Mathematisch Centrum
Afd. Toegepaste Wiskunde
Rapport T.W. no. 8
Auteur: J.H. Kemperman
Titel: Grondwaterstromingen
Datum: Mei 1950.

GRONDWATERSTROMINGEN

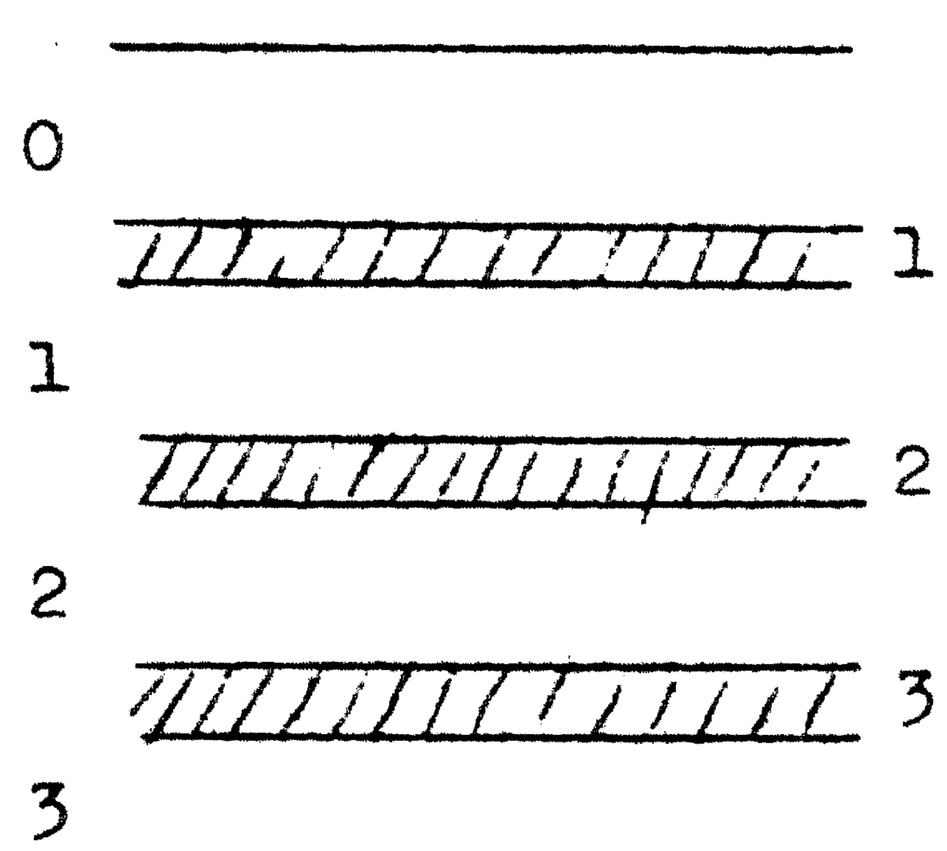
Laten x, y en z cartesische coordinaten zijn, zodanig gekozen, dat het x-y-vlak samenvalt met het horizontale aardoppervlak, en de z-as loodrecht naar beneden is gericht. Beschouw een stationnaire situatie, waarin de functie $\varphi(x,y,z)$ de druk van het grondwater aangeeft. De grondwaterstroming wordt dan gegeven door

$$\vec{Q} = - k \operatorname{div} \varphi ,$$

waarin $k = k(x,y,z)$ de z.g. doorlaatbaarheid is.

Neem nu aan, dat de bodem is opgebouwd uit door horizontale vlakken gescheiden homogene lagen, die afwisselend goed en slechts doorlaatbaar zijn (veelal aangeduid met zandlaag resp. leemlaag). Men kan aantonen, dat de grondwaterstroming in deze lagen in goede benadering horizontaal resp. verticaal zal zijn gericht. Dit impliceert, dat $\varphi(x,y,z)$ in deze lagen onafhankelijk is van z resp. van x en y.

Zij de bovenste laag een zandlaag. We nummeren de lagen als in de volgende figuur.



en duiden de potentiaal in de j^{de} zandlaag aan met $\varphi_j(x,y)$. Wanneer de j^{de} leemlaag een doorlaatbaarheid k'_j en een dikte d_j heeft, dan wordt de stroming in deze laag gegeven door

$$Q_x = 0, \; Q_y = 0, \; Q_z = k'_j \quad \frac{\varphi_j(x,y)-\varphi_{j-1}(x,y)}{d_j}$$

Gewoonlijk stelt men hierin

$$c_j = \frac{d_j}{k'_j} \; .$$

Wanneer de j^{de} zandlaag een doorlaatbaarheid k_j en een dikte D_j heeft, dan geeft de continuiteitsvergelijking voor deze laag

$$(1) \quad k_j \, D_j \, \Delta \varphi_j = \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{c_j} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j+1}}{c_{j+1}} \; .$$

Voor j = 0 wordt φ_0 als gegeven functie van x en y aangenomen. Vergelijking (1) behoeft dus voor j = 0 niet te gelden. Indien de functies $\varphi_j(x,y)$ (j = 0,1,2,...) uitsluitend functies zijn van $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, dan kunnen we (1) schrijven als

$$(2) \quad \frac{d^2\varphi_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi_j}{d\rho} = \alpha_j(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + \beta_j(\varphi_j - \varphi_{j+1}) \qquad (j=1,2,\dots)$$

met

$$(3) \quad \alpha_j = \frac{1}{k_jD_jc_j} \quad \text{en} \quad \beta_j = \frac{1}{k_jD_jc_{j+1}}$$

We zullen ook het geval toelaten, dat in (2) de grootheden α_j en β_j functies zijn van ρ.

<u>Probleem A</u>. Laat N een geheel getal $\geqq 1$ voorstellen en zij $c_{N+1} = \infty$; de $(N+1)^e$ leemlaag wordt dus ondoorlaatbaar ondersteld. Wegens (3) hebben we

$$(4) \quad \alpha_{N+1} = \beta_N = 0$$

Laten verder α_j en β_j (j = 1,2,...,N) gegeven constanten zijn, en zij $\varphi_0(x,y) = 1$. Van een verticale, aan de onderkant afgesloten buis met straal r_0, reikende tot de tweede leemlaag, is het deel in de nulde zandlaag, resp. eerste leemlaag ondoorlaatbaar, terwijl het deel in de eerste zandlaag een poreuze wand heeft. Uit deze buis wordt per tijdseenheid een hoeveelheid water Q_0 opgepompt. Gevraagd worden de functies $\varphi_j(x,y)$ (j = 1,2,...,N).

De gegeven situatie blijft invariant bij draaiingen om de z-as en dus ook de gezochte functie $\varphi_j(x,y)$ (j = 1,2,...,N), welke daarom alleen van $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ afhangt. Doordat de aan de onderzijde afgesloten buis rust op de eerste leemlaag heeft voor $\rho \leq r_0$ geen uitwisseling van water plaats door de eerste leemlaag. Voor $\rho \leq r_0$ gelden dus de volgende differentiaalvergelijkingen

$$(5) \quad \frac{d^2\varphi_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi_2}{d\rho} = \beta_2(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\frac{d^2\varphi_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi_j}{d\rho} = \alpha_j(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + \beta_j(\varphi_j - \varphi_{j+1}) \qquad (j=3,4,..N)$$

Wegens $\beta_N = 0$ hebben we hier N-1 simultane differentiaalvergelijkingen in de N-1 onbekende functies $\varphi_2, \dots, \varphi_N$.

Voor $\rho > r_o$ heeft daarentegen wel wateruitwisseling plaats door de eerste leemlaag en geldt het systeem simultane differentiaalvergelijkingen (2) (waarvan we wegens $\beta_N = 0$ alleen de vergelijkingen met $1 \leq j \leq N$ beschouwen). Gevraagd wordt nu de functies $\varphi_1(\rho),\dots,\varphi_N$ zodanig te bepalen dat de volgende voorwaarden zijn vervuld:

1. Voor $\rho > r_o$ voldoen $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ aan het systeem (2).
2. Voor $\rho \leq r_o$ voldoen $\varphi_2,\dots,\varphi_N$ aan het systeem (5).
3. Voor $\rho = r_o$ zijn de functies $\varphi_2,\dots,\varphi_N$ minstens éénmaal differentieerbaar.
4. De volgende randvoorwaarden zijn vervuld

$$(6) \qquad \lim_{\rho\to\infty} \varphi_j(\rho) = 1 \qquad\qquad (j = 1,2,\dots,N)$$

$$(7) \qquad (2\pi\rho D_1)\, k_1 \frac{d\varphi_1}{d\rho} = Q_o \qquad \text{voor } \rho = r_o$$

$$(8) \qquad \lim_{\rho\to 0} (2\pi\rho D_j)\, k_j \frac{d\varphi_j}{d\rho} = 0 \qquad (j = 2,\dots,N)$$

Hierin houdt (7) in, dat per tijdseenheid een hoeveelheid water Q_o wordt opgenomen door het poreuze deel van de buis. Analoog drukt (8) uit dat de hoeveelheid water, die per tijdseenheid wordt opgenomen door een cylinder met hoogte D_j en straal ρ gelegen in de j^{de} zandlaag, tot nul nadert wanneer ρ tot nul nadert (immers het volumen van die cylinder nadert eveneens tot nul).

Men kan bewijzen, dat het systeem functies $\varphi_1(\rho),\dots,\varphi_N(\rho)$ door bovengenoemde voorwaarden eenduidig bepaald wordt, en zelfs kan men dit systeem expleciet aangeven. Een voor $\rho \gg r_o$ goede benadering van dit systeem verkrijgen we, wanneer we aan de functies $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ de volgende voorwaarden opleggen:

1. Voor $\rho > 0$ voldoen $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ aan het systeem (2).
2. De randvoorwaarden (6), (7') en (8) zijn vervuld, waarbij (7') uit (7) ontstaat door r_o tot nul te laten naderen:

$$(7') \qquad \lim_{\rho\to 0} (2\pi\rho D_1)\, k_1 \frac{d\varphi_1}{d\rho} = Q_o$$

We zullen ons nu verder beperken tot de oplossing van dit laatste (eenvoudiger) probleem.

Stel nu

$$(9) \qquad \psi_j(\rho) = 1 - \varphi_j(\rho) \qquad\qquad (j = 0,1,2,\dots,N)$$

Dan is $\psi_o = 0$ en (2) wordt nu voor $j = 1,2,\dots,N$

$$(10) \qquad \frac{d^2\psi_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi_j}{d\rho} = \alpha_j(\psi_j - \psi_{j-1}) + \beta_j(\psi_j - \psi_{j+1})$$

terwijl de randvoorwaarden (6), (7') en (8) overgaan in

(11) $$\lim_{\rho\to\infty} \psi_j(\rho) = 0$$

(12) $$\lim_{\rho\to 0} \rho \frac{d\psi_1}{d\rho} = -q_o$$

(13) $$\lim_{\rho\to 0} \frac{d\psi_j}{d\rho} = 0 \qquad (j = 2,3,\ldots,N)$$

met

(14) $$q_o = \frac{Q_o}{2\pi D_1 k_1}$$

Zij nu L de operator

(15) $$L = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho}\right)$$

Mits we $\xi_o = 0$ stellen, volgt uit (10)

$$L(\xi_1\psi_1+\ldots+\xi_N\psi_N) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j\left\{\alpha_j(\psi_j-\psi_{j-1})+\beta_j(\psi_j-\psi_{j+1})\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \psi_j\left\{-\beta_{j-1}\xi_{j-1} +(\alpha_j+\beta_j)\xi_j-\alpha_{j+1}\xi_{j+1}\right\}$$

waarin wegens (4) geldt, dat $\alpha_{N+1} = 0$.

Representeren we de lineaire combinatie $\xi_1\psi_1+\ldots+\xi_N\psi_N$ door een vector $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ in de N-dimensionale vectorruimte R_N, dan correspondeert met de operator L de volgende lineaire transformatie $\mathfrak{A}$ in R_N

(16)
$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (\alpha_1+\beta_1)\xi_1 - \alpha_2\xi_2 \\
\eta_2 &= -\beta_1\xi_1 + (\alpha_2+\beta_2)\xi_2 - \alpha_3\xi_3 \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
\eta_{N-1} &= -\beta_{N-2}\xi_{N-2}+(\alpha_{N-1}+\beta_{N-1})\xi_{N-1}-\alpha_N\xi_N \\
\eta_N &= -\beta_{N-1}\xi_{N-1}+\alpha_N\xi_N
\end{aligned}$$

Deze correspondentie houdt in, dat de operator L toegepast op de functie $\xi_1\psi_1+\ldots+\xi_N\psi_N$ de functie $\eta_1\psi_1+\ldots+\eta_N\psi_N$ oplevert, waarin $(\eta_1,\ldots,\eta_N)$ de volgens (16) getransformeerde vector $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ voorstelt. We zoeken nu een lineaire combinatie

$$\chi = \xi_1\psi_1 + \ldots + \xi_N\psi_N$$

van de functies $\psi_1,\ldots,\psi_N$, waarvoor geldt bij geschikt gekozen constante λ, dat $L\chi = \lambda\chi$ ofwel

$$\lambda(\xi_1\psi_1+\dots+\xi_N\psi_N) = L(\xi_1\psi_1+\dots+\xi_N\psi_N) = \eta_1\psi_1+\dots+\eta_N\psi_N$$

waarin $\eta_1,\dots,\eta_N$ door (16) wordt gegeven. Hieraan wordt voldaan voor $\lambda\xi_i = \eta_i (i = 1,\dots,N)$ ofwel wegens (16) wanneer geldt

$$\begin{array}{lll} & 0 = (\alpha_1+\beta_1-\lambda)\xi_1 - \alpha_2\xi_2 & \\ (17) & 0 = \qquad -\beta_1\xi_1 + (\alpha_2+\beta_2-\lambda)\xi_2 - \alpha_3\xi_3 & \\ & - & \\ & 0 = \qquad\qquad -\beta_{N-1}\xi_{N-1} + (\alpha_N+\beta_N-\lambda)\xi_N & \end{array}$$

Dit systeem van N homogene lineaire vergelijkingen heeft dan en slechts dan een van nul verschillende oplossing, wanneer λ een wortel is van de volgende vergelijking

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1-\lambda & -\alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_2+\beta_2-\lambda & -\alpha_3 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & -\beta_{N-2} & \alpha_{N-1}+\beta_{N-1}- & \ddots & -\alpha_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\beta_{N-1} & \alpha_N-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Een wortel λ van (18) heet eigenwaarde van de door (16) gedefinieerde transformatie $\mathfrak{A}$. Wanneer λ een eigenwaarde van $\mathfrak{A}$ is, dan heeft het stelsel (17) minstens één van nul verschillende oplossing $(\xi_1,\dots,\xi_N)$, een z.g. eigenvector bij de eigenwaarde .

Mits c_j eindig is voor $j = 1,2,\dots,N$ volgt uit (3) en (4)

$$(19)\qquad \begin{array}{ll} \alpha_j > 0 & (j = 1,2,\dots,N) \\ \beta_j > 0 & (j = 1,2,\dots,N-1);\ \beta_N = 0 \end{array}$$

en met behulp van (19) zullen we nu aantonen, dat alle wortels van (18) positief en verschillend zijn.

We stellen voor $k = 1,2,\dots N$

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1-\lambda & -\alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_2+\beta_2-\lambda & -\alpha_3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\beta_{k-1} & \alpha_k+\beta_k-\lambda \end{vmatrix} = f_k(\lambda)$$

Ontwikkelen we deze determinant naar de laatste rij dan volgt voor $k = 1,2,3,\dots,N$

(21) $$f_k(\lambda)= (\alpha_k+\beta_k-\lambda)\ f_{k-1}(\lambda)-\alpha_k\beta_{k-1}\ f_{k-2}(\lambda)$$

mits we stellen $f_{-1} = 0$ en $f_o = 1$. Nu hebben we wegens (21) voor $k = 1,2,\dots,N$

$$f_k(0)-\beta_k\ f_{k-1}(0)= \left[(\alpha_k+\beta_k)\ f_{k-1}(0)-\alpha_k\beta_{k-1}\ f_{k-2}(0)\right]-\beta_k\ f_{k-1}(0)$$
$$=\alpha_k\left[f_{k-1}(0)\ -\beta_{k-1}\ f_{k-2}(0)\right].$$

Wegens $f_o = 1$, $f_{-1} = 0$ en (19) volgt met volledige inductie

(22) $$f_k(0)-\beta_k\ f_{k-1}(0)=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k>0 \qquad (k = 1,2,..,N)$$

Met $f_o = 1$ volgt uit (19) en (22)

$$f_k(0)>\beta_k\ f_{k-1}(0)>\dots>\beta_k\beta_{k-1}\cdots\beta_1\geq 0 \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

en dus

(23) $$f_k\ (0)>0 \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

We bewijzen nu

<u>Theorema</u> Voor $k = 1,2,\dots,N$ heeft het polynoom van de k^{de} graad $f_k(\lambda)$ k verschillende, positieve nulpunten

$$0<\alpha_{k,1}<\alpha_{k,2}<\dots<\alpha_{k,k}$$

zodanig dat de nulpunten van opvolgende polynomen elkaar scheiden d.w.z. voor $k = 2,3,\dots,N$ geldt

(24) $$0<\alpha_{k,1}<\alpha_{k-1,1}<\alpha_{k,2}<\alpha_{k-1,2}<\dots<\alpha_{k,k}$$

<u>Opm</u>. Onder Sgn x zullen we verstaan

$$\begin{aligned} \operatorname{Sgn} x &= +1 && \text{voor } x>0\\ &= 0 && \text{" } x=0\\ &= -1 && \text{" } x<0 \end{aligned}$$

<u>Bewijs</u>. Vooreerst merken we op dat de term van de hoogste graad in $f_k(\lambda)$ gelijk is aan $(-\lambda)^k$. Dit impliceert, dat

(25) $$\operatorname{Sgn} f_k(+\infty)= (-1)^k$$

Wanneer we (21) nog eens opschrijven met (k+1) in plaats van k, dan komt er

$$f_{k+1}(\lambda)= (\alpha_{k+1}+\beta_{k+1}-\lambda)\ f_k(\lambda)-\alpha_{k+1}\beta_k\ f_{k-1}(\lambda)$$

Hieruit en uit (19) volgt voor een nulpunt $\alpha_{k,m}$ van $f_k(\lambda)$:

26) $\quad \mathrm{Sgn}\, f_{k+1}(\alpha_{k,m}) = -\,\mathrm{Sgn}\, f_{k-1}(\alpha_{k,m}) \qquad (k = 1,\ldots,N-1).$

u heeft $f_1(\lambda) = \alpha_1 + \beta_1 - \lambda$ precies één positief nulpunt $\alpha_{1,1} = \alpha_1 + \beta_1$. egens $f_o = 1$ volgt nu uit (26), dat

$$\mathrm{Sgn}\, f_2(\alpha_{1,1}) = -1.$$

erder is wegens (23) en (25) $\mathrm{Sgn}\, f_2(0) = +1$ en $\mathrm{Sgn}\, f_2(+\infty) = +1$. Het olynoom van de tweede graad $f_2(\lambda)$ heeft dus precies twee verschil- ende positieve nulpunten $\alpha_{2,1}$ en $\alpha_{2,2}$ met

$$0 < \alpha_{2,1} < \alpha_{1,1} < \alpha_{2,2}.$$

De bewering van het theorema is dus reeds bewezen voor $k = 2$. ij k een geheel getal met $2 \leq k \leq N-1$ en neem aan, dat de bewering an het theorema geldt wanneer hierin k wordt vervangen door een eheel getal h met $2 \leq h \leq k$.

Mede wegens $f_{k-1}(0) > 0$ volgt uit de inductieveronderstelling 24)

$$f_{k-1}(\alpha_{k,1}) > 0,\ f_{k-1}(\alpha_{k,2}) > 0, \ldots, f_{k-1}(\alpha_{k,k}) = (-1)^{k-1}$$

fwel

$$\mathrm{Sgn}\, f_{k-1}(\alpha_{k,m}) = (-1)^{m-1} \qquad (m = 1,2,\ldots,k).$$

egens (26) volgt hieruit

$$\mathrm{Sgn}\, f_{k+1}(\alpha_{k,m}) = (-1)^{m} \qquad (m = 1,2,\ldots,k).$$

erder hebben we $\mathrm{Sgn}\, f_{k+1}(0) = +1$ en $\mathrm{Sgn}\, f_{k+1}(+\infty) = (-1)^{k+1}$. Dus $_{k+1}(x)$ heeft minstens één nulpunt x met $0 < x < \alpha_{k,1}$ resp. $\alpha_{k,1} < x < \alpha_{k,2}$ ... resp. $\alpha_{k,m} < x < +\infty$. Het polynoom van de $(k+1)^e$ raad $f_{k+1}(\lambda)$ heeft dus precies k+1 verschillende positieve nul- unten waarvoor de ongelijkheden (24) gelden, wanneer we hierin k oor k+1 vervangen. Wegens het principe van volledige inductie is iermee de stelling bewezen.

Door toepassing van het theorema voor $k = N$ vinden we dat de ergelijking (18) N verschillende positieve wortels $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ heeft ij elk der eigenwaarden λ_k bepalen we nu met behulp van (17) de ijbehorende eigenvectoren $(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_N^{(k)})$[1].

---

[1]) Deze eigenvector wordt door (17) slechts op een factor na bepaald. We doen een bepaalde keuze; de verkregen getallen $\xi_j^{(k)}$ zijn dan bekende grootheden.

Omdat $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ onderling verschillen, zijn deze eigenvectoren lineair onafhankelijk, waaruit volgt

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_N^{(1)} \\ - & - & - \\ \xi_1^{(N)} & & \xi_N^{(N)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Stellen we

$$(28) \qquad \chi_k = \xi_1^{(k)}\psi_1 + \dots + \xi_N^{(k)}\psi_N \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

dan is wegens (15)

$$(29) \qquad L\chi_k = \frac{d^2\chi_k}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\chi_k}{d\rho} = \lambda_k\chi_k \qquad (k = 1,\dots,N)$$

Als $\sqrt{\lambda_k}$ de positieve wortel voorstelt uit de positieve eigenwaarde λ_k, dan volgt uit (29)

$$\chi_k = Z_o\,(i\sqrt{\lambda_k}\,\rho) \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

waarin $Z_o(x)$ een cylinderfunctie is van de nulde orde. Wegens (6) en (28) geldt

$$0 = \lim_{0<\rho\to+\infty} \chi_k(\rho) = \lim_{0<\rho\to\infty} Z_o(i\sqrt{\lambda_k}\,\rho) \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

Dit is slechts mogelijk voor

$$\chi_k(\rho) = \frac{\pi}{2}\; i\; a_k\; H_o^{(1)}\,(i\sqrt{\lambda_k}\,\rho) \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

waarin $H_o^{(1)}(x)$ de Hankelfunctie van de eerste soort en nulde orde, en waarin a_k een constante voorstelt. Dus

$$(30) \qquad \chi_k(\rho) = a_k\; K_o(\sqrt{\lambda_k}\,\rho) \qquad (k = 1,2,\dots,N)$$

waarin de z.g. Engelse functie $K_o(x) = \frac{\pi}{2}\; i\; K_o^{(1)}(ix)$ voor $x > 0$ een monotoon naar nul afnemende positieve functie is, waarvan uitvoerige tabellen beschikbaar zijn.

Hiervoor geldt ondermeer

$$(31) \qquad \frac{d\,K_o(x)}{d\,x} = -\,K_1(x) = -\,\frac{\pi}{2}\; H_1^{(1)}\,(i\,x)$$

en

$$(32) \qquad K_1(x) = \frac{1}{z} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{2m+1}}{m!\,(m+1)!}\left\{\log\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\psi(m+1) - \tfrac{1}{2}\psi(m+2)\right\}$$

met

$$\psi(m+1) = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \gamma$$

waarin γ de constante van Euler voorstelt (vgl. Watson, Bessel functions, blz. 80). Uit (30), (31) en (32) volgt

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{d\chi_k}{d\rho} = -a_k \qquad (k = 1,2,..,N) \tag{33}$$

Verder geldt wegens (8) en (28) dat

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{d\chi_k}{d\rho} = \xi_1^{(k)}\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{d\psi_1}{d\rho} \qquad (k = 1,\dots,N) \tag{34}$$

Nu hebben we wegens (12)

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{d\psi_1}{d\rho} = -q_0$$

dan volgt uit (33) en (34), dat $a_k = +q_0\xi_1^{(k)}$ $(k = 1,\dots,N)$
en dus wegens (30) dat

$$\chi_k(\rho) = q_0\xi_1^{(k)}K_0(\sqrt{\lambda}_k\rho) \qquad (k = 1,\dots,N) \tag{35}$$

Wegens (27) heeft het stelsel vergelijkingen (28) een eenduidig bepaalde oplossing van de vorm

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{N} b_{jk}\chi_k \qquad (j = 1,\dots,N) \tag{36}$$

waarin $b_{j,k}(j,k = 1,\dots,N)$ bekende getallen zijn. Met (35) volgt uit (36)

$$\psi_j = q_0\sum_{k=1}^{N} b_{jk}\xi_1^{(k)}K_0(\sqrt{\lambda}_k\rho) \qquad (j = 1,\dots,N) \tag{37}$$

waarmee de oplossing van het gestelde probleem is gevonden.

Toepassing. Zij N = 2. Vergelijking (18) wordt nu

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1-\lambda & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ofwel

$$\lambda^2 - \lambda(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1) + \alpha_1\alpha_2 = 0$$

met als wortels

$$(39)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\sqrt{(\alpha_1+\beta_1-\alpha_2)^2+4\alpha_2\beta_1}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\sqrt{(\alpha_1+\beta_1-\alpha_2)^2+4\alpha_2\beta_1}}{2} \end{aligned}$$

Vervolgens bepalen we de grootheden $\xi_j^{(k)}$ uit de met (17) corresponderende vergelijkingen

$$\begin{aligned} (\alpha_1+\beta_1-\lambda_k)\,\xi_1^{(k)} - \alpha_2\,\xi_2^{(k)} &= 0 \\ -\beta_1\xi_1^{(k)} + (\alpha_2-\lambda_k)\,\xi_2^{(k)} &= 0 \end{aligned} \qquad (k = 1,2)$$

Als oplossing kunnen we nemen

$$(40)\qquad \xi_1^{(k)} = \alpha_2-\lambda_k \quad \text{en} \quad \xi_2^{(k)} = \beta_1 \qquad (k = 1,2)$$

en (28) wordt nu

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (\alpha_2-\lambda_1)\psi_1 + \beta_1\psi_2 \\ \chi_2 &= (\alpha_2-\lambda_2)\psi_2 + \beta_1\psi_2 \end{aligned}$$

en de met (36) overeenkomende oplossing van (41) is

$$(41)\qquad \begin{aligned} \psi_1 &= b_{11}\chi_1 + b_{12}\chi_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\chi_1 - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\chi_2 \\ \psi_2 &= b_{21}\chi_1 + b_{22}\chi_2 = \frac{\lambda_2-\alpha_2}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)}\chi_1 + \frac{\alpha_2-\lambda_1}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)}\chi_2 \end{aligned}$$

Voor de oplossing (37) vinden we nu

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{q_0}{\lambda_1-\lambda_2}\left[(\lambda_1-\alpha_2)K_0(\sqrt{\lambda_1}\,\rho) + (\alpha_2-\lambda_2)K_0(\sqrt{\lambda_2}\,\rho)\right] \\ &\text{en} \\ \psi_2 &= q_0\,\frac{(\lambda_1-\alpha_2)(\alpha_2-\lambda_2)}{\beta_1(\lambda_1-\lambda_2)}\left[-K_0(\sqrt{\lambda_1}\,\rho) + K_0(\sqrt{\lambda_2}\,\rho)\right] \end{aligned} \right.$$

De combinatie van de formules (3), (9), (14), (39) en (42) geeft voor N = 2 de oplossing van het gestelde probleem.

<u>Probleem B.</u> Laten R en h positieve constanten voorstellen en zij $\varphi_0(x,y)$ als volgt gegeven

$$(46)\qquad \begin{aligned} \varphi_0(x,y) &= 1 + h \qquad &\text{voor } \rho = \sqrt{x^2+y^2} \leqq R \\ &= 1 &\text{voor } \rho > R\,. \end{aligned}$$

Laten verder β_1, α_2, d_1 en d_2 gegeven positieve constanten zijn, en stel nu

$$(47) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= d_1 \qquad \text{voor } \rho \leq R \\ &= d_2 \qquad \text{voor } \rho > R \end{aligned}$$

Gevraagd wordt de oplossing $(\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho))$ van het tweetal simultane differentiaalvergelijkingen

$$(48) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi_1}{d\rho} &= \alpha_1(\varphi_1 - \varphi_o) + \beta_1(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{d^2\varphi_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi_2}{d\rho} &= \alpha_2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

zodanig dat de functies $\varphi_1(\rho)$ en $\varphi_2(\rho)$ voor $\rho = R$ tenminste éénmaal differentieerbaar zijn en voldoen aan de randvoorwaarden

$$(49) \qquad \lim_{\rho \to \infty} \varphi_j(\rho) = 1 \qquad (j = 1,2)$$

$$(50) \qquad \frac{d\varphi_j(0)}{d\rho} = 0 \qquad (j = 1,2)$$

Opm. Dit probleem correspondeert met het geval dat de derde leemlaag ondoorlaatbaar is ($c_3 = \infty$ en $\beta_2 = 0$); terwijl de oorspronkelijke grondwaterdruk $\varphi_e = 1$ kunstmatig met een bedrag h wordt verhoogd (bijvoorbeeld door een cirkelvormig bassin). De grootheden α_1, α_2 en β_1 worden als vroeger door (3) wordt gedefinieerd. Hierin zijn k_1, k_2, D_1, D_2 en c_2 constanten, doch c_1 neemt voor $\rho \leq R$ en $\rho > R$ verschillende constante waarden aan.

We stellen nu voor $j = 1,2$

$$(51) \qquad \begin{aligned} \psi_j(x) &= \varphi_j(x) - 1 - h \qquad \text{als } \rho < R \\ \psi_j(x) &= \varphi_j(x) - 1 \qquad \text{als } \rho > R \end{aligned}$$

Dan volgt uit (46) en (48) voor $\rho \neq R$ dat $\psi_o(x) = 0$ en

$$(52) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\psi_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi_1}{d\rho} &= \alpha_1\psi_1 + \beta_1(\psi_1 - \psi_2) \\ \frac{d^2\psi_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\psi_2}{d\rho} &= \alpha_2(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned}$$

terwijl de randvoorwaarden (49) en (50) overgaan in

(53) $\lim_{\rho \to \infty} \psi_j(\rho) = 0$ $(j = 1,2)$

(54) $\frac{d\,\psi_j(0)}{d\,\rho} = 0$ $(j = 1,2)$

Beperken we ons vooreerst tot het geval, dat $\rho < R$; voor deze waarden is $\alpha_1 = d_1$ een positieve constante. Analoog met (39) stellen we

$$\lambda_{1,2} = \frac{d_1+\alpha_2+\beta_1 \pm \sqrt{(d_1+\beta_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1}}{2}$$

en overeenkomstig met de vergelijkingen (28), (29) en (40) volgt dat de functie

(55) $\chi_k = (\alpha_2 - \lambda_k)\psi_1 + \beta_1\psi_2$ $(k = 1,2)$

voor $\rho < R$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

(56) $\frac{d^2\chi_k}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\chi_k}{d\rho} = \lambda_k \chi_k$

In verband met (54) en (55) hebben we $\frac{d\chi_{k(0)}}{d\rho} = 0$ en wegens (56) volgt dus voor $\rho < R$

(57) $\chi_k = p_k\ I_o(\sqrt{\lambda_k}\,\rho)$ $(k = 1,2)$

met p_k constant en $I_o(x) = J_o(ix)$ waarin $J_o(x)$ de nulde Besselfunctie voorstelt.

Lost men uit de vergelijkingen (55) ψ_1 en ψ_2 op, dan vindt men wegens (51) en (57) voor $\rho < R$

(58) $$\begin{cases} \varphi_1 = 1 + h + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ p_1\ I_o(\sqrt{\lambda_1}\rho) - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ p_2\ I_o(\sqrt{\lambda_2}\rho) \\ \varphi_2 = 1 + h + \frac{\lambda_2-\alpha_2}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)}\ p_1\ I_o(\sqrt{\lambda_1}\rho) + \frac{\alpha_2-\lambda_1}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)}\ p_2\ I_o(\sqrt{\lambda_2}\rho) \end{cases}$$

Stellen we

$$\mu_{1,2} = \frac{d_2+\alpha_2+\beta_1 \pm \sqrt{(d_1+\beta_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1}}{2}$$

en maken we gebruik van de randvoorwaarden (53), dan volgt geheel analoog voor $\rho > R$

(59) $$\begin{cases} \varphi_1 = 1 + \frac{1}{\mu_2-\mu_1}\ q_1\ K_o(\sqrt{\mu_1}\rho) - \frac{1}{\mu_2-\mu_1}\ q_2\ K_o(\sqrt{\mu_2}\rho) \\ \varphi_2 = 1 + \frac{\mu_2-\alpha_2}{\beta_1(\mu_2-\mu_1)}\ q_1\ K_o(\sqrt{\mu_1}\rho) + \frac{\alpha_2-\mu_1}{\beta_1(\mu_2-\mu_1)}\ q_2\ K_o(\sqrt{\mu_2}\rho) \end{cases}$$

waarin q_1 en q_2 constanten voorstellen.

Stelt men nu de voorwaarde, dat door (58) en (59) voor $\rho \leq R$ resp. $\rho \geq R$ gedefinieerde functies $\varphi_1(\rho)$ en $\varphi_2(\rho)$ voor $\rho = R$ aan elkaar sluiten en dat ook de afgeleide geen sprong maakt, dan volgt wegens (31) en $\frac{d}{dx} I_o(x) = I_1(x)$

$$
(60) \quad \begin{cases} 1 + h + \dfrac{p_1}{\lambda_2-\lambda_1} I_o(\sqrt{\lambda_1} R) - \dfrac{p_2}{\lambda_2-\lambda_1} I_o(\sqrt{\lambda_2} R) \\ = 1 + \dfrac{q_1}{\mu_2-\mu_1} K_o(\sqrt{\mu_1} R) - \dfrac{q_2}{\mu_2-\mu_1} K_o(\sqrt{\mu_2} R) \end{cases}
$$

$$
(61) \quad \begin{cases} 1 + h + \dfrac{\lambda_2-\alpha_2}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)} p_1 I_o(\sqrt{\lambda_1} R) + \dfrac{\alpha_2-\lambda_2}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)} p_2 I_o(\sqrt{\lambda_2} R) \\ = 1 + \dfrac{\mu_2-\alpha_2}{\beta_1(\mu_2-\mu_1)} q_1 K_o(\sqrt{\mu_1} R) + \dfrac{\alpha_2-\mu_1}{\beta_1(\mu_2-\mu_1)} q_2 K_o(\sqrt{\mu_2} R) \end{cases}
$$

$$
(62) \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1} p_1 I_1(\sqrt{\lambda_1} R) - \dfrac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_2-\lambda_1} p_2 I_1(\sqrt{\lambda_2} R) \\ = -\dfrac{\sqrt{\mu_1}}{\mu_2-\mu_1} q_1 K_1(\sqrt{\mu_1} R) + \dfrac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_2-\mu_1} q_2 K_1(\sqrt{\mu_2} R) \end{cases}
$$

$$
(63) \quad \begin{cases} \dfrac{(\lambda_2-\alpha_2)\sqrt{\lambda_1}}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)} p_1 I_1(\sqrt{\lambda_1} R) + \dfrac{(\alpha_2-\lambda_2)\sqrt{\lambda_2}}{\beta_1(\lambda_2-\lambda_1)} p_2 I_1(\sqrt{\lambda_2} R) \\ = \dfrac{(\mu_2-\alpha_2)\sqrt{\mu_1}}{\beta_1(\mu_2-\mu_1)} q_1 K_1(\sqrt{\mu_1} R) - \dfrac{(\alpha_2-\mu_1)\sqrt{\mu_2}}{\beta_1(\mu_2-\mu_1)} p_2 K_1(\sqrt{\mu_2} R) \end{cases}
$$

Uit de vier vergelijkingen (60), (61), (62) en (63) lost men nu de vier onbekende constanten p_1, p_2, q_1 en q_2 op. Dan geven (58) en (59) de oplossing van probleem B.