STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 24

Een geval van een structuurprobleem voor Abelse groepen

door

P.C. Baayen

Voor notatie e.d. zie men: P. van Emde Boas en D. Kruyswijk, A combinatorial problem on finite Abelian Groups, Rapport ZW 1967-009 van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

D. Kruyswijk bewees onlangs: Als G een p-groep is (p-priem), dan geldt (G)! Hieruit volgt (zie bovengenoemd rapport): indien $n|m$, dan $(C_n \oplus C_m)!$ J.H. van Lint toonde vervolgens aan: $(C_2 \oplus C_2 \oplus C_6)!$ Door verfijning van de bewijsmethode van van Lint kan men aantonen:

Stelling. Als n een oneven natuurlijk getal is, dan geldt

$$(C_2 \oplus C_2 \oplus C_{2n})!$$

We gebruiken twee lemma's.

Lemma 1. Als S een primitieve structuur ter lengte n-1 is in C_n, dan zijn alle elementen van S gelijk (en dus zijn zij een generator van C_n).

Bewijs.

Zij $S = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ en stel $a_1 \neq a_2$. Dan zijn de elementen a_1, a_2, a_1+a_2 onderling verschillend. Stel reeds vastgesteld (zoals juist voor $k = 2$) dat $(a_1, \ldots, a_k)$ tenminste $k+1$ verschillende waarden, zeg $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$, oplevert. Dan levert $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ tenminste de $k+2$ verschillende waarden $a_{k+1}, a_{k+1}+b_1, \ldots, a_{k+1}+b_{k+1}$ op. Zodoende moet S tenminste n verschillende waarden opleveren, waaronder dan 0, in strijd met het gegeven dat S primitief is.

Lemma 2. De langste structuur S in $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ die niet twee disjuncte nulstructuren bevat, bestaat uit 6 verschillende elementen, alle $\neq 0$.

Bewijs.

Als $b_1, \ldots, b_6$ onderling verschillen en geen van alle 0 zijn, dan bevat $S = (b_1, \ldots, b_6)$ niet twee disjuncte 0-structuren. Stel nu S is een structuur met lengte 7. Daar 4 elementen uit $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ altijd een nulstructuur bevatten, terwijl iedere $b \neq 0$ in deze groep orde 2 heeft, bevat S zeker twee disjuncte 0-structuren indien $0 \in S$ en ook indien er twee gelijke elementen tot S behoren. Stel dus

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dan bevat S ook twee disjuncte 0-structuren, e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bewijs van de stelling.

Stel $n \geq 3$ en zij S een structuur ter lengte $2n+2$ in $G = C_2 \oplus C_2 \oplus C_{2n} = C_n \oplus (C_2 \oplus C_2 \oplus C_2)$; elementen van S schrijven we in de vorm $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$, waar $a_i \in C_n$ en $b_i \in C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$, terwijl $1 \leq i \leq 2n+2$. Daar $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ slechts 8 elementen bezit, zijn er in $(b_1, \ldots, b_{2n+2})$ tenminste $\frac{1}{2}(2n+2-8) = n-3$ paren gelijke elementen, dus $n-3$ disjuncte 0-structuren. Als onder de overige 8 b_i de 0 voorkomt bevatten deze 8 zeker 3 disjuncte 0-structuren, volgens lemma 2.

Dan bevat $(b_1, \dots, b_{2n+2})$ totaal n disjuncte 0-structuren; daar (C_n)! volgt dan dat S een 0-structuur bevat.

Stel dus dat 0 niet onder de overgebleven 8 b_i voorkomt. Dan moeten er nogmaals twee gelijke elementen bij zijn. We hebben dus n-2 paren gelijke elementen - dus disjuncte 0-structuren - plus 6 elementen waaronder geen gelijke meer mogen optreden (anders vinden we toch weer n disjuncte 0-structuren in $(b_1, \dots, b_{2n+2})$, en er volgt weer dat S een 0-structuur bevat).

Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat de 6 overgebleven b_i juist $b_1, b_2, \dots, b_6$ zijn, en dat dit de volgende elementen van $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ zijn:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

terwijl $b_4 = b_1 + b_2$, $b_5 = b_1 + b_3$, $b_6 = b_2 + b_3$ (gebruik dat $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ een vectorruimte is over $\mathbb{Z}_2$).
Zij verder $b_7 = b_8$, $b_9 = b_{10}, \dots, b_{2n+1} = b_{2n+2}$. Uit lemma 1 volgt nu:

$$a_7 + a_8 = a_9 + a_{10} = \dots = a_{2n+1} + a_{2n+2} = \sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i a_i \quad \text{voor ieder stel}$$

$$\varepsilon_i \in \{0,1\} \text{ waarvoor } \sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i b_i = 0.$$

Derhalve moet

$$a_1 + a_2 + a_4 = a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_3 + a_6 = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 =$$
$$= a_1 + a_3 + a_4 + a_6 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_4 + a_5 + a_6$$

waaruit eenvoudig volgt dat $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$. Maar dan bevat S toch (vele) nul-structuren, e.g.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_4 \end{pmatrix}.$$

<u>Appendix</u>. Inmiddels wees P. van Emde Boas er op dat de aanname "n oneven" in de stelling overbodig is; m.a.w.

(∗) $$(C_2 \oplus C_2 \oplus C_{2n})! \quad \text{voor alle } n.$$

Immers, we gebruiken het oneven zijn van n alleen om vast te stellen dat $C_2 \oplus C_2 \oplus C_{2n} \simeq (C_2 \oplus C_2 \oplus C_2) \oplus C_n$. Is n even, dat bestaat er in ieder geval een epimorphisme ϕ: $C_2 \oplus C_2 \oplus C_{2n} \to C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ met $\phi^{-1}(0) \simeq C_n$; met een kleine modificatie in het bewijs (vgl. het bovengenoemde rapport van van Emde Boas en Kruyswijk) kan dan het resultaat (∗) verkregen worden.