WN - 18 December 1965

De onderlinge afhankelijkheid van een aantal topologische axioma's die verband houden met het K-axioma.

door

P. van Emde Boas

D. Mantel

J. van der Slot

G.E. Strecker

E. Wattel

§1. Inleiding

In deze notitie wordt verslag uitgebracht van enkele resultaten van een werkgroep over K-ruimten, gevormd door de schrijvers, terwijl tevens de notatie wordt vastgelegd voor het verdere onderzoek van deze groep.

Onderwerp van deze notities is het verband tussen een aantal hieronder genoemde axioma's voor topologische ruimten. De afhankelijkheden tussen deze axioma's worden volledig geanalyseerd, en voor iedere mogelijke combinatie worden voorbeelden geconstrueerd, die alleen aan die axioma's voldoen.

§2. Axioma's en stellingen

Wij beschouwen de volgende tien axioma's:

Cpt : Elke overdekking heeft een eindige deeloverdekking (compactheid).

CI : De doorsnede van twee compacte verzamelingen is compact.

CC : Elke compacte verzameling is gesloten.

MC : De gesloten verzamelingen zijn juist de compacte verzamelingen (maximaal compact).

T_1 : Ieder punt is gesloten.

T_2 : Hausdorff-eigenschap.

O : Iedere verzameling die een gesloten doorsnede heeft met elke compacte verzameling is gesloten.

i : Iedere verzameling die een compacte doorsnede heeft met elke compacte verzameling is gesloten.

C : Iedere verzameling die een compacte doorsnede heeft met elke compacte gesloten verzameling is gesloten.

K : Iedere verzameling die een gesloten doorsnede heeft met elke compacte gesloten verzameling is gesloten.

Deze axioma's bezitten allen de volgende eigenschap ten opzichte van het vormen van de disjuncte topologische som van twee ruimten A en B. (Voortaan zullen wij de disjuncte topologische som aanduiden met het symbool $\overset{+}{\cup}$):

Dan en slechts dan voldoet de disjuncte topologische som A $\overset{+}{\cup}$ B aan een axioma (X) als zowel A als B aan het axioma (X) voldoet.

De beschouwde axioma's zijn niet onafhankelijk. Hun onderlinge samenhang is samengevat in het volgende implicatie-schema:

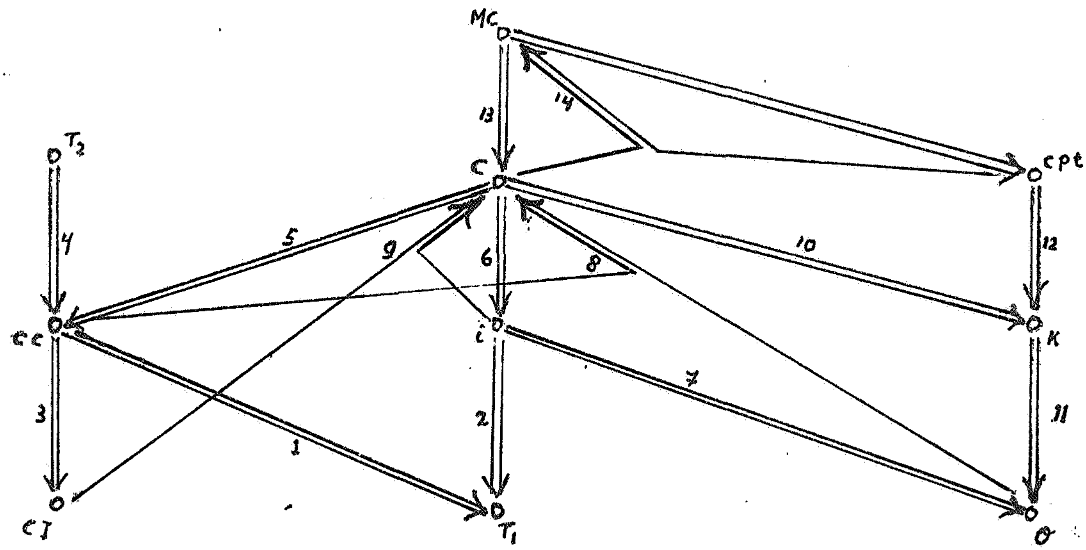


fig. 1

[De getallen bij de pijlen zijn de nummers van de bijbehorende stellingen. Bij een gespleten pijl zijn beide uitgangspunten noodzakelijk om het eindpunt te kunnen bereiken.]

Stelling 1 : Iedere CC-ruimte is T_1.
Bewijs: Ieder punt is compact, dus gesloten.

Stelling 2 : Iedere i-ruimte is T_1.
Bewijs: De doorsnede van een punt met een compacte verzameling is leeg, of een punt, dus compact. Elk punt is dus gesloten.

Stelling 3 : Iedere CC-ruimte is CI.
Bewijs: Als C_1 en C_2 compact zijn, dan zijn zij gesloten, dus hun doorsnede is een gesloten deel van C_2 en dus compact.

Stelling 4 : Iedere T_2-ruimte is CC.
(bewijs bekend)

Stelling 5 : Iedere C-ruimte is CC.
Bewijs: Stel A compact, dan is voor iedere gesloten compacte verzameling C, $C \cap A$ een gesloten deel van een compacte verzameling A, en dus compact. Hieruit volgt dat A gesloten is, met behulp van het C-axioma.

Stelling 6 : Iedere C-ruimte is een i-ruimte.
Bewijs: Stel G is een verzameling met de eigenschap dat hij met iedere compacte verzameling C een compacte doorsnede heeft. Dan heeft hij zeker met iedere gesloten compacte verzameling een compacte doorsnede, dus de verzameling G is volgens het C-axioma gesloten. Hieruit volgt het i-axioma.

Stelling 7 : Iedere i-ruimte is O.
Bewijs: Stel G heeft met iedere compacte verzameling C een gesloten doorsnede, dan heeft hij zeker met iedere compacte verzameling C een compacte doorsnede, want een

gesloten deelverzameling van een compacte verzameling is compact. Volgens het i-axioma is G nu gesloten. Hieruit volgt het O-axioma.

Stelling 8 : Iedere CC-O-ruimte is C.

Bewijs: Stel G heeft met iedere compacte gesloten verzameling C een compacte doorsnede. $C \cap G$ is dus gesloten. Iedere compacte verzameling is gesloten, dus ook G is volgens het O-axioma gesloten. Hieruit volgt het C-axioma.

Stelling 9 : Iedere CI-i-ruimte is C.

Bewijs: Stel C is compact, dan heeft C een compacte doorsnede met iedere compacte verzameling C'. Door toepassing van het i-axioma is C nu gesloten, dus de ruimte is CC. De stelling volgt nu uit stelling 7 en stelling 8.

Stelling 10 : Iedere C-ruimte is K.

Bewijs: Stel G heeft met iedere compacte gesloten verzamaling C een gesloten doorsnede, dan is deze doorsnede zeker compact, dus geldt via het C-axioma dat G gesloten is. Hieruit volgt het K-axioma.

Stelling 11 : Iedere K-ruimte is O.

Bewijs: Stel G heeft een gesloten doorsnede met iedere compacte verzameling. Dan heeft G zeker een gesloten doorsnede met iedere compacte gesloten verzameling, dus G is gesloten volgens het K-axioma. Hieruit volgt het O-axioma.

Stelling 12 : Iedere compacte ruimte is K.

Bewijs: Stel G heeft met iedere compacte gesloten verzameling een gesloten doorsnede, dan heeft G ook met de hele ruimte een gesloten doorsnede, dus G is gesloten. Hieruit volgt het K-axioma.

Stelling 13 : Iedere maximaal compacte ruimte is C.
Bewijs: De gesloten verzamelingen en de compacte verzamelingen zijn identiek. De ruimte is dus CC, De ruimte is maximaal compact, dus compact, en volgens stelling 11 en 12 is zij ook O. Uit stelling 8 volgt nu het gestelde.

Stelling 14 : Iedere compacte C-ruimte is maximaal-compact.
Bewijs: Uit stelling 5 volgt, dat iedere C-ruimte CC is. Dus elke compacte verzameling is gesloten. Uit het feit, dat de ruimte compact is, volgt dat elke gesloten verzameling ook compact is, dus de gesloten en de compacte verzamelingen zijn identiek.

Uit deze stellingen volgen nog enkele andere:

Stelling 15 : Een ruimte is dan en slechts dan C, als zij CC en O is.

Stelling 16 : Een ruimte is dan en slechts dan C, als zij CI en i is.

Stelling 17 : Een ruimte is dan en slechts dan maximaal compact, als zij compact en C is.

Stelling 18 : Een compacte Hausdorff-ruimte is maximaal compact.
Bewijs: Pas achtereenvolgens 4, 12, 11, 8 en 14 toe.

Stelling 19 : Iedere deelruimte van een CC-ruimte is CC.
Bewijs: Zij X een CC-ruimte, en $A \subset X$; $C \subset A$; C is compact in A, dus C is compact in X; C is daarom gesloten in X. Hieruit volgt: C is gesloten in A.

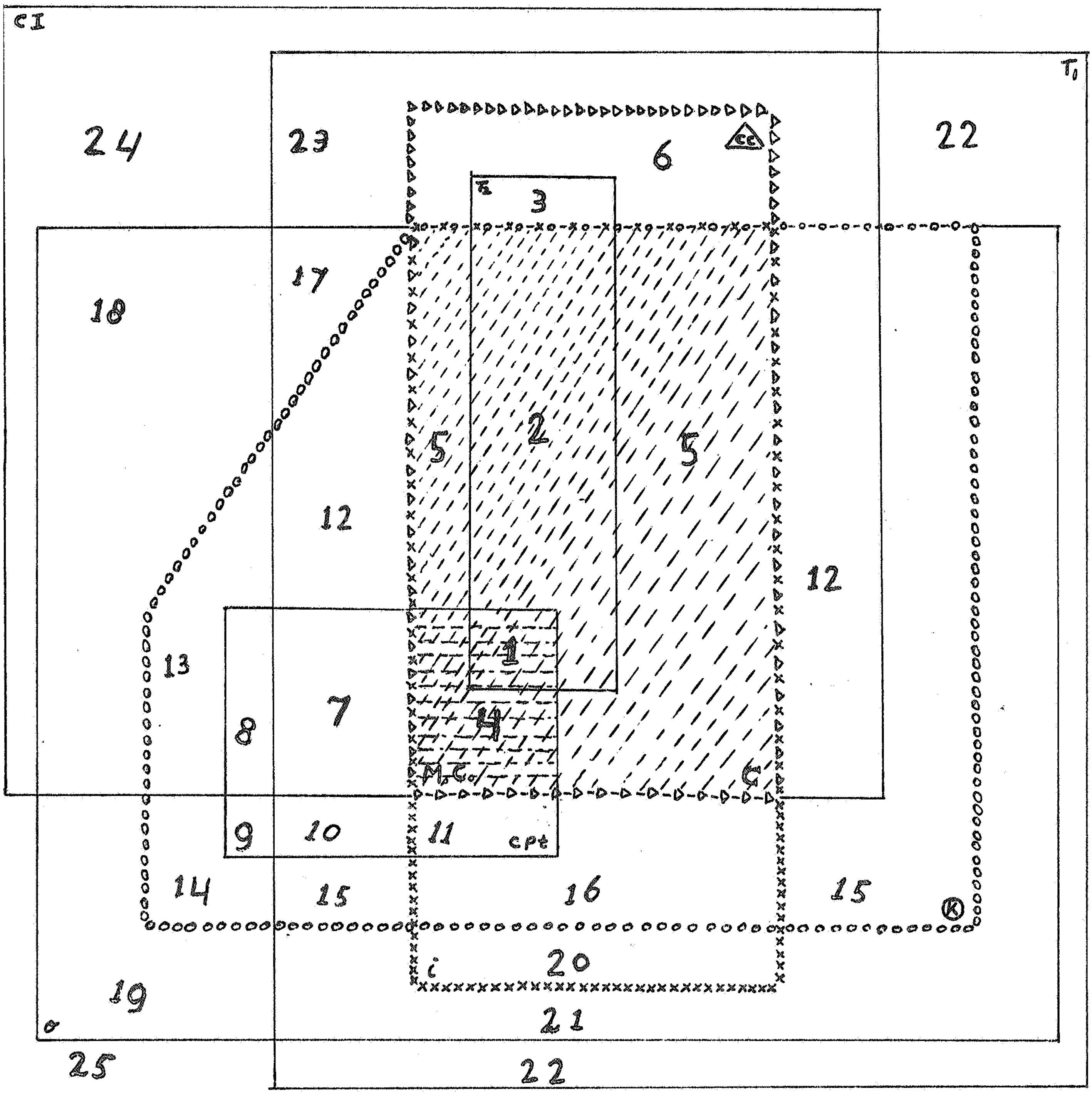
Stelling 20 : Iedere deelruimte van een CI-ruimte is CI.
Bewijs: Zij X een CI-ruimte, en $A \subset X$. Zijn C_1 en C_2 compacte deelverzamelingen van A. Dan zijn het compacte deelverzamelingen van X, dus is hun doorsnede compact in X. Hun doorsnede is dus ook compact in A.

<u>Stelling 21</u> : Stel (P) is een van de volgende vijf eigenschappen: Cpt, O, K, C of i, dan is ieder gesloten deel van een (P)-ruimte weer (P).

<u>Bewijs</u>: Voor compactheid is het bekend. Zij X de hele ruimte. Zij A een gesloten deel van X. Zij G deelverzameling van A , zodanig dat voor elke compacte (resp. compacte gesloten, resp. compacte gesloten, resp. compacte) verzameling C van de deelruimte A geldt dat $G \cap C$ gesloten (resp. gesloten, resp. compact, resp. compact) is binnen A. Als nu $\hat{C}$ een willekeurige compacte (resp. gesloten compacte, resp. gesloten compacte, resp. compacte) verzameling van X is, dan is $A \cap \hat{C}$ een gesloten deelverzameling van $\hat{C}$ en dus, in geval het O (K, C, i)-axioma geldt, compact (resp. compact gesloten, resp. compact gesloten, resp. compact) binnen X en daarom ook binnen A. Dus is $G \cap (A \cap \hat{C}) = G \cap \hat{C}$ gesloten (resp. gesloten, resp. compact, resp. compact) in A, dus ook in X. Uit de definitie van een O (K, C, i)-ruimte volgt nu, dat G gesloten is binnen X, dus ook binnen A.
Hieruit volgt de geldigheid van het O (K, C, i)-axioma voor A.

<u>Stelling 22</u> : Voor de acht axioma's T_1, T_2, C, K, i, CI en CC geldt, dat de topologische disjuncte som van een willekeurig aantal ruimten aan het axioma voldoet, dan en slechts dan als alle samenstellende ruimten aan het axioma voldoen.

<u>Bewijs</u>: Triviaal.



0 000 = K ; xxxx = i ; ▷▷▷▷ = cc ; ≡≡≡≡ = M.C ; //// = c

fig. 2

§3. Lijst van voorbeelden.

Bij de weergave van elk der hieronder vermelde voorbeelden gebruiken wij (waar nodig) de volgende conventies:

X is de verzameling waarop de topologische ruimte gedefinieerd is.
$\mathcal{O}$ is de collectie open verzamelingen. Een omgevingsbasis van een punt (x) zal worden aangegeven met $\mathcal{V}_{(x)}$. Een subbasis zal worden aangegeven met $\mathcal{S}$
$\mathcal{G}$ is het stelsel gesloten verzamelingen.
$\mathcal{C}$ is het stelsel compacte verzamelingen.
$\mathcal{G} \cap \mathcal{C}$ is dan het stelsel compact gesloten verzamelingen:
$\emptyset$ en X zijn natuurlijk altijd opgesloten, ook als dit niet expliciet staat aangegeven.

De nummers van de voorbeelden verwijzen naar de nummers in het diagram: zie fig. 2.

1 : Compact Hausdorff: Ieder gesloten, begrensd deel van een E^n.
2_a : Locaal compact Hausdorff, niet compact: E^n.
2_b : Oneindige discrete ruimte.
2_c : Hausdorffs 1e aftelbaarheidsaxioma: de rationale getallen.
3 : X = de verzameling der ordinaalgetallen $\leq \Omega$.

$$\mathcal{S} = \{\{\alpha\} \mid \alpha < \Omega\} \cup \mathcal{V}_{(\Omega)} \text{ waarbij } \mathcal{V}_{(\Omega)} = \{U_\beta \mid U_\beta = \{\gamma \mid \gamma \geq \beta\}\ \beta < \Omega\}$$

$$\mathcal{C} = \{C \mid C \text{ is eindig}\}$$

De ruimte is Hausdorffs, maar niet O want ieder deel van een compacte verzameling is gesloten.

4 : De één-punts compactificatie van de rationale getallen is maximaal compact, maar niet Hausdorffs. Het laatste volgt uit het feit dat de rationale getallen nergens locaal compact zijn. Het eerste is een gevolg van de algemene stelling:

St : De een-punts compactificatie $X \cup \{\infty\}$ van een C-ruimte X is maximaal compact.

Bewijs: Zij A een compact deel van $X \cup \{\infty\}$ en $\infty \notin A$; dan is A compact en gesloten, dus $(X \cup \{\infty\}) \setminus A$ open in $X \cup \{\infty\}$. Als $\infty \in A$, dan

beschouwen we $\hat{A} = A \setminus \{\infty\}$. Zij C een compact gesloten deel van X (dan is C ook een compact gesloten deel van $X \cup \{\infty\}$).
Nu is $C \cap \hat{A} = C \cap A$ een compact gesloten deel van een compacte verzameling (in $X \cup \{\infty\}$) dus weer compact in $X \cup \{\infty\}$. Daar $C \subset X$ is $C \cap A = C \cap \hat{A} \subset X$ een compact deel van X. X is een C-ruimte, dus $\hat{A}$ is gesloten in X. Hieruit volgt dat $\hat{A} \cup \{\infty\} = A$ gesloten is in $X \cup \{\infty\}$. q.e.d.

5 : Laat $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ een stelsel disjuncte copieën van de eenpuntscompactificatie der rationale getallen zijn. Dan is $\overset{+}{\bigcup}_{i=1}^{\infty}$ een voorbeeld voor een niet compacte, niet T_2, C-ruimte. Pas proposities over $\overset{+}{\bigcup}$ toe.

6a : X is een over-aftelbare verzameling:
$\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ is aftelbaar}\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid C \text{ is eindig}\}$
Hieruit volgt dat ruimte T_1 en CC is maar niet O want ieder deel van een compacte verzameling is gesloten.

6b : $X = A \cup \{p_1, p_2\}$ A is over-aftelbaar $p_1 \neq p_2$ p_1 en $p_2 \notin A$
$\mathcal{S} = \{\{a\} \mid a \in A\} \cup \mathcal{V}_{(p_1)} \cup \mathcal{V}_{(p_2)}$

waarbij $\mathcal{V}_{(p_i)} = \{U \mid p_i \in U \text{ en } A \setminus U \text{ aftelbaar}\}$ $i = 1,2$

$\mathcal{C} = \{C \mid C \text{ is eindig}\}$
De ruimte is T_1 en CC maar niet O want ieder deel van een compacte verzameling is gesloten.

7a : De Zariski ruimte gedefinieerd op een oneindige verzameling
$X = A$ A oneindig
$\mathcal{G} = \{G \mid G \text{ is eindig}\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid C \subseteq A\}$
De ruimte is T_1 en compact en CI maar niet C want ieder deel van een compact gesloten verzameling is compact.

7b : $X = A \cup \{p_1, p_2\}$ A is over-aftelbaar $p_1 \neq p_2$ p_1 en $p_2 \notin A$
$\mathcal{S} = \{\{a\} \mid a \in A\} \cup \mathcal{V}_{(p_1)} \cup \mathcal{V}_{(p_2)}$

waarbij $\mathcal{V}_{(p_1)} = \{U \mid p_1 \in U$ en $A \setminus U$ aftelbaar$\}$

$\mathcal{V}_{(p_2)} = \{U \mid p_2 \in U$ en $A \setminus U$ eindig $\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid C$ is eindig of $p_2 \in C\}$

De ruimte is T_1 en CI en compact maar niet C want $A \cup \{p_2\}$ heeft met iedere compacte C een compacte ddorsnede maar is niet gesloten.

8a : Een willekeurige verzameling X met meer dan een punt met de indiscrete topologie. Deze ruimte is compact maar niet T_1.
$\mathcal{C} = \{C \mid C \subset X\}$. De ruimte is CI.

8b : Harem:
$X = A \cup \{p\}$ A is oneindig $p \notin A$
$\mathcal{O} = \{O \mid p \notin O\}$
$\mathcal{G} = \{G \mid p \in G\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid p \in C$ of C is eindig$\}$
De ruimte is niet T_2. Wel compact en CI.

11 : De natuurlijke getallen convergerende naar twee punten:
$X = \mathbb{N} \cup \{\omega_1, \omega_2\}$
$\mathcal{S} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathcal{V}_{(\omega_1)} \cup \mathcal{V}_{(\omega_2)}$

waarbij $\mathcal{V}_{(\omega_2)} = \{U_{ij} \mid U_{ij} = \{\omega_i\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq j\}\}$ $i = 1, 2.$ $j \in \mathbb{N}$

$\mathcal{G} = \{G \mid G$ is eindig of ω_1 en $\omega_2 \in G\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid C$ is eindig of $\omega_1 \in C$ of $\omega_2 \in C\}$
De ruimte is compact en T_1. De ruimte is niet CI want $\mathbb{N} \cup \{\omega_1\}$ en $\mathbb{N} \cup \{\omega_2\}$ zijn compact maar hun doorsnede $\mathbb{N}$ niet.
Iedere (niet eindige) niet gesloten verzameling A bevat niet ω_1 en ω_2 beiden, dus indien $\omega_i \notin A$ is $\mathbb{N} \cup \{\omega_i\}$ een compacte verzameling die met A een niet compacte doorsnede heeft. De ruimte is dus i.

12 : Zij X_k voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een oneindige Zariski ruimte, onderling disjunct; dan is $\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} X_k$ een voorbeeld voor een niet compacte, T_1, K, CI, niet C ruimte.

13 : Zij X_k voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een indiscrete ruimte met meer dan een punt onderling disjunct, dan is $\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} X_k$ een voorbeeld voor een niet compacte, niet T_1, CI, K ruimte.

16 : De gehele getallen convergerende naar boven naar twee punten:

$X = \mathbb{Z} \cup \{\omega_1, \omega_2\}$

$\mathcal{S} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \mathcal{V}_{(\omega_1)} \cup \mathcal{V}_{(\omega_2)}$

waarbij $\mathcal{V}_{(\omega_i)} = \{V_{ij} \mid V_{ij} = \{\{\omega_i\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq j\}\}$ $i = 1,2$ $j \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{G} = \{G \mid G$ is naar boven begrensd of ω_1 en $\omega_2 \in G\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid C$ is eindig of C is naar beneden begrensd en ω_1 of $\omega_2 \in C\}$

X is een niet compacte, niet C, i-ruimte. X laat zich beschouwen als de disjuncte topologische som van ruimte 11 en een aftelbare discrete ruimte (2). Pas nu de proposities over $\dot{\bigcup}$ toe.

17 : Atoom met Zariski kern:

$X = A_0 \cup A_1$ $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ A_0 en A_1 oneindig.

$\mathcal{O} = \{O \mid A_0 \setminus O$ is eindig$\}$

$\mathcal{G} = \{G \mid G \cap A_0$ is eindig$\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid C \cap A_1$ is eindig$\}$

$\mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \{A \mid A \cap A_0$ en $A \cap A_1\}$ is eindig.

Ieder deel van een compact gesloten verzameling is weer compact gesloten, dus de ruimte is niet K. De ruimte is T_1 en CI. Stel A heeft een gesloten doorsnede met iedere compacte verzameling. A_0 is compact, dus $A \cap A_0$ is eindig $\Rightarrow$ A is gesloten.
A_0 is te beschouwen als compacte kern, A_1 als discrete periferie.

18a : De natuurlijke getallen met beginstukken-topologie:

$X = \mathbb{N}$

$\mathcal{O} = \{O_n \mid O_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{G} = \{G_n \mid G_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid C$ is eindig$\}$

$\mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Uit $\mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ volgt dat de ruimte niet K is. Geen enkel deel van

een compacte verzameling is gesloten, dus de ruimte is vanzelf O.
De ruimte is niet T_1 maar wel CI.

18b : Fan-club:

$X = A \cup \{p\}$ A oneindig. $p \notin A$
$\mathcal{O} = \{O \mid p \in O\}$
$\mathcal{G} = \{G \mid p \notin G\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid C \text{ is eindig}\}$

De ruimte is niet T_1, wel CI. $\{p\}$ is compact maar niet gesloten, dus als B een gesloten doorsnede heeft met iedere compacte C is $B \cap \{p\} \neq \{p\}$, dus $B \cap \{p\} = \emptyset$. $p \notin B$. De ruimte is dus O.
De ruimte is niet K, want ieder deel van een compact gesloten verzameling is compact gesloten.

19 : Super-atoom:

Zij α een ordinaal getal $\alpha \geq 2$. A voor iedere $\gamma < \alpha$ een oneindige verzameling, allen onderling discreet.
$X = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$. $V_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$ voor $\beta \leq \alpha$
$\mathcal{O} = \{O \mid \exists_{\beta \leq \alpha} \; V_\beta \subset O \subset V_{\beta+1}\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid \exists_{\beta<\alpha} \; C \not\subset V_\beta, C \subset V_{\beta+1}, C \cap A_\beta \text{ is eindig}\}$
$\mathcal{C} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ indien α een limiet getal is.
$\mathcal{C} \cap \mathcal{G} = \{B \mid B \subset A_{\alpha-1}, B \text{ eindig}\}$ voor α geen limiet getal.

De ruimte is niet T_1 en niet CI aangezien met $a_1 \neq a_1'$, a_1 en $a_1' \in A_1$ geldt:
$\{a_1\} \cup A_0$ compact $\{a_1'\} \cup A_0$ compact, maar hun doorsnede A_0 is niet compact. De ruimte is niet K aangezien ieder deel van een compact gesloten verzameling weer compact gesloten is.
Als α een limiet getal is heeft geen enkele compacte verzameling een gesloten deel, dus de ruimte is O.
Als α geen limiet getal is zijn de enige compacte verzamelingen die een gesloten deel hebben de C met $C \cap A_{\alpha-1}$ is eindig.
Stel $a \in A_{\alpha-1}$ en $C = V_{\alpha-1} \cup \{a\}$ en $C \cap B$ is gesloten, dan is $C \cap B = \{a\}$ of $C \cap B = \emptyset$ waaruit volgt dat $B \cap V_{\alpha-1} = \emptyset$, dus B is gesloten. Hieruit volgt dat de ruimte O is.

20 : Zariski-super-atoom:

$k \in \mathbb{N}$ en $k > 1$. A_n is voor iedere $1 \leq n \leq k$ een oneindige verzameling, alle A_n zijn onderling disjunct.

$X = \bigcup_{n=1}^{k} A_k$. $V_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ $m = 1\ldots k$, $V_0 = \emptyset$

$\mathcal{O} = \{O \mid \exists m_{0\leq m<k}$ $V_m \setminus O$ is eindig, $O \subset V_{m+1}\}$

$\mathcal{G} = \{G \mid \exists m_{0\leq m\leq k}$ $(A_n \subset G,\ n > m)$ en $(A_n \cap G$ eindig voor $n < m)\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid \exists m_{0<m<k}$ $C \subset V_{m+1}$ en $C \cap A_{m+1}$ is eindig niet leeg$\}$

$\mathcal{C} \cap \mathcal{G} = \{B \mid B$ is eindig$\}$

De ruimte is T_1. Aangezien ieder deel van een compact gesloten verzameling compact gesloten is, is de ruimte niet K. De ruimte is wel i.

<u>Bewijs</u>: Stel G niet gesloten. Dan zijn er n_1 en $n_2 \in \{1\ldots n\}$ met $n_2 > n_1$. $A_{n_2} \not\subset G$ en $A_{n_1} \cap G$ is niet eindig. Zij $p \in A_{n_2} \setminus G$ dan is $\{p\} \cup A_{n_1}$ een compacte verzameling die doorsneden met G oplevert $A_{n_1} \cap G$ dewelke niet eindig is in A_{n_1} en dus niet compact is.

21 : Zariski-superatoom met Zariski-kern:

$k \in \mathbb{N}$. $k \geq 2$ voor $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ is A_j een oneindige verzameling terwijl $A_i \cap A_j = \emptyset$ voor $i \neq j$. $X = \bigcup_{i=0}^{k} A_i$

$V_m = \bigcup_{n=0}^{m} A_n$

$\mathcal{O} = \{O \mid \exists m_{0\leq m<k}$ $V_m \setminus O$ is eindig, $O \subset V_{m+1}\}$

(in het bijzonder is $A_0 \setminus O$ altijd eindig)

$\mathcal{G} = \{G \mid \exists m_{0<m\leq k}$ $A_n \subset G$ voor $n > m$, en $A_n \cap G$ is eindig voor $n < m\}$

(in het bijzonder is $G \cap A_0$ altijd eindig)

$\mathcal{C} = \{C \mid C \subset A_0$ of $\exists_{m, 0\leq m<k}$ $C \subset V_{m+1}$ en $C \cap A_{m+1}$ is eindig niet leeg$\}$

$\mathcal{C} \cap \mathcal{G} = \{B \mid B$ is eindig$\}$

De ruimte is T_1 maar niet CI aangezien voor p_2 en $p_2' \in A_2$, $p_2 \neq p_2'$, $\{p_2\} \cup V_1$ en $\{p_2'\} \cup V_1$ compacte verzamelingen zijn maar hun doorsnede V_1 niet. Ieder deel van een compact gesloten verzameling is

compact gesloten, dus de ruimte is niet K. De ruimte is niet i aangezien A_0 een niet gesloten verzameling is die met iedere compacte verzameling een compacte doorsnede heeft.
Stel G niet gesloten, dan is er een $0 \leq n_1 < n_2 \leq k$ waarvoor $G \cap A_{n_1}$ oneindig en $G \cap A_{n_2}$ eindig is. Kies $p_{n_2} \in A_{n_2} \setminus G$ dan is $\{p_2\} \cup A_{n_1}$ een compacte verzameling die met G de doorsnede $G \cap A_1$ heeft die niet gesloten is. De ruimte is dus O.

22 : Zariski-superatoom met oneindig veel schillen. A_k is voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een oneindige verzameling onderling disjunct.
$V_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \quad V_0 = \emptyset \quad V_\infty = X$
$\mathcal{O} = \{O \mid (\exists_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} V_m \setminus O$ is eindig $O \subset V_{m+1})$, of $V_\infty \setminus O$ is eindig$\}$
$\mathcal{G} = \{G \mid (\exists_{m \in \mathbb{N}}\ V_{m-1} \cap G$ is eindig, $X \setminus V_m \subset G)$, of G is eindig$\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid \exists_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}\ C \subset V_m.\ A_m \cap C$ is eindig niet leeg$\}$
$\mathcal{C} \cap \mathcal{G} = \{B \mid B$ is eindig$\}$.
De ruimte is T_1, niet CI want $p_2 \neq p_2'$ $p_2, p_2' \in A_2 \Rightarrow \{p_2\} \cup A_1$ en $\{p_2'\} \cup A_1$ compact maar A_1 zelf is niet compact.
De ruimte is niet O want kies in iedere A_k een punt p_k dan is de verzameling $P = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ een niet gesloten verzameling die een eindige dus gesloten doorsnede heeft met iedere compacte verzameling.

23 : B is een oneindige verzameling, A is een overaftelbare verzameling.
$B \cap A = \emptyset \quad X = A \cup B$.
$\mathcal{O} = \{O \mid O \subset A\} \cup \{O \mid A \setminus O$ is aftelbaar, $B \setminus O$ is eindig$\}$
$\mathcal{G} = \{G \mid B \subset G\} \cup \{G \mid A \cap G$ is aftelbaar, $B \cap G$ is eindig$\}$
$\mathcal{C} = \{C \mid A \cap C$ is eindig$\}$
$\mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \{D \mid D$ is eindig$\} \cup \{D \mid D \cap A$ is eindig, $B \subset D\}$
De ruimte is T_1 maar niet CC want als $b \in B$ dan is $B \setminus \{b\}$ compact maar niet gesloten. A is niet gesloten verzameling die met iedere compacte verzameling een eindige dus gesloten doorsnede heeft, dus de ruimte is niet O. De ruimte is duidelijk CI.

24 : A is een overaftelbare verzameling, B is een verzameling bestaande uit minstens twee punten.

$A \cap B = \emptyset \quad X = A \cup B.$

$\mathcal{O} = \{O \mid O \subset A\} \cup \{O \mid B \subset O \text{ en } A \setminus O \text{ is aftelbaar}\}$

$\mathcal{G} = \{G \mid B \subset G\} \cup \{O \mid G \text{ aftelbaar} \quad B \cap G = \emptyset\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid C \cap A \text{ is eindig}\}$

$\mathcal{G} \cap \mathcal{C} = \{D \mid D \cap A \text{ is eindig en } (B \subset D \text{ of } B \cap D = \emptyset)\}$

De ruimte is niet T_1. A is een niet gesloten verzameling die een gesloten doorsnede heeft met iedere compacte verzameling, dus de ruimte is niet O. De ruimte is duidelijk CI.

25 : A_1 en A_2 zijn twee disjuncte copieen van de ruimte X uit voorbeeld 3. Hun topologieen zijn aangegeven door $\mathcal{O}_1$ en $\mathcal{O}_2$. De stelsels gesloten verzamelingen door $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ etc.

$X = A_1 \cup A_2$

$\mathcal{O} = \{O \mid O \subset A_1 \quad O \in \mathcal{O}_1 \text{ of } A_1 \subset O,\ A_2 \cap O \in \mathcal{O}_2\}$

$\mathcal{G} = \{G \mid G \subset A_2 \quad G \in \mathcal{G}_2 \text{ of } A_2 \subset G,\ A_1 \cap G \in \mathcal{G}_1\}$

$\mathcal{C} = \{C \mid C \subset A_1 \text{ en } C \in \mathcal{C}_1 \text{ of } C \not\subset A_1 \text{ en } C \cap A_2 \in \mathcal{C}_2\}$

De ruimte is duidelijk niet T_1. $A_2 \setminus \{\Omega_2\}$ is een niet gesloten verzameling die een compacte doorsnede heeft met iedere compacte verzameling, dus de ruimte is niet O. Zijn tenslotte a_2 en a_2' twee verschillende punten uit A_2 dan zijn $\{a_2\} \cup A_1$ en $\{a_2'\} \cup A_1$ compact maar A_1 niet, dus de ruimte is niet CI.

De overgebleven gaten kunnen worden opgevuld met disjuncte topologische verenigingen:

$9 = 8 \overset{+}{\cup} 11 \quad 10 = 7 \overset{+}{\cup} 11 \quad 14 = 13 \overset{+}{\cup} 16 \quad 15 = 12 \overset{+}{\cup} 16$. Dit volgt uit de eigenschappen van $\overset{+}{\cup}$.

9 voorbeelden zijn in staat om tezamen met hun onderlinge disjuncte topologische verenigingen het diagram te vullen. Neem de voorbeelden: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 11, 17, 20.

Het diagram is dan als volgt te vullen:

$1 = 1$

$2 = 2$

$3 = 3$

$4 = 4$

$5 = 2 \overset{+}{\cup} 4$

$6 = 3 \overset{+}{\cup} 4$

$7 = 7$

$8 = 8$

$9 = 8 \overset{+}{\cup} 11$

$10 = 7 \overset{+}{\cup} 11$

$11 = 11$

$12 = 2 \overset{+}{\cup} 7$

$13 = 2 \overset{+}{\cup} 8$

$14 = 2 \overset{+}{\cup} 8 \overset{+}{\cup} 11$

$15 = 2 \overset{+}{\cup} 7 \overset{+}{\cup} 11$

$16 = 2 \overset{+}{\cup} 11$

$17 = 17$

$18 = 8 \overset{+}{\cup} 17$

$19 = 8 \overset{+}{\cup} 11 \overset{+}{\cup} 17$

$20 = 20$

$21 = 17 \overset{+}{\cup} 20$

$22 = 3 \overset{+}{\cup} 20$

$23 = 3 \overset{+}{\cup} 7$

$24 = 3 \overset{+}{\cup} 8$

$25 = 3 \overset{+}{\cup} 8 \overset{+}{\cup} 11$