5.2}$$

De inhoud van de tweede- of directe methode van Lyapunov wordt voor het belangrijkste deel gevormd door het volgende viertal stellingen, welke we hier zonder bewijs reproduceren.

Stelling 1. Als bij het stelsel (5.1) een positief definiete functie V gevonden kan worden, zodanig dat de functie W, gegeven door (5.2) niet-positief is, dan is de nuloplossing van (5.1) stabiel.

Stelling 2. Indien aan de voorwaarden van stelling 1 is voldaan, en bovendien W negatief definiet is en een T bestaat met

$$\lim V(x_1,\ldots,x_n,t) = 0 \text{ als } \sum x_s^2 \to 0,$$

uniform voor $t \geq T$ dan is de nuloplossing van (5.1) asymptotisch stabiel.

Stelling 3. Als bij (5.1) een voor $|x_s|$ voldoende klein en $t > T$ begrensde functie $V(x_1,\ldots,x_n,t)$ gevonden kan worden zó dat voor positieve constante λ en $W \geq 0$,

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

en indien voorts bij willekeurige $t \geq T$ een geschikte keuze van x_s, $s = 1, \ldots, n$, met $|x_s|$ zo klein als gewenst, de functie V positief gemaakt kan worden, dan is de nuloplossing van (5.1) instabiel.

Stelling 4. Indien bij het stelsel (5.1) een functie V met positief definiete totale afgeleide W gevonden kan worden, indien voorts een $T > 0$ bestaat waarvoor

$$\lim V(x_1,\ldots,x_n,t) = 0, \text{ als } \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \to 0, \text{ uniform voor } t \geq T,$$

en indien tenslotte een voldoend grote T bestaat zo dat voor willekeurige $t > T$ de functie V positief gemaakt kan worden door een geschikte keuze van x_s, $s = 1, \ldots, n$, dan is de nuloplossing van (5.1) instabiel.

Een positief definiete functie V die aan de voorwaarden van de twee eerste stellingen voldoet, m.a.w. het stabiliteitsprobleem oplost, heet een Lyapunov functie. In de generalisatie van bovengenoemde stellingen welke we in §6 en §9 zullen geven treedt een functionaal op in de plaats van de Lyapunov functie.

Het vinden van een Lyapunov functie (functionaal) is in de praktijk het essentiële probleem. Voor vele gevallen, vooral bij het stabiliteitsprobleem van partiële differentiaalvergelijkingen, is dit probleem nog niet opgelost.

6. Generalisatie van de tweede methode van Lyapunov

Voor de generalisatie van de in §5 vermelde stellingen van Lyapunov maken we gebruik van in de eerste drie paragrafen ingevoerde begrippen; omdat de bewijzen der gegeneraliseerde Lyapunov stellingen zeer omvangrijk zijn worden ze hier niet opgenomen.

We gaan uit van een in een metrische ruimte R gedefiniëerd dynamisch systeem $f(p,t)$, waarbij $p \in R$ en $-\infty < t < +\infty$ en beschouwen niet-lege, gesloten invariante verzamelingen in R onder f. Met $S(M,r)$ zullen we een open omgeving van M met "straal" r bedoelen:

$$S(M,r) = \{p \in R \ / \ 0 < \rho(M,p) < r\};$$

ρ is de metriek in R.

Hieronder volgen de passende generalisaties van de stellingen 1-3 uit de vorige paragraaf.

Stelling 1. Een gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ is dan en slechts dan stabiel indien in een voldoend kleine omgeving $S(M,r)$ van M een functionaal V gedefiniëerd is met de eigenschappen:

a. Voor een willekeurig kleine waarde van $\delta_1 > 0$ is een $\varepsilon_1 > 0$ te vinden zó dat $V(p) > \varepsilon_1$ indien $p \in S(M,r)$ en $\rho(p,M) > \delta_1$;

b. Bij willekeurig kleine ε_2 kan een δ_2 aangewezen worden zodanig dat

$$V(p) \leq \varepsilon_2 \text{ indien } \rho(p,M) < \delta_2;$$

c. $V(f(p,t))$ is een niet-stijgende functie voor alle $t \geq 0$ als $p \in S(M,r)$, zolang $f(p,t) \in S(M,r)$.

In het geval dat M stabiel verondersteld wordt bewijst men dat de functionaal

$$V(p) = \sup_{t \geq 0} \rho(f(p,t),M)$$

aan de voorwaarden a t/m c voldoet. Uitgaande van de voldoende voorwaarde wordt de stabiliteit van M vrij eenvoudig uit het ongerijmde bewezen. Men voert nl. in

$$\lambda = \inf_{\rho(p,M)=\varepsilon} V(p)$$

en leidt vervolgens af $V(f(p,t)) \leq V(p) < \lambda$.

Stelling 2. Een gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ is dan en slechts dan asymptotisch stabiel indien er een voldoend kleine omgeving $S(M,r)$ bestaat waarin een functionaal V gedefiniëerd is met de eigenschappen a t/m c uit stelling 1 en

d. $V(f(p,t)) \to 0$ als $t \to \infty$ voor elke beweging $f(p,t) \in S(M,r)$ en $t \in [0,+\infty]$.

Voor wat de noodzakelijke voorwaarde betreft bewijst men voor een geheel in $S(M,\delta)$, $\delta > 0$, verlopende baan $f(p,t)$ dat de functionaal

$$Vf(p,t) = \sup_{\tau \geq 0} \rho(f(p,t+\tau),M)$$

voor t minstens gelijk aan een zekere $T > 0$ aan de voorwaarde voldoet. Omgekeerd bewijst men de asymptotische stabiliteit van M onder de voldoende voorwaarden a t/m d analoog aan het corresponderende deel van het bewijs van stelling 1.

Er bestaan voorts nog nodige en voldoende voorwaarden voor uniforme asymptotische stabiliteit resp. uniforme aantrekkendheid van M. Uitgaande van de condities van stelling 2 moet wat de uniforme asymptotische stabiliteit betreft nog verder worden geëist dat er een $\delta > 0$ bestaat zó dat

$$\lim_{t \to +\infty} V(f(p,t)) = 0 \text{ , uniform in } p \in S(M,\delta).$$

Daarnaast kan men bewijzen dat M uniform aantrekkend is indien, en slechts indien aan de voorwaarden van stelling 2 voldaan is en tevens voor een willekeurige $c > 0$ positieve waarden T en α gevonden kunnen worden, zodanig dat

$$0 \leq t \leq T \quad \text{en} \quad \rho(p,M) \geq c \Longrightarrow Vf(p,t) > \alpha.$$

Ter completering van dit overzicht van algemene Lyapunov stellingen geven we nog die betreffende instabiliteit.

Stelling 3. Een gesloten invariante verzameling M van een dynamisch systeem $f(p,t)$ is dan en slechts dan instabiel als in een zekere omgeving $S(M,r)$ van M een functionaal V bestaat met de eigenschappen

a. V is begrensd in $S(M,r)$;

b. In een willekeurig kleine omgeving van M neemt V nog positieve waarden aan;

c. Voor willekeurige $p \in S(M,r)$ geldt

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

waarin λ = constant > 0 en W een niet-negatieve, in $S(M,r)$ gedefinieerde functionaal is.

Opmerking. Lyapunov heeft de stellingen (van §5) bewezen voor de in E_n gedefiniëerde stelsels

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1,\ldots,x_n,t) \ , \quad s = 1,\ldots,n, \text{ z.g. niet-autonoom,}$$

en

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1,\ldots,x_n) \ , \quad s = 1,\ldots,n, \text{ z.g. autonoom of stationair.}$$

Het ging hierbij meer speciaal om de stabiliteit resp. instabiliteit van de verzameling X = 0. Aangezien de systemen gedefiniëerd zijn in een lineaire ruimte, speelt deze beperking geen essentiële rol.

Men kan bewijzen, dat de voorwaarden welke Lyapunov in zijn oorspronkelijke stellingen als nodig gaf, tevens voldoende zijn.

III. Stabiliteit van invariante verzamelingen van algemene systemen

7. Algemene systemen in speciale ruimten

Een dynamisch systeem is een abstract model voor een beweging van een punt in één of andere faseruimte met t (de tijd) als parameter. De afbeeldingen $f(p,t)$ van het dynamisch systeem worden verondersteld ééndduidig en continu te zijn, en gedefiniëerd voor $-\infty < t < \infty$. Een algemeen systeem daarentegen is qua opzet een model voor een (niet noodzakelijk ééndduidig oplosbaar) Cauchy- of gemengd probleem voor stelsels partiële differentiaalvergelijkingen, waarbij in het algemeen slechts de existentie van oplossingen voor $t \geq 0$ geëist wordt.

Niettemin laat de theorie der algemene systemen zich ook toepassen op Cauchy-problemen voor stelsels gewone differentiaalvergelijkingen, en zijn op deze wijze zelfs geheel nieuwe resultaten geboekt [1].

Beschouw het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t) , \quad s = 1,\ldots,n, \tag{7.1}$$

waarin de rechterleden gedefiniëerd zijn voor $t \geq 0$ en $X \in E_n$, en aan bepaalde voorwaarden voor existentie van oplossingen voldoen. Zij $X = X(t,X^{(0)},t_0)$ een oplossing, gedefiniëerd voor $t \geq t_0 \geq 0$, $X^{(0)} \in E_n$, zó dat

$$X(t,X^{(0)},t_0) \to X^{(0)} \text{ als } t \to t_0 + 0.$$

In het algemeen is deze oplossing niet uniek. Voor zekere $t \geq t_0$ is door deze familie oplossingen een verzameling punten in E_n gedefiniëerd, welke we met $F^t_{t_0}(X^{(0)})$ aanduiden en waarvoor geldt

$$F^t_{t_0}(X^{(0)}) \to X^{(0)} \text{ als } t \to t_0 + 0.$$

De afbeelding $X^{(0)} \to F^t_{t_0}(X^{(0)})$ noemen we een <u>beweging</u>, de verzameling $F^t_{t_0}(X^{(0)})$ voor vaste $X^{(0)}$ en alle $t \geq t_0$, de <u>baan</u> van deze beweging, welke de volgende kenmerkende eigenschappen bezit:

a. Voor willekeurige $X^{(0)} \in E_n$ is de verzameling $F_{t_0}^{t}(X^{(0)}) \in E_n$ gedefinieerd voor alle $t \geq t_0$;

b. $F_{t_0}^{t}(X^{(0)}) \to X^{(0)}$ als $t \to t_0 + 0$;

c. Zij $X^{(1)} \in F_{t_0}^{t_1}(X^{(0)}), t_1 \geq t_0$, dan is de beweging $F_{t_1}^{t}(X^{(1)})$ gedefiniëerd (krachtens a) en is

$$\bigcup F_{t_1}^{t}(X^{(1)}) = F_{t_0}^{t}(X^{(0)}) \text{ voor } t \geq t_1 \text{ en alle } X^{(1)} \in F_{t_0}^{t_1}(X^{(0)}).$$

Alle bewegingen van deze aard bepalen een twee-parametrige familie transformaties van de ruimte E_n in zichzelf, welke een <u>algemeen systeem</u> genoemd wordt.

Indien de rechterleden van (7.1) continu zijn is het altijd mogelijk een algemeen systeem in E_n te definiëren. Is namelijk niet elke oplossing van (7.1) in dit geval bepaald voor alle waarden van $t \geq t_0 \geq 0$, dan ontstaat uit (7.1) door de transformatie

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(X(\tau, X^{(0)}, t_0))}\, d\tau$$

het stelsel

$$\frac{dx_k}{dt} = \bar{f}_k(x_1, \ldots, x_n, t), \quad k = 1, \ldots, n,$$

met voor alle $t \geq 0$ en $X \in E_n$ gedefiniëerde rechterleden. De oplossingen hiervan zijn gedefiniëerd voor $s \geq s_0 \geq 0$.

Een voorbeeld van een twee-parametrige transformatie van een functie ruimte op zichzelf wordt geleverd door de oplossingen van het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen

$$(7.2) \qquad \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s\left(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots, t\right),$$

$$i, s = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k.$$

We veronderstellen dat de rechterleden gedefiniëerd zijn voor $t \geq 0$ en $(x_1,\ldots,x_k,u_1,\ldots,u_n,\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ldots) \in G$, een zeker gebied in een N-dimensionale ruimte (N groot genoeg). Stel voorts dat er een ruimte Φ van vectorfuncties

$$\phi = (\phi_1(x_1,\ldots,x_k), \ldots, \phi_n(x_1,\ldots,x_k))$$

bestaat zó dat het stelsel (7.2) voor $\phi \in \Phi$ en $t_0 \geq 0$ een oplossing $U(t,\phi,t_0)$ heeft, $U(t,\phi,t_0) \in \Phi$, met de eigenschap

$$U(t,\phi,t_0) \to \phi \text{ als } t \to t_0 + 0.$$

In het algemeen is bij zekere $\phi \in \Phi$ deze oplossing niet ééduidig. Een <u>beweging</u> is weer een twee-parametrige transformatie $\phi \to U(t,\phi,t_0)$, genoteerd met $F^t_{t_0}(\phi)$. De <u>baan</u> (<u>trajectorie</u>) van ϕ onder $F^t_{t_0}$ is de verzameling $F^t_{t_0}(\phi)$, $t_0 \leq t < \infty$. De verzameling van al deze twee-parametrige transformaties heet weer een <u>algemeen systeem</u>, nu gedefiniëerd in Φ, met de eigenschappen:

<u>a</u>. Voor willekeurige $\phi \in \Phi$ en $t_0 \geq 0$ is de verzameling $F^t_{t_0}(\phi) \in \Phi$ gedefiniëerd voor alle $t \geq t_0$;

<u>b</u>. $F^t_{t_0}(\phi) \to \phi$ voor $t \to t_0 + 0$;

<u>c</u>. Zij $\overline{\phi} \in \Phi$, $\overline{\phi} \in F^{t_1}_{t_0}(\phi)$, dan is de beweging $F^t_{t_1}(\overline{\phi})$ gedefiniëerd zó dat

$$\bigcup F^t_{t_1}(\overline{\phi}) = F^t_{t_0}(\phi) \text{ voor alle } t \geq t_1 \geq t_0 \text{ en } \overline{\phi} \in F^{t_1}_{t_0}(\phi).$$

8. <u>Algemene systemen in een willekeurige metrische ruimte</u>

<u>Definitie</u>. Een <u>algemeen systeem</u> is een familie twee-parametrige transformaties $F^t_{t_0}$ van een metrische ruimte R in zichzelf, met de eigenschappen:

<u>a</u>. Voor willekeurige $p \in R$ en $t_0 \geq 0$ is de niet-lege verzameling $F^t_{t_0}(p) \in R$ gedefiniëerd voor $t \geq t_0$;

<u>b</u>. $F^t_{t_0}(p) \to p$ als $t \to t_0 + 0$; d.w.z. bij willekeurige $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden, $\delta = \delta(\varepsilon)$, zó dat

$$t - t_0 < \delta \Longrightarrow F^t_{t_0}(p) \in S(p,\varepsilon);$$

c. Voor willekeurige $p \in F_{t_0}^{t_1}(p)$, $t_1 \geq t_0$, is de verzameling $F_{t_1}^{t}(p)$ gedefiniëerd, met de eigenschap

$$\bigcup F_{t_1}^{t}(p) = F_{t_0}^{t}(p) \text{ over alle } t \geq t_1 \text{ en } p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p).$$

Voor vaste t heet $F_{t_0}^{t}(p)$ een <u>beweging</u>, de <u>baan</u> of <u>trajectorie</u> door p is de verzameling punten $F_{t_0}^{t}(p)$, $t \geq t_0$. Een <u>invariante verzameling</u> $M \subset R$ bestaat uit (gehele) banen van het systeem:

$$M = \{p \;/\; p \in M \Rightarrow F(t_0,p) \subset M \text{ voor alle } t_0 \geq 0\},$$

waarbij we met $F(t_0,p)$ de trajectorie van $F_{t_0}^{t}(p)$ bedoelen.
Zij

$$\rho(t,p_0,t_0) \overset{d}{=} \sup_{p \in F_{t_0}^{t}(p_0)} \rho(p,M).$$

Een invariante verzameling M van een algemeen systeem in R heet <u>stabiel</u> als bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden zó dat

$$\rho(t,p_0,t_0) < \varepsilon \text{ als } \rho(p_0,M) < \delta \text{ voor } t \geq t_0 \geq 0.$$

Als bovendien $\rho(t,p_0,t_0) \to 0$ als $t \to \infty$ dan heet M <u>asymptotisch stabiel</u>. Een asymptotisch stabiele invariante verzameling M noemen we voorts <u>uniform asymptotisch stabiel</u> indien een $\delta_1 > 0$ te vinden is, zodat $\rho(t,p_0,t_0) \to 0$ als $t - t_0 \to \infty$, uniform m.b.t. $t_0 \geq 0$, en $\rho(p_0,M) < \delta_1(\varepsilon_1)$ (δ_1 en ε_1 zoals in de stabiliteitsdefinitie). Een asymptotisch stabiele invariante verzameling M heet <u>uniform aantrekkend</u> indien een $\delta^* > 0$ bestaat waarbij een $T > 0$ en een $\alpha > 0$ te vinden zijn zó dat $\rho(t,p_0,t_0) > \alpha$ indien $0 \leq t - t_0 \leq T$ en $\delta^* \leq \rho(p_0,M) \leq \delta_2(\varepsilon_2)$, waar δ_2 en ε_2 weer grootheden zijn welke samenhangen volgens de stabiliteitsdefinitie.
Tenslotte vermelden we dat M <u>instabiel</u> heet als er $\varepsilon > 0$ te vinden is zó dat bij willekeurige $\delta > 0$ een punt p_0 en een getal $t_0 > 0$ gevonden kunnen worden zodanig dat voor minstens één $t > t_0$, $\rho(t,p_0,t_0) \geq \varepsilon$ als $\rho(p_0,M) < \delta$.

9. Generalisatie van de tweede methode van Lyapunov voor algemene systemen in een metrische ruimte

In deze paragraaf geven we de in §5 genoemde stellingen van Lyapunov, in de formulering voor invariante verzamelingen van algemene systemen. Aangezien in Hoofdstuk IV dezelfde stellingen behandeld worden, maar dan als toepassingen op concrete problemen, zullen de bewijzen bij die toepassingen gegeven worden.

Uitgangspunt van onze beschouwingen vormt de introductie van een familie van functionalen V_t, $t \geq 0$, met nog nader te noemen eigenschappen. Stel dat deze functies van t, $V_t(p)$ gedefiniëerd zijn voor $t \geq 0$, $p \in G \subset R$, waarin G een zekere deelverzameling van R, een metrische ruimte, is. Voer in

$$V(t,p_0,t_0) \overset{d}{=} \sup_{p \in F^t_{t_0}(p_0)} V_t(p).$$

Tevens maken we gebruik van de notatie $\rho(t,p_0,t_0)$ uit §8 voor het supremum van alle waarden $\rho(p,M)$ over alle $p \in F^t_{t_0}(p_0)$.

De passende generalisatie van de eerste stelling van Lyapunov is nu de volgende:

Stelling 1. Een nodige en voldoende voorwaarde voor de stabiliteit van een invariante verzameling $M \subset R$ van een algemeen systeem, gedefiniëerd in R, is het bestaan van een één-parametrige familie functionalen V_t, welke voldoen aan:

a. In ieder punt van een zekere omgeving $S(M,r)$ van M is een functie $V_t(p)$ van de reële variabele t, $t \geq 0$, gedefiniëerd;

b. Bij voldoend kleine $c_1 > 0$ is een $c_2 > 0$ te vinden zó dat $V_t(p) > c_2$ voor $\rho(p,M) > c_1$ en voor alle $t \geq 0$;

c. $V_t(p) \to 0$ als $\rho(p,M) \to 0$, uniform in t, $t \geq 0$;

d. $V(t,p_0,t_0)$ is niet stijgend voor alle $t \geq t_0$ uit zijn definitiegebied.

In sommige gevallen blijkt het nuttig te zijn, de functionalen V_t op de gehele ruimte R te definiëren d.m.v. de uitbreiding:

$V_t(p) = 1$ voor $p \notin S(M, \frac{r}{2})$ en $p \notin \overline{\overline{M}}$,

$V_t(p) = 0$ voor $p \in \overline{\overline{M}}$ ($\overline{\overline{M}}$ is de notatie voor de afsluiting van M).

Hierbij is r een zodanig reëel getal dat voor de door deze uitbreiding van V_t ook voor $t \geq t_0$ continue functie $\rho(t, p_0, t_0)$ geldt

$$\varepsilon \leq \rho(t, p_0, t_0) \leq \frac{r}{2},$$

hetgeen men bij het bewijs, dat de voorwaarden van stelling 1 voldoende zijn, nodig heeft.

Op de gebruikelijke wijze krijgt men door nog een voorwaarde toe te voegen aan a t/m d van stelling 1, nodige en voldoende voorwaarden voor de asymptotische stabiliteit van M.

Stelling 2. Een invariante verzameling M van een algemeen systeem in R is dan en slechts dan asymptotisch stabiel indien een familie functionalen V_t met parameter t bestaat, welke de eigenschappen a t/m d van stelling 1 bezitten en bovendien voldoen aan

e. $\lim_{t \to \infty} V(t, p_0, t_0) = 0$ voor willekeurige $p_0 \in S(M, \delta)$, waarbij δ een zeker positief getal voorstelt.

Voegt men aan alle voorwaarden van stelling 2 toe de conditie dat

$$V(t, p_0, t_0) \to 0 \text{ als } t - t_0 \to \infty, \text{ uniform m.b.t. } t_0 \geq 0 \text{ en } \rho(p_0, M) \leq \delta,$$

dan kan men bewijzen dat M uniform asymptotisch stabiel is, en omgekeerd. Stelt men i.p.v. deze additionele conditie, dat naast de voorwaarden van stelling 2 moet gelden dat voor willekeurige voldoend kleine $\delta_1 > 0$ waarden $T > 0$ en $\alpha > 0$ gevonden moeten kunnen worden zodanig dat $V(t, p_0, t_0) > \alpha$ als $t \in [t_0, t_0 + T]$, $t_0 \geq 0$, en $\delta_1 \leq \rho(p_0, M) \leq \delta$, met δ klein genoeg, dan en slechts dan is M uniform aantrekkend. De beide laatstgenoemde eigenschappen van M worden verenigd in de volgende belangrijke stelling:

Stelling 3. De invariante verzameling M is dan en slechts dan uniform asymptotisch stabiel en uniform aantrekkend indien er twee één-parameter families functionalen V_t en Φ_t bestaan met de volgende eigenschappen:

a. De functies $V_t(p)$ en $\Phi_t(p)$ van de reële variabele t zijn gedefiniëerd voor alle $p \in S(M,r)$, waar r een voldoend kleine positieve grootheid is;

b. Bij een voldoend kleine $c_1 > 0$ kan een tweetal positieve getallen c_2 en c_3 gevonden worden zodat $V_t(p) < -c_2$ en $\Phi_t(p) > c_3$ voor $\rho(p,M) > c_1$ en $t \geq 0$;

c. $V_t(p) \to 0$ en $\Phi_t(p) \to 0$ als $\rho(p,M) \to 0$, uniform in t, $t \geq 0$;

d. $\frac{d}{dt} V(t,p_0,t_0) = \Phi(t,p_0,t_0)$.

Hierbij is $\Phi(t,p_0,t_0) \overset{d}{=} \sup\limits_{p \in F_{t_0}^{t}(p_0)} \Phi_t(p)$. Met het oog op de toepassing van deze stelling (in Hoofdstuk IV) geldt zij in deze formulering alleen voor verzamelingen $F_{t_0}^{t}(p)$ welke uit één punt bestaan (voor vaste t) en continu zijn in t, $t \geq 0$. Het is echter mogelijk om met een analoge formulering deze stelling geldig te maken voor ruimere verzamelingen $F_{t_0}^{t}(p)$. Tenslotte geven we nog een voor de toepassingen belangrijke uitspraak en wel over instabiliteit van invariante verzamelingen van algemene systemen in R.

Stelling 4. Nodig en voldoende voor de instabiliteit van een invariante verzameling M is het bestaan van twee families functionalen V_t en W_t welke voldoen aan de eisen

a. In ieder punt $p \in S(M,r)$ van een zekere omgeving van M $(r > 0)$ zijn voor $t \geq 0$ de functies $V_t(p)$ en $W_t(p)$ gedefiniëerd;

b. $V_t(p)$ is een begrensde functie van $t \in [0,\infty)$ en $p \in S(M,r)$;

c. Bij een $\delta > 0$ is een punt p_0 en een waarde t_0 van t te vinden zodat $V_{t_0}(p_0) > 0$ als $\rho(p_0,M) < \delta$;

d. $\frac{d}{dt} V(t,p_0,t_0) = \lambda V(t,p_0,t_0) + W(t,p_0,t_0)$; $W_t(p) \geq 0$, $\lambda > 0$ constant.

Zoals reeds werd opgemerkt zullen de bewijzen, aangepast aan de problemen waarop deze stellingen worden toegepast, in Hoofdstuk IV gegeven worden.

IV. Toepassing op stelsels partiële differentiaalvergelijkingen

10. Autonome stelsels en dynamische systemen

Onder een autonoom stelsel partiële differentiaalvergelijkingen zullen we verstaan een stelsel van het volgende type

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots), \tag{10.1}$$

$$(i, s = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k).$$

We veronderstellen dat alle variabelen van f_s in een gebied G in een zekere N-dimensionale Euclidische ruimte variëren, en dat f_s continu is op dit definitiegebied. Zij voorts Φ een metrische of genormeerde lineaire ruimte met als elementen de vectorfuncties $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ met in E_k gedefiniëerde componenten $\phi_i(x_1, \ldots, x_k)$. Stel dat voor willekeurige $\phi \in \Phi$ een oplossing $U = U(\phi, t)$ van (10.1), genaamd _dynamisch systeem_ in Φ, te vinden is ($U = (u_1, \ldots, u_n)$), met de eigenschappen:

_a_. $U(\phi, t)$ is gedefiniëerd voor alle waarden van $t \in (-\infty, \infty)$;
$U(\phi, t) \in \Phi$ als $t \in (-\infty, \infty)$; $U(\phi, t)$ is continu in ϕ en t;

_b_. $U(\phi, 0) = \phi$;

_c_. $U(\phi, t) \equiv 0$ als $\phi = 0$.

We zullen ons bezig houden met de stabiliteit van deze nuloplossing van (10.1), zijnde een gesloten invariante verzameling van het door (10.1) gedefiniëerde dynamische systeem $U(\phi, t)$ met eigenschappen _a_ t/m _c_. Voor de op dit probleem betrekking hebbende definities zij de lezer verwezen naar §3 van deze scriptie, en naar §4, voorbeeld 4. In §3 werden tevens twee stellingen behandeld welke uitspraken deden over asymptotisch stabiele gesloten invariante verzamelingen van een dynamisch systeem. Hieraan zullen we een speciaal op het stelsel (10.1) betrekking hebbende uitspraak toevoegen. Zij $O \subset \Phi$ een open omgeving van de gesloten invariante verzameling $\phi = 0$ en zij O het gebied van asymptotische stabiliteit van een uniform asymptotisch stabiele en uniform aantrekkende triviale oplossing van (10.1). Dan bestaan er twee functionalen $V(\phi)$ en $W(\phi)$ zodanig dat:

a. $V(\phi)$ is gedefiniëerd en continu in O, $W(\phi)$ is gedefiniëerd en continu in Φ;

b. Als $\phi \in O$ dan is $-1 < V(\phi) < 0$,
Als $\phi \in \Phi$ en $\phi \neq 0$ dan is $W(\phi) > 0$;

c. Voor willekeur'ge $\gamma_2 > 0$ bestaan er positieve waarden γ_1 en α_1 zodat als $\rho(\phi,0) \geq \gamma_2$ dan is $V(\phi) < -\gamma_1$ en $W(\phi) > \alpha_1$;

d. Bij limietovergang $\rho(\phi,0) \to 0$ geldt $\lim W(\phi) = \lim V(\phi) = 0$;

e. Als $\bar{\phi}$ een randpunt van O is en $\phi \neq 0$ dan is

$$\lim_{\phi \in O, \rho(\phi,\bar{\phi}) \to 0} V(\phi) = -1;$$

f. De totale afgeleide van $V(\phi)$ langs de baan $U(\phi,t)$ voldoet aan

$$\frac{dV(U(\phi,t))}{dt} = W(U(\phi,t)) \cdot (1 + V(U(\phi,t))),$$

ofwel

$$\frac{dV}{dt} = W(1 + V).$$

Het omgekeerde van de stelling geldt eveneens: de voorwaarden a t/m f zijn zowel nodig als voldoende. Aangezien $\phi = 0$ een gesloten invariante verzameling van het door (10.1) bepaalde dynamische systeem is, kan de bovenstaande uitspraak opgevat worden als een speciaal geval van een door Zubov bewezen stelling. Hierbij gaat men uit van een gesloten invariante verzameling M i.p.v. $\phi = 0$ in ons geval. De verdere formulering van Zubov's stelling is volkomen analoog aan het bovenstaande. Gezien de exorbitante lengte van Zubov's bewijs wordt dit hier niet opgenomen. We willen volstaan met enkele opmerkingen over de in de stelling genoemde omgeving O van $\phi = 0$.
De verzameling elementen $\phi \in \Phi$ waarvoor $V(\phi) = \lambda$, $-1 < \lambda < 0$ is een deelverzameling van O in die zin dat een oplossing $U(\phi,t)$, $\phi \in O$ van (10.1) precies één punt met die verzameling gemeen heeft.
De verzameling S van punten $\bar{\phi}$ met de eigenschap $V(\phi) \to -1$ als $\phi \to \bar{\phi}$ vormt de rand van O, het gebied van asymptotische stabiliteit. In principe kan dus met gebruikmaking van de functionaal V altijd de rand van het gebied van asymptotische stabiliteit gevonden worden. Is deze

verzameling randpunten leeg, dan heet $\phi = 0$ asymptotisch stabiel "in het groot" of volledig stabiel. Dit begrip komt uitvoerig ter sprake in §14.

11. Niet-autonome stelsels en algemene systemen

In aansluiting op, en als toepassing van de in Hoofdstuk III behandelde theorie zullen we thans een algemeen systeem definiëren aan de hand van het stelsel niet-autonome partiële differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s\left(t, x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots\right), \tag{11.1}$$

$$(s, i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k),$$

waarin de rechterleden functies zijn van $t \geq 0$ en $x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots \in G \subset E_n$, en de functies f_s continu in Gverondersteld worden. Laat het verder weer mogelijk zijn voor ieder element ϕ uit de ruimte Φ der vectorfuncties $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ (zie §10) en $t_0 \geq 0$ oplossingen $U = U(\phi, t, t_0)$ van (11.1) te construeren met de eigenschappen:

a. Bij willekeurige keuze van $\phi \in \Phi$ is $U(\phi, t, t_0)$ gedefiniëerd voor alle $t \geq t_0$ en $U(\phi, t, t_0) \in \Phi$ voor alle $t \geq t_0 \geq 0$;

b. $U(\phi, t, t_0) = \phi$ als $t = t_0$;

c. $U(\phi, t, t_0) \equiv 0$ als $\phi = 0$ voor alle $t \geq t_0$.

Eigenschap c wil zeggen dat we aannemen dat er een nuloplossing is, welke een invariante verzameling van het door a t/m c bepaalde algemene systeem is.

De hierna te noemen begrippen als stabiliteit e.d. dienen te worden opgevat als in de zin van Hoofdstuk III. De aldaar, in §9, gegeven stellingen 1 en 2, handelende over de nodige en voldoende voorwaarden voor stabiliteit resp. asymptotische stabiliteit van een invariante verzameling M formuleert Zubov als volgt voor het geval van het stelsel (11.1).

Stelling 1. Een nodige en voldoende voorwaarde voor de stabiliteit van de invariante verzameling $U = 0$, nuloplossing van (11.1) is het bestaan van een één-parameter familie functionalen V_t met de eigenschappen:

a. Voor ieder element $\phi \in S(0,r)$ is een functie $V_t(\phi)$ van de reële variabele t gedefiniëerd voor $t \geq 0$; $S(0,r) = \{\phi \mid 0 < \rho(\phi,0) < r\}$, $r > 0$;

b. Bij een voldoend kleine $c_1 > 0$ is een $c_2 > 0$ te vinden zô dat

$$\rho(\phi,0) > c_1 \Longrightarrow V_t(\phi) > c_2 \text{ voor alle } t \geq 0;$$

c. $\lim V_t(\phi) = 0$ als $\rho(\phi,0) \to 0$, uniform in $t \geq 0$;

d. De functie $V_t(U(\phi_0,t,t_0))$ is voor vaste ϕ_0 monotoon niet-stijgend voor alle $t \geq t_0$ uit zijn definitiegebied.

De oplossing $U = 0$ van (11.1) is voorts dan en slechts dan asymptotisch stabiel indien naast de condities a t/m d geldt

e. $\lim\limits_{t\to\infty} V_t(U(\phi,t,t_0)) = 0$ voor alle $t_0 \geq 0$ en $\rho(\phi,0) < \delta$, δ voldoende klein.

We bespreken allereerst de stabiliteit van $U = 0$.

Bewijs. Noodzakelijke voorwaarde.

Stel dat $U = 0$ stabiel is. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is dan een $\delta(\varepsilon) > 0$ te vinden zô dat

$$\rho(\phi_0,0) < \delta \Longrightarrow \rho(U(\phi_0,t,t_0),0) \overset{d}{=} \sup_{\phi \in F^t_{t_0}(\phi_0)} \rho(\phi,0) < \varepsilon \text{ voor } t \geq t_0,$$

waarin $F^t_{t_0}(\phi)$ de notatie is voor het algemene systeem $U(\phi,t,t_0)$, gedefiniëerd door (11.1). Zij

$$V_{t_0}(\phi_0) \overset{d}{=} \sup_{t \geq t_0} \rho(U(\phi_0,t,t_0),0) \text{ voor } \rho(\phi_0,0) < \delta. \tag{11.2}$$

De familie functionalen, gedefiniëerd door (11.2), hangt alleen af van de parameter t ($t \geq 0$) voor vaste willekeurige $\phi_0 \in S(0,\delta)$. Voorts is $V_{t_0}(\phi_0) \leq \varepsilon_1$ als $\rho(\phi_0,0) < \delta_1$ met $0 < \delta_1 < \delta$, terwijl ε_1 en δ_1 samenhangen als in de definitie van stabiliteit uit Hoofdstuk III, §8. Dus voldoen $V_t(\phi)$ aan de eigenschappen a t/m c.

Uit de definitie volgt ook dat $V_{t_0}(\phi_0) \geq \rho(\phi_0,0)$ en dus is ook aan b voldaan.

Beschouw nu voor $t_1 > t_0$ de uitdrukking $\rho(t,\phi,t_1)$, $\phi \in F_{t_0}^{t_1}(\phi)$.
Wegens eigenschap c van algemene systemen (§8) geldt voor willekeurige $\phi \in F_{t_0}^{t_1}(\phi_0)$ en $t \geq t_1$,

$$F_{t_1}^{t}(\phi) \subset F_{t_0}^{t}(\phi).$$

Dus is $\rho(U(\phi,t,t_1),0) \leq \rho(U(\phi,t,t_0),0)$ voor $t \geq t_1$ en willekeurige $\phi \in F_{t_0}^{t_1}(\phi_0)$ zodat

$$V_{t_1}(\phi) = \sup_{t \geq t_1} \rho(U(\phi,t,t_1),0) \leq \sup_{t \geq t_0} \rho(U(\phi,t,t_0),0) = V_{t_0}(\phi).$$

Voor een willekeurig element $\phi \in F_{t_0}^{t_1}(\phi_0)$ geldt dus $V_{t_1}(\phi) \leq V_{t_0}(\phi_0)$ zodat, voor $t_1 \geq t_0$,

$$\sup_{\phi \in F_{t_0}^{t_1}(\phi_0)} V_{t_1}(\phi) = V(U(\phi_0,t_1,t_0)) \leq V_{t_0}(\phi_0).$$

De functionalen $V_t(\phi)$ voldoen dus ook aan de eis d.

Voldoende voorwaarde

Stel nu dat er een familie functionalen met eigenschappen a t/m d bestaat, afhankelijk van de parameter t. Zij voor zekere $r > 0$, $0 < \epsilon < \frac{r}{2}$. We voeren in de notatie

$$\lambda = \inf V_t(\phi) \text{ over } \rho(\phi,0) \geq \epsilon \text{ en } \rho(\phi,0) \leq \frac{r}{2}.$$

Kies een grootheid $\delta > 0$ zodanig dat

$$\rho(\phi,0) < \delta \Longrightarrow V_t(\phi) < \lambda \text{ voor } t \geq 0.$$

Het zal blijken dat deze ϵ en δ samenhangen volgens de definitie van stabiliteit (§8). Immers, volgens eigenschap d is

$$V_{t_0}(\phi_0) \geq V(U(\phi_0,t,t_0)) \quad (t \geq t_0),$$

zodat

(11.3) $\rho(\phi_0,0) < \delta \Longrightarrow V(U(\phi_0,t,t_0)) < \lambda$ voor $t \geq t_0$.

Laten we aannemen dat er een ogenblik is, $t \geq t_0$ waarop $\rho(t,\phi_0,t_0) \geq \epsilon$. Voor zekere $t \geq t_0$ is dan bovendien $V(U(\phi_0,t,t_0)) > \lambda$, hetgeen in tegenspraak is met (11.3). De verzameling $U = 0$ is dus stabiel.

Teneinde de noodzakelijke voorwaarde voor asymptotische stabiliteit te onderzoeken stellen we dat $U = 0$ asymptotisch stabiel is. A fortiori is M dan gewoon stabiel, dus is aan de eis voldaan dat er functionalen met eigenschappen a t/m d bestaan. De familie functionalen, geconstrueerd volgens (11.2) voldoet ook, zoals we zullen zien, aan eigenschap e. Bij een gegeven $\epsilon > 0$ bestaat namelijk een $\delta > 0$ zodat

$$\rho(\phi_0,0) < \delta \Longrightarrow \rho(U(\phi_0,t,t_0),0) < \epsilon \text{ voor } t \geq t_0,$$

en, wegens de aanname van asymptotische stabiliteit van $U = 0$,

$$\rho(U(\phi,t,t_0),0) \to 0 \text{ als } t \to \infty.$$

Bij elk stel ϵ_1,δ_1-waarden uit de stabiliteitsdefinitie kunnen we dus een waarde $T > 0$ vinden zodanig dat $\rho(U(\phi,t,t_0),0) < \delta_1$ als $t = T$. Dan is voorts

$$\rho(U(\phi,t,T),0) < \epsilon_1 \text{ voor } t \geq T,\ \phi \text{ willekeurig } \in F_{t_0}^{T}(\phi_0),$$

zodat

$$V_T(\phi) = \sup_{t \geq T} \rho(U(\phi,t,T),0) \leq \epsilon_1,$$

eveneens voor willekeurige keuze van ϕ uit $F_{t_0}^{T}(\phi_0)$. Hieruit volgt

$$V(U(\phi_0,t,t_0)) \overset{d}{=} \sup_{\phi \in F_{t_0}^{T}(\phi_0)} V_T(\phi) \leq \epsilon_1 \text{ als } t = T,$$

sterker nog: ook voor $t \geq T$ aangezien $V(U(\phi_0,t,t_0))$ niet-stijgend is. Dus is aan voorwaarde e voldaan.

Omgekeerd, zij gegeven dat voor voldoend kleine $\rho(\phi,0)$,

$$V(U(\phi,t,t_0)) \to 0 \text{ als } t \geqq t_0.$$

Dan is $U = 0$ stabiel en bij elke $\varepsilon > 0$ is bijgevolg een $\delta > 0$ te vinden met

$$\rho(\phi_0,0) < \delta \Longrightarrow \rho(U(\phi_0,t,t_0),0) < \varepsilon \text{ als } t \geqq t_0.$$

Stel nu, dat er geen $\gamma(\phi_0) > 0$ te vinden is waarvoor

$$\rho(U(\phi_0,t,t_0),\phi) > \gamma(\phi_0) \text{ als } t \geqq t_0.$$

Kies bij $\varepsilon_1 > 0$ een $\delta_1 > 0$ zó dat

$$\rho(\phi_0,0) < \delta_1 \Longrightarrow \rho(U(\phi_0,t,t_0),0) < \varepsilon_1 \text{ voor } t \geqq t_0.$$

Bij δ_1 kunnen we een $T > 0$ vinden waarvoor

$$\rho(U(\phi_0,T,t_0),0) < \delta_1$$

en

$$\rho(U(\phi,t,T),0) < \varepsilon_1 \text{ als } t \geqq T,\ \phi \in F_{t_0}^{T}(\phi_0).$$

Dan is ook

$$\rho(U(\phi_0,t,t_0),0) \leqq \varepsilon_1 \text{ m.a.w. } \rho \to 0 \text{ als } t \to \infty.$$

Neem nu aan dat er een beweging $F_{t_0}^{t}(\phi_0)$ bestaat zó dat

$$\rho(U(\phi_0,t,t_0),0) > \gamma(\phi_0) > 0.$$

Dan is er een $\gamma_1 > 0$ zodanig dat

$$V(U(\phi_0,t,t_0)) > \gamma_1 > 0,$$

in tegenspraak met voorwaarde $\underline{\underline{e}}$ van de stelling. Dus is $U = 0$ asymptotisch stabiel.

Thans zullen we nog de bewijzen geven van de stellingen 3 en 4 uit §9 voor het speciale geval van het niet-autonome stelsel (11.1),

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(t, x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots),$$

$$s, i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k.$$

Daarbij handelt stelling 3 van §9 over de uniforme stabiliteit èn aantrekkendheid van de nuloplossing van (11.1); stelling 4 van §9, de generalisatie van de vierde stelling van Lyapunov (§5), geeft de voorwaarden welke nodig en voldoende zijn voor instabiliteit van $U = 0$.

Hoewel dit niet strikt noodzakelijk is zullen we veronderstellen dat het probleem van Cauchy voor het stelsel (11.1) éénduidig oplosbaar is; indien men deze eis laat vallen worden de bewijzen iets gecompliceerder.

Stelling 3. De nuloplossing van (11.1) met de eigenschap $U(\phi, t, t_0) = 0$ voor $t \geq t_0$ is dan en slechts dan uniform asymptotisch stabiel en uniform aantrekkend indien er twee families functionalen V_t en W_t bestaan met de eigenschappen:

a. Voor willekeurige $\phi \in S(0, r)$, met $r > 0$ voldoende klein gekozen, zijn grootheden $V_t(\phi)$ en $W_t(\phi)$, functies van $t \geq 0$ gedefiniëerd;

b. Bij een willekeurig klein gekozen $c_1 > 0$ zijn positieve constanten c_2 en c_3 te vinden, zodanig dat $V_t(\phi) < -c_2$ en $W_t(\phi) > c_3$ als $\rho(\phi, 0) > c_1$ en $t \geq 0$;

c. $\lim V_t(\phi) = \lim W_t(\phi) = 0$ als $\rho(\phi, 0) \to 0$, uniform in $t \geq 0$;

d. $\frac{d}{dt} V_t(U(\phi, t, t_0)) = W_t(U(\phi, t, t_0))$.

Bewijs. Noodzakelijke voorwaarde.

Zij de verzameling $U = 0$ uniform asymptotisch stabiel en uniform aantrekkend. Men kan bewijzen dat een functie $L(\tau)$ bestaat met de eigenschappen:

$L(\tau)$ is gedefiniëerd voor $\tau \in (-\infty, +\infty)$, continu aldaar en sterk monotoon dalend van ∞ tot 0, en zó dat als $\rho(p, M) < \delta_1$ dan is

$$L(t - t_0) > \rho(t_1 p_0, t_0) \text{ voor } t \geq t_0.$$

Het is niet moeilijk in te zien dat de functionaal W_t gedefiniëerd door

$$W_t(\phi) = W \overset{d}{=} \rho(\phi,0)e^{-L^{-1}(\rho(\phi,0))},$$

aan alle in de stelling 3 aan W gestelde eisen voldoet. Voorts construeren we de functionaal V door

$$V_t(\phi_0) = V(F^t_{t_0}(\phi_0),t) \overset{d}{=} -\int_t^{+\infty} W(F^\tau_{t_0}(\phi_0))d\tau \text{ , } t \geq t_0,$$

waarin $F^t_{t_0}(\phi_0)$ weer het door (11.1) gegenereerde algemene systeem $U(\phi,t,t_0)$ voorstelt. De functionaal V is langs de beweging $F_{t_0}(\phi_0)$ gedefiniëerd voor $t = t_0$

$$V = V_{t_0}(\phi_0) \text{ voor } \rho(\phi_0,0) \leq \delta_1.$$

Inderdaad behoort bij deze δ_1 in verband met de stabiliteitsdefinitie een $\epsilon_1 > 0$ zó dat

$$V(F^t_{t_0}(\phi_0),t) \geq -\epsilon_1 \exp(t_0-t).$$

Dus is

$$V_{t_0}(\phi_0) > -\epsilon_1 \text{ voor } t_0 \geq 0 \text{ en } \rho(\phi_0,0) < \delta_1,$$

zodat aan c is voldaan.
Uit de definitie van V volgt

$$\frac{d}{dt} V(F^t_{t_0}(\phi_0),t) = W(F^t_{t_0}(\phi_0)),$$

zodat ook aan d volledig voldaan is.
Ook aan de voorwaarde voor V uit b is tegemoet gekomen. Immers,

$$V_{t_0}(\phi_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} W(F^\tau_{t_0}(\phi_0))d\tau \leq -\int_{t_0}^{t_0+T} W(F^\tau_{t_0}(\phi_0))d\tau$$

wegens de positiviteit van W.

Bij de grootheid δ_1 uit de definitie van uniforme aantrekkendheid (§8) is een tweetal waarden $T > 0$ en $\alpha > 0$ te vinden waarmee

$$\rho(U(\phi,t,t_0), 0) > \alpha \quad \text{als } t \in [t_0,t_0+T] \text{ en } \rho(\phi_0,0) \geq \delta_1.$$

Zij β een voldoend klein gekozen positieve constante en $t \geq 0$ willekeurig; dan is

$$V_{t_0}(\phi_0) \leq -\beta T \text{ als } \rho(\phi_0,0) > \delta_1.$$

Dit correspondeert met b met $c_1 = \delta_1$, $c_2 = \beta T$.

Voldoende voorwaarde.

Uit de aanname, dat er twee families functionalen bestaan welke aan a t/m d voldoen volgt, dat $U = 0$ stabiel is, immers de functionalen $-V_t$ voldoen aan de eisen van stelling 1.

Stel nu dat er een beweging $F^t_{t_0}(\phi_0)$ bestaat voor $\rho(\phi_0,0) < \delta$ (waarbij δ de grootheid uit de stabiliteitsdefinitie is) zodanig dat $\rho(U(\phi_0,t,t_0),0) > \gamma > 0$. Voor $t \geq t_0$ geldt voor deze beweging

$$W(U(\phi_0,t,t_0)) > \beta > 0,$$

zodat

$$V(U(\phi_0,t,t_0)) > (t-t_0)\beta + V_{t_0}(\phi_0).$$

Echter is

$$V(U(\phi_0,t,t_0)) < 0 \text{ voor } t \geq t_0,$$

zodat een tegenspraak ontstaat. Iedere willekeurige beweging $F^t_{t_0}(\phi_0)$ heeft voor $\rho(\phi_0,0) < \delta$ dus de eigenschap

$$\rho(U(\phi_0,t,t_0),0) \to 0 \text{ als } (t-t_0) \to \infty,$$

en wel uniform m.b.t. $t_0 \geq 0$ en $\rho(\phi_0,0) < \delta$.

Rest nu nog te bewijzen dat $U = 0$ uniform aantrekkend is. Uitgaande van het tegendeel kunnen we bij voldoend kleine $\delta_1 > 0$ een $T > 0$ vinden waarvoor, als $\rho(\phi_0,0) > \delta_1$,

$$\inf_{t \in [t_0,t_0+T]} \rho(U(\phi_0,t,t_0),0) = 0 \text{ voor } t_0 \geq 0.$$

Bovendien bestaan er rijen t_{0_k}, t_k en ϕ_{0_k} zó dat

$$\rho(U(\phi_{0_k},t_k,t_{0_k}),0) \to 0 \text{ als } k \to \infty.$$

Uit de definitie van V volgt

$$V_{t_0}(\phi_0) = \int_{t_0}^{\infty} -W(U(\phi_0,\tau,t_0))d\tau.$$

Met $t_0 = t_{0_k}$, $\phi_0 = \phi_{0_k}$ is deze integraal als volgt te splitsen

$$V_{t_0}(\phi_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} -W(U(\phi_0,\tau,t_0))d\tau + \int_{t_0+T}^{T_1} + \int_{T_1}^{\infty} -W(U(\phi_0,\tau,t_0))d\tau.$$

Voor geschikte keuze van T is de eerste integraal willekeurig klein; de derde eveneens voor T_1 groot genoeg. Kiezen we indices k groot genoeg, dan is ook de tweede integraal klein te maken. Er is dus een indez $k_0(\epsilon)$ met

$$-V_{t_{0_k}}(\phi_{0_k}) < \epsilon \text{ voor } k \geq k_0(\epsilon) \text{ en } \rho(\phi_{0_k},0) > \delta_1,$$

hetgeen in strijd is met de eis e uit de stelling. De aanname dat $U = 0$ niet uniform aantrekkend zou zijn is dus onjuist. Hiermee is stelling 3 geheel bewezen.

De vierde stelling van Lyapunov uit §5, handelende over de noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor instabiliteit, kan voor het onderhavige geval van stelsel (11.1) als volgt geformuleerd worden.

Stelling 4. De triviale oplossing van het stelsel (11.1) is dan en slechts dan instabiel als er twee families functionalen V_t en W_t bestaan met de eigenschappen

a. Voor $t \geq 0$ zijn $V_t(\phi)$ en $W_t(\phi)$ gedefiniëerd binnen een "bol" $S(0,r)$, $r > 0$;

b. $V_t(\phi)$ is begrensd voor $0 \leq t < \infty$ en $\phi \in S(0,r)$;

c. Bij willekeurige $\delta > 0$ is een ϕ_0 te vinden, alsmede een t_0, zó dat $V_{t_0}(\phi_0) > 0$ als $\rho(\phi_0,0) < \delta$;

d. $\frac{d}{dt} V_t(U(\phi,t,t_0)) = \lambda V_t(U(\phi,t,t_0)) + W_t(U(\phi,t,t_0))$, waarin $W_t(\phi) \geq 0$ en λ een positieve constante is.

Bewijs. Noodzakelijke voorwaarde.

Zij $\epsilon > 0$ een grootheid, zoals voorkomend in de instabiliteitsdefinitie van §8 (M is hier de verzameling $U = 0$), en beschouw een element $\phi \in S(0,\epsilon)$. We definiëren nu een familie functionalen V_t zódanig dat

1e. $V_{t_0}(\phi) = 0$ indien $t \geq t_0$ impliceert $\rho(U(t,\phi,t_0),0) < \epsilon$;

2e. $V_t(F^t_{t_0}(\phi_0) = e^{t-t}\phi = V(U(t,\phi_0,t_0))$ als uit $t = t_\phi$, $\rho(U(t,\phi,t_0),0) \geq \epsilon$ en uit $t_0 \leq t < t_\phi$, $\rho(U(t,\phi,t_0),0) < \epsilon$ volgt voor één of andere waarde t_ϕ.

Kennelijk is steeds $\frac{dV}{dt} = V$, terwijl de familie functionalen V_t begrensd is. Uit de instabiliteit van $U = 0$ volgt dat bij willekeurige $\delta > 0$ een ϕ en een waarde t_0 van t te vinden zijn met $\rho(U(t,\phi,t_0),0) \geq \epsilon$ voor $t = t_\phi$. Dan is dus

$$V_{t_0}(\phi) > 0 \text{ als } \rho(\phi,0) > \delta,$$

waarmee aan alle eisen m.b.t. V_t voldaan is.

Voldoende voorwaarde.

Uit de eigenschappen a t/m d volgt dat bij willekeurige $\delta > 0$ een ϕ_0 met $\rho(\phi_0,0) < \delta$ en een waarde t_0 van de parameter te vinden zijn zó dat $V_{t_0}(\phi_0) > 0$. $V(U(t,\phi_0,t_0))$ is een oplossing van

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W$$

met de beginvoorwaarde

$$V(U(t_0,\phi_0,t_0)) = V_{t_0}(\phi_0).$$

Dus is

$$V(U(t,\phi_0,t_0)) \geq V_{t_0}(\phi_0)e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Stel nu dat $U = 0$ een stabiele verzameling is. Enerzijds is dan

$$F^t_{t_0}(\phi_0) \equiv 0 \text{ als } t \geq t_0 \text{ en } V_t(0) \text{ gedefiniëerd is,}$$

en dus is $V(U(t,\phi_0,t_0))$ begrensd als $t \geq t_0$. Anderzijds geldt bovenstaande ongelijkheid van V "langs" de beweging $F^t_{t_0}(\phi_0) \equiv 0$, hetgeen in strijd is met de aanname dat $U = 0$ stabiel is. Dus is ze instabiel.

12. De methode van Zubov voor het construeren van Lyapunov functionalen

Alvorens in te gaan op de meeste recente resultaten van de stabiliteitstheorie verdient het aanbeveling stil te staan bij hetgeen bekend staat als de methode van Zubov voor constructie van Lyapunov functionalen. Zoals reeds werd opgemerkt noemt men een functie, welke aan de hand van de oorspronkelijke stellingen van Lyapunov, stabiliteit van een zekere oplossing garandeert een Lyapunov functie. Bij beschouwing van dynamische systemen of algemene systemen generaliseert men dit begrip uiteraard tot Lyapunov functionaal. In het voorgaande is getracht een overzicht te geven van de belangrijkste stellingen uit de stabiliteitstheorie, waarbij steeds de existentie van Lyapunov functionalen verondersteld of bewezen werd.

Een praktisch en zeer belangrijk probleem is, deze Lyapunov functionalen metterdaad aan te geven. Als eerste is Zubov [1] er in geslaagd, een systematische constructie te geven voor bepaalde klassen van problemen. Een toepassing daarvan vindt men in §13. Onlangs hebben Brayton en Miranker [5] een toepassing geveven voor het geval van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen bij een gemengd randwaardeprobleem. Dit wordt beschreven in §14.

Allereerst zullen we een schets geven van de constructie van Zubov voor gewone differentiaalvergelijkingen.

Veronderstel dat de functies $f_s(x_1, \ldots, x_n)$ $(s = 1, \ldots, n)$ behoren tot de klasse $C^\nu(E_n)$ $(\nu \geq 0)$ van ν-keer continu differentiëerbare functies, gedefiniëerd in een Euclidische ruimte E_n. Indien voor $s = 1, \ldots, n$,

$$f_s(0, \ldots, 0) = 0$$

heeft het stelsel

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.1}$$

de nuloplossing $X = (x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$.

Zij voorts de eenduidigheid der oplossingen van (12.1) gegarandeerd. Men kan aantonen dat de oplossing $X(t,X^{(0)})$ met $X(0,X^{(0)}) = X^{(0)}$ ν-keer continu differentiëerbaar is m.b.t. $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Onder bovengenoemde veronderstellingen bewijst Zubov de volgende belangrijke stelling:

Stelling 1. Zij $A \subset E_n$ een gebied dat een voldoend kleine omgeving van $X = 0$ bevat. A is dan en slechts dan het gebied van asymptotische stabiliteit van de nuloplossing van (12.1) als er twee functies $V(X)$ en $\phi(X)$ bestaan met de eigenschappen:

a. $V(X)$ is gedefiniëerd en continu in A, $\phi(X)$ in E_n;

b. $-1 < V(X) < 0$ voor $X \in A$, $\phi(X) > 0$ voor $X \in E_n$, $|X| \neq 0$;

c. Bij willekeurige $\gamma_2 > 0$ bestaan $\gamma_1 > 0$ en $\alpha_1 > 0$ zodat

$$V(X) < -\gamma_1 \text{ voor } |X| \geq \gamma_2; \ \phi(X) > \alpha_1 \text{ voor } |X| \geq \gamma_2;$$

d. $V(X) \to 0$ en $\phi(X) \to 0$ als $|X| \to 0$;

e. Als $Y \in \bar{A} \setminus A$ en $|Y| \neq 0$ dan is $\lim_{X \to Y} V(X) = -1$, als $|X| \to \infty$, $X \in A$ dan gaat $V(X) \to -1$;

f. $$\left[\frac{dV(X(t,X^{(0)}))}{dt}\right]_{t=0} = \phi(X)\,\{1 + V(X)\}\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2}\,.$$

Bij het bewijs gebruikt Zubov de keuze

$$\phi(x) = \frac{d}{}\int_0^x \ldots \int_0^x \xi \exp\left(-BL^{-1}(\xi)\right)(d\xi)^{\nu},$$

waarin B een positieve constante voorstelt en $L(s)$ een in $-\infty < s < +\infty$ sterk monotoon van $+\infty$ tot 0 dalende functie is met

$$L(s) > X^2(s,X^{(0)}) \text{ als } s \geq 0 \text{ en } |X^{(0)}| < \delta_1,$$

waarbij δ_1 genomen is uit de stabiliteitsdefinitie. De functie $\phi(x)$ is ν-keer continu differentiëerbaar en de afgeleiden van alle orden $k \leq \nu$ zijn sterk monotoon toenemende functies van 0 tot $+\infty$ als $x \to +\infty$, op $0 \leq x < +\infty$.

Indien

$$V_1(X^{(0)}) \stackrel{d}{=} \int_0^{\infty} \phi(X^2(s,X^{(0)}))ds$$

voldoet de functie

(12.2) $$V(X^{(0)}) \stackrel{d}{=} \exp(-V_1(X^{(0)})) - 1$$

aan de gestelde voorwaarden. Men kan aantonen dat $V_1(X^{(0)})$ en dus ook $V(X^{(0)})$ ν-keer continu differentiëerbaar is.

Een belangrijk speciaal geval is $\nu \geq 1$. Indien de nuloplossing van (12.1) asymptotisch stabiel is, heeft de vergelijking

(12.3) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1,\ldots,x_n) = \phi(x_1,\ldots,x_n)\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1,\ldots,x_n)}(1 + V)$$

één en slechts één continu differentiëerbare oplossing met $V(0) = 0$, voor $X \in A$. Een voldoende voorwaarde voor de oplosbaarheid van (12.3) is de sommeerbaarheid van $\phi(X(t,X^{(0)}))$,

(12.4) $$\int_0^{+\infty} \phi(X(t,X^{(0)}))dt < +\infty$$

voor voldoend kleine waarde van $|X^{(0)}|$; ϕ is dus afhankelijk van de mate van afnemen van $X(t,X^{(0)})$ als $t \to \infty$. Kent men dit verloop, dan is daaruit reeds een functie ϕ met de eigenschap (12.4) te construeren. In de volgende voorbeelden wordt de hulpfunctie ϕ op directe wijze geconstrueerd.

Voorbeeld 1.

Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2x^2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Door de keuze

$$\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2} \circ \phi(x,y) = x^2 + y^2$$

krijgt (12.3) hier de vorm

$$\frac{\partial V}{\partial x}(2x^2y-x) + \frac{\partial V}{\partial y}(-y) = (x^2+y^2)(1+V),$$

waarvan een oplossing is

$$V(x,y) = \exp\left\{-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2(1-xy)}\right\} - 1.$$

Kennelijk wordt het gebied van asymptotische stabiliteit van de nul-oplossing $x = y = 0$ begrensd door de kromme $xy = 1$.

Voorbeeld 2.

Het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{(1-x^2+y^2)2x}{(x+1)^2+y^2} + xy = f_1(x,y), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1-x^2+y^2}{2} - \dfrac{4x^2y}{(x+1)^2+y^2} = f_2(x,y), \end{cases}$$

heeft een evenwichtspunt (1,0). Gevraagd wordt de begrenzing van het gebied van asymptotische stabiliteit van deze oplossing. Vergelijking (12.3) krijgt de gedaante

$$\frac{\partial V}{\partial x} \circ \left\{\frac{(1-x^2+y^2)2x}{(1+x)^2+y^2} + xy\right\} + \frac{\partial V}{\partial y}\left\{\frac{1-x^2+y^2}{2} - \frac{4x^2y}{(1+x)^2+y^2}\right\} = 2\,\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\,(1+V)$$

door de keuze van ϕ:

$$\phi \circ \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2} = 2\,\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}.$$

Van de partiële differentiaalvergelijking is een oplossing

$$V(x,y) = -\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}, \quad V(1,0) = 0.$$

De begrenzing van het gebied van asymptotische stabiliteit is de rechte lijn $x = 0$:

$$V(0,y) \equiv -1.$$

13. Werk van de Russische School

Als eerste toepassing van de voorgaande theorie op meer speciale stelsels beschouwt Zubov het stabiliteitsprobleem voor het volgende quasi-lineaire stelsel van de eerste orde

$$(13.1) \qquad \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(u_1,\ldots,u_n) + \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i}, \quad s = 1,\ldots,n,$$

waarbij weer verondersteld wordt dat de functies $f_s(u_1,\ldots,u_n)$ continu en begrensd zijn, en gedefiniëerd in E_n; de grootheden b_i $(i = 1,\ldots,k)$ zijn reële constanten.

Zij Φ een lineaire ruimte bestaande uit vectorfuncties $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$ met voor $(x_1,\ldots,x_k) \in E_k$ gedefiniëerde en continu differentiëerbare componenten $\phi_i(x_1,\ldots,x_k)$, genormeerd volgens

$$||\phi|| = \{\sup_{E_k} \sum_{i=1}^{n} \phi_i^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Onder de aanname dat (13.1) de nuloplossing bezit wordt het stabiliteitsprobleem van deze oplossing beschouwd. Voor de oplossingen van (13.1) geldt de

Stelling 1. Als de functies f_s, $s = 1, \ldots, n$, continu differentiëerbaar zijn in E_n bestaat bij ieder willekeurig element $\phi \in \Phi$ een familie in ϕ en t continue oplossingen $U(\phi,t)$, voor $-\infty < t < \infty$, welke continu differentiëerbaar zijn (i.e. $U \in \Phi$), met $U(\phi,0) = \phi$.

Uit deze stelling blijkt dat het stelsel (13.1) in Φ een dynamisch systeem definiëert.

Bij het bewijs van stelling 1 beschouwt Zubov het bijbehorende stelsel

$$(13.2) \qquad \frac{du_s}{dt} = f_s(u_1, \ldots, u_n) \ , \quad s = 1,\ldots,n.$$

Blijkens de veronderstelde eigenschappen van f_s heeft (13.2) éénduidig bepaalde oplossingen $U(t,U^{(0)})$ in E_n met de eigenschappen:

a. $U(t,U^{(0)})$ is gedefiniëerd voor $U^{(0)} \in E_n$ en $-\infty < t < \infty$; $U(t,U^{(0)}) \in E_n$;

b. $U(t,U^{(0)})$ is continu in beide componenten, i.e.

$$|U(t_1,U_1^{(0)}) - U(t_2,U_2^{(0)})| \to 0$$

als

$$|t_1-t_2| \to 0 \text{ en } |U_1^{(0)}-U_2^{(0)}| = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} |U_{1,s}^{(0)} - U_{2,s}^{(0)}|} \to 0;$$

c. $U(t,U^{(0)})$ is een oplossing van (13.2); $U(0,U^{(0)}) = U^{(0)}$.

Het is nu niet moeilijk te bewijzen dat de vectorfuncties

$$U = U(t,\phi(x_1+b_1t,\ldots,x_k+b_kt))$$

voor $\phi \in \Phi$ continu differentiëerbare oplossingen van (13.1) zijn.

Men kan nog meer informatie van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen (13.2) betrekken. Indien $f_s(0, \ldots, 0) = 0$ $(s = 1,\ldots,n)$ heeft (13.2) de nuloplossing. Stel nu dat deze asymptotisch stabiel is en pas stelling 1 uit §12 toe. Er bestaat dan een functie $V(u_1,\ldots,u_n)$, welke gedefiniëerd is in het gebied van asymptotische stabiliteit A van $U = 0$, terwijl $-1 < V < 0$; daarnaast bestaat er een functie $W(u_1,\ldots,u_n)$, gedefiniëerd in E_n, zó dat

$$\forall \alpha > 0 \ \exists \beta > 0 \ / \ |U| > \alpha \Rightarrow W > \beta,$$

terwijl $V(0, \ldots, 0) = W(0, \ldots, 0) = 0$ en $\frac{dV}{dt} = W(1 + V)$.

Zij nu

$$S_\lambda \overset{d}{=} \{U \in A \ / \ 1 + V(u_1,\ldots,u_n) = \lambda\} \ , \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$G_\lambda \overset{d}{=} \{U \in A \ / \ 1 + V(u_1,\ldots,u_n) \leq \lambda\},$$

en

$$\Phi_\lambda \overset{d}{=} \{\phi \in \Phi \ / \ \phi(x_1,\ldots,x_k) \in G_\lambda\}.$$

Er is minstens één punt $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ waarvoor $U^{(0)} = \phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S_\lambda$.
Zodoende ontstaat een relatie tussen de functies van de klasse ϕ_λ en de punten van het gesloten oppervlak S_λ, i.e.

$$\forall U^{(0)} \in S_\lambda \, \exists \phi_0 \in \phi_\lambda \, / \, \phi_0(\xi_1, \ldots, \xi_k) = U^{(0)} \text{ voor zekere } (\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

en vice versa.
De volgende definitie is daarom zinvol:

$$V_1(\phi) = V(u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}), \tag{13.3}$$

waarbij $\phi \in \phi_\lambda$ en $U^{(0)} \in S_\lambda$ correspondeert met ϕ. Zij verder

$$\lambda(t) = V(U(t, U^{(0)})) + 1.$$

Dan kan men bewijzen dat

$$\phi \in \phi_\lambda \Longrightarrow U(t, \phi(x_i + b_i t)) \in \phi_{\lambda(t)},$$

zodat de functionaal V_1 langs de gehele beweging $U(t, \phi(x_i + b_i t))$ berekend kan worden d.m.v. de formule

$$V_1(U(t, \phi(x_i + b_i t))) = V(U(t, U^{(0)})).$$

Stellen we nu nog dat $W_1(\phi) \overset{d}{=} W(U^{(0)})$ dan volgt uit

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV}{dt} = W(U(t, U^{(0)}))(1 + V_1)$$

dat

$$\frac{dV_1}{dt} = W_1(1 + V_1). \tag{13.4}$$

Hierbij is het stabiliteitsprobleem van het stelsel (13.1) geheel "vertaald" in termen van dat van het stelsel (13.2). Deze correspondentie vatten we samen in de volgende stelling. Hierbij is

$$A_\phi \overset{d}{=} \bigcup_{0<\lambda<1} \phi_\lambda.$$

<u>Stelling 2</u>. De triviale oplossing $\phi = 0$ van een dynamisch systeem, gedefiniëerd door het stelsel (13.1) is dan en slechts dan asymptotisch stabiel, indien de nuloplossing van (13.2) dat is. Het gebied van asymptotische stabiliteit A_ϕ van de beweging $\phi = 0$ van het systeem $U = U(t, \phi(x_i + b_i t))$ bestaat uit díe functies ϕ, waarvan de afsluiting der waardenverzameling binnen A, het gebied van asymptotische stabiliteit van de nuloplossing van (13.2) valt. Omgekeerd bestaat A uitsluitend uit díe punten $U^{(0)}$, die beelden zijn van functies $\phi \in A_\phi$.

Een meer speciaal geval van een stelsel van het type (13.1) is

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = U_s^{(\mu)} + \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{\partial u_s}{\partial x_i}, \tag{13.5}$$

waarin $U_s^{(\mu)}$ homogene functies van orde μ zijn, met $\mu = \frac{p}{q} \geq 1$, $p \neq 2k$ en q oneven. Men kan bewijzen dat de nuloplossing van het bij (13.5) behorende stelsel

$$\frac{du_s}{dt} = U_s^{(\mu)} \tag{13.6}$$

dan en slechts dan asymptotisch stabiel is indien er twee functies bestaan, $V(u_1, \ldots, u_n)$ homogeen van orde $m - \mu + 1 > 0$ en $W(u_1, \ldots, u_n)$, homogeen van orde $m > 0$, met de eigenschappen

$$V > 0 \text{ en } W < 0 \text{ als } U \neq 0,$$

en

$$\frac{dV}{dt} = W.$$

We definiëren nu

$$\Sigma_\lambda \overset{d}{=} \{U \in A \;/\; V(u_1, \ldots, u_n) = \lambda\}, \quad \lambda > 0,$$

$$\Psi_\lambda \overset{d}{=} \{\phi \in \Phi \;/\; \phi(x_1, \ldots, x_k) \in G_\lambda\},$$

waarbij G_λ binnen Σ_λ ligt, i.e. de verzameling

$$U \in A \;/\; V(u_1, \ldots, u_n) \leq \lambda$$

voorstelt, zodanig, dat er minstens één punt $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is waarvoor

$$\phi(\xi_1, \ldots, \xi_k) = U^{(0)} \in \Sigma_\lambda.$$

Stel nu, voor $\phi \in \Psi_\lambda$,

$$V_1(\phi) = \lambda \text{ en } V_1(\phi) = V(U^{(0)}),$$

volkomen analoog aan het voorgaande, meer algemene geval. Dan is weer

$$V(U(t,U^{(0)})) = V_1(U(t,\phi(x_i+b_it))) \quad (i = 1,\dots,k)$$

en dus

$$\frac{dV_1}{dt} = W(U(t,U^{(0)})) = W_1(U(t,\phi)).$$

Zubov heeft de volgende schattingen van V_1, W_1 en $U(t,\phi)$ gemaakt

$$a_1 \;||\phi||^{m-\mu+1} \leq V_1(\phi) \leq a_2 \;||\phi||^{m-\mu+1},$$

$$-b_1 \;||U(t,\phi)||^m \leq W_1(U(t,\phi)) \leq -b_2 \;||U(t,\phi)||^m,$$

$$\frac{c_1||\phi||}{\sqrt[\mu-1]{1+c_2t||\phi||^{\mu-1}}} \leq ||U(t,\phi)|| \leq \frac{d_1||\phi||}{\sqrt[\mu-1]{1+d_2t||\phi||^{\mu-1}}} \quad \text{voor } \mu > 1,$$

en

$$p_1 \;||\phi||e^{-p_2t} \leq ||U(t,\phi)|| \leq q_1 \;||\phi||e^{-q_2t} \quad \text{voor } \mu = 1.$$

Hierbij zijn a_i, b_i, c_i, d_i, p_i en q_i $(i = 1, 2,)$ positieve constanten.

Zubov bestudeerde eveneens het lineaire stelsel

$$(13.7) \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(\alpha_j)} a_{si}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t) \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} U_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_k^{\alpha_k}}, \quad s = 1,\dots,n.$$

Het symbool $\sum\limits_{(\alpha_j)}$ houdt sommatie over alle $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j$ van 0 tot een zekere m_1 in. De coëfficiënten $a_{si}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}(t)$ worden verondersteld reële functies van t te zijn, gedefiniëerd en continu voor $t \geq 0$. Een meer compacte schrijfwijze onstaat als volgt. Zij $U = (u_1,\dots,u_n)$,

$s_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ en $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ een vierkante matrix met elementen $a_{s_i}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}$.
Dan verschijnt (13.7) in de gedaante

$$(13.8) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0}^{m_1} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} S_1^{\alpha_1} \ldots\ldots S_k^{\alpha_k} U.$$

Het stabiliteitsprobleem van de hypothetische nuloplossing van (13.8) blijkt weer te corresponderen met dat van een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen, in vectornotatie

$$(13.9) \qquad \frac{dU}{dt} = A \circ U.$$

Is $X(t,t_0)$ een fundamentaalstelsel van oplossingen van (13.9), met $X(t_0,t_0) = 0$, dan is $U = X(t,t_0)U^{(0)}$ voor $U^{(0)} \in E_n$ een oplossing van (13.8). In de veronderstelling dat we een norm bezitten voor de ruimte der oplossingen kunnen we weer de volgende bewering uitspreken:
Een nodige en voldoende voorwaarde voor de asymptotische stabiliteit (stabiliteit, instabiliteit) van de nuloplossing van (13.8) is de asymptotische stabiliteit (stabiliteit, instabiliteit) van de nuloplossing van (13.9).

De theorie van §§10 en 11 was ontwikkeld als een zuiver Cauchy probleem. Het is echter mogelijk om, met geringe modificaties, de theorie van Hoofdstuk III op gemengde rand- en beginwaarde problemen toe te passen. Zubov geeft het volgende voorbeeld van zo'n gemengd probleem.
Beschouw de vergelijking

$$(13.10) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t) \frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + a(X,t)U,$$

waarin de functies $a_{ij}(X,t)$ en $a(X,t)$ gedefiniëerd zijn voor $X \in D \subset E_n$, $0 \leq t < +\infty$, waarin a_i reële componenten zijn en voor alle $X = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in D$ geldt

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha(t) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Hierin is $\alpha(t)$ een voor $t \geq 0$ gedefiniëerde, positieve continue functie. De begin- en randvoorwaarden zijn:

$$(13.11) \qquad \begin{cases} U(X,t) = \phi(X) & \text{als } t = t_0 \geq 0; \\ U(X,t) = 0 & \text{als } X \in S; \end{cases}$$

S is de rand van een gebied Ω in D , $\phi \in \Phi_\Omega$, de ruimte van alle continue differentiëerbare, op Ω gedefiniëerde functies.
Stel dat dit probleem een oplossing $U(X,t)$ heeft waarvoor

a. $U(X,t) \in L_2(\Omega)$ als $t \geq t_0$,
b. $\frac{\partial U(X,t)}{\partial t}$ bestaat in de zin van $L_2(\Omega)$.

Beschouw nu de in $L_2(\Omega)$ gedefiniëerde functionaal

$$(13.12) \qquad V \overset{d}{=} \int_\Omega U^2 d\omega.$$

Volgens (13.10) is de totale afgeleide van V

$$\frac{dV}{dt} = 2 \int_\Omega U\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X,t)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + a(X,t)U\right]d\omega,$$

waaruit door partiële integratie volgt

$$\frac{dV}{dt} = -2 \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} - aU^2\right]d\omega.$$

Wegens de ongelijkheid, waaraan de coëfficiënten a_{ij} moeten voldoen volgt

$$(13.13) \qquad \frac{dV}{dt} \leq -2\alpha(t) \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2\right]d\omega + \int_\Omega aU^2 d\omega.$$

Als nu $a(X,t) \leq 0$ is $\frac{dV}{dt} < 0$ en bijgevolg is de nuloplossing van (13.10) stabiel.Met gebruikmaking van de ongelijkheid

$$c_1 \int_\Omega U^2\, d\omega \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 d\omega \quad (c_1 > 0)$$

wordt (13.13)

$$\frac{dV}{dt} \leq -2\alpha(t) \int_\Omega \left[c_1 - \frac{a(X,t)}{\alpha(t)}\right]U^2\, d\omega.$$

Indien nu bovendien

$$c_1 - \frac{a(X,t)}{\alpha(t)} > c_2 > 0$$

is de triviale oplossing van (13.10) asymptotisch stabiel en geldt de schatting

$$||U||^2_{L_2(\Omega)} \leq ||\phi||^2_{L_2(\Omega)} \cdot \exp\left(-2c_2 \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau\right),$$

met

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau \to +\infty \text{ als } t \to \infty.$$

Lyantze [3] beschouwde een gemengd probleem in $\Omega \times [0 \leq t < \infty]$ voor een z.g. sterk parabolisch stelsel

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -L(x,\frac{\partial}{\partial x})U. \tag{13.14}$$

Hij toonde de oplosbaarheid aan onder de condities dat U, met alle mogelijke afgeleiden tot en met de (m-1)e orde (m is de orde van $L(x,\frac{\partial}{\partial x})$) nul zijn op de rand van Ω voor alle $t \in [0,\infty)$ en dat $U(X,0) = \phi(X)$, met $\phi \in L_2(X)$. Vishik en Ladyzkenskaya [4] bewezen dat de nuloplossing van (13.14) asymptotisch stabiel is in $L_2(\Omega)$. Zij gebruikten de functionaal

$$V \overset{d}{=} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, d\omega$$

met de voorwaarde

$$(U,LU) \geq \alpha(U,U) \quad (\alpha > 0 \text{ constant}),$$

met

$$(U,U) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, d\omega.$$

Zubov merkt op, dat de theorie der algemene systemen, hoewel kwalitatief van grote betekenis zijnde, niet in alle gevallen van gemengde problemen uitkomst biedt. De volgende, en laatste paragraaf zal gewijd zijn aan het werk van enige Amerikaanse auteurs, die voor het oplossen van het stabiliteitsprobleem voor niet-lineaire gemengde problemen een iets andere weg bewandeld hebben.

14. Zeer recente ontwikkelingen in de constructie van Lyapunov functionalen

De inhoud van deze paragraaf vormt de kern van het artikel van Brayton en Miranker [5] over gemengde niet-lineaire rand- en beginwaarde problemen. De door hen beschouwde klasse van problemen wordt in een z.g. canonische vorm gebracht, hetgeen de bewerking ervan vergemakkelijkt. Het essentiëel nieuwe van hun artikel is dat zij nu een constructie geven van Lyapunov functionalen voor dynamische systemen in een Hilbert-ruimte. Deze constructie is een veralgemening van een door Brayton en Moser [6] aangegeven methode voor de constructie van Lyapunov functionalen bij gewone differentiaalvergelijkingen.

Uitgangspunt van de beschouwingen van Brayton en Miranker vormt een stelling (van Massera [7], stelling 23) over een autonoom stelsel gewone differentiaalvergelijkingen

(14.1) $$\dot{x} = f(x).$$

Stelling 1. Als een evenwichtspositie van (14.1) uniform asymptotisch stabiel in 't groot (volledig stabiel, zie §10) is en f is continu, dan bestaat er een positief definiete afnemende en voor $||x|| \to \infty$ onbegrensde functie $v(x(t))$ met een negatieve tijdafgeleide. De functie v heeft partiële afgeleiden van elke willekeurige orde.

Zij nu v_x de gradiënt van v. Wegens

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = (v_x, \dot{x}) < 0$$

zijn de vectoren v_x en $\dot{x}$ nooit orthogonaal. Dus bestaat er bij elk punt x een niet-singuliere negatief definiete matrix $J(x)$ met

(14.2) $$J(x)\, \dot{x} = v_x.$$

Afgezien van het gedrag van $J(x)$ in het groot kunnen we (14.2) zó opvatten dat een volledig stabiel systeem $\mathring{x} = f(x)$ geschreven kan worden in de "canonische" vorm

$$J(x)\,\mathring{x} = P_x. \tag{14.3}$$

In ref. [6] is aangetoond dat zeer vele problemen, o.a. Hamiltoniaanse systemen en vele klassieke elektrische netwerken in de vorm (14.3) geschreven kunnen worden en hierbij een Lyapunov functie geconstrueerd kan worden.

Het doel is nu, zoveel mogelijk gemengde problemen voor partiële differentiaalvergelijkingen in een aan (14.3) analoge vorm te schrijven. Daartoe stellen we, om de gedachten te bepalen dat de vectorfunctie $u(x,t)$ een oplossing is van het quasi-lineaire stelsel

$$J_0(u)u_t = A_0(u)u_x + B_0(u) \qquad t > 0,\ 0 < x < 1, \tag{14.4}$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} J_1(u)u_t = B_1(u) & x = 0,\ t > 0; \\ J_2(u)u_t = B_2(u) & x = 1,\ t > 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

Hierin zijn $J_i(u)$, $i = 0, 1, 2$, matrixfuncties van u, B_i, $i = 0, 1, 2$ vectorfuncties van u, resp. van de vorm $n \times n$ en dimensie n. We veronderstellen dat J_1 en J_2 singulier zijn en sommige elementen van B_1 en B_2 nul, zódanig dat ieder der relaties (14.5) precies $\frac{n}{2}$ randvoorwaarden geeft. Sommige linkerleden zijn dan misschien nul, zodat die randvoorwaarden algebraïsch worden.

In de notatie van de $3n$-vector

$$[u] = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ u(0,t) \\ u(1,t) \end{pmatrix}$$

worden (14.4) en (14.5)

$$J \circ [u_t] = A \circ [u_x] + B, \tag{14.6}$$

waarin J en A matrices zijn met in de diagonaal blokken van $n \times n$,

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & \\ & J_1 & \\ & & J_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

en waarin

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

een 3n-vector is.

Voor elk stelsel beginvoorwaarden $u(x,0)$, $0 < x < 1$ bepaalt (14.6) een trajectorie in een ruimte van vectorfuncties, gedefiniëerd op $[0,1]$. Beter is het echter de trajectorie te beschouwen in de tripel-product ruimte van vectorfuncties op $(0,1)$ en vectoren in de punten $x = 0$ en $x = 1$, zoals feitelijk door de notatie $[u]$ al gebeurd is. We beschouwen nu i.p.v. de functie $P(x)$ zoals in (14.3) een functionaal $P[u]$, afhankelijk van $[u]$ en wellicht de plaatsafgeleiden van de eerste n componenten van $[u]$. Stel dat $P[u]$ de volgende vorm heeft

$$(14.7) \qquad P[u] = \int_0^1 F(u,u_x)dx + \phi(u)|_{x=0} + \psi(u)|_{x=1}.$$

De <u>gradiënt</u> $P_{[u]}$ van de <u>functionaal</u> $P[u]$ is een 3n-vector, waarvan de componenten zijn: de afgeleiden (in de zin van Euler) van de eerste n componenten en de natuurlijke randvoorwaarden in $x = 0$ en $x = 1$ voor respectievelijk het tweede- en derde n-tal componenten van $P[u]$ (zie ook [8]), aldus:

$$(14.8) \qquad P_{[u]} = \begin{pmatrix} F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x} \\ (\phi_u - F_{u_x})|_{x=0} \\ (\phi_u + F_{u_x})|_{x=1} \end{pmatrix}.$$

Nu geldt het volgende

Lemma.

Zij $P[u]$ een functionaal, gegeven door (14.7) dus

$$[u] = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ u(0,t) \\ u(1,t) \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\frac{dP[u]}{dt} = \left[P_{[u]}, [u_t]\right]. \tag{14.9}$$

Deze formule is een analogon van

$$\frac{dG}{dt} = (G_x, \frac{dx}{dt})$$

voor gewone functies. Voor vectoren $[u]$ en $[v]$ uit de tripelproduct ruimte betekent het rechterlid van (14.9)

$$[[u] \circ [v]] = \int_0^1 (u,v)dx + (u,v)|_{x=0} + (u,v)|_{x=1}.$$

Het bewijs van (14.9) wordt geleverd door (14.7) naar t te differentiëren

$$\frac{dP[u]}{dt} = \int_0^1 \left[(F_u, u_t) + (F_{u_x}, u_{xt})\right]dx + (\phi_u, u_t)|_{x=0} + (\psi_u, u_t)|_{x=1}$$

en vervolgens partiële integratie toe te passen op u_{xt}; dan volgt

$$\frac{dP[u]}{dt} = \int_0^1 (F_u - \frac{d}{dx} F_{u_x}, u_t)dx + (\phi_n - F_{u_x}, u_t)|_{x=0} + (\psi_n + F_{u_x}, u_t)|_{x=1} =$$

$$= \left[P_{[u]}, [u_t]\right].$$

De voorgaande heuristische argumenten leiden ertoe, voor gemengde beginwaarde problemen de aan (14.3) analoge "canonische" vorm te kiezen

$$J(u)\,[u_t] = P_{[u]}, \tag{14.10}$$

waarin $J(u)$ de reeds uit (14.6) bekende matrix met de "kastjesvorm" is. Voor de functionaal $P_{[u]}$ zullen we steeds de vorm (14.7) kiezen. Aangezien de randvoorwaarden natuurlijk zijn, en slechts een n-tal onafhankelijk is, geeft (14.10) niet het beeld van een overbepaald systeem.

We zullen ons nu bezighouden met het stabiliteitsprobleem voor oplossingen van het probleem (14.10). Onder zekere voorwaarden zullen deze, als $t \to +\infty$, naar een evenwichtstoestand blijken te gaan. De stelling, waarin één en ander geformuleerd zal worden, handelt alleen over het quasi-lineaire geval van een gemengd beginwaarde probleem en is een analogon van de stelling van Massera.

Aansluitend op de in §3 ingevoerde begrippen betreffende dynamische systemen geven we de

Definitie 1. De limietverzameling $L(p)$ van een trajectorie $F_t(p)$ van een dynamisch systeem is de verzameling van alle punten $\omega \in R$ (ω-limiet punten) waarvoor een rij $\{t_n\}$ bestaat, $t_n \to \infty$ als $n \to \infty$ met

$$\lim_{t_n \to \infty} ||\omega - F_{t_n}(p)|| = 0.$$

Definitie 2. Als voor elke $p \in R$, $F_t(p)$ voor $t \geq 0$ compact is in R, is iedere limietverzameling $L(p)$ niet-leeg. Indien er bovendien een invariante verzameling M bestaat zodanig dat $L(p) \in M$ voor alle $p \in R$, dan heet M volledig stabiel (vgl. de definitie aan het eind van §10).

Voorts verstaan we onder $[u] \in C_1[0,1]$ dat het eerste n-tal componenten van $[u]$ stuksgewijs continu differentiëerbaar is in $[0,1]$. Bijgevolg zijn de tweede en derde n-tallen componenten van $[u]$ gelijk aan $\lim_{x\to 0}$ resp. $\lim_{x\to 1}$ van het eerste n-tal.

Met $[u] \in C(0,1)$ bedoelen we dat het eerste n-tal componenten van $[u]$ continu op $(0,1)$ is. Een verband met de laatste 2n componenten zoals voor $C_1[0,1]$ bestaat niet noodzakelijk.

Definitie 3. De Hilbertruimte H_1 is de afsluiting van de ruimte van functies $[u] \in C_1[0,1]$, genormeerd volgens

$$||u||_1^2 \stackrel{d}{=} (u(0),u(0)) + (u(1),u(1)) + \int_0^1 (u,u)dx + \int_0^1 (u_x,u_x)dx$$

ofwel

$$||u||_1^2 = [[u],[u]] + \int_0^1 (u_x,u_x)dx.$$

<u>Definitie 4</u>. De <u>Hilbertruimte H_0</u> is de afsluiting van de functieruimte $[u] \in C(0,1)$, waarbij

$$||u||_0^2 \stackrel{d}{=} [[u],[u]].$$

Stel nu, dat het stelsel (14.10) een dynamisch systeem genereert in H_1 en dat uit $[u] \in H_1$ volgt $P_{[u]} \in H_0$.

<u>Definitie 5</u>. De <u>evenwichtsverzameling $\mathcal{E}$</u> van (14.10) is de verzameling functies $[u] \in H_1$ waarvoor $||P_{[u]}||_0 = 0$.

Onder bepaalde voorwaarden nu is de invariante verzameling $\mathcal{E}$ volledig stabiel. Bij elke beginsituatie in H_1 heeft (14.10) een oplossing met verdichtingspunten in $\mathcal{E}$ als $t \to \infty$. Indien $\mathcal{E}$ een discrete verzameling is gaat, wegens de continuïteitseigenschap van het dynamisch systeem, iedere trajectorie naar één limietpunt in $\mathcal{E}$.

De stelling luidt:

<u>Stelling 2</u>. Zij gegeven dat het stelsel

$$J \circ [u_t] = P_{[u]} = A \circ u_x + B \,; \quad x \in (0,1), \; t > 0,$$

een dynamisch systeem genereert op een deelverzameling van H_1. J, A en B zijn continu afhankelijk van x en u. Dan is $L \subset \mathcal{E}$, en $\mathcal{E}$ is volledig stabiel, indien aan de volgende voorwaarden is voldaan:

<u>a</u>. $P_{[u]} \in H_0$, en $P_{[u]}$ is continu voor $[u] \in H_1$;

<u>b</u>. De matrix $A_0(u,x)$ (d.w.z. A continu en $x \in (0,1)$) is inverteerbaar;

<u>c</u>. Er bestaat een functionaal $\tilde{P}[u]$, continu voor $[u] \in H_0$, zó dat

1e. $\tilde{P}[u] \geq -b > -\infty$, b reëel > 0;

2e. $\tilde{P}[u] \to \infty \iff ||u||_1 \to \infty$;

3e. $\dot{\tilde{P}} \leq -K||P_{[u]}||_0^2$, waar K een positief getal is.

Teneinde de stelling te bewijzen tonen Brayton en Miranker eerst aan dat bij iedere $p \in H_1$, waar het systeem gedefiniëerd is $L(p)$ niet-leeg is of dat $F_t(p)$ compact in H_1 (zie def. 2). Daarna wordt aangetoond dat $L \in \mathcal{E}$.
Een moeilijk praktisch probleem is de constructie van de Lyapunov functionaal $P_{[u]}$. Zoals gezegd geven Brayton en Miranker een op een idee van Moser gebaseerde constructie en lichten deze toe met enkele voorbeelden uit de niet-lineaire netwerktheorie en een hogere-orde, parabolische vergelijking. Het eenvoudige probleem van het eerste type benevens de parabolische vergelijking zullen hier behandeld worden. Allereerst volgt echter een beschrijving van de constructie der Lyapunov functionalen voor problemen van het type (14.10),

$$J[u_t] = P_{[u]}.$$

Een noodzakelijke voorwaarde voor P om een Lyapunov functionaal te zijn is het negatieve teken van J, terwijl moet gelden

$$\frac{dP}{dt} = \left[P_{[u]}, [u_t]\right] = \left[J[u_t], [u_t]\right]. \tag{14.11}$$

Uit een gegeven stel P en J welke voldoen aan (14.10) wordt nu een familie paren $\tilde{P}$, $\tilde{J}$ geconstrueerd waarvoor (14.11) geldt. Hieruit wordt dan één paar gekozen met $\tilde{J} < 0$ en waarvoor $\tilde{P}$ aan de eisen van stelling 2 voldoet.
Stel dat de functionaal P uit (14.10) de volgende vorm heeft

$$P = \int_0^1 [(u, \gamma u_x) + B(u)]\,dx + \phi(u)|_{x=0} + \psi(u)|_{x=1},$$

waarin γ een constante matrix is, en B, ϕ en ψ scalairfuncties van u zijn. Dan is

$$P[u] = \begin{pmatrix} (\gamma-\gamma^T)u_x + B_u(u) \\ (\phi_u-\gamma^T u)|_{x=0} \\ (\psi_u+\gamma^T u)|_{x=1} \end{pmatrix}.$$

Wat betreft het probleem (14.6) geldt de correspondentie

$$A_0 = \gamma-\gamma^T,\ B_0(u) = B_u(u),\ B_1(u) = (\phi_u-\gamma^T u) \text{ en } B_2(u) = (\psi_u+\gamma^T u).$$

Zij nu λ een constante en M de matrix

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

waarin M_0, M_1 en M_2 $n\times n$-matrices zijn, constant en symmetrisch.
We definiëren nu

$$\tilde{P} \overset{d}{=} \lambda P + \tfrac{1}{2}[P_{[u]}, MP_{[u]}] \tag{14.12}$$

en

$$\tilde{J} \overset{d}{=} \begin{pmatrix} (\lambda I+B_{uu}M_0)J_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tfrac{1}{2}A^T M_0 J_0+(\lambda I+(\phi_{uu}-\gamma)M_1 J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{2}AM_0J_0+(\lambda I+(\gamma+\psi_{uu})M_2)J_2 \end{pmatrix} \tag{14.13}$$

waarin $A^T M_0 J_0$ een constante symmetrische matrix moet zijn.
Uit (14.12) volgt dat

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{P}}{dt} = \lambda[P_{[u]}, [u_t]] + \dfrac{d}{dt}\,\tfrac{1}{2}[P_{[u]}, MP_{[u]}] = \\ \quad = [\lambda J[u_t], [u_t]] + \tfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}\,[P_{[u]}, MP_{[u]}]. \end{cases} \tag{14.14}$$

Hierin is

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}\,[P_{[u]}, MP_{[u]}] = \tfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^1 (Au_x + B_u, M_0(Au_x + B_u))dx + \\ \quad + (\phi_u - \gamma^T u, M_1(\phi_u - \gamma^T u))|_{x=0} + (\psi_u + \gamma^T u, M_2(\psi_u + \gamma^T u))|_{x=1} = \\ \quad = \displaystyle\int_0^1 (Au_{xt} + B_{uu}u_t, M_0(Au_x + B_u))dx + \\ \quad + ((\phi_{uu}-\gamma)^T u_t, M_1(\phi_u-\gamma^T u))|_{x=0} + ((\psi_{uu}+\gamma)^T u_t, M_2(\psi_u+\gamma^T u))|_{x=1} = \end{cases} \tag{14.15}$$

$$= \int_0^1 [(A^T M_0 J_0 u_t, u_{xt}) + (B_{uu} M_0 J_0 u_t, u_t)] dx +$$

$$+ ((\phi_{uu} - \gamma) M_1 J_1 u_t, u_t)|_{x=0} + ((\psi_{uu} + \gamma) M_2 J_2 u_t, u_t)|_{x=1}.$$

Omdat $A^T M_0 J_0$ een constante symmetrische matrix is geldt

$$\int_0^1 (A^T M_0 J_0 u_t, u_{xt}) dx = \int_0^1 \frac{d}{dx} \tfrac{1}{2} (A^T M_0 J_0 u_t, u_t) dx = \tfrac{1}{2} (A^T M_0 J_0 u_t, u_t)|_{x=0}^{x=1} .$$

Hierdoor wordt (14.15)

$$\tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} [P[u], MP[u]] = \int_0^1 (B_{uu} M_0 J_0 u_t, u_t) dx +$$

$$+ ((-\tfrac{1}{2} A^T M_0 J_0 + (\phi_{uu} - \gamma) M_1 J_1) u_t, u_t)|_{x=0} + ((\tfrac{1}{2} A^T M_0 J_0 + (\psi_{uu} + \gamma) M_2 J_2 u_t, u_t)|_{x=1}.$$

Vullen we dit resultaat in formule (14.14) in, dan volgt

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \int_0^1 ((\lambda I + B_{uu} M_0) J_0 u_t, u_t) dx +$$

$$+ ((-\tfrac{1}{2} A^T M_0 J_0 + (\lambda I + (\phi_{uu} - \gamma) M_1) J_1) u_t, u_t)|_{x=0} +$$

$$+ ((\tfrac{1}{2} A^T M_0 J_0 + (\lambda I + (\psi_{uu} + \gamma) M_2) J_2) u_t, u_t)|_{x=1}.$$

Vergelijken we dit nu met de vorm (14.13) van $\tilde{J}$, dan blijkt

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = [\tilde{J} \circ [u_t], [u_t]].$$

In de volgende voorbeelden zullen λ en M zodanig gekozen worden dat $\tilde{J}$ inderdaad negatief is, en $\tilde{P}$ aan de eisen van stelling 2 voldoet.

Voorbeeld 1.

Beschouw het volgende elektrische netwerk

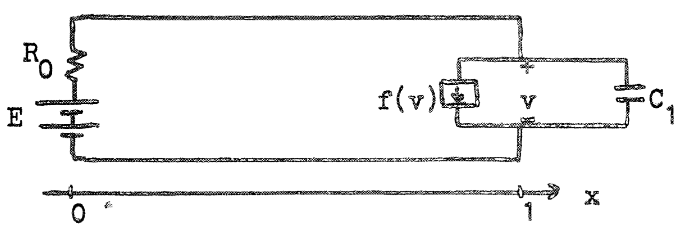

fig. 1

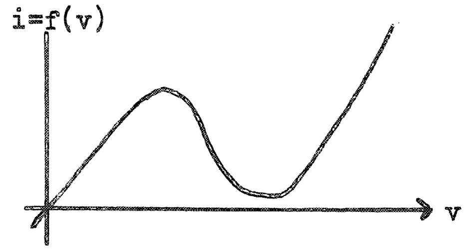

fig. 2

Hierin is het stuk $[0,1]$ een transmissielijn met specifieke inductie L, specifieke capaciteit C, specifieke serie weerstand R en specifieke shunt-geleidbaarheid G. Het voltage en de stroomsterkte zijn functies van x en t en voldoen aan het volgende stelsel p.d.v.

$$(14.16) \qquad \begin{cases} Li_t = -v_x - Ri\,, \\ -Cv_t = i_x + Gv\,. \end{cases}$$

De randvoorwaarden zijn

$$(14.17) \qquad \begin{cases} 0 = E - v_0 - R_0 i_0\,, & x = 0\,, \\ -C_1 v_{1_t} = i_1 + f(v_1)\,, & x = 1\,, \end{cases}$$

waarin $v_0 = v(0,t)$, $v_1 = v(1,t)$, $i_0 = i(0,t)$ en $i_1 = i(1,t)$. De niet-lineaire functie $f(v)$ geeft, zoals aangegeven in fig. 2, de stroomsterkte in het "kastje" van fig. 1 in de richting van de pijl. Het stationaire stelsel (met alle tijdafgeleiden = 0) kan drie oplossingen hebben. De volgende functionaal geeft aan, dat alle oplossingen naar één van deze drie stationaire oplossingen convergeren.

$$(14.18) \qquad P = \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2}Ri^2 + \tfrac{1}{2}Gv^2 - iv_x\right) dx - \tfrac{1}{2}R_0 i_0^2 + (E - v_0)i_0 + \int_0^{v_1} f(v)\, dv.$$

(N.B.: extremalisering van deze functionaal geeft vier voorwaarden: een Euler-Lagrange vergelijking bij variatie van i, één bij variatie van v, en twee natuurlijke randvoorwaarden voor $x = 0$ resp. $x = 1$. Deze vier uitdrukkingen geven precies het stationaire probleem (14.16)-(14.17)).

De termen met R en G hebben een dissipatief karakter; reden om te veronderstellen dat $R > 0$ en $G > 0$ zullen bijdragen tot stabiliteit, evenals R_0. Voorts is de term met $f(v_1)$ dissipatief als $f'(v) > 0$ en aktief als $f'(v) < 0$. We kiezen nu λ en M zodanig dat volledige stabiliteit verzekerd is. De twee eerste voorwaarden van de stelling

kunnen gemakkelijk op voldaan zijn gecontroleerd worden; voor controle van de derde voorwaarde worden de richtlijnen gegeven.
Kies

$$M_0 = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}, \qquad M_1 = 0, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},$$

dan wordt

$$\tilde{P} = \lambda P + \frac{1}{2}\int_0^1 (Li_t^2 + Cv_t^2)\,dx + \frac{1}{2}C_1 v_{1_t}^2 .$$

Men kan aantonen dat $\overset{\circ}{\tilde{P}} \leq 0$ en $\tilde{P} \geq 0$ bij de keuze

$$-\frac{f'(v)}{C_1} < \lambda < \frac{R}{L} .$$

$\tilde{P}$ kan geschreven worden als

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\lambda R_0^2 i_0^2 + \frac{1}{2}\frac{(\frac{R}{L}-\lambda)}{R}\int_0^1 (Ri+v_x)^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{R}\int_0^1 v_x^2\,dx + \frac{1}{2}\lambda G\int_0^1 v^2\,dx$$

$$+ \frac{1}{2c}\int_0^1 (Gv+i_x)^2\,dx + \lambda\int_0^{v_1} f(v)\,dv + \left(\frac{i_1-f(v_1)}{2C_1}\right)^2 .$$

Met gebruikmaking van de ongelijkheid

$$(a+b)^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a^2$$

schatten we de termen van het type $\int (Ri+v_x)^2\,dx + \int v_x^2\,dx$. Daar tevens $0 = E - v_0 - Ri_0$ volgt, dat $||u||_1 \to \infty$ impliceert $\tilde{P} \to \infty$ (Stell. 2, voorwaarde c, 2^e). Dat het omgekeerde ook waar is laat zich snel controleren.
$\overset{\circ}{\tilde{P}}$, de totale tijdafgeleide van P is

$$\overset{\circ}{\tilde{P}} = -(R-\lambda L)\int_0^1 i_t^2\,dx - (G+\lambda C)\int_0^1 v_t^2\,dx - (\lambda C_1 + f'(v_1))v_{1_t}^2 - R_0 i_{0_t}^2 \leq$$

$$\leq -K\left[\int_0^1 (i_t^2+v_t^2)\,dx + v_{1_t}^2 + i_{0_t}^2\right],$$

waar K een positieve constante is, aangezien

$$-\frac{f'(v)}{C_1} < \lambda < \frac{R}{L} .$$

Deze ongelijkheid voor $\mathring{\tilde{P}}$ is te schrijven als

$$\mathring{\tilde{P}} \leq -K \, ||P_{[u]}||_0^2 ,$$

waarmee aan conditie c, 3^e van de stelling voldaan is.

Voorbeeld 2. We beschouwen de parabolische vergelijking met r.v.w.:

$$(14.19) \qquad \begin{cases} -u_t = -u_{xx} & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 = -u_x & x = 0, \\ 0 = u_x & x = 1. \end{cases}$$

Dit stelsel kan door de volgende positieve functionaal worden beschreven:

$$P \overset{d}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 \, dx ,$$

waaruit

$$P_{[u]} = \begin{pmatrix} -u_{xx} \\ -u_x|_{x=0} \\ u_x|_{x=1} \end{pmatrix}$$

P is een Lyapunov functionaal aangezien

$$\mathring{P} = \int_0^1 u_x u_{xt} \, dx = u_x u_t \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xx} u_t \, dx = -\int_0^1 u_t^2 \, dx .$$

Opmerking. Tot nu toe is niet geverifieerd dat de stroming, bepaald door de gemengde beginvoorwaarden ook inderdaad een dynamisch systeem op een deel van H_1 definieert. De groep-eigenschap en de continue afhankelijkheid uit de definitie van een dynamisch systeem mogen verondersteld worden te zijn voldaan door "well-posed" problemen,

zoals in de voorbeelden. De eigenschap, dat de afbeelding door de operator F_t "in" is kan in het tweede voorbeeld aangetoond worden, aangezien de diffusie operator de "gladheid" van de beginwaarden handhaaft. In het eerste voorbeeld echter kunnen gladde beginwaarden worden afgebeeld in een discontinue functie, aangezien discontinuïteiten zich langs karakteristieken voortplanten. Om dit te voorkomen moeten we eisen dat de beginwaarden zodanig in H_1 gekozen zijn dat bij $x = 0$ en $x = 1$ aan willekeurige algebraïsche randvoorwaarden voldaan is. Dit garandeert dat zich vanuit de hoekpunten $x = 0$, $t = 0$ en $x = 1$, $t = 0$ geen discontinuïteiten voortplanten.
Dit is de reden waarom in stelling 2 van een dynamisch systeem op een deelverzameling van H_1 gesproken wordt.

Referenties

[1] V.I. Zubov, Methods of A.M. Lyapunov and their application, Noordhoff, 1964.

[2] S.L. Sobolev, Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Transl. of Math. Monographs, vol. 7, A.M.S., 1963.

[3] V.E. Lyantze, On a problem for parabolic systems of differential equations with a right member, Matem. Sbornik, 35, 2(1954).

[4] M.I. Vishik, O.A. Ladyzhenskaya, Boundary problems for partial differential equations and certain classes of operator equations, Uspehi Mat. Nauk, XI, 6(1956).

[5] R.K. Brayton, W.L. Miranker, A stability theory for nonlinear mixed initial boundary value problems, Archive for rational mech. and An., 17, pp. 358-376 (1964).

[6] R.K. Brayton, J. Moser, A theory of nonlinear networks, I, Quart. of Appl. Math., 22, pp. 1-33 (1964).

[7] J.L. Massera, Contributions to stability theory, Ann. of Math., 64, pp. 186-206 (1956).

[8] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, II., Interscience Publishers, 1953.