STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 2

Asymptotische en sterk convergerende ontwikkelingen.

Serie voordrachten voorjaar 1947.

S.C. van Veen.

1947

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM.

Voordrachten van Prof. Dr. S.C. van Veen (Delft)

"Asymptotische en snel convergente ontwikkelingen"

1e voordracht (Donderdag 27 Februari 1947).

Asymptotische ontwikkelingen.

I.

Verschil in opvatting omtrent het begrip "convergentie" tussen beoefenaren der zuivere wiskunde en tussen hen voor wie numerieke berekening op de voorgrond staat (i.h.b. de astronomen).

Voor den mathematicus is

$$e^{1000} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

convergent, voor de practische berekening is het rechterlid onbruikbaar. Daarentegen is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$$

van mathematisch standpunt divergent, maar voor den rekenaar bijzonder bruikbaar.

In vele gevallen is voor eenzelfde functie een ontwikkeling van beide soorten mogelijk.

Voorbeeld 1.

$$F(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \qquad (1)$$

convergent voor alle waarden van x, maar voor grote waarden van x numeriek onbruikbaar. Anderzijds is

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

De overblijvende integraal kan door partieele integratie worden herleid tot de exacte ontwikkeling met restterm

$$\frac{e^{-x^2}}{2x}\left\{1 + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m x^{2m}} + (-1)^{n+1}\,\theta\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}x^{2n+1}}\right\} \qquad (2)$$
$$0<\theta<1$$

De restterm is hier zeker kleiner (in abs.waarde) dan de eerste verwaarloosde term. De reeks zal, onbepaald voortgezet, divergeren, maar is voor numerieke berekening bij grote waarden van x bijzonder geschikt.

Verschil met convergente reeks : Bij gegeven waarde van x kan men niet garandeeren, dat de fout willekeurig klein gemaakt kan worden. Voor $x \geq 3$ kan echter de fout reeds kleiner dan

$$\frac{e^{-9}}{6}\,\frac{1.3.5\ldots17}{2^9.3^{18}} < 0{,}000\,000\,004$$

worden gemaakt. Hoe groter x, des te nauwkeuriger wordt de benadering. Voor numerieke berekening is (2) dus zeer goed bruikbaar. Deze ontwikkeling is het eerste voorbeeld van datgene wat Poincaré een asymptotische ontwikkeling noemt. Een bijzonder intereesant voorbeeld is hetvolgende.

Voorbeeld 2 (Laguerre (1879))

$$-\mathrm{li}(e^{-x}) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \qquad (x>0)$$

Convergente ontwikkeling (voor $|x|>0$)

2. $$\int_x^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} = -C - \log x + \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n.n!}$$

$$C = -\int_1^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} + \int_0^1 (1-e^{-t})\frac{dt}{t} \quad \text{(const. v. Euler)} \quad (3).$$

Deze ontwikkeling is weer onbruikbaar voor grote waarden van x. Dan gaat men alsvolgt te werk:

$$\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} = e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u+x} = e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^m \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^\infty (-1)^k u^k e^{-u}\,du + \frac{(-1)^{m+1}}{x^{m+1}}\int_0^\infty \frac{u^{m+1}e^{-u}}{x+u}\,du\right\}.$$

I.h.b. voor $x>0$ $$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \theta(-1)^{m+1}\frac{(m+1)!}{x^{m+2}}\right\} \quad (4) \quad 0<\theta<1$$

Ook in deze reeds divergente asymptotische ontwikkeling is de restterm absoluut kleiner dan de waarde van de eerste verwaarloosde term.
In het tijdperk van Euler en Lacroix werd zonder scrupules de ontwikkeling (4) onbepaald voortgezet. Voor het geval x=1 vond men dan uit (3) en (4)

$$1!-2!+3!-4!+\ldots = 1-e\left(-C+\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n.n!}\right)=0{,}4036526\ldots$$

Litteratuur:

Whittacker-Watson Modern Analysis. Chap. VIII.
Borel: Leçons sur les series divergentes.
Laguerre: Oeuvres, T.I., p.428. Bull. de la Soc. math.de France, t.VII.
Stieltjes: Ann. de l'École normale, 1886, Oeuvres, T.II.
Poincaré: Acta Mathematica, t.VIII (1886), p.295.

2e Voordracht (Donderdag 6 Maart 1947.).

Definitie en algemeene eingenschappen van asymptotische ontwikkelingen.

Poincaré noemt de (divergent ~~veronderstelde~~) ontwikkeling

(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^\infty A_n z^{-n}$$ asymptotisch als

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| z^n\left\{f(z)-A_0-\frac{A_1}{z}-\frac{A_2}{z^2}-\cdots-\frac{A_n}{z^n}\right\}\right| = \lim_{z\to\infty}|z^n R_n(z)| = 0$$

voor alle gehele waarden van $n \geq 0$. In plaats van (1) kan geschreven worden

$$f(z)=A_0+\frac{A_1}{z}+\cdots\frac{A_n+\varepsilon_n(z)}{z^n}, \quad \text{met } \varepsilon_n(z)\to 0 \text{ als } z\to\infty.$$

Gebruikelijke schrijfwijze

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^\infty A_n z^{-n}.$$

Algemene eigenschappen der asymptotische ontwikkelingen.
1). De som of het verschil van 2 as.ontw. is een as. ontw.
2). Het product van 2 as. ontw. is een as. ontw.
3). Als
$$G(z) \sim \sum_{n=0}^\infty A_n z^{-n},$$
en
$$f(G) = \sum_{n=0}^\infty a_n G^n$$
convergeert als machtreeks in G binnen een cirkel met straal $R>|A_0|$, dan kan f(G) worden ontwikkeld in een as.reeks naar z:
$$f(G)= F(z) \sim \sum_0^\infty c_n z^{-n}.$$
4). Een as. ontw. is termsgewijze integreerbaar.
5). Een as. ontw. is niet algemeen termsgewijze differentieerbaar.
Vb.: $f(x) = e^{-x}\sin e^{x^2} \sim 0$ (x reëel).

Alleen, wanneer $f'(x)$ as. ontwikkelbaar is, dan ontstaat haar ontwikkeling door termsgewijze differentiatie van de as. ontw. van $f(x)$.
6). Wanneer $f(z)$ as. ontw. is, dan is deze as. ontw. eenduidig bepaald.
Omgekeerd echter behoort niet bij iedere as. ontw. één bepaalde functie. Er zijn nl. functies $L(x) \sim 0$ 'b.v. e^{-x}). Dan leveren $f(x)$ en $f(x)+L(x)$ de zelfde as. ontw.
Bij verdere behandeling hebben wij in de eerste plaats te doen met de volgende twee problemen:
a) Een wetmatig recursief verband te vinden tussen 2 opeenvolgende coëfficienten A_k, waardoor men in staat is, de as. ontw. will. ver voort te zetten.
b) Een nauwkeurige schatting van de bovengrens van $|R_n(x)|$.
Een as. ontw. is eerst volkomen betrouwbaar voor numerieke berekening na oplossing van probleem b). Beide problemen kunnen echter slechts in bepaalde gevallen in volle omvang worden opgelost. Als voorbeeld, waarbij dit gelukt, zullen wij de Legendre-polynomen behandelen (Stieltjes).

Asymptotische ontwikkeling van Legendre-polynomen.

De Legendre-polynomen kunnen worden gedefinieerd door

$$(1-2xk+k^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\,k^n.$$

Hieruit volgt:

$$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} \cdots\cdots \right\}$$

Deze uitkomst is niet goed bruikbaar voor grote waarden van n. Dan gaat men alsvolgt te werk:

$$(z^2-2zx+1)^{-\frac{1}{2}} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,z^{-n}.$$

Deze reeks convergeert voor $|z| > \max\left\{|x+\sqrt{x^2-1}|;\ |x-\sqrt{x^2-1}|\right\}$. Dus:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2-2xz+1}}\ ;\ C \text{ is will. contour, positief om } \begin{cases}\xi = x+\sqrt{x^2-1}.\\ \xi^{-1} = x-\sqrt{x^2-1}.\end{cases}$$

Neem x reëel, $|x|<1$. Door eenvoudige transformatie vindt men:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi i}\left\{\int_0^{\xi}\frac{x^n\,dz}{\sqrt{z^2-2zx+1}} - \int_0^{\xi^{-1}}\frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2-2xz+1}}\right\}.$$

Voer als nieuwe veranderlijke in: $z=\xi(1-u)$, $0<u<1$. Men vindt:

$$\int_0^{\xi}\frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2-2xz+1}} = \xi^{n+1}\sqrt{1-k}\int_0^1\frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}}\ ;\quad \int_0^{\xi^{-1}}\frac{z^n\,dz}{\sqrt{z^2-2xz+1}} = \xi^{-n-1}\sqrt{1-k_1}\int_0^1\frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-k_1u)}} \text{ met } k=\frac{\xi^2}{\xi^2-1};\ k_1=\frac{\xi^{-2}}{\xi^{-2}-1}.$$

Stel $x=\cos\theta$, $(0<\theta<\pi)$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\theta-\frac{1}{4}\pi i}}{\pi\sqrt{2\sin\theta}}\int_0^1\frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-ku)}} + \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})i\theta+\frac{\pi i}{4}}}{\pi\sqrt{2\sin\theta}}\int_0^1\frac{(1-u)^n\,du}{\sqrt{u(1-k_1u)}}.$$

Voorloopig nemen wij hierin $|k|<1 : 2\sin\theta<1$ $(\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi)$
Dan levert reeksontwikkeling en termsgewijze integratie de ontwikkeling: (met $\alpha=\theta-\frac{\pi}{2}$)

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4\ldots\ldots(2n)}{3.5\ldots\ldots(2n+1)}\left[\frac{\cos(n\theta+\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\,\frac{\cos(n\theta+\frac{3\alpha}{2})}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}} + \frac{1^2 3^2}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos(n\theta+\frac{5}{2}\alpha)}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}} \cdots\cdots\right.$$

welke convergeert voor $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$, en wel des te sterker, naarmate n groter is.
Wij zullen nu aantonen, dat de reeks in het uitgesloten gebied weliswaar divergeert, maar asymptotisch karakter vertoont. Dan zal het probleem b) worden opgelost, n.l. het schatten van een nauwkeurige bovengrens voor de restterm.

Voordrachten van Prof. Dr. S.C. van Veen (Delft)

„Asymptotische en snel convergente ontwikkelingen".

2e en 3e voordracht (Donderdag 6 en 13 Maart 1947.)

Asymptotische ontwikkeling met restterm voor de hegendre-polynomen.

In de vroeger afgeleide uitkomst:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{2\sin\theta}}\, R\, e^{(n+\frac{1}{2})i\theta - \frac{\pi i}{4}} \int_0^1 \frac{(i-u)^n\, du}{\sqrt{u(1-ku)}}$$

Vervangen wij $\dfrac{1}{\sqrt{1-ku}}$ door $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dv}{1-ku\sin^2 v}$ (Bewijs b.v. door contour-integratie)

Dan is: $$\int_0^{\pi}\frac{dv}{1-ku\sin^2 v} = \sum_{m=0}^{p-1} k^m u^m \int_0^{\pi}\sin^{2m} v\,dv + k^p u^p \int_0^{\pi}\frac{\sin^{2p} v\,dv}{1-ku\sin^2 v}$$

Dus:
$$P^n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}\left[\frac{\cos(n\theta+\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\cdot\frac{\cos(n\theta+\frac{3\alpha}{2})}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1^2.3^2.\ldots\ldots(2p-3)^2}{2.4.6.\ldots\ldots(2p-2).(2x+3)(2n+5)\ldots\ldots(2n+2p-1)}\cdot\frac{\cos(n\theta+\frac{(2p-1)\alpha}{2})}{\sqrt{(2\sin 0)^{2p-1}}}\right]$$

$$+\frac{2}{\pi\sqrt{2\sin\theta}}\, R\, \frac{e^{(n\theta+\frac{\alpha}{2})i}}{\pi}\int_0^1\int_0^{\pi}\frac{(i-u)^n u^{p-\frac{1}{2}} k^p \sin^{2p} v}{1-ku\sin^2 v}\,du\,dv.$$

De laatste term is in absolute waarde:

$$|R_p| < \frac{2}{\pi\sqrt{(2\sin 0)^{2p+1}}}\cdot\left|\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{\pi}\frac{(1-u)^n u^{p-\frac{1}{2}}\sin^{2p} v\,du\,dv}{1-ku\sin^2 v}\right|$$

$$|1-ku\sin^2 v| \geqslant R(1-ku\sin^2 v) \geqslant R(1-k) = R\,\frac{e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i}}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}$$

Dus:
$$|R_p| < \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{\sqrt{(2\sin\theta)^{2p+1}}}\int_0^1 u^{p-\frac{1}{2}}(1-u)^n\,du\int_0^{\pi}\sin^{2p} v\,dv$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}\cdot\frac{1^2.3^2\ldots\ldots(2p-1)^2}{2.4.6.\ldots\ldots 2p.(2x+3)(2n+5)\ldots\ldots(2n+2p+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2\sin\theta)^{2p+1}}}$$

Dus $|R_p| < 2|$ abs. waarde van de eerste verwaarloosde term$|$ mits men de cos in de teller door 1 vervangt.
De nu ontstane asymptotische ontwikkeling is zeer geschikt voor benaderde bepaling van de nulpunten van $P_n(\cos\theta)$.

Algemene methode van Laplace ter bepaling van de hoofdterm uit de asymptotische ontwikkeling van $\int_a^b \varphi(x)\,[f(x)]^n\,dx$. voor grote waarden van n. $(n > 0)$.

Wij nemen aan, dat $\varphi(x)$, en $f(x) = c^{h(x)}$ bepaald zijn in het eindige of oneindige interval $a \leqslant x \leqslant b$ met volgende voorwaarden:

1. $\varphi(x)[f(x)]^n$ absoluut integreerbaar in (a,b) $(n=0,1,2,\ldots)$
2. $f(x)$ bereikt in ξ binnen (a,b) een maximum, terwijl de bovenste grens van $f(x)$ in ieder afgesloten interval, dat ξ niet bevat, $<$ f(
3. $\varphi(x)$ continu voor $x=\xi$, $\varphi(\xi) \neq 0$.

Voordrachten van Prof. Dr. S.C. van Veen (Delft)

„Asymptotische en snel convergente ontwikkelingen".

2e en 3e voordracht (Donderdag 6 en 13 Maart 1947.)

Asymptotische ontwikkeling met restterm voor de Legendre-polynomen.

In de vroeger afgeleide uitkomst:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{2\sin\theta}}\, R\, e^{(n+\frac{1}{2})i\theta - \frac{\pi i}{4}} \int_0^1 \frac{(1-u)^n\, du}{\sqrt{u(1-ku)}}$$

Vervangen wij $\dfrac{1}{\sqrt{1-ku}}$ door $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{dv}{1-ku\sin^2 v}$. (Bewijs b.v. door contour-integratie)

Dan is: $$\int_0^\pi \frac{dv}{1-ku\sin^2 v} = \sum_{m=0}^{p-1} k^m u^m \int_0^\pi \sin^{2m} v\,dv + k^p u^p \int_0^\pi \frac{\sin^{2p} v\,dv}{1-ku\sin^2 v}$$

Dus:

$$P^n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2.4.6\ldots(2n)}{3.5.7\ldots(2n+1)}\left[\frac{\cos(n\theta+\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\cdot\frac{\cos(n\theta+\frac{3\alpha}{2})}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1^2.3^2.\ldots\ldots(2p-3)^2}{2.4.6.\ldots\ldots(2p-2).(2x+3)(2n+5)\ldots\ldots(2n+2p-1)}\cdot\frac{\cos(n\theta+\frac{(2p-1)\alpha}{2})}{\sqrt{(2\sin 0)^{2p-1}}}\right]$$

$$+\frac{2}{\pi\sqrt{2\sin\theta}}\, R\, \frac{e^{(n\theta+\frac{\alpha}{2})i}}{\pi}\int_0^1\int_0^\pi \frac{(i-u)^n u^{p-\frac{1}{2}} k^p \sin^{2p} v}{1-ku\sin^2 v}\,dudv.$$

De laatste term is in absolute waarde:

$$|R_p| < \frac{2}{\pi\sqrt{(2\sin 0)^{2p+1}}}\cdot\left|\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^\pi \frac{(1-u)^n u^{p-\frac{1}{2}}\sin^{2p} v\,dudv}{1-ku\sin^2 v}\right|$$

$$|1-ku\sin^2 v| \geqslant R(1-ku\sin^2 v) \geqslant R(1-k) = R\,\frac{e^{(\frac{\pi}{2}-\theta)i}}{2\sin\theta} = \frac{1}{2}$$

Dus:

$$|R_p| < \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{\sqrt{(2\sin\theta)^{2p+1}}}\int_0^1 u^{p-\frac{1}{2}}(1-u)^n\,du\int_0^\pi \sin^{2p} v\,dv$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{2.4.6.\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots\ldots(2n+1)}\cdot\frac{1^2.3^2\ldots\ldots(2p-1)^2}{2.4.6.\ldots\ldots 2p.(2x+3)(2n+5)\ldots\ldots(2n+2p+1)}\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\sin\theta)^{2p+1}}}$$

Dus $|R_p| < 2|$ abs. waarde van de eerste verwaarloosde term$|$ mits men de cos in de teller door 1 vervangt.
De nu ontstane asymptotische ontwikkeling is zeer geschikt voor benaderde bepaling van de nulpunten van $P_n(\cos\theta)$.

Algemene methode van Laplace ter bepaling van de hoofdterm uit de asymptotische ontwikkeling van $\int_a^b \varphi(x)\left[f(x)\right]^n dx$. voor grote waarden van n.$(n>0)$.

Wij nemen aan, dat $\varphi(x)$, en $f(x) = e^{h(x)}$ bepaald zijn in het eindige of oneindige interval $a \leqslant x \leqslant b$ met volgende voorwaarden:

1. $\varphi(x)\left[f(x)\right]^n$ absoluut integreerbaar in (a,b) $(n=0,1,2,\ldots.)$
2. $f(x)$ bereikt in ξ binnen (a,b) een maximum, terwijl de bovenste grens van $f(x)$ in ieder afgesloten interval, dat ξ niet bevat, $< f(\xi)$
3. $\varphi(x)$ continu voor $x = \xi$, $\varphi(\xi) \neq 0$.

Neem $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ en zo klein, dat $a < \xi - \delta < \xi + \delta < b$.

$$\varphi(\xi) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(\xi) + \varepsilon$$
$$h''(\xi) - \varepsilon < h''(x) < h''(\xi) + \varepsilon < 0$$
als $\xi - \delta < x < \xi + \delta$

Dan is:

$$\int_a^b \varphi(x) . e^{n[h(x) - h(\xi)]} dx = \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varphi(x) e^{n[h(x)-h(\xi)]} dx + O(\alpha^n)$$

$$= \varphi(\xi') \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{n}{2}(x-\xi)^2 h''(\xi'')} dx + O(\alpha^n) \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

α onafhankelijk van ε

$\xi - \delta < \xi', \xi'' < \xi + \delta$

Eerste term van 2^e lid ligt tussen

$$[\varphi(\xi) \pm \varepsilon] \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{n}{2}(x-\xi)^2 [h''(\xi) \pm \varepsilon]} dx.$$

Substitueer: $x - \xi = y \sqrt{\dfrac{2}{n[\varepsilon - h''(\xi)]}}$

De beide grenzen worden dan: $\pm \delta \sqrt{\frac{n}{2}[\varepsilon - h''(\xi)]}$

$$[\varphi(\xi) \pm \varepsilon] \sqrt{\frac{2}{n[\varepsilon - h''(\xi)]}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{n}{2}[\varepsilon - h''(\xi)]}}^{+\delta\sqrt{\frac{n}{2}[\varepsilon - h''(\xi)]}} e^{-y^2} dy$$

dus voor $n \to \infty$

$$\sqrt{n} \int_a^b \varphi(x) [f(x)]^n dx \to \varphi(\xi) [f(\xi)]^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(\xi)}}$$

Voorbeeld: formule van Wallis:

$$n! = \int_0^a e^{-x} x^n dx = n^{n+1} \int_0^a (e^{-y} y)^n dy.$$

$\varphi(y) = 1 \qquad f(y) = e^{-y} y. \qquad f'(1) = 0; \qquad f''(1) = -e^{-1}$

$$n! \sim n^{n+1} . e^{-(n+\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{2\pi}{ne}} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

„Asymptotische en snel convergente ontwikkelingen (III)"

Prof. Dr S.C. van Veen (Delft)

13 en 20 Maart 1947

III

Asymptotische en sterk convergente ontwikkelingen.

De methode der zadelpunten (pasmethode) (Debye)

Wij beschouwen $\int e^{\varphi(z)}\psi(z)dz$

genomen over een kromme in het complexe z-vlak.
$\varphi(z)$ en $\psi(z)$ zijn analytische functies van z; $\varphi(z)$ hangt ook nog af van een parameter α af ($|\alpha$ wordt groot).
Men kiest als integratiekromme

$$I\left(e^{-i\mu}\varphi(z)\right) = \text{constant.}$$

(μ geschikt gekozen reëel getal, dikwijls = 0)
z_0 heet zadelpunt van $\varphi(z)$, als $\varphi'(z_0) = 0$.
Wanneer m het kleinste natuurlijke getal $\geqslant 2$ is, waarvoor $\varphi^{(m)}(z_0) \neq 0$ is, dan heet z_0 een zadelpunt van de orde m - 1 .
Wanneer de integratiekromme door eventuele zadelpunten van $\varphi(z)$ gaat, dan wordt deze kromme verdeeld in stukken door deze zadelpunten. Laat a en b de uiteinden van zulk een stuk zijn (a en b zijn zadelpunten of punten in ∞).De bijbehorende integraal is:

$$\int_a^b e^{\varphi(z)}\,\psi(z)dz$$

Langs de kromme (a,b) is

$$R\left(e^{-i\mu}\varphi(z)\right) = e^{-i\mu}\varphi(z) \quad \underline{\text{monotoon,}}$$

als zich tussen a en b op de kromme geen zadelpunt bevindt. Wanneer a een zadelpunt van de orde h - 1 is, stelt men

$$\varphi(a) - \varphi(z) = \zeta^h.$$

Men kan λ bepalen, zodat $e^{-i\lambda}\left\{\varphi(a) - \varphi(z)\right\} \geqslant 0$

is voor z op (a,b). ($\lambda = \mu$ of $\lambda = \mu + \pi$).

Kies $\sqrt[h]{e^{-i\lambda}\left\{\varphi(a) - \varphi(b)\right\}} \geqslant 0$

$\zeta = F(z) = e^{\frac{i\lambda}{h}}\sqrt[h]{e^{-i\lambda}\left\{\varphi(a) - \varphi(z)\right\}}$, dus $\zeta e^{-i\frac{\lambda}{h}} \geqslant 0$ voor z op (a,b).

a is een enkelvoudig nulpunt, van F(z).

$$\int_a^b e^{\varphi(z)}\,\psi(z)dz = e^{\varphi(a)}\int_0^{Be^{\frac{i\lambda}{h}}} e^{-\zeta^h}\,\psi(z)\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta$$

Voor voldoend kleine $|\zeta|$ kan

$$\psi(z)\frac{dz}{d\zeta} = \sum_{h=0}^{m-1} m_k \zeta x^k + R_n$$

worden ontwikkeld volgens de reeks van Lagrange met restterm.

REEKS VAN LAGRANGE MET RESTTERM.

1. G is een gebied, waarvan de rand C uit een eindig aantal gesloten rectificieerbare krommen bestaat.
2. $\psi(z)$ is continu op en binnen C, analytisch binnen C.
3. $\zeta = F(z)$ is analytisch binnen C, waardoor het inwendige van C omkeerbaar éénduidig op een gebied van het ζ-vlak wordt afgebeeld.
4. a is een bepaald punt binnen C, waarin $F(a) = 0$.
5. Als $F(z)$ een willekeurig punt binnen C is, dan is $\frac{1}{F(t)-F(z)}$ een continuefunctie van t voor alle punten t op en binnen C, behalve voor $t = z$.

Onder deze voorwaarden geldt voor ieder punt z binnen C en voor ieder natuurlijk getal n:

$$\psi(z) \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \int_C \frac{\psi(t)dt}{F(t)^{k+1}} + \frac{\zeta^n}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(t)dt}{\{F(t)\}^n \{F(t)-}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(t)dt}{\{F(t)\}^{k+1}} = \frac{1}{k!} D^k_{z=a} \left\{ \psi(z) \left(\frac{z-a}{F(z)}\right)^{k+1} \right\}$$

Daardoor gaat de integraal over in:

$$\int_a^b e^{\psi(z)} \psi(z)dz = e^{\psi(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} D^k_{z=a} \left\{ \psi(z) \left(\frac{z-a}{F(z)}\right)^{k+1} \right\} \int_0^{Be^{\frac{i\lambda}{h}}} e^{-\zeta^h} \zeta^k d$$

$$+ \frac{e^{\psi(a)}}{2\pi i} \int_0^{Be^{\frac{i\lambda}{h}}} e^{-\zeta^h} \zeta^n \int_C \frac{\psi(t)dt d\zeta}{\{F(t)\}^n \{F(t)-\zeta\}}$$

Literatuur:

P. Debye. Math. Annalen. 67 (1909), p. 535 - 559.
" " Münchener Sitzungsber. 40 (1910), No. 5.

G.N. Watson: A treatise on the theory of Bessel functions, p. 215-220.

C.S. Meyer: Math. Annalen, 108 (1933), p. 321 - 359.
" " : Dissertatie, Groningen, 1933.

Asymptotische en sterk convergente ontwikkelingen.

Voordracht gehouden door Prof. Dr. S.C. van Veen
op 20 Maart 1947.

Asymptotische ontwikkelingen van Bessel-functies als de index en de parameter dezelfde orde van grootte bezitten.

Besselfuncties zijn oplossingen van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0,$$

waarvan de oorsprong en het oneindige de singuliere punten zijn.

Een fundamenteel oplossingssysteem in de omgeving van de oorsprong wordt gevormd door

$$J_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r}\,r!\,\Gamma(n+r+1)}$$

(Besselfunctie van de eerste soort) en

$$Y_n(z)=\frac{J_n(z)\cos n\pi-J_{-n}(z)}{\sin n\pi},$$

indien n niet geheel is. Voor gehele n vervangt men in het laatste lid n door $n+\varepsilon$ en gaat daarna over tot de limiet, als ε tot nul nadert.

De functies $Y_n(z)$ zijn Besselfuncties van de tweede soort.

Voor het onderzoek in de omgeving van het oneindige zijn beter bruikbaar de functies van Hankel:

$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+i\,Y_n(z)$$

en

$$H_n^{(2)}(z)=J_n(z)-i\,Y_n(z).$$

Men heeft dus

$$J_n(z)=\frac{H_n^{(1)}(z)+H_n^{(2)}(z)}{2}\quad\text{en}\quad Y_n(z)=\frac{H_n^{(1)}(z)-H_n^{(2)}(z)}{2i}.$$

Voor grote $|z|$ is

$$H_n^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

en

$$H_n^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Van groot belang b.v. in de astronomie en in de theoretische physica is het geval, dat $|z|$ en n beide groot zijn en wel van dezelfde orde.

Het geval $\frac{z}{n}=\varepsilon<1$ is voor de astronomie van belang. (zie S.C. van Veen, Math. Annalen 97 1927 p.696). Wij zullen hier het geval

$$\frac{z}{n}=\sec\beta>1\quad\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)\ \text{en}\ -\pi<\arg n<2\pi$$

onderzoeken. We gaan uit van

terwijl voor $0 \leq \arg n \leq \pi$ de restterm in absolute waarde kleiner is dan de eerst verwaarloosde term. Men vindt

$$A_l = \sum_{k=0}^{l} \alpha_{lk} (\cot\beta)^{2k}$$

waarin α_{lk} numerieke constanten voorstellen, tussen welke recurrente betrekkingen worden aangegeven.

C.S. Meyer heeft ook nog het geval w = n onderzocht. Dan gaat het voorgaande niet door, omdat de zadelpunten dan van de tweede orde worden.

Op analoge manier vindt men:

$$H_n^{(1)}(n) = \frac{2}{3\pi i} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{1}{6}(2l+1)\pi i} \frac{6^{\frac{1}{3}(2l+1)}}{n^{\frac{1}{3}(2l+1)}} \Gamma\left(\frac{2l+1}{3}\right) a_l \cos\frac{(l+1)\pi}{6} + R_N$$

als $N \equiv 2 \pmod 3$ en $-\frac{\pi}{6} \leq \arg n \leq \frac{7\pi}{6}$ is, dan is de restterm absoluut genomen kleiner dan de eerst verwaarloosde term. De getalcoëfficiënten a_l kunnen worden bepaald.

ASYMPTOTISCHE EN STERK CONVERGENTE ONTWIKKELINGEN.

Voordracht gehouden door Prof. Dr.S.C.van Veen
op 27 Maart 1947.

Historische opmerkingen bij de voordracht op 20 Maart 1947.

In het supplement van Tome V van de Mécanique céleste (p.20)(1827) beschouwt Laplace de ontwikkeling

$$\frac{r}{a} = C_0 + C_1 \cos\zeta + \ldots + C_m \cos m\zeta + \ldots$$

waarin r de voerstraal, a de halve grote as en ζ de middelbare anomalie van de planetenbaan voorstelt. Hij bepaalt de hoofdterm in de asymptotische ontwikkeling van de coëfficient C_m en vindt voor zeer grote m

$$C_m \backsim -\frac{2(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{m\sqrt{m}\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e\,E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^m = -2\sqrt{\frac{\cos\varphi}{2\pi m^3}}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot E^{\cos\varphi}\right)^m;$$

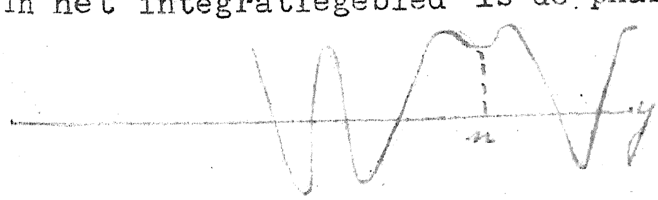
hierin stelt $e = \sin\varphi$ de excentriciteit voor en E de exponentiaalconstante 2,71828.
Carlini en Jacobi hebben later met grote moeite de tweede term der asymptotische ontwikkeling bepaald (Astronomische Nachrichten No.665 en No.709-712; Jacobi Werke).
Eveneens Gauss (Nalatenschap, Werke Band 10,p.421).
Nadat Bessel de functies J_n had ingevoerd (Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht (Berlin,Abh.1824)) bleek $C_m = -2m J_m'(me)$ te zijn. Laplace was in 1827 niet bekend met het werk van Bessel van 1824.

De methode der stationnaire phase.(Kelvin,van der Corput)

Deze methode wordt geïllustreerd aan het voorbeeld:

$$\int_0^\infty \sin(y^3 - 3n^2 y)\,dy$$ waarin n zeer groot is.

Hier is geen sprake van een steile top, zoals bij de toepassingen van de methode van Laplace. De "phase" $y^3 - 3n^2y$ bereikt een extreme waarde voor $y = \pm n$
In het integratiegebied is de phase stationnair voor $y = \pm n$



Kelvin beschouwt bovenstaande integraal in het gebied $n-\varepsilon < y < n+\varepsilon$, waarin ε een klein positief getal voorstelt.

Hij verwacht als physicus op grond van het interferentieprincipe, dat over de rest van het integratiegebied de golven elkaar wel zo ongeveer zullen opheffen.
De integraal $\int_{n-\varepsilon}^{n+\varepsilon}$ gaat, als $y = n + u$ gesteld wordt, over in

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sin(-2n^3 + 3nu^2 + u^3)\,du = 2\int_0^{\varepsilon} \sin(-2n^3 + 3nu^2)\cos u^3\,du =$$

$$= \frac{1}{\cdots}\int^{3n\varepsilon^2} \sin(-2n^3 + v)\cos\frac{v^{\frac{3}{2}}}{3n\sqrt{3n}}\,\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}} =$$

In het integratiegebied is $\sin\frac{v^{\frac{3}{2}}}{6n\sqrt{3n}} < \sin\frac{\varepsilon^3}{2} < \frac{\varepsilon^3}{2}$,
zodat de absolute waarde van de laatste integraal kleiner is dan

$$\frac{2}{\sqrt{3n}}\,\frac{\varepsilon^6}{4}\int_0^{3n\varepsilon^2}\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{3n}}\,\frac{\varepsilon^6}{4}\,.\,\varepsilon\sqrt{3n} = \underline{\underline{\varepsilon^7}}$$

Kiest men $\varepsilon = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, dan vindt men de waarde

$$\frac{1}{\sqrt{3n}}\int_0^{3n^{\frac{1}{3}}}\sin(-2n^3+v)\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}} + \frac{\theta}{n^{\frac{7}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3n}}\left\{\sin(-2n^3)\int_0^{3n^{\frac{1}{3}}}\frac{\cos v\,dv}{v^{\frac{1}{2}}} + \cos(-2n^3)\int_0^{3n^{\frac{1}{3}}}\frac{\sin v\,dv}{v^{\frac{1}{2}}}\right\} + \frac{\theta}{n^{\frac{7}{3}}} \infty$$

$$\infty \frac{1}{\sqrt{3n}}\left\{\sin(-2n^3)\left(\sqrt{\pi}\cos\frac{\pi}{4}\right) + \cos(-2n^3)\left(\sqrt{\pi}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\} + \frac{\theta}{n^{\frac{7}{3}}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{3n}}\sin\left(-2n^3+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\theta}{n^{\frac{7}{3}}}$$

Bij deze zeer ruwe en mathematisch onbevredigende redenering wordt geen rekening gehouden met het gedrag in de omgeving van $y = 0$, dat volgens het onderzoek van Bijl van essentiele invloed is op de uitkomst. Om volledig rekening te houden met deze bezwaren, heeft van der Corput de methode van de stationnaire phase als volgt gefundeerd. De gegeven integraal wordt gesplitst op de volgende manier:

$$\int_0^{\infty}\sin(y^3-3n^2y)\,dy = \int_0^2 f_1(y)\sin(y^3-3n^2y)\,dy + \int_1^{n-1} f_2(y)\sin(y^3-3n^2y)\,dy$$
$$+ \int_{n-2}^{n+2} f_3(y)\sin(y^3-3n^2y)\,dy + \int_{n+1}^{\infty} f_4(y)\sin(y^3-3n^2y)\,dy$$

Hierin is

$f_1(y) = 1$ voor $0 \leq y \leq 1$; $f_1(y) + f_2(y) = 1$ voor $1 \leq y \leq 2$
$f_2(y) = 1$ voor $2 \leq y \leq n-2$; $f_2(y) + f_3(y) = 1$ voor $n-2 \leq y \leq n-1$
$f_3(y) = 1$ voor $n-1 \leq y \leq n+1$; $f_3(y) + f_4(y) = 1$ voor $n+1 \leq y \leq n+2$
$f_4(y) = 1$ voor $n+2 \leq y$

De functies $f(y)$ worden bovendien zo gekozen, dat iedere afgeleide van positieve orde in de uiteinden van ieder der vier integratie-intervallen de waarde nul bezit.
Dan kunnen deze vier integralen door partiële integratie asymptotisch worden ontwikkeld. Aan deze eisen kan o.a. worden voldaan door gebruikmaking van de hulpfunctie:

$$H(x) = \frac{\int_x^2 e^{-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2-t}}\,dt}{\int_1^2 e^{-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2-t}}\,dt} \qquad (1 \leq x \leq 2)$$

die in 1 de waarde 1, in 2 de waarde nul aanneemt en waarvan iedere afgeleide in elk dier twee punten nul is.

In het interval $1 \leq y \leq 2$ wordt gesteld $f_1(y) = 1 - f_2(y) = H(y)$

$n-2 \leq y \leq n-1$ $\qquad f_2(y) = 1 - f_3(y) = H(y-n+3)$

$n+1 \leq y \leq n+2$ $\qquad f_3(y) = 1 - f_4(y) = H(y-n)$

De derde integraal gaat dan door de substitutie $y = n + z$ over in:

$$\int_{-2}^{+2} f_3(n+z)\left\{\cos z^3 \sin(-2n^3+3nz^2) + \sin z^3 \cos(-2n^3+3nz^2)\right\} dz$$

$$\sim \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(-1)^k}{2k!} \int_{-2}^{+2} f_3(n+z) z^{6k} \sin(-2n^3+3nz^2)\,dz +$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_{-2}^{+2} f_3(n+z) z^{6k+3} \cos(-2n^3+3nz^2)\,dz$$

Door partiële integratie vindt men voor deze integraal

$$\sim \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\Gamma(3k+\frac{1}{2}) \sin(-2n^3 + \frac{2k+1}{4}\pi)}{(2k)!\,(3n)^{3k+\frac{1}{2}}},$$

waarbij de afwijking hoogstens van de orde $n^{-3M-\frac{1}{2}}$ is.

Op analoge manier levert de tweede integraal

$$\sim \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}(3k)!}{k!\,(3n^2)^{3k+1}}.$$

met een fout, die hoogstens van de orde n^{-6N-2} is.
De beide andere integralen blijken van de orde n^{-6N-2} te zijn.

Op dezelfde manier kan men het minder ingewikkelde resultaat vinden

$$\int_0^\infty \cos(y^3 - 3n^2 y)\,dy = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\Gamma(3k+\frac{1}{2}) \cos\{-2n^3 + \frac{2k+1}{4}\pi\}}{(2k)!\,(3n)^{3k+\frac{1}{2}}} + O(n^{-3M-\frac{1}{2}})$$

Beide uitkomsten kunnen op eenvoudiger wijze worden gevonden door toepassing van de methode der zadelpunten op de integraal

$$\int e^{i(y^3-3n^2y)}\,dy\,;$$

Deze integraal wordt genomen langs de gebroken lijn van [illegible] van $-ni$ door $+n$ naar $\infty e^{i\frac{\pi}{4}}$.

<u>Litteratuur:</u> <u>Stokes</u> Cambridge Phil.Trans.9(1856) p.175,183.
<u>Riemann</u> Werke (1875) p. 400-406.
<u>Kelvin</u> Phil.Mag.(5) 23 (1887) p. 252-255.
<u>Watson</u> Proc. Cambr.Phil.Soc.19(1918) p.42-48
p.49-55
<u>van der Corput</u> Compositio Mathematica 1 (1934) p.15
" " 3 (1936) p.328.
<u>J.Bijl</u> Dissertatie Groningen 1937.

ASYMPTOTISCHE EN STERK CONVERGENTE ONTWIKKELINGEN.

Voordracht gehouden door Prof. Dr. S.C. van Veen
op 3 April 1947.

Transformatie in convergente reeksen (van der Corput).

Wanneer men b.v. $\int_0^\infty e^{-nx-x^2}\,dx$ voor grote waarden van n wil berekenen, wordt de factor e^{-x^2} in een machtreeks ontwikkeld, wat voor grote x een zeer slechte benadering geeft voor de functie e^{-x^2}, die dan zeer dicht bij nul ligt. Het resultaat wordt dan een asymptotische (divergente) reeks.
Men kan zich afvragen, of men dit euvel kan ondervangen, door e^{-x^2} te ontwikkelen naar een functie van x, welke voor grote waarden van x klein wordt, b.v. naar xe^{-x}, met behulp van de formule van Lagrange.
Men vindt:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k e^{-kx}$$

waarin

$$c_0 = 1, \quad c_h = h \sum_{0 \le k \le \frac{h-2}{2}} \frac{(-1)^k h^{h-2-2k}}{(h-2-2k)!\,k!}$$

Deze ontwikkeling geldt voor $0 \le x \le 1$.
Voor $x > 1$ stelt de reeks van het rechterlid de functie $e^{-\xi^2}$ voor, waarin het tussen 0 en 1 gelegen getal ξ bepaald wordt door [illegible]

Dan is voor alle positieve x [illegible]

De gegeven integraal is dan te vervangen door: [illegible]

$$\int_0^\infty e^{-nx} \sum c_k x^k e^{-kx}\,dx + \int_0^\infty e^{-nx}\left(e^{-\xi^2} - e^{-x^2}\right)dx$$

[illegible]

$$\int_0^\infty e^{-(n+k)x} x^k\,dx - R = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,c_k}{(n+k)^{k+1}} - R$$

[illegible]

Hierin is [illegible]

$0 < R <$ [illegible]

[illegible]

en dus zeer klein. Wegens $|c_k| \le \frac{k^{k-1}}{k!}$ [illegible]

wordt de gevonden reeks gemajoreerd door de (voor grote n sterk convergente) reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{(n+k)^{k+1}}$$

Sterk convergente reeksen.

De hypergeometrische ontwikkelingen voor de elliptische integralen van de 1e en 2e soort:

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2\right)$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2\right)$$

convergeren voor $|k^2|<1$. De convergentie is echter zeer zwak, als k in de buurt van 1 ligt. Men kan dan de convergentiesterkte belangrijk verbeteren door herhaalde toepassing van de transformatie van Landen.

$$K(p)=\frac{1}{1+p}K\left(\frac{2\sqrt{p}}{1+p}\right)$$

Door invoering van het arithmetrisch-geometrisch gemiddelde (Gauss) als volgt:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2};\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\quad(n\geq 1)$$

met

$$a_0=1+k,\quad b_0=1-k$$ (dus $a_1=1$),

vindt men als

$$k_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}}\quad\text{en}\quad k_1=k=\sin\alpha$$

gesteld wordt,

$$\frac{K(k_n)}{a_n}=\frac{K(k_{n-1})}{a_{n-1}}=\ldots=\frac{K(k_1)}{a_1}\ \text{dus}\quad K(k)=\frac{1}{a_n}K(k_n)$$

Dit levert na enkele transformaties een zeer sterk convergente ontwikkeling, waarbij in de meeste gevallen de 1e term een uitkomst levert, die in 10 en meer decimalen met de gevraagde uitkomst overeenstemt. Verder kan de hypergeometrische ontwikkeling getransformeerd worden in een ontwikkeling in de omgeving van k = 1, b.v.:

$$F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z\right)=\frac{1}{\pi}\log\frac{16}{1-z}\cdot F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;1-z\right)-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}\sum_{q=n}^{\infty}\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q)}{q!}\right\}^2(1-z)^q$$

Ook deze uitkomst kan in sterker convergente ontwikkeling worden getransformeerd door toepassing van Landen. Bij vijfvoudige transformatie kan men reeksen vinden, waarvan de 1e term voor alle waarden van $|k|<1$ een tot in 19 decimalen nauwkeurig resultaat levert.
Analoge resultaten voor $E(k)$.
Tenslotte beheerst men nu ook het geval $|k^2|>1$ door de formule:

$$k\,K(k)=K\left(\tfrac{1}{k}\right)+i\cdot\operatorname{sgn}\mathfrak{I}(k^2)\cdot K\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{k^2}}\right)$$

en een analoge formule voor $E(k)$.

Litteratuur:
Gauss: Werke Band III (Nachlass) p.361, 372, 375, 403; p.216 (No.46)
S.C.van Veen: Proceedings Kon.Acad. Amsterdam.
vol XLIV (1941) p. 964, 1078, 1198,
" XLV (1942) p. 32, 171, 240.
