MATHEMATISCH CENTRUM

Afd. Toegepaste Wiskunde

Rapport T.W. nr 18

Auteur: Dr C.G.G. van Herk.

Titel: Over de Verzilting van een aan-
slibbende Zeebodem

Datum: April 1952.

Over de verzilting van een aanslibbende zeebodem.

1. Schema van het object.

In verband met een onderzoek naar de verzilting van de bodem onder de voormalige Zuiderzee worden de volgende veronderstellingen gemaakt:

(a) Het zeewater heeft een constant zoutgehalte.
(b) Het oppervlak van de zeebodem is vlak, horizontaal en onbegrensd.
(c) Deze bodem slibt met een constante snelheid aan.
(d) De ondergrond is homogeen, isotroop en oneindig diep, en heeft dezelfde eigenschappen als het aangeslibde materiaal.
(e) Toen de Zuiderzee ontstond had de bodem een constant zoutgehalte, lager dan dat van het zeewater.

Op deze wijze wordt het verziltingsprobleem eendimensionaal.

2. Formulering van het vraagstuk.

Zij t de tijd gerekend van het ontstaan van de Zuiderzee af. Zij $\bar{x}$ de diepte van een punt onder het bodemoppervlak op het tijdstip $t = 0$. Op het tijdstip t is dan de diepte van dit punt onder de zeebodem

(1) $$x = \bar{x} + 2\,k\,t,$$

als k een constante is die afhangt van de snelheid der aanslibbing. Zij

(2) $$u(\bar{x},t) = v(x,t) \qquad (x \geq 0,\ t \geq 0)$$

het zoutgehalte van de bodem in het punt $(\bar{x},t)$. Dit gehalte voldoet aan de diffusievergelijking

(3) $$u_{\bar{x}\bar{x}} - u_t = 0,$$

waarbij een eenheid, b.v. van de tijd, zo gekozen wordt, dat de diffusieconstante 1 is (partiële afgeleiden worden aangegeven door de onafhankelijke veranderlijken, waarnaar gedifferentieerd is, als indices te schrijven). In het coordinatenstelsel (x,t) geeft dit, wegens (1), (2), (3)

(4) $$v_{xx} - 2\,k\,v_x - v_t = 0.$$

Zonder beperking van de algemeenheid kan het zoutgehalte van de bodem op het tijdstip $t = 0$ nul worden gesteld. Men kan immers alleen het bedrag in rekening brengen, waarmee de zee de onverzilte bodem in zoutgehalte overtreft.

Dit levert de randvoorwaarden

(5) $v(x,0)= 0 \quad (x>0) \quad ; \quad v(x,t) \to 0 \; (x \to \infty, \; 0<t<\infty).$

Wordt nu nog de eenheid van zoutgehalte zo gekozen dat het zeewater het gehalte 1 heeft, dan is

(6) $v(0,t)= 1 \qquad (t > 0).$

Hiermee is het probleem wiskundig bepaald. Aangezien een afleiding van de oplossing tot vrij uitvoerige beschouwingen zou leiden is het eenvoudiger rechtstreeks te bewijzen, dat het verkregen resultaat de oplossing inderdaad voorstelt. (Bij de vraag in hoeverre de hier gegeven oplossing de enige is, doen zich nog verdere theoretische kwesties voor, maar deze zijn toch niet van practisch belang).

3. Discussie van de oplossing.

Men heeft

(7) $$v(x,t)= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(r-\frac{kx}{2r})^2} dr =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{kx} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-r^2 - \frac{k^2x^2}{4r^2}) dr.$$

De integraal heeft in het gehele gebied $x \geq 0$, $t \geq 0$, met uitzondering van het punt (0,0), een bepaalde waarde. Wegens

$$v(x,t) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{kx} \int_0^{\infty} \exp(-r^2 - \frac{k^2x^2}{4r^2}) dr = v(x,\infty)= 1$$

heeft men

(8) $0 \leq v(x,t) \leq 1,$

zoals om natuurkundige redenen ook het geval moest zijn (zie voor de integraal b.v. Jordan, Cours d'Analyse II (1913) p. 198).

Door de verschillende differentiaties uit te voeren kan men gemakkelijk verifieren dat de uitdrukking (7) aan de differentiaalvergelijking (4) voldoet (in het rechter lid van (7) is differentiatie onder het integraalteken naar x geoorloofd).

Verder volgt uit (7) onmiddellijk, dat aan $v(x,0)= 0$ voor $x > 0$ is voldaan. Wegens

$$v(0,t)= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = 1 \qquad (t>0)$$

is ook aan de randvoorwaarde (6) voldaan. Tenslotte levert de substitutie $r = x\,s$ in (7), wegens $2\,s\,\sqrt{t} \geq 1$, de ongelijkheid

$$v(x,t)= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \; e^{kx} \int_{\frac{1}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(- x^2 s^2 - \frac{k^2}{4s^2}) \, ds$$

$$< \frac{4}{\sqrt{\pi}} \, x \sqrt{t} \, e^{kx} \int_{\frac{1}{2\sqrt{t}}}^{\infty} s \, e^{-x^2 s^2} \, ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \, x^{-1} \, t^{\frac{1}{2}} \exp(kx - \frac{x^2}{4t}),$$

waarvan het rechter lid bij staande t en voor $x \to \infty$ tot nul nadert, zodat ook aan de randvoorwaarde (5b) is voldaan.

De oplossing kan ook worden voorgesteld door

(9) $$v(x,t)= 1 - \frac{2}{\pi} \; e^{kx-k^2 t} \int_{0}^{\infty} \frac{\nu \sin \nu x}{k^2+ \nu^2} \; e^{-\nu^2 t} \; d\nu ,$$

die het voordeel heeft dat het verband met de differentiaalvergelijking (4) onmiddellijk evident is. De identiteit van (7) en (9) volgt door differentiatie naar t, aangezien beide uitdrukkingen de waarde $v(x,\infty)= 1$ leveren. Voor numerieke berekening is (9) echter minder geschikt door het oscillerende gedrag van de integrand.

Voor $k = 0$ gaat $v(x,t)$ over in de oplossing van een bekend probleem uit de theorie van de warmtegeleiding (zie bv. Courant-Hilbert, Methoden d. Mathematischen Physik II (1937), pp. 210-215).