STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 26

Een structuurprobleem opgelost voor $C_3 \oplus C_3 \oplus C_6$

door

P. van Emde Boas en E Wattel

juni 1969

Voor een eindige Abelse groep $G \cong C_{n_1} \oplus \ldots \oplus C_{n_k}$ met $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_k$ stellen we $\Lambda(G) = n_1 + \ldots + n_k - k$. Verder is $\lambda(G)$ het kleinste getal zodanig dat iedere rij van elementen uit G met lengte $> \lambda(G)$ een niet lege deelrij met som nul bevat. In deze notitie wordt bewezen dat $\lambda(G) = \Lambda(G)$ voor $G = C_3 \oplus C_3 \oplus C_6$.

Voor een algemene behandeling van dit probleem zie [1]. Daar wordt ondermeer bewezen dat de identiteit $\lambda = \Lambda$ geldt voor de groepen $C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$ en $C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$. Algemeen geldt $\lambda \geq \Lambda$. De gebruikte terminologie is eveneens afkomstig uit [1].
Voor $G = C_3 \oplus C_3 \oplus C_6$ hebben we $\Lambda(G) = 9$. Het is derhalve voldoende aan te tonen dat een rij van 10 elementen uit G een deelrij met som nul bevat.

We schrijven G in de gedaante $C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_2$. Elementen van G worden geschreven als kolommen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met $x \in (C_3)^3$ en $y = 0$ of 1

<u>Lemma:</u> Zij $S = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{pmatrix}\right)$ een $(C_3)^3 \oplus C_2$ -rij zodanig dat de $(C_3)^3$ -rij $S' = (x_1, \ldots, x_{10})$ een nulrij T' van lengte ≤ 3 bevat; dan bevat S een nulrij.

<u>Bewijs:</u> Zij U' het complement van T' in S' dan bevat U' minstens zeven elementen. Omdat $\lambda((C_3)^3) = 6$ bevat U' dan nog een nulrij. We concluderen dat S' twee disjuncte nulrijen bevat, zeg T' en V'. Stel deze nulrijen corresponderen met de deelrijen T en V van S. Dan volgt

$$|T| = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad |V| = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad |T \cup V| = \begin{pmatrix} 0 \\ a+b \end{pmatrix}$$

dus hetzij T hetzij V hetzij $T \cup V$ is een nulrij in S.

<u>Opmerking:</u> Dit bewijs is een speciaal geval van de algemene bewijsmethode uit [1, §3].

<u>Stelling:</u> $\lambda(C_3 \oplus C_3 \oplus C_6) = \Lambda(C_3 \oplus C_3 \oplus C_6) = 9$

<u>Bewijs:</u> Zij S een rij van 10 elementen uit $(C_3)^3 \oplus C_2$. Zonder beperking der algemeenheid mogen we schrijven

$$S = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} x_r \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

met $0 \leq r \leq 10$. We splitsen het probleem op door te kijken naar de verschillende mogelijke waarden van r.

<u>Geval 1:</u> $r \leq 6$; stel nu $t = [r/_2]$ en

vorm de rij $T = \left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{2t-1} + x_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Dit is een H -rij van lengte ≥ 7 waarbij H een ondergroep van $(C_3)^3 \oplus C_2$

is die isomorf is met $(C_3)^3$. Omdat $\lambda(H) = 6$ volgt dat T een nulrij bevat. Derhalve bevat S een nulrij.

<u>Geval 2:</u> $r \geq 9$. Vorm nu de rij

$$S' = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_9 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

en beschouw haar als een rij elementen uit $(C_3)^3 \oplus C_3$! Omdat $\lambda((C_3)^4) = 8$ volgt dat S' een nulrij bevat. Dit wil zeggen dat de rij $(x_1, \ldots, x_9)$ een nulrij van lengte $k = 3$, 6 of 9 bevat.
Als $k = 3$ dan bevat S een nulrij volgens het lemma. Als $k = 6$ is de corresponderende deelrij van S' ook over $(C_3)^3 \oplus C_2$ beschouwd een nulrij aangezien 6 even is. Als $k = 9$ dan is de rij $(x_1, \ldots, x_9)$ een nulrij die uiteenvalt in twee disjuncte nulrijen omdat $9 > \lambda((C_3)^3) + 1$. Analoog als in het lemma volgt dat S een nulrij bevat.

<u>Geval 3:</u> $r = 8$. We beschouwen de rij

$$S' = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_8 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

als $(C_3)^4$ -rij. Als S' een nulrij bevat dan volgt als in geval 2 dat S een nulrij bevat. We mogen dus aannemen dat S' primitief is. Dan is S' maximaal en alle elementen ongelijk nul in $(C_3)^4$ zijn som van een deelrij van S'.
Stel $t = x_1 + \ldots + x_{10}$. Dan is er een rij $T' \leq S'$ met $|T'| = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$
T' heeft blijkbaar lengte $k = 1$, 4 of 7. Zonder beperking der algemeenheid mogen we stellen $T' = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
Als $k = 1$ is $(x_2, \ldots, x_{10})$ een nulrij over $(C_3)^3$ van lengte 9 die dus uiteenvalt in twee disjuncte nulrijen en als in het lemma volgt dat S een nulrij bevat.
Als $k = 4$ is $\left(\begin{pmatrix} x_5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_9 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ een nuldeelrij van S.
Als $k = 7$ is (x_8, x_9, x_{10}) een nulrij over $(C_3)^3$ van lengte ≤ 3 en volgens het lemma bevat S in dit geval een nulrij.

<u>Geval 4:</u> $r = 7$. Stel nu $t = x_1 + \ldots + x_{10}$.

Als S geen nulrij bevat is de rij $S \cup \binom{-t}{1}$ een nulrij die niet de vereniging is van twee disjuncte nulrijen. Dit impliceert dat alle deelrijen van $S \cup \binom{-t}{1}$ van lengte 10 geen nulrijen omvatten. De rij

$$S' = \left(\binom{x_1}{1}, \ldots, \binom{x_7}{1}, \binom{-t}{1}, \binom{x_8}{0}, \binom{x_9}{0}\right)$$

is evenwel een rij met $r = 8$ en bevat dus een nulrij zoals bewezen in geval 3. Derhalve bevat S ook in het vierde geval een nulrij waarmee het bewijs is voltooid.

<u>Opmerking:</u> Met behulp van dit resultaat is voor alle groepen met ≤ 100 elementen bekend of de identiteit $\lambda = \Lambda$ geldt. Deze identiteit geldt voor alle groepen met ≤ 100 elementen met uitzondering van de groep $G = (C_2)^4 \oplus C_6$ waarvoor $\lambda \geq \Lambda + 1$.
De enige groepen met orde tussen 100 en 200 waarvoor het niet in [I] bewezen wordt dat $\lambda = \Lambda$ zijn de volgende:

G	$\omega(G)$	$\Lambda(G)$
$C_3 \oplus C_6 \oplus C_6$	108	12
$C_3 \oplus C_3 \oplus C_{12}$	108	15
$C_3 \oplus C_3 \oplus C_{15}$	135	18
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_6 \oplus C_6$	144	12
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_{10}$	160	13
$C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_6$	162	11
$C_3 \oplus C_3 \oplus C_{21}$	189	24
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_{12}$	192	15
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_6$	192	10

Van de laatste groep is bekend dat $\lambda(G) \geq \Lambda(G) + 1$ aangezien zij $(C_2)^4 \oplus C_6$ in deze representatie als deelsummand heeft.

<u>Verwijzing:</u>

[1]. P. van Emde Boas. A combinatorial problem on finite Abelian Groups II. Rapport ZW - 1969 - 007 Mathematisch Centrum Amsterdam.