STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 25

Een combinatorisch vermoeden bevestigd voor $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6$

door

P.C. Baayen

augustus 1968

Een combinatorisch vermoeden bevestigd voor $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6$

door

P.C. Baayen

Als $G \simeq C_{n_1} \times \dots \times C_{n_k}$ met $n_i | n_{i+1}$ $(1 \leq i \leq k-1)$, dan zij $\lambda(G) = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$. Wij schrijven G! indien G de volgende eigenschap heeft: Iedere structuur S over G met lengte > $\lambda(G)$ bevat een nul-structuur (voor de gebezigde terminologie raadplege men [2]).
Mijn vermoeden is dat G! voor iedere eindige abelse groep G.
Voor p-groepen G is G! bewezen door D. Kruyswijk, en $(C_2 \times C_2 \times C_6)!$ is aangetoond door J.H. van Lint [3]. Ons doel is hier te bewijzen dat $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6)!$

Wij schrijven de elementen van $G = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_6 = (C_2)^4 \times C_3$ de vorm $\binom{a}{b}$ met $a \in C_3$ en $b \in (C_2)^4$; zo nodig schrijven we b zelf als kolomvector ter lengte 4.

Zij $S = (x_1, \dots, x_9)$ een structuur in G, met $x_i = \binom{a_i}{b_i}$, en stel S is primitief. We zullen aantonen dat dit tot een tegenspraak leidt.
We schrijven A voor de structuur $(a_1, \dots, a_9)$ in C_3 en B voor de structuur $(b_1, \dots, b_9)$ in $(C_2)4$.

<u>Opmerking 1.</u> Alle $a_i \neq 0$. Duidelijk als $b_i = 0$. Als $b_i \neq 0$, stel dan (zonder beperking der algemeenheid) $i = 9$ en $b_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daar $\lambda(C_2 \times C_2 \times C_6) = 7$ kan uit x_1 t/m x_8 een element verkregen worden met $a = 0$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$; dit is òf 0, òf $-x_9$.

<u>Opmerking 2.</u> $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u + v \neq 0$ in $C_3 \Rightarrow u = v$.
<u>Gevolg</u> Twee disjuncte 0-substructuren van $B = (b_1, \dots, b_9)$ geven gelijke a-sommen.

<u>Opmerking 3.</u> In $(C_2)^4$ geldt: $b+c+d=0 \iff b=c+d \iff b+c=d \iff c=b+d$. Een tripel met deze eigenschap moge een <u>nul-tripel</u> heten.

<u>Opmerking 4.</u> Als B drie disjuncte 0-structuren bevat is S niet primitief, daar $\lambda(C_3) = 2$. Vijf elementen van B bevatten zeker een 0-structuur, daar $\lambda((C_2)^4) = 4$.

Dus ten hoogste één $b_i = 0$; als $b_i = 0$, dan is er geen paar $b_j = b_k$ $(j \neq k)$ en geen nultripel (b_j, b_k, b_l) $(j \neq k \neq l)$. Ook zijn er ten hoogste twee disjuncte paren onderling gelijke elementen.

<u>Opmerking 5.</u> Als onder 8 onderling verschillende elementen van B geen 4 lineair onafhankelijke voorkomen, dan bevat B drie disjuncte 0-structuren (eigenschap van $(C_2)^3$). Evenzo: als onder 7 elementen van B geen 4 lineair onafhankelijke voorkomen, dan bevatten deze 7 zeker twee disjuncte 0-structuren. Tenslotte bevatten 4 lineair afhankelijke elementen van B een 0-structuur, daar $\lambda((C_2)^3) = 3$.

<u>Opmerking 6.</u> Uit de eigenschappen van $C_2 \times C_2 \times C_6$ volgt: Als onder 6 onderling en van 0 verschillende elementen van B geen 4 lineair onafhankelijke voorkomen, en de overige 3 elementen van B bevatten een nulstructuur, dan bevat S een nulstructuur (vgl. [1] en [4]).

<u>Geval 1</u> $b_1 = 0$. Dan geen herhalingen of nultripels (opm. 4), en de b_i met $i \geq 2$ bevatten 4 lineair onafhankelijke (opm. 5), zeg b_2, b_3, b_4 en b_5. Dan zijn de b_i met $i \geq 6$ som van tenminste 3 b_i, $2 \leq i \leq 5$ (anders $\exists$ nultripel) maar ook van ten hoogste 3 daar $(b_2+b_3+b_4+b_5)$ + (som van drie dgl. b_i) = de vierde b_i. Stel dus $b_6 = b_2 + b_3 + b_4$, $b_7 = b_2 + b_3 + b_5$, $b_8 = b_2 + b_4 + b_5$, $b_9 = b_3 + b_4 + b_5$.
Dan bevat B drie disjuncte 0-structuren, nl. (b_1); (b_1,b_4,b_5,b_7); (b_2,b_3,b_8,b_9).

<u>Geval 2.</u> $b_i \neq 0$ voor alle i, $b_1 = b_2$, $b_3 + b_4 + b_5 = 0$.
Dan is $b_i \neq b_j$ voor $i, j > 2$ (opm. 4), en b_6 t/m b_9 zijn lineair

onafhankelijk (opm. 5). Neem b_6 t/m b_8 als basisvectoren voor $(C_2)^4$.

Daar de som van twee vectoren, elk met tenminste 3 coördinaten $\neq 0$, zelf ten hoogste 2 coördinaten $\neq 0$ heeft mogen we z.b.d.a. aannemen: $b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ & & 1 & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_1 & 1 & b_4 & b_3+b_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als één van de vectoren b_4, b_5 een 0 tot vierde coördinaat heeft, dan ook de andere, en we verkeren in de door opm. 6 verboden situatie. (nl. x_3 t/m $x_8 \in C_2 \times C_2 \times C_6$ terwijl $b_1+b_2=0$). Eenzelfde redenering toont dat de derde coördinaten van b_4 en b_5 beide 1 zijn. Dus (ev. na verwisseling):

$$b_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \quad , b_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} .$$

Dan is (volgens opm. 2 en zijn gevolg)

$$(a_1+a_2 =) \quad a_3+a_6+a_7 = a_3+a_4+a_5 = a_4+a_5+a_6+a_7 \;, \Rightarrow a_4+a_5 = a_6+a_7 = a_3,$$
$$\Rightarrow a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 2a_3 .$$
$$(a_1+a_2 =) \quad a_5+a_7+a_8+a_9 = a_3+a_4+a_5 \;, \Rightarrow a_8+a_9=a_3 \neq 0 \Rightarrow a_8 = a_9 = 2a_3.$$

Maar dan volgt dat S niet primitief is: $x_3+x_4+x_7+x_8+x_9 = 0$.

<u>Geval 3.</u> $b_i \neq 0$ voor alle i ; $b_1 = b_2$; b_3 t/m b_9 bevatten geen nultripel. Volgens opm. 5 bevatten b_3 t/m b_9 vier lineair onafhankelijke elementen, zeg b_3, b_4, b_5, b_6; gebruik ze als basis voor $(C_2)^4$. Daar nultripels niet voorkomen hebben b_7, b_8 en b_9 elk precies drie coördinaten $\neq 0$. Z.b.d.a. stellen we x_1 t/m x_9 als volgt (neem $a_1 = a_2 = 1$; 1 en 2 zijn

gelijkwaardige generatoren voor C_3):

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dan: $(a_1+a_2=)\ 2 = a_4+a_5+a_8+a_9 = a_4+a_5+a_3+a_7 = a_3+a_7+a_8+a_9 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_3+a_7 = a_8+a_9 = a_4+a_5 = \frac{1}{2}.\ 2 \Rightarrow a_3 = a_4 = a_5 = a_7 =$
$= a_8 = a_9 = 2.$

Ook: $2 = a_3+a_4+a_6+a_8 \Rightarrow a_6 = 2.$

We gaan nu b_1 kiezen. Wegens de gelijkwaardigheid van de laatste 3 coördinaten kunnen we ons beperken tot de volgende 6 gevallen:

$b_1 = b_3$; dan: $x_1 + x_3 = 0$.
$b_1 = b_4$; " $x_1 + x_4 = 0$.
$b_1 = b_3 + b_4$; " $x_1 + x_4 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$.
$b_1 = b_6 + b_5$; " $x_1 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 = 0$.
$b_1 = b_3 + b_4 + b_5$; " $x_1 + x_7 = 0$.
$b_1 = b_4 + b_5 + b_6$; " $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$.
$b_1 = b_3 + b_4 + b_5 + b_6$; " $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$.

<u>Geval 4.</u> $b_i \neq 0$ voor alle i ; $b_i \neq b_j$ als $i \neq j$

Dan bevat B een nultripel. Want stel dit ware onjuist. Daar B zeker 4 lineair onafhankelijke elementen bevat (opm. 5) mogen we aannemen dat b_1 t/m b_4 een basis voor $(C_2)^4$ vormen. Elk der $\underline{5}$ b_i met $i > 4$ moet dan precies 3 coördinaten $\neq 0$ hebben: onmogelijk.

We laten de gemaakte basiskeuze weer los en mogen dan aannemen: $b_7+b_8+b_9 = 0$. Wegens opm. 6 moeten nu b_1 t/m b_6 weer 4 lineair onafhankelijke elementen bevatten; stel b_1 t/m b_4, en neem deze als basis.

Daar $a_7+a_8+a_9 \neq 0$ (anders was $x_7+x_8+x_9 = 0$) moeten a_7, a_8, a_9 (in één of andere volgorde) óf 1,1 en 2 dan wel 2,2 en 1 zijn. Z.b.d.a. stellen we: $a_7 = a_8 = 1$, $a_9 = 2$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

<u>Subgeval 4^a</u> $b_i + b_j + b_k = 0$ voor $i, j, k < 7$

Op aequivalentie na is er slechts één situatie, nl. $b_5 = b_1 + b_2$. Stelt men nl. $b_5 + b_6 = b_i$, $i \leq 4$, terwijl b_5 en b_6 geen van beide van de vorm $b_j + b_k$, j en k ≤ 4, zijn, neem dan z.b.d.a. $i = 1$. Dan moet (ev. na verwisseling) $b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $b_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Neem nu b_6, b_5, b_3, b_4 (in die volgorde) als nieuwe basis; dan wordt b_1 de som der eerste twee basisvectoren.

Stel dus we hebben: $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Rekening houdend met de verwisselbaarheid van de eerste twee basisvectoren en ook van de laatste twee, zien we dat er voor b_6 op aequivalentie na de volgende vijf mogelijkheden zijn:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De eerste mogelijkheid vervalt, want dan heeft B de drie disjuncte 0-substructuren (b_1, b_2, b_5), (b_3, b_4, b_6), (b_7, b_8, b_9). De tweede en derde zijn onderling aequivalent (neem maar b_5 als eerste basis-vector i.p.v. b_1) en evenzo de laatste twee. Er blijven dus slechts de twee gevallen

$$b_6 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{en } b_6 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{te onderzoeken.}$$

(i) $b_6 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ Dan: $(a_7+a_8+a_9 =)\ 1 = a_1+a_2+a_5 = a_1+a_3+a_6 =$
$= a_2+a_3+a_5+a_6$

$\Rightarrow a_5=1+2a_1+2a_2,\ a_6=1+2a_1+2a_3\ ,\ 1=a_2+a_3+a_5+a_6=2+a_1, \Rightarrow a_1 = 2$
$\Rightarrow a_2+a_5=2=a_3+a_6 \Rightarrow a_2=a_3=a_5=a_6 = 1.$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

$$b_7, b_8, b_7+b_8 \in \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

Van b_7 en b_8 heeft tenminste één(zonder beperking der algemeenheid: b_7) een 1 als vierde coördinaat, daar anders de acht x_i $(i\neq 4)$ in een $C_2 \times C_2 \times C_6$ zitten (cf. opm. 6). Daar wat b_1 t/m b_6 betreft de tweede en derde basis vector verwisselt kunnen worden mogen we ons voor b_7 beperken tot

$$b_7 \in \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$\underline{\alpha}$. $b_7=b_1+b_4$. Dan: $a_1+a_4+a_7 = a_2+a_3+a_5+a_6 \Rightarrow a_4=1 \Rightarrow x_1+x_4+x_8+x_9 = 0.$

$\underline{\beta}$. $b_7=b_2+b_4$. Dan: $a_2+a_4+a_7 = a_1+a_3+a_6 \Rightarrow a_4=2 \Rightarrow x_2+x_4+x_8+x_9 = 0.$

$\underline{\gamma}$. $b_7=b_1+b_2+b_4$. Dan: $a_4+a_5+a_7 = a_1+a_3+a_6 \Rightarrow a_4 = 2 \Rightarrow x_4+x_5+x_8+x_9 = 0$.

$\underline{\delta}$. $b_7=b_2+b_3+b_4$. Dan: $0 \neq a_2+a_3+a_4+(a_8+a_9) \Rightarrow a_4 = 2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4+x_5+x_8+x_9= 0$.

$\underline{\varepsilon}$. $b_7=b_1+b_2+b_3+b_4$. Dan: $0 \neq a_1+a_2+a_3+a_4+(a_8+a_9) \Rightarrow a_4 = 1 \Rightarrow$

$$x_2+x_4+x_6+x_8+x_9 = 0.$$

(ii) $b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Dan: $\overline{a_1+a_2}+a_5=a_5+\underline{a_3+a_4+a_6}=\underline{a_3+a_4+a_6}+\overline{a_1+a_2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1+a_2=a_5=a_3+a_4+a_6 = 2 \Rightarrow a_1=a_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a_3 & a_4 & 2 & a_6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

Daar wat berteft b_1 t/m b_6 de eerste twee basisvectoren verwisseld mogen worden, en evenzo de laatste twee, kunnen we ons voor b_7 beperken tot

$$b_7 \in \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$$

$\underline{\alpha}$. $b_7=b_1+b_3$; dan: $0 \neq a_1+a_3+a_7 \Rightarrow a_3 = 2 \Rightarrow x_2+x_3+x_5+x_7 = 0$.

$\underline{\beta}$. $b_7=b_3+b_4$; dan: $a_3+a_4+a_7=a_1+a_2+a_5 = 1 \Rightarrow a_3+a_4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_3+x_4+x_8+x_9 = 0$.

$\underline{\gamma}$. $b_7=b_1+b_2+b_3$; dan: $a_1+a_2+a_3+a_7=a_4+a_6+(a_8+a_9) \Rightarrow a_3=a_4+a_6 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_3+x_5+x_8+x_9 = 0$.

$\underline{\delta}$. $b_7=b_2+b_3+b_4$; dan: $a_2+a_3+a_4+a_7=a_1+a_6+a_8+a_9 \Rightarrow a_6=a_3+a_4+1 =$
$= 2a_3+2a_4+2 \Rightarrow a_6=0$, in strijd met opm. 1.

<u>Subgeval 4^b.</u> $b_i + b_j + b_k \neq 0$ voor i, jm $k \leq 6$.
Dan hebben b_5 en b_6 elk drie coördinaten $\neq 0$; z.b.d.a. stellen we:
$b_5 = b_1 + b_2 + b_3$ en $b_6 = b_1 + b_2 + b_4$. Dan:

$$(b_7+b_8+b_9 =) \; 1 = a_1+a_2+a_3+a_5 = a_3+a_5+a_4+a_6 = a_4+a_6+a_1+a_2 \Rightarrow$$
$$a_3+a_5 = a_4+a_6 = a_1+a_2 = 2.$$
$$\Rightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6 = 1.$$

Dan moeten b_7 en b_8 elk meer dan twee coördinaten $\neq 0$ hebben, want als bv.
$b_7 = b_i + b_j$, i en $j \leq 4$; dan is $x_i + x_j + x_7 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_7 & b_8 & b_7+b_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$b_7 = b_1+b_3+b_4 \Rightarrow x_1+x_3+x_4+(x_8+x_9) = 0$$

$$b_7 = b_2+b_3+b_4 \Rightarrow x_2+x_3+x_4+(x_8+x_9) = 0$$

$$b_7 = b_1+b_2+b_3+b_4 \Rightarrow x_4+x_5+x_7 = 0.$$

In alle gevallen blijkt S <u>niet</u> primitief te zijn.

<u>Verwijzingen</u>

[1] P.C. Baayen, Een geval van een structuurprobleem voor abelse groepen. WN 24, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.

[2] P. van Emde Boas and D. Kruyswijk, A Combinatorial problem on finite abelian groups. Rapport ZW 1967-009, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1967.

[3] J.H. van Lint, Notitie 26, Onderafdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool Eindhoven, 1968.

[4] J.H. van Lint, Notitie 27, Onderafdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool Eindhoven, 1968.