STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 12

Waarnemingsrekenen.

Cursus Den Haag 1949/50.

J.N.Tienstra.

1950

CURSUS WAARNEMINGSKENNING.

Errata.

blz. 1 einde 2de alinea " de cijfers van " kan vervallen.

blz. 6 formule (4) moet luiden:

$$\frac{f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} = \frac{\Sigma_i f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} \times \frac{\Sigma_k f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}}$$

blz. 9 bij de achttiende regel v. b. : de woorden " rij voor rij " dienen te worden vervangen door " laag voor laag ".

blz.30 2de regel v.b. " cirkels " moet zijn " een stelsel concentrische cirkels ".

blz.40 16de regel v.b. " moduli " moet zijn " kwadraten van de moduli ".

blz.41 6de regel v.b. " moduli " moet zijn " wortel uit de moduli ".

blz.43 8ste regel v.o. (11) moet zijn (12).
in de figuur dienen y_2 en y_3 te worden vervangen door X_2 en X_3.
5de regel v.o. y_2Oy_3 moet zijn X_2OX_3.

blz. 47 laatste regel: § 3.3. moet zijn § 3.1.

blz. 52 16de en 15de regel v.o. " één der verticale begrenzingen evenwijdig aan de X_1-as loopt " moet zijn " twee ..... lopen ".

blz. 54 6de regel v.b. G^{ik} moet zijn G_{ik}.

blz. 55 formule (7) moet luiden

$$\frac{G_{11}}{H_{11}}\zeta_1^2 + 2\frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{H_{11}}} \cdot \frac{\sqrt{G_{22}}}{\sqrt{H_{22}}} \cos \gamma_{12}\, \zeta_1\zeta_2 + \frac{G_{22}}{H_{22}}\zeta_2^2 = r^2$$

blz. 58 22ste regel v.b. " coördinatenvlakken " moet zijn " coördinatenhypervlakken ".
23ste regel v.b. X^i moet zijn X^k.

blz. 61 8ste en 9de regel v.b. " de tensor ..... " moet zijn " hier zullen we ze cofactoren noemen en de tensor de tensor der cofactoren

blz. 62 formule tussen (14) en (15) moet zijn:

$$\lambda e_i^1 x^i + \mu e_i^2 x^i + \nu e_i^3 x^i \equiv 0$$

laatste regel = moet zijn $\equiv$.

blz. 65 6de regel v.b. X^1, X^2, X^α moet zijn X^1, X^2, ... , X^α.

blz. 69 formule (7): op het eind moet de θ vervangen worden door μ^2.

blz. 70 in formule (12.) vervalt $\mu^2_{pU + qV}$.
regel 10 v.b. " nauwkeurigheidstensor " moet zijn " tensor d cofactoren."
formule (16) : H^{13} moet zijn H^{22}

blz. 72 5de regel v.b. " moduli " moet zijn " kwadraten van de moduli ".

blz. 73 17de regel v.o., vóór De astronoom ..... enz. wordt ingevoegd: ; hij zal over moeten gaan op een stereometrische voorstelling.

blz. 83 19de regel v.b. " kan " moet zijn " moet nu ".

blz. 84 2de regel v.o. " moduli " moet zijn " kwadraten van de moduli ".

blz. 85 17de regel v.b. ε_i vervalt.
18de regel v.b. η_i wordt ε_i.
19de regel v.b. ε_i wordt η_i.
7de regel v.o. Nu is vervalt ; omdat wordt begin van de zin. na $\eta_i = \varepsilon_i + (\eta_i - \varepsilon_i)$ wordt het woord is ingelast.

blz. 86 2de regel v.o. " nu " vervalt.

blz. 88 6de regel v.b. ε_i moet zijn $\varepsilon_i \sqrt{g_{ii}}$.

blz. 91 in de tekst moeten de formules (13) t/m (17) allen één nummer opschuiven: (13) wordt (14), (14) wordt (15) etc.

blz. 92 2de regel v.b. (18), (19) en (20) moeten zijn (19), (20) en (21).
8ste regel v.b. (18) moet zijn (19).

blz. 95 3de regel v.o. " middelbare fout " moet zijn " modulus ".

blz. 102 11de regel v.o. a_n moet zijn a_5.
10de regel v.o. b_n moet zijn b_5.

blz. 105 4de regel v.b. $g_1 a_1 b_n \overline{p_1, p_n}$ moet zijn $g_1 g_n a_1 b_n \overline{p_1, p_n}$.
5de regel v.b. $g_1 a_2 b_n \overline{p_2, p_n}$ moet zijn $g_2 g_n a_2 b_n \overline{p_2, p_n}$.

blz. 106 10de regel v.b. moet zijn

$$\overline{\Lambda^1, \Lambda^2} = (c_1^1 Q_x + c_2^1 Q_y).(c_1^2 Q_x + c_2^2 Q_y).$$

blz. 107 11de regel v.b. moet zijn:

$$3\, g_1 a_1 (p_1 - r_1) \quad \text{en} \quad 3\, g_1 b_1 (p_1 - r_1)$$

blz. 110 formule (14) moet luiden:

$$\overline{p^i, t^\rho} = \overline{p^i, (u_o^\rho - u_k^\rho p^k)} = - u_k^\rho \overline{p^i, p^k} = - g^{ik} u_k^\rho .$$

blz. 112 19de regel v.o. " elk der vergelijkingen " te vervangen door " de overeenkomstige vergelijking ".

blz. 122 4de regel v.o. moet zijn:

$$\overline{\eta^\tau, \eta^\pi} = \varepsilon^{il} u_l^\tau \varepsilon^{km} u_m^\sigma G_{\tau\sigma}$$

blz. 123 14de regel v.o. (13) moet zijn (12).
6de regel v.o. " we hebben " vervalt.

blz. 124 11de regel v.o. K_ρ moet zijn $\overline{K}_\rho$

blz. 129 8ste regel v.o.: het laatste deel van de formule moet zijn: $G_{\rho\sigma} \overline{p}^\rho a_\lambda^\sigma X^\lambda$

blz. 131 3de regel v.b. (9) moet zijn (10).
blz. 134 1ste regel v.b. g^{ik} moet zijn g_{ik}.
11de regel v.o. ".
9de regel v.o. ".
5de regel v.o. ".
blz. 152 18de regel v.b. η moet zijn μ .
19de regel v.b. ".

Bij blz. 89 onderaan:

Vanaf de 9de regel v.o. wordt de tekst als volgt:

Er zijn drie soorten

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma}$$
$$G^{\rho\beta} = g^{ik} u_i^{\rho} b_k^{\beta} \qquad (8a)$$
$$G^{\alpha\beta} = g^{ik} b_i^{\alpha} b_k^{\beta}$$

We kiezen nu de b_i^{α} zo, dat het stel grootheden r^{α} enerzijds en het stel r^{ρ} anderzijds correlatievrij zijn. Dan moet gezorgd worden, dat de cofactoren $G^{\rho\beta}$ nul worden. Dus moeten volgens (8a) de b_i^{α} zo gekozen worden, dat

$$G^{\rho\beta} = g^{ik} u_i^{\rho} b_k^{\beta} = 0 \qquad (9)$$

Volgens (9) moeten de b_i^{α} voldoen aan het stelsel van b vergelijkingen

$$g^{ik} u_i^{\rho} c_k = 0 \qquad (9a)$$

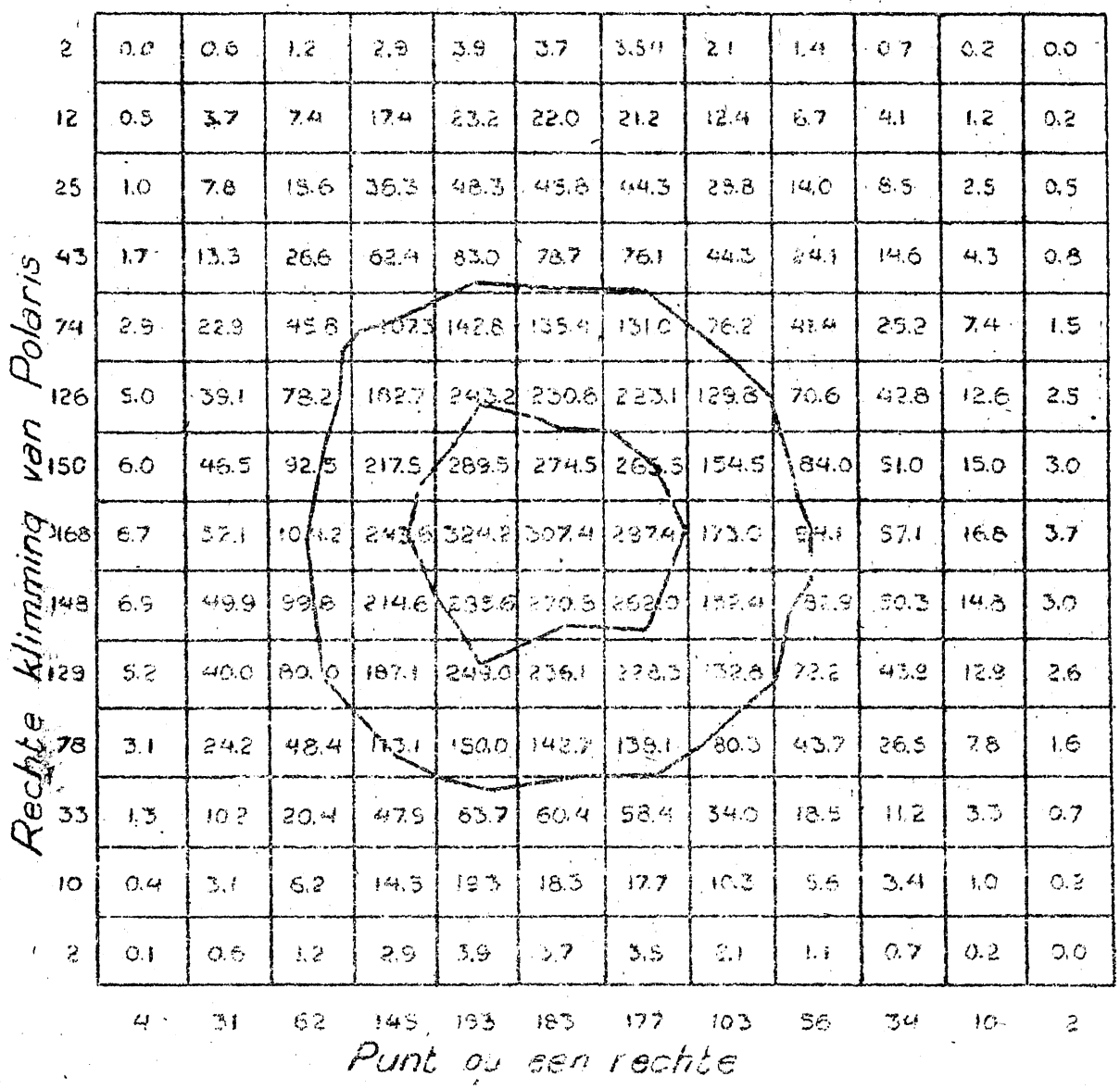
Deze vergelijkingen zijn onafhankelijk. Waren ze dit niet, dan zou er een lineaire betrekking tussen de coëfficiënten moeten bestaan, b.v.

$$g^{ik} u_i^{\rho} \lambda_{\rho} = 0 \qquad (9b)$$

Dit is een stelsel van n homogene vergelijkingen in de n grootheden $u_i^{\rho}\lambda_{\rho}$. De determinant van dit stelsel is de determinant van de matrix der g^{ik} ; deze is niet nul. De homogene vergelijkingen hebben dus geen oplossing, waarbij niet alle veranderlijken $u_i^{\rho}\lambda_{\rho}$ nul zijn, derhalve

$$u_i^{\rho}\lambda_{\rho} = 0$$

Omdat echter de gegeven betrekkingen (1) onafhankelijk waren ondersteld kan dit niet juist zijn , dan kan ook (9b) niet bestaan en zijn dus de vergelijkingen (9a) onafhankelijk.

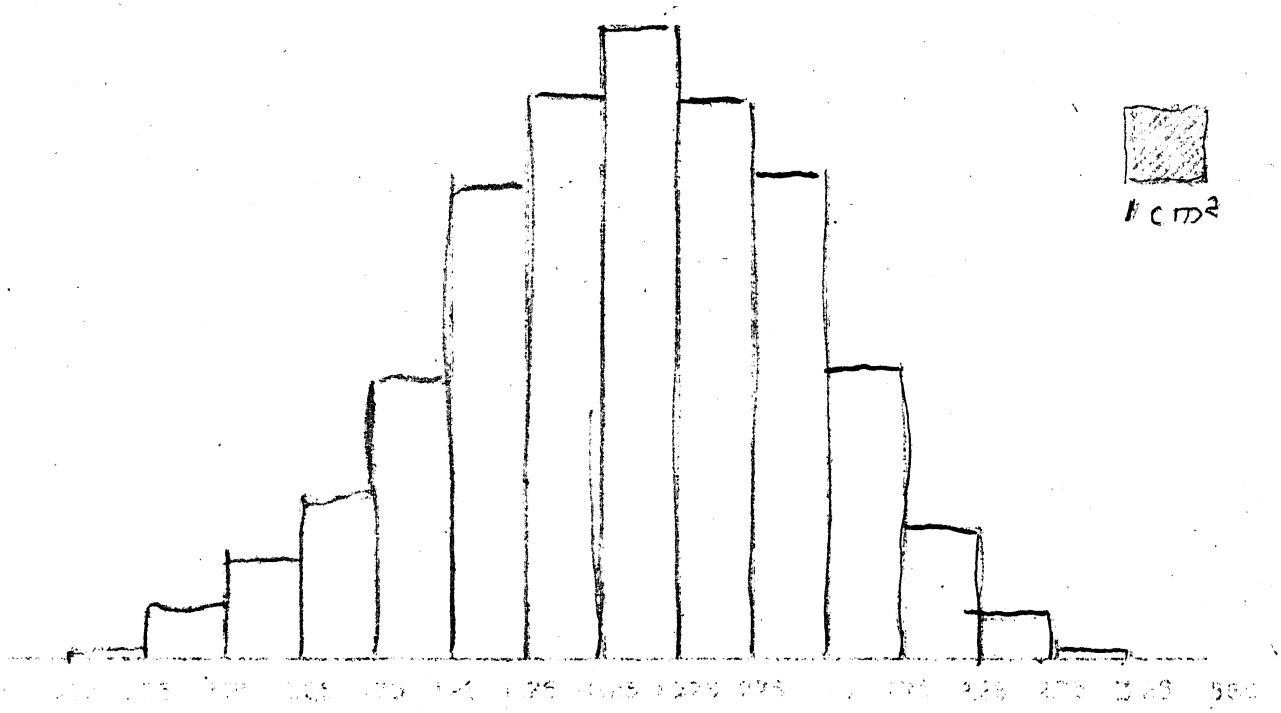


2	0.0	0.6	1.2	2.9	3.9	3.7	3.5	2.1	1.4	0.7	0.2	0.0
12	0.5	3.7	7.4	17.4	23.2	22.0	21.2	12.4	6.7	4.1	1.2	0.2
25	1.0	7.8	15.6	36.3	48.3	45.8	44.3	25.8	14.0	8.5	2.5	0.5
43	1.7	13.3	26.6	62.4	83.0	78.7	76.1	44.3	24.1	14.6	4.3	0.8
74	2.9	22.8	45.6	107.3	142.8	135.4	131.0	76.2	41.4	25.2	7.4	1.5
126	5.0	39.1	78.2	182.7	243.2	230.6	223.1	129.8	70.6	42.8	12.6	2.5
150	6.0	46.5	92.5	217.5	289.5	274.5	265.5	154.5	84.0	51.0	15.0	3.0
168	6.7	52.1	104.2	243.6	324.2	307.4	297.4	173.0	94.1	57.1	16.8	3.7
148	6.5	49.9	99.8	214.6	285.6	270.5	262.0	152.4	82.9	50.3	14.8	3.0
129	5.2	40.0	80.0	187.1	249.0	236.1	228.5	132.8	72.2	43.9	12.9	2.6
78	3.1	24.2	48.4	113.1	150.0	142.2	138.1	80.3	43.7	26.5	7.8	1.6
33	1.3	10.2	20.4	47.9	63.7	60.4	58.4	34.0	18.5	11.2	3.3	0.7
10	0.4	3.1	6.2	14.5	19.3	18.3	17.7	10.3	5.6	3.4	1.0	0.2
2	0.1	0.6	1.2	2.9	3.9	3.7	3.5	2.1	1.4	0.7	0.2	0.0
	4	31	62	145	193	183	177	103	56	34	10	2

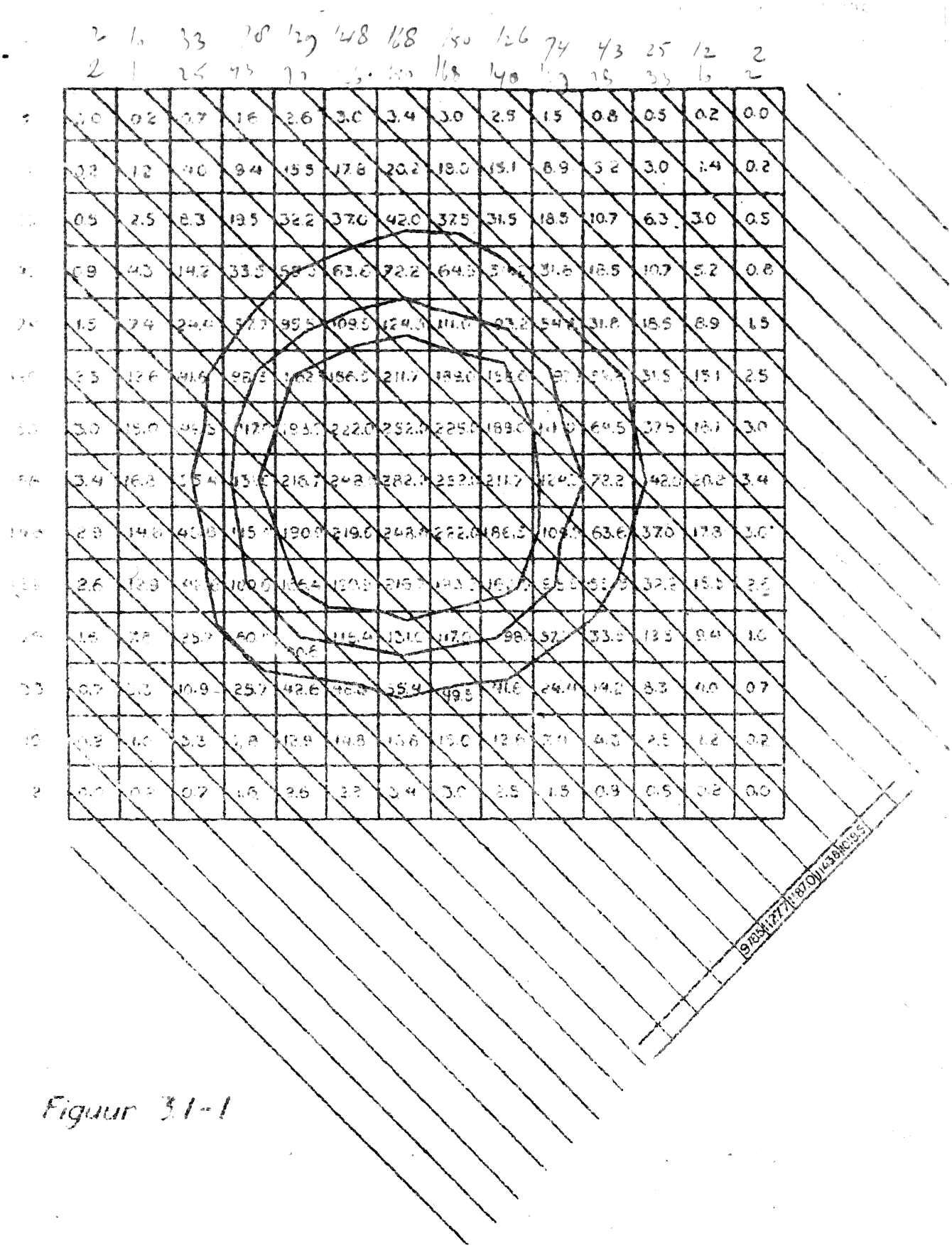
Figuur 3.1-2.

Figuur 22-1

Rechte klimming van de Poolster

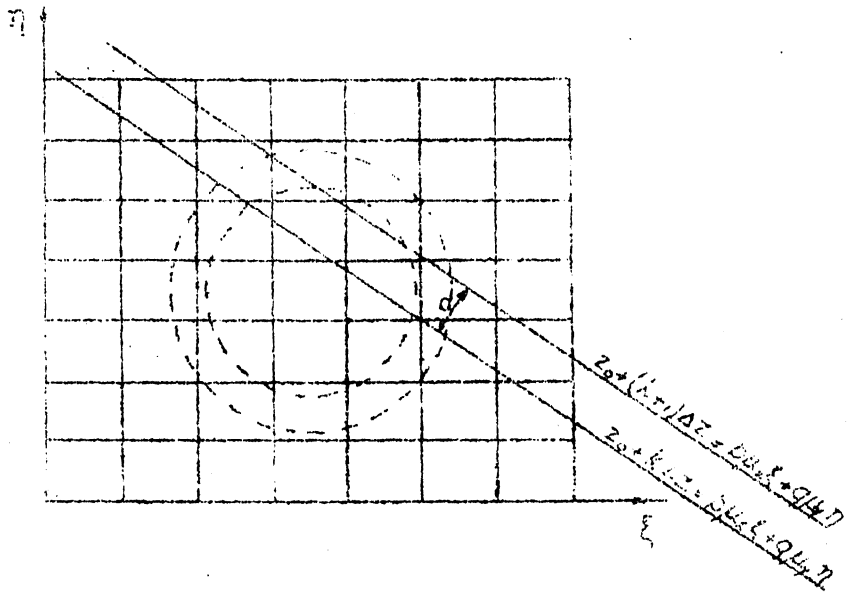


Klasse interval 0,5

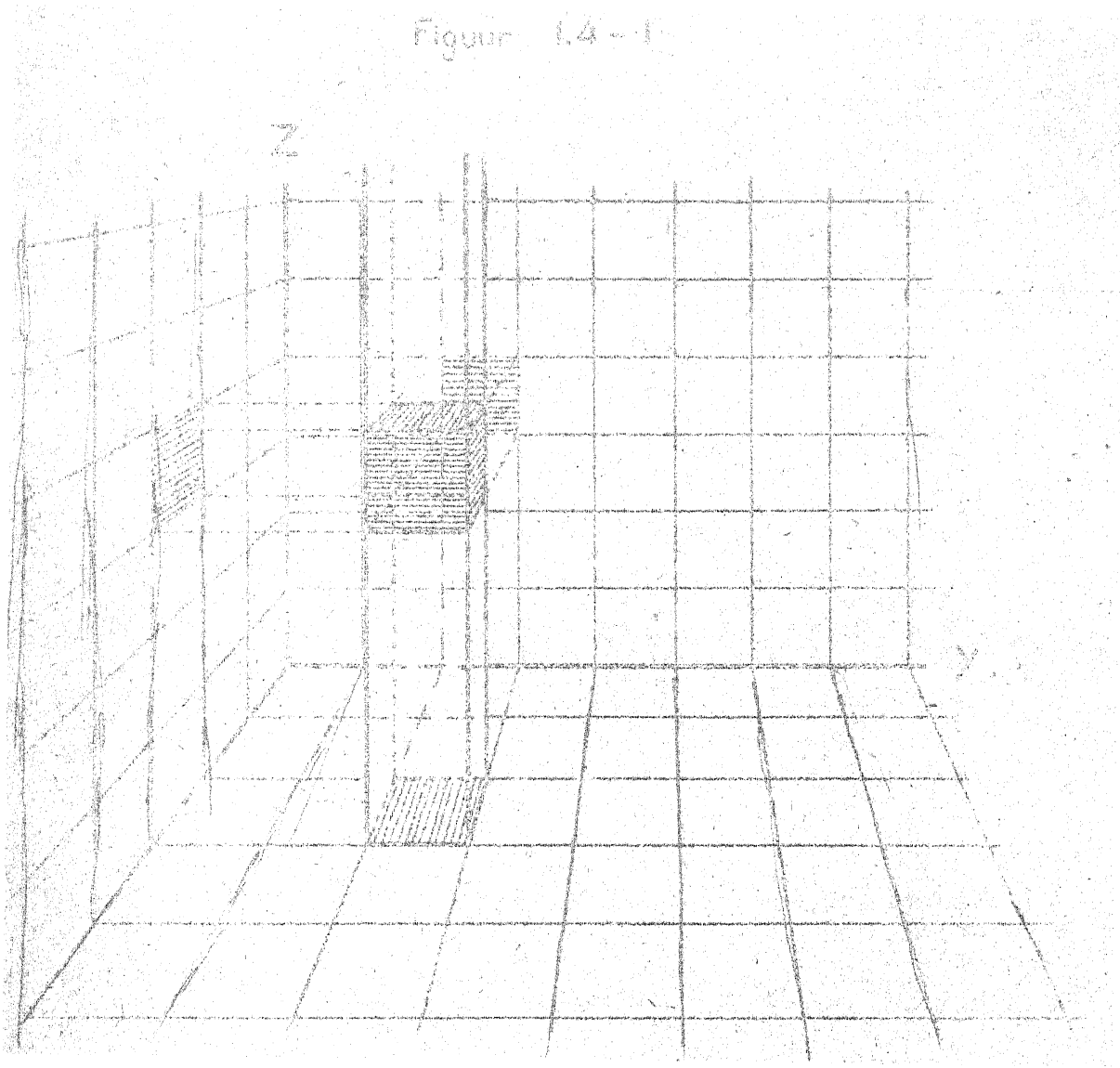


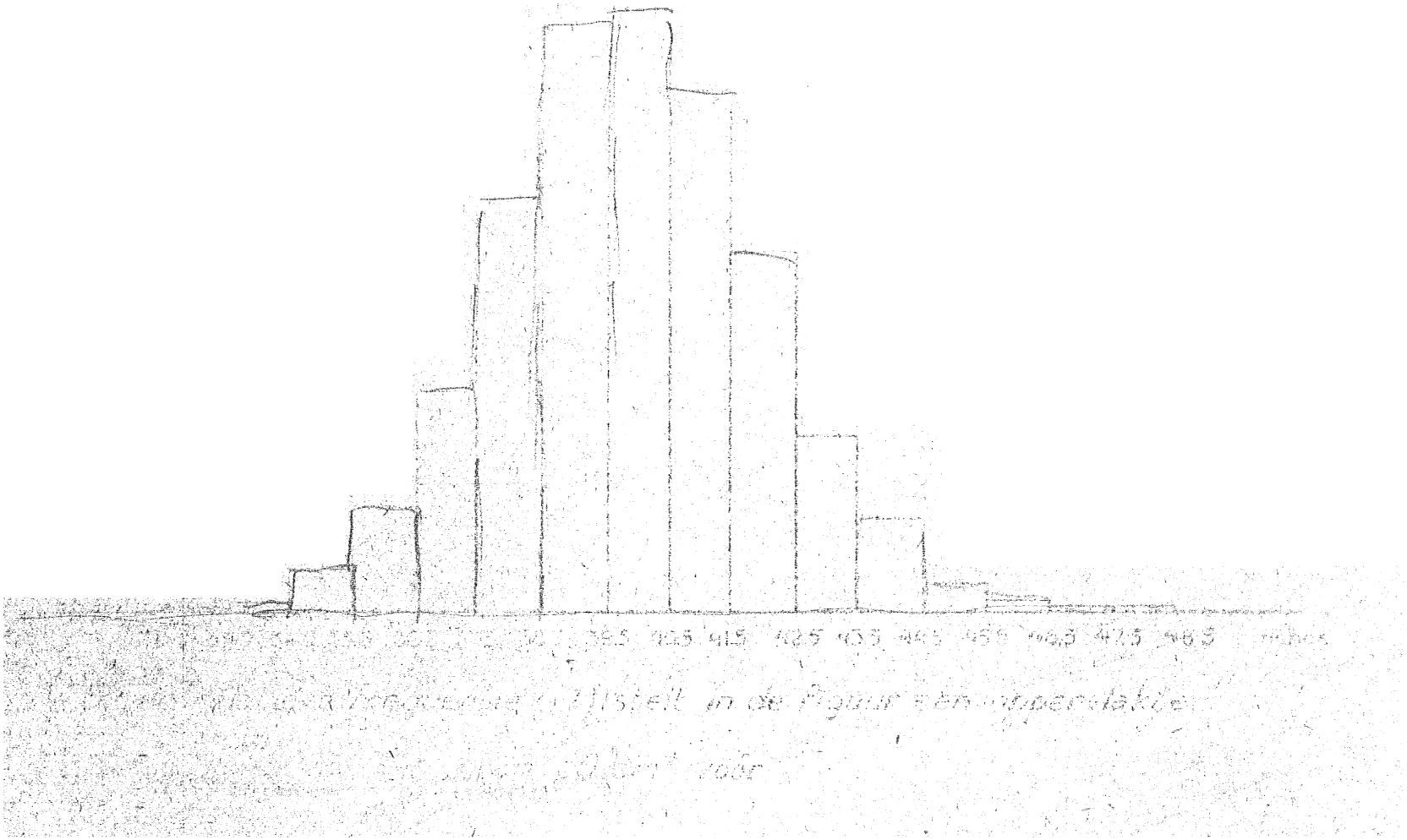
Figuur 3.1-1

Fig 33.1



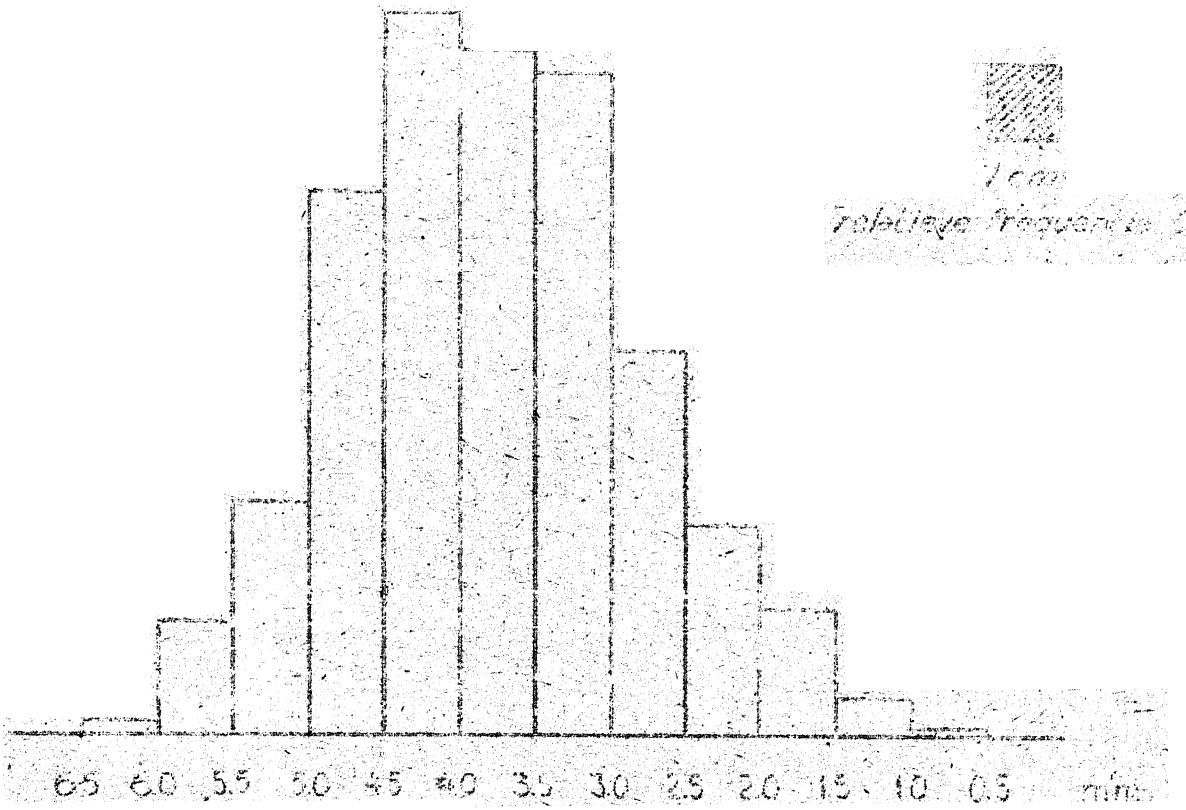
Figur 14 - 1





Figuur 2.2-3

Punt op een rechte



Klasse interval 0.5 mm
Totale oppervlakte v.h. histogram 50 cm²
Schaal klasse interval breedte 1 cm

Figuur 23-1

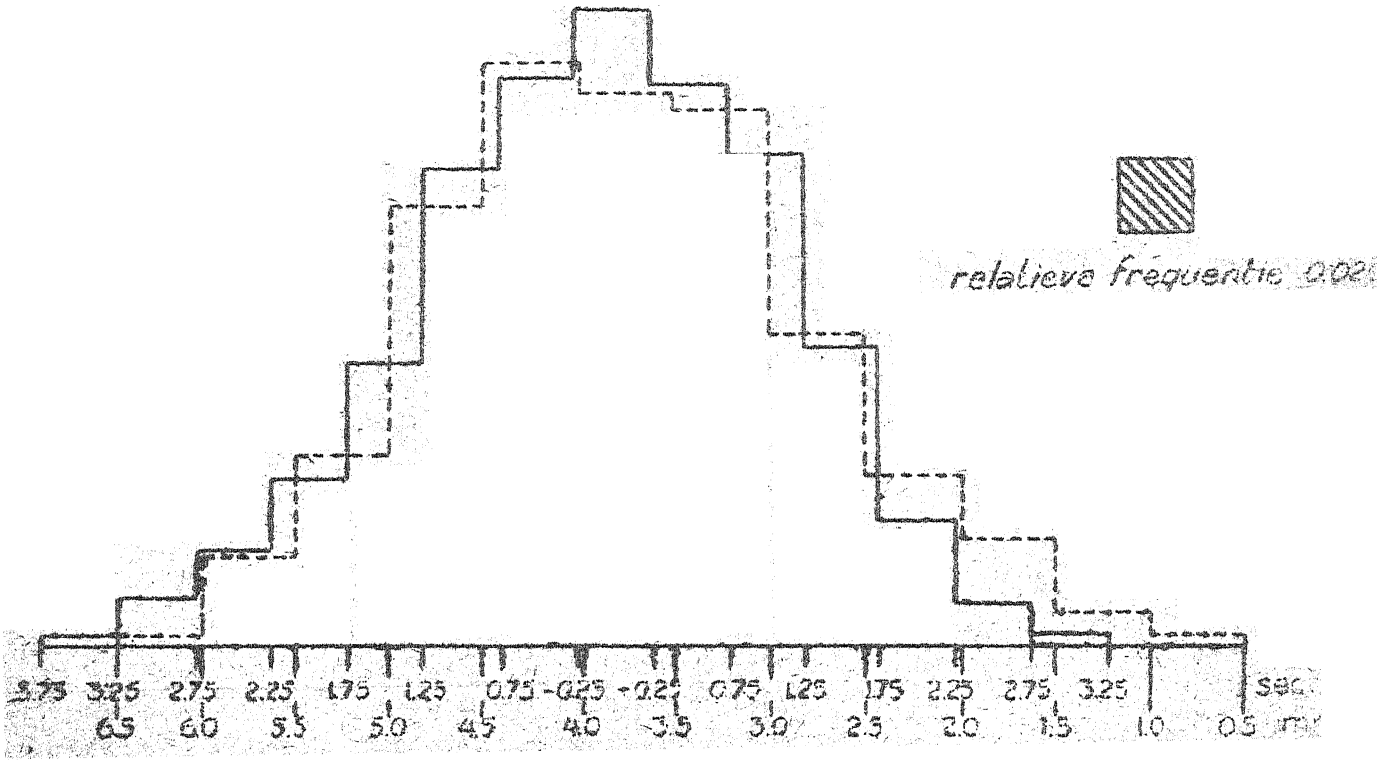
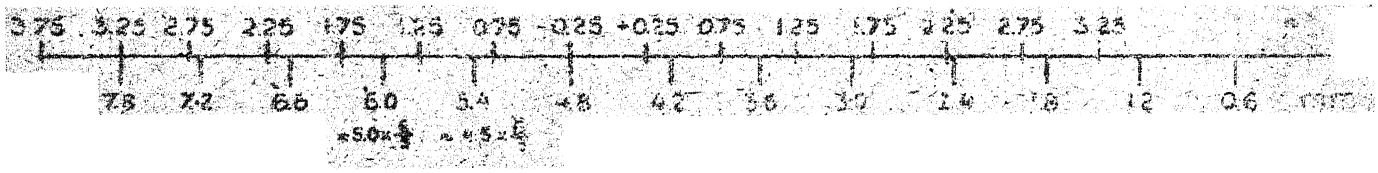
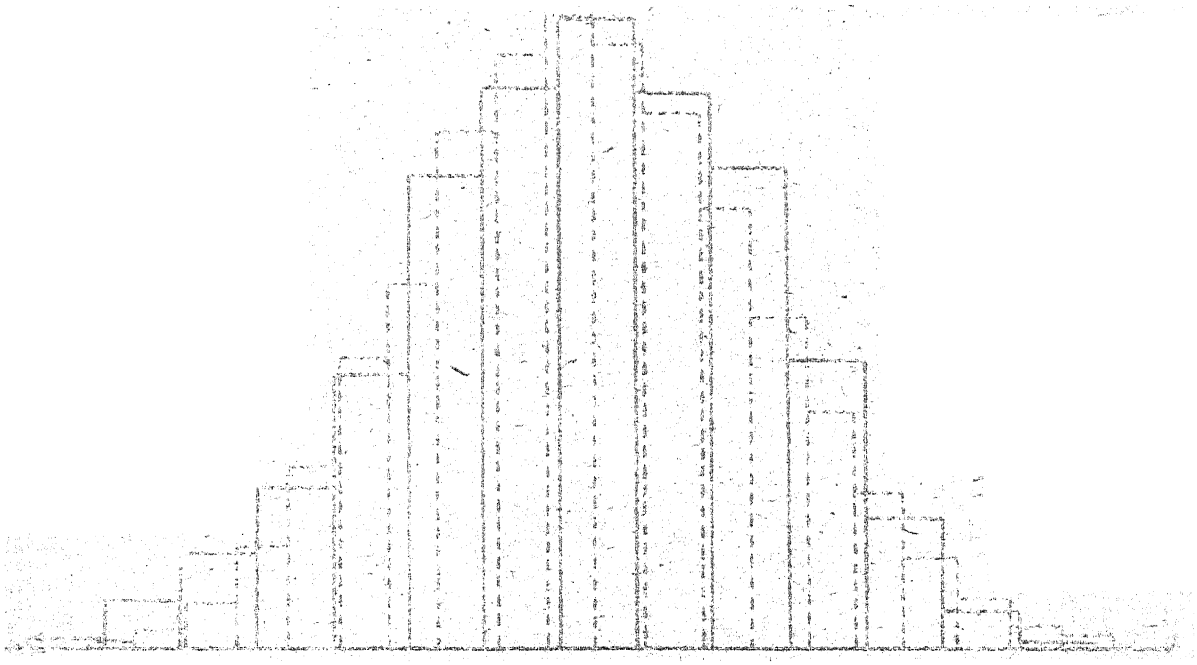

relatieve frequentie 0.02
3.75 3.25 2.75 2.25 1.75 1.25 0.75 -0.25 -0.25 0.75 1.25 1.75 2.25 2.75 3.25
6.5 6.0 5.5 5.0 4.5 4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5

Figure 2.3-2


3.75
3.25
2.75
2.25
1.75
1.25
0.75
-0.25
+0.25
0.75
1.25
1.75
2.25
2.75
3.25
7.8
7.2
6.6
6.0
5.4
4.8
4.2
3.6
3.0
2.4
1.8
1.2
0.6
≈5.0×
≈5.2×

Figuur 2.4-1

Figuur 2.6-1

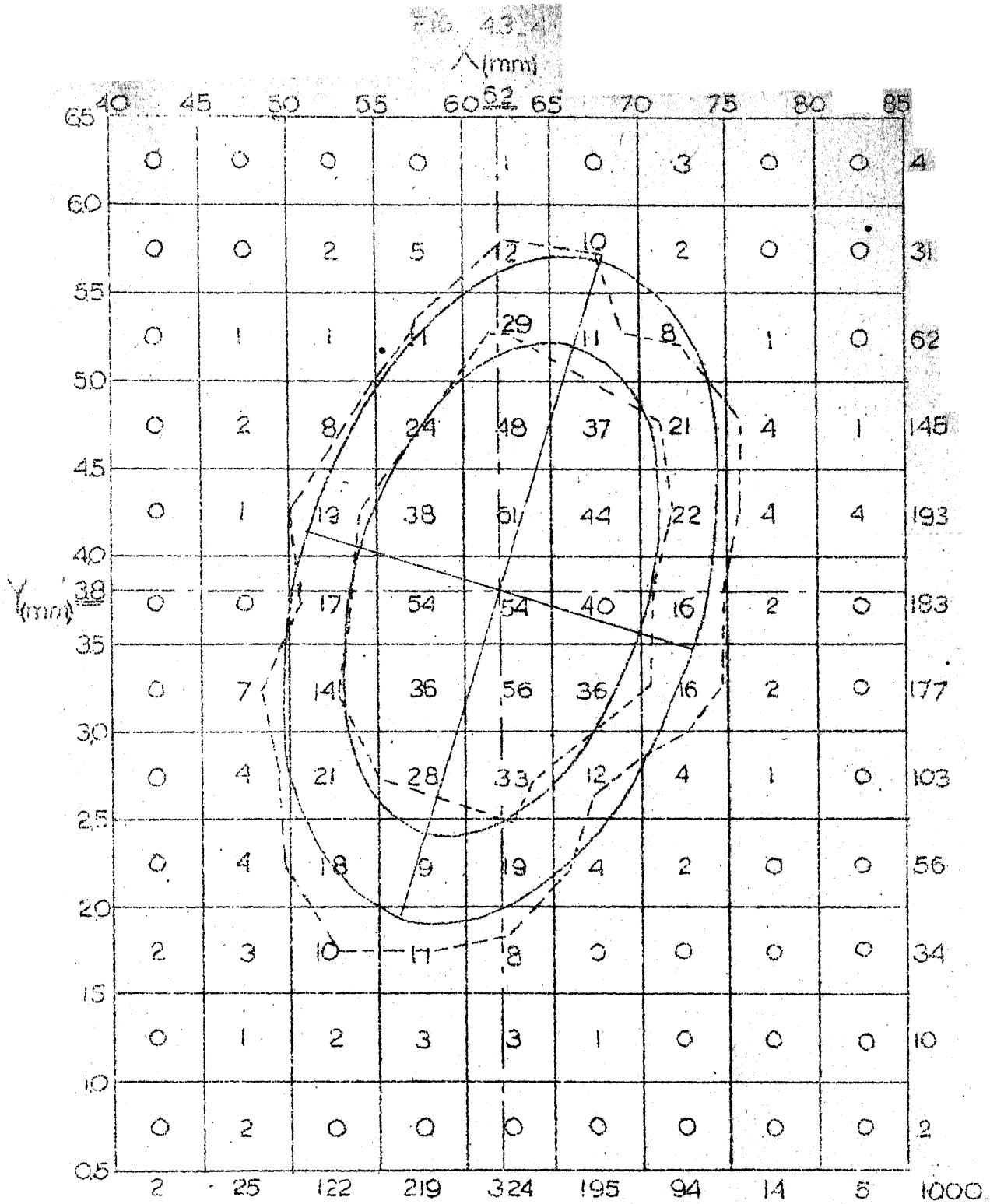


Polaris

Sohere verdeling

Figuur 3.1-3

FIG 4.3.2



Binnenste ellips voor punten met frequentie 25
Buitenste " " " " " 10

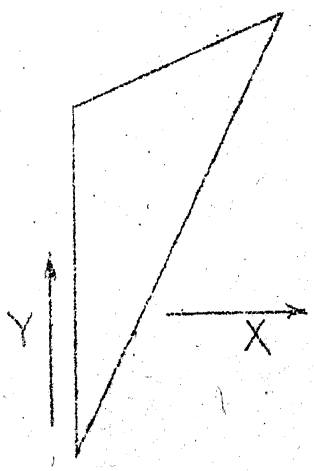
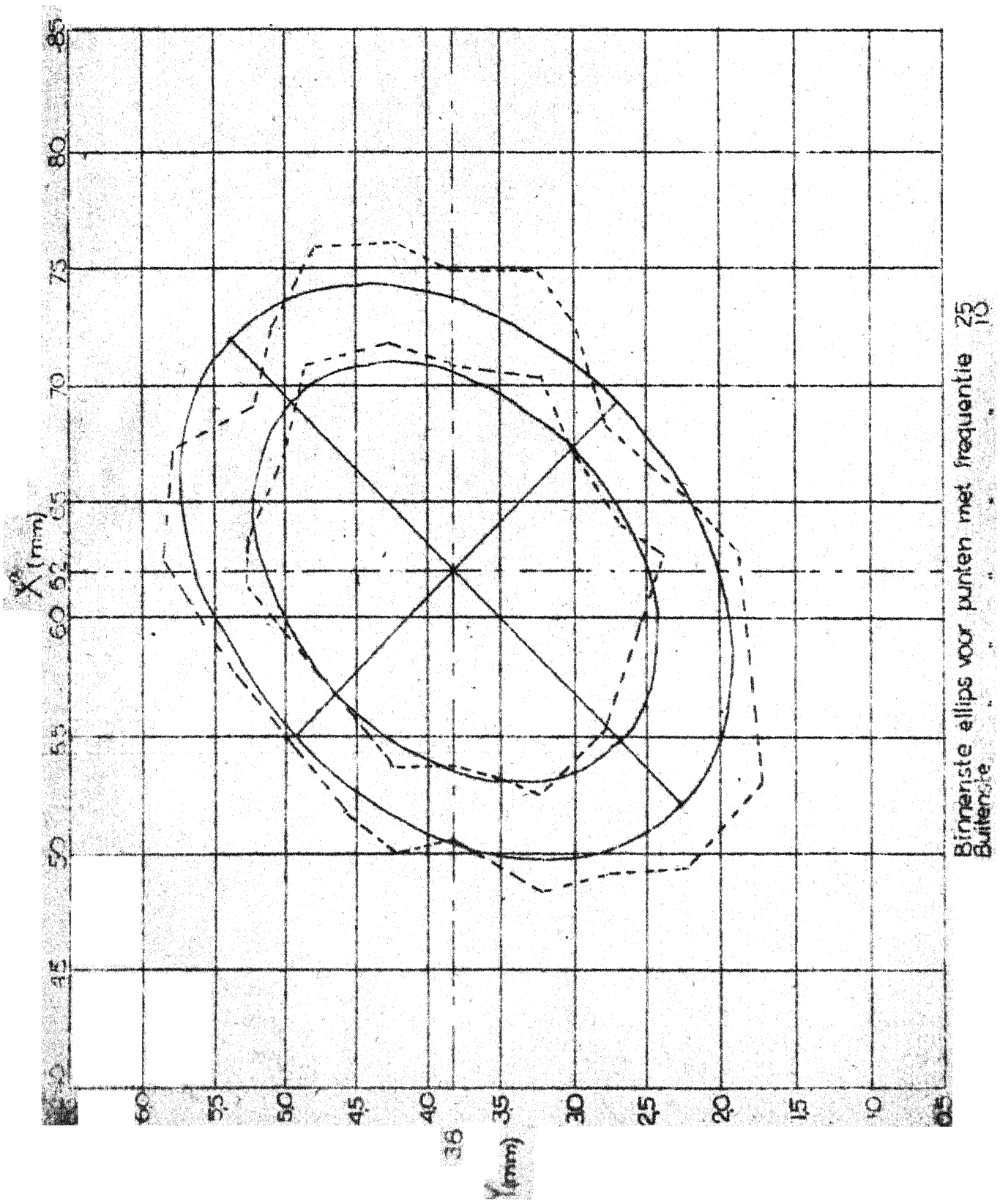


FIG. 43-5


X (mm)
Y (mm)
Binnenste ellips voor punten met frequentie 25
Buitenste " " " " 13

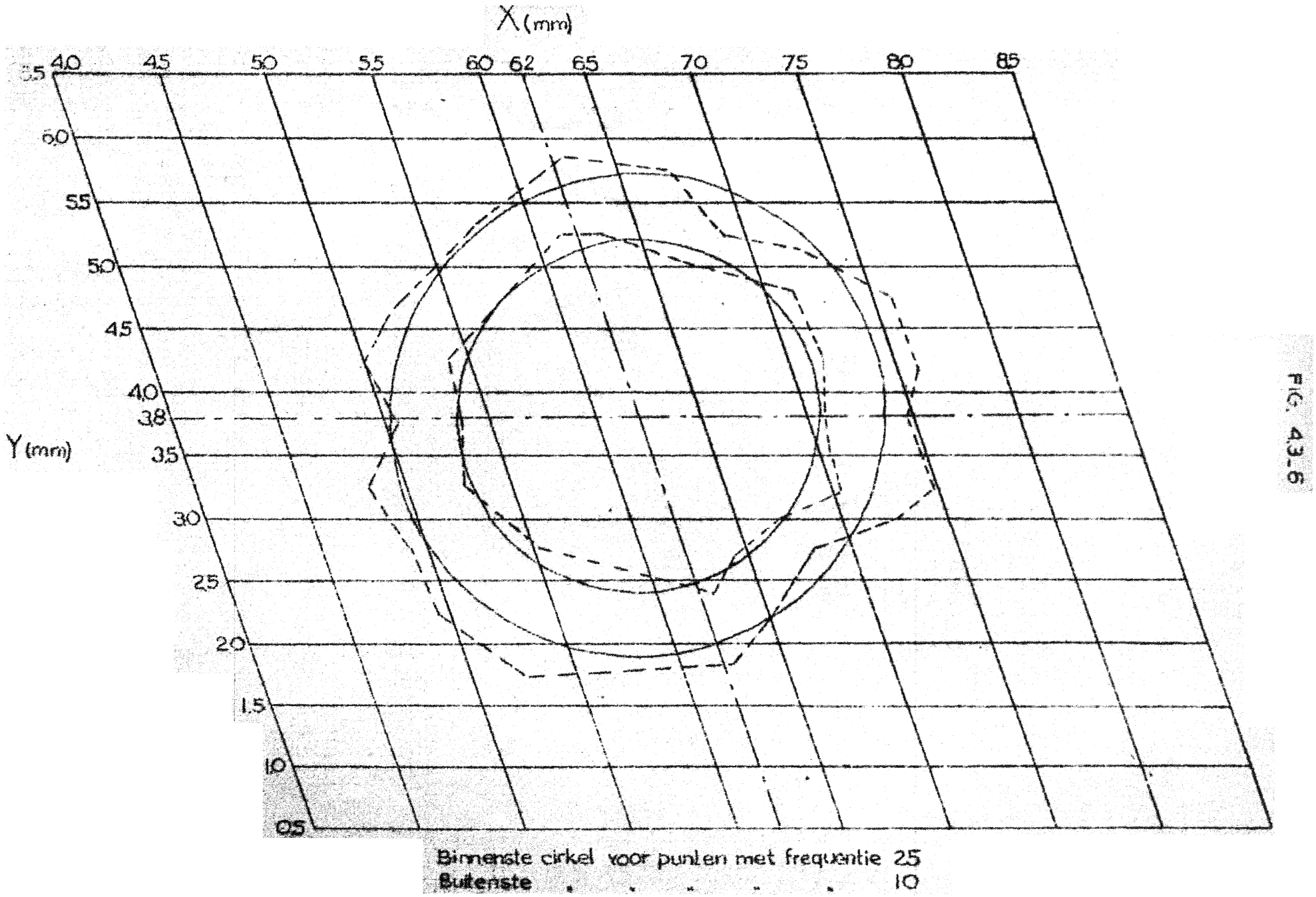

X (mm)
40
45
50
55
60
62
65
70
75
80
85
Y (mm)
60
55
50
45
40
38
35
30
25
20
15
10
05
Binnenste cirkel voor punten met frequentie 25
Buitenste 10

FIG. 43-6

HOOFDSTUK I.

Enige begrippen uit de mathematische statistiek.[1)]

1.1. Inleiding.

De mathematische statistiek houdt zich bezig met de bestudering van grote groepen van dingen, mensen, verschijnselen etc. Het doel daarbij is iets te weten te komen van het algemene gedrag van één of meer eigenschappen van het individu, waaruit de groep is opgebouwd.

Men kan b.v. bestuderen de borstomvang van recruten, het optreden van het aantal ogen bij het werpen met dobbelstenen, de bloemkleur van een plantensoort, de graad van het intellect bij kinderen van een bepaalde leeftijd etc. Dikwijls gaat het ook om het vaststellen van een verband tussen twee verschillende verschijnselen, b.v. het optreden van malaria en het voorkomen van de malariamug ; de werkeloosheid in verband met de cijfers van de uitvoer etc.

De behandeling van het statistisch materiaal geschiedt door het te rangschikken in klassen, waarbij de te onderzoeken eigenschap dient als kenmerk voor het onderbrengen van elk individu in een bepaalde klasse. Het aantal individuen, dat tot een klasse behoort, wordt de frequentie van de klasse genoemd. De klasse- indeling en de daarbij behorende klassefrequenties vormen de frequentieverdeling.

Zo kan men b.v. de worpen met een dobbelsteen rangschikken in 6 klassen, met als klassekenmerk het aantal ogen van elke worp.

Men onderscheidt één-, twee-, drie- etc. dimensionale verdelingen, naar gelang van het aantal kenmerken. De bestudering van de borstomvang van recruten geeft aanleiding tot een één- dimensionale verdeling, omdat men hier met één kenmerk te maken heeft, n.l. de borstomvang. Beschikt men over de resultaten van een groot aantal worpen met 3 dobbelstenen, dan kan men daarvan een 3- dimensionale verdeling opstellen. Er zijn thans voor elke worp 3 kenmerken: het aantal ogen van elke steen.

Een kenmerk kan quantitatief zijn (een getal) of qualitatief (nationaliteit, geslacht etc.). In het volgende worden alleen de eerste soort kenmerken beschouwd.

Het is dikwijls nodig, verschillende frequentieverdelingen met elkaar te vergelijken. In de meeste gevallen is echter het totale aantal individuen van de te vergelijken verdelingen verschillend,

1) Voor uitgebreide beschouwingen zie men b.v.: Dr. J.Tinbergen, Grondproblemen der theoretische statistiek; G.U. Yule, Theory of Statistics; Dr.J.B.D. Derksen, Inleiding tot de correlatiereke-ning.

waardoor een directe vergelijking onmogelijk is. Om aan dit bezwaar te ontkomen heeft men het begrip relatieve frequentie ingevoerd, waaronder verstaan wordt het getal, verkregen door de klassefrequentie, te delen door het totale aantal individuen van de verdeling ; door de totale frequentie dus.

Zijn derhalve $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de klassefrequenties en is $F = \Sigma_i f_i$ de totale frequentie, dan zijn: $\frac{f_1}{F}, \frac{f_2}{F}, \frac{f_3}{F}, \ldots, \frac{f_n}{F}$ de relatieve frequenties.

Zoals gemakkelijk te zien is, is de som van alle relatieve frequenties gelijk aan 1.

Een verdeling van b.v. 500 en één van 750 individuen kan men nu met behulp van de relatieve frequenties vergelijken. Dikwijls worden, ter vermijding van decimale getallen, de relatieve frequenties met een rond getal, b.v. 100, 1000 ... vermenigvuldigd.

1.2. De één- dimensionale verdeling.

Van 5732 recruten bij Schotse regimenten is de borstomvang gemeten [1]. Men verkreeg, als x de borstomvang in inches voorstelt, en f het aantal recruten, de volgende tabel:

x	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
f	3	19	81	189	409	753	1062	1082	935	646	313	168	50

x	46	47	48
f	18	3	1

Bij de meting zijn blijkbaar de uitkomsten afgerond op gehelen van inches, men moet de tabel dus zo lezen, dat er 3 recruten werden aangetroffen met een borstomvang, gelegen tussen 32,5 en 33,5 inches, 19 met een borstomvang, gelegen tussen 33,5 en 34,5 etc. De bedragen 32,5, 33,5, 34,5,...,48,5 inch zijn dus de klassegrenzen.

Fig. 1.2.-1 is een grafische voorstelling van de verdeling. Op een horizontale as is de klasse- indeling getekend. De intervallen stellen de breedte van de klassen voor. Op elk interval is een rechthoek geconstrueerd, waarvan de oppervlakte gelijk is aan de bijbehorende relatieve frequentie. K. Pearson noemde een dergelijke figuur een histogram [2]. Omdat de som van de relatieve frequenties 1 is, is de oppervlakte van de figuur, ingesloten door de horizontale as en de trappenlijn, gevormd door de bovenkanten van de rechthoeken,

1) Voorbeeld ontleend aan: Whittaker and Robinson, The Calculus of Observations, London 1924.

2) Zie bij Yule, Theory of Statistics.

gelijk aan 1. Het histogram geeft een overzichtelijk beeld van de verdeling. De verdeling vertoont een top, ongeveer in het midden, terwijl de trappenlijn naar de einden toe sterk daalt.

In het algemeen zijn de meest uiteenlopende gedaanten van het histogram te verwachten. Een geheel ander histogram als dat van figuur 1.2.-1 treedt op bij b.v. 1000 worpen met een dobbelsteen, waarbij de worpen worden ingedeeld naar het aantal ogen van elke worp. Men ziet gemakkelijk in, dat bij een " goede " dobbelsteen de relatieve frequentie voor elk aantal ogen bij een niet te klein aantal worpen ongeveer 1/6 zal moeten zijn.Het histogram zal dus hier bestaan uit 6 nagenoeg even grote rechthoeken naast elkaar.

Opmerking. Men maakt wel eens onderscheid tussen continue en niet- continue kenmerken. Bij het voorbeeld der recruten is het kenmerk continu , bij dat van de worpen met een dobbelsteen doet zich het andere geval voor.Toch kan men ook dan het histogram construeren op de aangegeven wijze. Ondat bij hetgeen volgt het niet nodig is, de beide soorten kenmerken te onderscheiden, wordt deze aangelegenheid verder buiten beschouwing gelaten.

1.3. De twee- dimensionale verdeling.

R. Roelofs mat van 350 peren de lengte x en de dikte y met het onderstaande resultaat. De opgegeven getallen zijn de klassefrequenties. Het interval voor de lengte is 3 mm, dat voor de dikte 2,5 mm.

Tableau I.

dikte y \ lengte x mm	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	
60,0											3	3	2	8
57,5								1	1	1	7	9		19
55,0							1	5	13	16	12	7		54
52,5						2	12	16	16	20	3			69
50,0						11	33	29	16	6				97
47,5				1	5	13	14	6	1					40
45,0			2	3	14	8	12							39
42,5			2	3	5	2								14
40,0		4	1	1	1									7
37,5	2	1												3
	2	5	5	10	25	36	72	57	49	43	25	19	2	350

De verdeling voor x, die bij een vaste waarde van y behoort, b.v. bij y = 50, noemt men een gebonden verdeling van x voor y = 50. In het voorbeeld wordt deze gevormd door de getallen 11, 33, 29, 18,6. Elke horizontale rij van getallen is een gebonden verdeling van x

voor de er naast staande waarde van y. Het analoge geldt ook, als men de beide veranderlijken van rol laat verwisselen. Elke verticale rij van getallen is een gebonden verdeling van y voor de er boven staande waarde van x.

De aan de rechterzijde van het tableau staande getallen zijn de sommen van de frequenties van iedere rij. Deze getallen geven de frequentieverdeling voor de dikte, wanneer het kenmerk voor de lengte buiten beschouwing wordt gelaten. Men spreekt hier van de totaalverdeling van de dikte. De getallen aan de onderzijde zijn de sommen van de kolommen. Deze geven de totaalverdeling van de lengte.

Voor de bestudering van de verdeling is het van belang, de gebonden verdelingen onderling te vergelijken. Neemt men eerst de gebonden verdelingen van y, dan moet men per kolom op de relatieve frequenties overgaan, omdat het totaal aantal peren per kolom verschillend is. In het onderstaande tableau II is dit aangegeven.

Tableau II.

dikte y mm \ lengte x	48	51	54	57	60	63	66	69	73	75	78	81	84
60,0											0,12	0,16	1
57,5								0,02	0,02	0,02	0,28	0,47	
55,0							0,01	0,09	0,26	0,38	0,48	0,38	
52,5						0,06	0,17	0,28	0,33	0,47	0,12		
50,0						0,31	0,45	0,51	0,37	0,14			
47,5				0,10	0,20	0,36	0,20	0,10	0,02				
45,0			0,40	0,30	0,56	0,22	0,17						
42,5			0,40	0,50	0,20	0,06							
40,0		0,30	0,20	0,10	0,04								
37,5	1	0,20											
	1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,01	1

Men ziet, dat de relatieve frequenties van kolom tot kolom verschillen. Verandert dus één van de kenmerken (in dit geval x), dan verandert ook de daarbij behorende gebonden verdeling van het andere kenmerk. Zo is hier direct te zien, dat naarmate de peren langer worden de dikte eveneens de tendens vertoont, toe te nemen. De kenmerken beinvloeden elkaar. Men spreekt in zulke gevallen van correlatie of men zegt, dat de beide kenmerken gecorreleerd zijn. Men kan natuurlijk ook de gebonden verdelingen voor de lengten x beschouwen. Er gelden dan analoge overwegingen.

Bij het aanwezig zijn van correlatie is er sprake van een zekere mate van afhankelijkheid van beide kenmerken. Men moet deze afhankelijkheid vooral niet met de functionele (algebraische) afhankelijkheid verwarren. Wanneer deze tussen twee kenmerken zou bestaan, moest uit de waarde van het ene kenmerk die van het andere

ondubbelzinnig volgen, het ene kenmerk zou het andere moeten bepalen. Uit het voorbeeld blijkt duidelijk, dat dit niet het geval is: bij een bepaalde dikte kunnen de peren nog verschillende lengten hebben en omgekeerd.

De correlatie kan zwakker of sterker zijn. Is ze zeer zwak, dan zal dit zich daarin moeten uiten, dat de relatieve frequenties van de gebonden verdelingen van één der kenmerken weinig verschillen, welke ook de bijbehorende waarde van het andere kenmerk is. Als in het voorbeeld de dikte y niet gecorreleerd was met de lengte zouden de relatieve frequenties van de gebonden verdeling van de kolommen, in horizontale rijen steeds gelijk moeten zijn.

Voor het grensgeval, dat er geen correlatie of correlatievrijheid tussen de kenmerken in een 2- dimensionale verdeling bestaat, komt men derhalve tot de volgende

Definitie 1.3.-1: Bij een 2- dimensionale verdeling met de kenmerken x en y is y niet gecorreleerd met x, als, na overgang in elke gebonden verdeling van y op relatieve frequenties, deze in elk klasse- interval van y rij voor rij gelijk zijn.

Laten i en k respectievelijk de rangnummers zijn van de kolommen en rijen van het tableau. Beschouw de gebonden verdeling van de kolom met rangnummer i. Is f_{ik} de frequentie van het vak dezer kolom, gelegen in de rij k, dan is de relatieve frequentie van dit vak in de gebonden verdeling van kolom i

$$\frac{f_{ik}}{\Sigma_k f_{ik}} \qquad (1)$$

De uitdrukking in de noemer stelt voor de som van de frequenties uit kolom i: de f_{ik} worden gesommeerd over de index k.

Volgens de definitie 1.3.-1 zal y niet gecorreleerd zijn met x als:

$$\frac{f_{11}}{\Sigma_k f_{1k}} = \frac{f_{21}}{\Sigma_k f_{2k}} = \frac{f_{31}}{\Sigma_k f_{3k}} = \ldots\ldots \quad \text{(relatieve frequenties uit eerste rij zijn gelijk)}$$

$$\frac{f_{12}}{\Sigma_k f_{1k}} = \frac{f_{22}}{\Sigma_k f_{2k}} = \frac{f_{32}}{\Sigma_k f_{3k}} = \ldots\ldots \quad \text{(relatieve frequenties uit tweede rij zijn gelijk)}$$

enz.

of algemeen geschreven:

$$\frac{f_{1k}}{\Sigma_k f_{1k}} = \frac{f_{2k}}{\Sigma_k f_{2k}} = \frac{f_{3k}}{\Sigma_k f_{3k}} = \ldots\ldots \qquad (1a)$$

Elk dezer breuken is echter gelijk aan de breuk, waarvan de teller de som is van alle tellers en de noemer die van alle noemers.

Men heeft dus

$$\frac{f_{ik}}{\Sigma_k f_{ik}} = \frac{\Sigma_i f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} \qquad (2)$$

welke uitdrukking geldig is voor alle rangnummers van i en k voor zover er niet over gesommeerd wordt. Uit (2) volgt derhalve omgekeerd weer (1a). Vergelijking (2) geeft in een formule de inhoud van de boven gegeven definitie van de correlatievrijheid van y met x.

Men kan nu gemakkelijk bewijzen [1], dat thans ook omgekeerd x niet gecorreleerd is met y.

Uit (2) volgt namelijk

$$\frac{f_{ik}}{\Sigma_i f_{ik}} = \frac{\Sigma_k f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} \qquad (3)$$

Deze uitdrukking is eveneens geldig voor alle rangnummers van i en k, voor zover er niet over gesommeerd wordt; (3) is geheel analoog gebouwd als (2), slechts zijn de indices van rol verwisseld. In (3) staat, dat x niet gecorreleerd is met y, zodat men heeft de

Stelling 1.3.-1: Is y niet gecorreleerd met x, dan is omgekeerd ook x niet gecorreleerd met y.

Correlatievrijheid is blijkbaar een eigenschap, die over en weer bestaat. Men spreekt dan ook van een correlatievrije tweedimensionale frequentieverdeling.

Uit (2) volgt nog:

$$\frac{f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} = \frac{\Sigma_i f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} * \frac{\Sigma_k f_{ik}}{\Sigma_{ik} f_{ik}} \qquad (4)$$

In het eerste lid staat de relatieve frequentie van het vak i,k berekend voor de twee- dimensionale verdeling. De eerste breuk in het tweede lid is de relatieve frequentie van het vak k in de totaalverdeling van y ; de tweede breuk in het tweede lid de relatieve frequentie van het vak i in de totaalverdeling van x. Men heeft dus de

Stelling 1.3.-2: In een correlatievrije twee- dimensionale verdeling is de relatieve frequentie van elk vak gelijk aan het product van de in dezelfde kolom en dezelfde rij gelegen relatieve frequentie van de totaalverdeling der beide kenmerken.

1) Het bewijs is ontleend aan Derksen, Inleiding tot de correlatierekening.

Het is duidelijk, dat de stelling ook omgekeerd geldt, n.l. dat een twee- dimensionale verdeling correlatievrij is, als de relatieve frequenties van elk vak gelijk zijn aan het product van de in dezelfde kolom en dezelfde rij verkregen relatieve frequenties van de totaalverdelingen der beide kenmerken. Immers uit (4) kan men direct weer tot (2) en (3) besluiten.

Men kan van het bovenstaande gebruik maken om een correlatievrije twee- dimensionale verdeling te construeren uit twee één-dimensionale verdelingen. Men behoeft slechts van de beide laatste verdelingen de relatieve frequenties met elkaar te vermenigvuldigen. Deze producten, elk op de juiste plaats in een tableau ingeschreven, zijn dan de relatieve frequenties van een correlatievrije twee-dimensionale verdeling. Zijn er voorbeelden van deze soort verdelingen nodig, dan kunnen die dus op bovenomschreven wijze gemakkelijk verkregen worden.

De theorie van de mathematische statistiek kent verschillende methoden om een getal af te leiden, waarmee de mate van correlatie tussen de kenmerken kan worden aangegeven. Voor deze algemene theorieën wordt naar de literatuur [1] verwezen. Wij behoeven ons er echter niet mee bezig te houden, omdat zal blijken, dat de verdelingen, die in de waarnemingsrekening optreden, een zeer speciaal karakter hebben. Bij de behandeling van deze speciale verdelingen zal voor dezen een maatstaf voor de correlatie worden gegeven.

Bij een twee- dimensionale frequentieverdeling kan men zich van de volgende meetkundige voorstelling bedienen. Op elk der vakken van het tableau (b.v. op die van het bij deze paragraaf gegeven voorbeeld) als grondvlak denkt men zich een rechthoekig parallelopipedum opgericht, waarvan de inhoud gelijk is aan de relatieve frequentie van het vak in kwestie. Deze parallelopipeda vormen een lichaam, welks bovenkant een beeld geeft van het karakter van de verdeling.

1.4. Drie- en meer- dimensionale verdelingen.

Het bestuderen van 3 of meer kenmerken geeft aanleiding tot het opstellen van 3- of meer- dimensionale verdelingen. In het vervolg zal ter bekorting geschreven worden V_3 voor een 3-, V_n voor een n- dimensionale verdeling. Reeds bij de V_3 bestaat een grote ver-

1) b.v. Derksen, pag. 17 e.v.

scheidenheid van soorten, temeer is dit het geval bij verdelingen van een nog groter aantal dimensies. Het is hier niet de bedoeling, uitvoerig te zijn; slechts enkele voor het latere gebruik nodige eigenschappen zullen worden behandeld.

Van de verdeling met 3 kenmerken die x, y en z zullen worden genoemd, kan men zich nog een voorstelling maken. Men denke zich daartoe, naar analogie van het twee- dimensionale geval, een drie-dimensionaal rechthoekig assenstelsel (zie fig. 1.4.-1). Op de x-, y-, en z- as worden de intervalverdelingen van de drie kenmerken aangegeven en door deze punten worden vlakken aangebracht, evenwijdig aan de coördinaatvlakken. Men krijgt dan een verdeling van de ruimte in cellen. In elke cel denke men zich een papiertje neergelegd, met er op geschreven de frequentie of de relatieve frequentie, die bij de cel behoort, waarmede bedoelde voorstelling is verkregen. Bij verdelingen met meer dan drie kenmerken vervalt de mogelijkheid, zich deze in de physische ruimte te denken, als zoeven voor de V_3 aangegeven.

Denkt men zich bij een V_3 met kenmerken x, y en z de intervallen van de x- verdeling genummerd van 1 tot n_x, die der y- en z- verdeling van 1 tot n_y, resp. van 1 tot n_z, dan kan men de frequentie van een cel voorstellen door f_{ikl}, waarin i, k en l in opvolging de rangnummers van het x-, y- en z- interval geven.

Naar analogie van de twee- dimensionale verdeling kan men bij de V_3 ook spreken van gebonden verdelingen en totaalverdelingen. Deze gebonden verdelingen kunnen thans echter worden onderscheiden in twee soorten, n.l. één- en twee- dimensionale. Een zelfde onderscheid is te maken bij de totaalverdelingen.

De frequenties, waarvoor i en k constant zijn en de index l de rangnummers 1 tot n_z doorloopt, vormen tezamen een één- dimensionale gebonden verdeling van z. Bij elk paar rangnummers van i en k behoort een gebonden verdeling van z. Op analoge manier kan men beschouwen de één- dimensionale gebonden verdelingen van x en die van y. Kiest men daarentegen voor l een vast rangnummer en beschouwt men alle frequenties, waarvoor l dit vaste rangnummer heeft, dan vormen deze frequenties de twee- dimensionale gebonden verdeling van x en y, behorende bij het gekozen vaste interval van z, met het rangnummer l. Op deze wijze kan men ook beschouwen twee- dimensionale gebonden verdelingen x,z en y,z.

Een één- dimensionale totaalverdeling van z verkrijgt men als de frequenties over i en k worden gesommeerd. De frequenties daarvan zijn

$$\Sigma_{ik} f_{ik1} \ , \ \Sigma_{ik} f_{ik2} \ , \ \Sigma_{ik} f_{ik3} \ \ldots\ldots, \ \Sigma_{ik} f_{ikn_z}$$

Zij ontstaan derhalve als de kenmerken x en y buiten beschouwing worden gelaten. Op analoge manier kan men de frequenties bepalen van de één- dimensionale totaalverdelingen van x en van y. Een twee- dimensionale totaalverdeling van x en y verkrijgt men door de frequenties alleen over l te sommeren. De frequenties van deze verdeling zijn:

$$\Sigma_l f_{11\,l}\ ,\ \Sigma_l f_{12\,l}\ ,\ \Sigma_l f_{21\,l}\ ,\ \Sigma_l f_{22\,l}\ ,\ \ldots\ldots$$

Op analoge manier kan men verkrijgen de frequenties van de beide andere totaalverdelingen, nl. die van x,z en die van y,z.

Bij een V_3 kan ook weer correlatievrijheid optreden. De definitie 1.3.-1 van correlatievrijheid, gegeven voor de V_2, is hier niet van toepassing. Dáár betreft het de correlatievrijheid van één kenmerk t.o.v. het (éne) andere, hier echter van één kenmerk t.o.v. twee andere. De gegeven definitie zal dus moeten worden uitgebreid. Dit is naar analogie van de vorige definitie gemakkelijk te doen.

Definitie 1.4.-1.: Bij een V_3 met de kenmerken x,y en z is z niet gecorreleerd met x en y als, na overgang per gebonden verdeling van z op relatieve frequenties, in deze verdelingen de relatieve frequenties van overeenkomstige klassen rij voor rij gelijk zijn, of wanneer

$$\frac{f_{ikl}}{\Sigma_l f_{ikl}} \qquad (1)$$

voor elk tweetal rangnummers van i en k constant is bij elk vast rangnummer van l in de teller. Uitvoerig geschreven moet dan:

$$\frac{f_{111}}{\Sigma_l f_{11\,l}} = \frac{f_{121}}{\Sigma_l f_{12\,l}} = \frac{f_{211}}{\Sigma_l f_{21\,l}} = \frac{f_{221}}{\Sigma_l f_{22\,l}} = \ldots\ldots \qquad (2a)$$

$$\frac{f_{112}}{\Sigma_l f_{11\,l}} = \frac{f_{122}}{\Sigma_l f_{12\,l}} = \frac{f_{212}}{\Sigma_l f_{21\,l}} = \frac{f_{222}}{\Sigma_l f_{22\,l}} = \ldots\ldots \qquad (2b)$$

enz.

of algemener geschreven:

$$\frac{f_{11\,l}}{\Sigma_l f_{11\,l}} = \frac{f_{12\,l}}{\Sigma_l f_{12\,l}} = \frac{f_{21\,l}}{\Sigma_l f_{21\,l}} = \frac{f_{22\,l}}{\Sigma_l f_{22\,l}} = \ldots\ldots \qquad (3)$$

Uit (3) volgt door sommering van alle tellers en alle noemers:

$$\frac{f_{ikl}}{\Sigma_l f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{ik} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (4)$$

geldig voor alle rangnummers der vrije indices. (Onder " vrije " indices worden verstaan indices, waarover niet gesommeerd wordt).

(4) is dus de uitdrukking voor de correlatievrijheid van z t.o.v. x en y.

Als z correlatievrij is t.o.v. x en y houdt dit in, dat z in alle twee- dimensionale gebonden verdelingen x,z correlatievrij is t.o.v. x en in alle twee- dimensionale gebonden verdelingen y,z t.o.v. y. Dit is gemakkelijk uit (2a), (2b) enz. af te lezen.

Uit (4) kan men de volgende 3 conclusies omtrent de V_3 trekken:

a. Correlatievrijheid van z t.o.v. de combinatie x,y impliceert correlatievrijheid van de combinatie x,y t.o.v. z. Immers voor (4) kan men schrijven

$$\frac{f_{ikl}}{\Sigma_{ik} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_l f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (5)$$

evenzo geldig voor alle rangnummers der vrije indices. Het eerste lid van deze vergelijking is de relatieve frequentie in de gebonden verdeling van x en y. Volgens (5) is deze relatieve frequentie voor alle rangnummers van l gelijk, hetgeen betekent, dat alle gebonden twee- dimensionale verdelingen x,y identiek zijn.

b. In geval van correlatievrijheid van z t.o.v. x en y is de relatieve frequentie van de beschouwde V_3 gelijk aan het product van de bijbehorende relatieve frequenties van de twee- dimensionale totaalverdeling x,y en de één- dimensionale totaalverdeling van z.

Voor (4) kan men nl. ook schrijven

$$\frac{f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_l f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \cdot \frac{\Sigma_{ik} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (6)$$

In deze vergelijking staat dan in het eerste lid de relatieve frequentie van een cel i,k,l in de V_3. De eerste factor in het tweede lid is de relatieve frequentie van het vak met de rangnummers i,k van de twee- dimensionale totaalverdeling x,y en de tweede factor is de relatieve frequentie van de klasse met rangnummer l in de één- dimensionale totaalverdeling van z.

c. In geval van correlatievrijheid van z t.o.v. x en y is de twee- dimensionale totaalverdeling van y en z correlatievrij en evenzo die van x en z.

Sommeert men nl. het eerste lid van (4) over i dan ontstaat:

$$\frac{\Sigma_i f_{ikl}}{\Sigma_{il} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{ik} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (7)$$

hetgeen volgens (2) van § 1.3. aangeeft, dat y en z in hun twee- dimensionale totaalverdeling correlatievrij zijn. Sommeert men het eerste lid van (4) over k, dan krijgt men de vergelijking

$$\frac{\Sigma_k f_{ikl}}{\Sigma_{kl} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{ik} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (8)$$

hetgeen betekent, dat x en z in hun totaalverdeling correlatievrij zijn. De vergelijkingen (6), (7) en (8) zijn alle geldig voor alle rangnummers der vrije indices.

Opmerking.

Konden uit (4) de vergelijkingen (7) en (8) worden afgeleid, het omgekeerde is niet mogelijk, uit (7) of uit (8) of uit beide samen kan men niet tot (4) komen, hetgeen gemakkelijk is in te zien. In (7) blijft nl. het kenmerk x geheel buiten beschouwing, want in alle termen is over i gesommeerd ; (7) bevat dus alleen een gegeven omtrent y en z in hun totaalverdeling. Evenzeer bevat (8) alleen een uitspraak over het gedrag van x en z in hun totaalverdeling. Blijkens het bovenstaande is hier dus niets uit te concluderen omtrent de V_3 van x, y en z. Om daarover iets te kunnen beweren moet men kunnen beschikken over gegevens van deze V_3 zelf. Men kan dus, wanneer de twee- dimensionale totaalverdeling van y en z en die van x en z correlatievrij zijn daaruit niet besluiten tot de correlatievrijheid van z t.o.v. x en y in de V_3 van x, y en z.

De voorwaarde (4) geeft echter ook geen volledig uitsluitsel omtrent de correlatievrijheid van x, y en z onderling in de V_3. Immers (4) houdt wel in, dat z correlatievrij is t.o.v. x en y en omgekeerd, maar of x en y onderling correlatievrij zijn, kan men uit (4) niet opmaken. Is echter, behalve aan (4) en dus aan (6) bovendien nog voldaan aan:

$$\frac{\Sigma_l f_{ikl}}{\Sigma_{il} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{kl} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (9)$$

of, wat hetzelfde is, aan

$$\frac{\Sigma_l f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{il} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \cdot \frac{\Sigma_{kl} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (10)$$

waarmede volgens (2) en (4) van § 1.3. is uitgedrukt, dat de tweedimensionale totaalverdeling van x en y correlatievrij is, dan kan in (6) de eerste factor in het tweede lid vervangen worden door het tweede lid van (10), waarna ontstaat

$$\frac{f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{kl} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \cdot \frac{\Sigma_{il} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \cdot \frac{\Sigma_{ik} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (11)$$

Uit (11) kunnen omgekeerd (4) en (9) worden afgeleid. Voor (11) kan men nl. schrijven

$$\frac{f_{ikl}}{\Sigma_{ik} f_{ikl}} = \frac{\Sigma_{kl} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \cdot \frac{\Sigma_{il} f_{ikl}}{\Sigma_{ikl} f_{ikl}} \qquad (12)$$

Het eerste lid, gesommeerd over l, geeft weer (10) en dus (9). Deelt men (12) door (10) dan krijgt men, na een kleine herleiding, (4) weer terug.

Nu blijkt (11) symmetrisch te zijn ten opzichte van de indices i,k en l. Dus evenzo als (11) de voorwaarde bevat voor correlatievrijheid van z t.o.v. x en y, bevat ze ook de voorwaarde voor correlatievrijheid van x t.o.v. y en z, en van y t.o.v. x en z : (11) geeft de voorwaarde voor een volledig correlatievrije V_3.

De 3 factoren van het 2de lid van (11) stellen achtereenvolgens voor een relatieve frequentie in de één- dimensionale totaalverdeling van x, van y en van z. In een volledig correlatievrije V_3 is dus de relatieve frequentie gelijk aan het gedurig product van de drie bijbehorende relatieve frequenties van de één- dimensionale totaalverdelingen van x, y en z. Men kan hiervan gebruik maken om een correlatievrije drie- dimensionale verdeling te construeren uit 3 één- dimensionale verdelingen.

Bij vier- en meer- dimensionale verdelingen bestaan soortgelijke eigenschappen als bij de behandelde V_2 en V_3. Men kan zich van deze verdelingen niet meer een ruimtelijke voorstelling maken. Analytisch kan men ze echter evenzo op haar eigenschappen onderzoeken als de V_2 en V_3.

Ook nu is, voor de latere toepassingen, speciaal de correlatievrijheid van kenmerken onderling van belang.

Laat, ten einde deze aangelegenheid te onderzoeken, een V_4 gegeven zijn met de kenmerken x_1, x_2, x_3 en x_4 en laat de frequentie voorgesteld worden door:

$$f_{i_1,i_2,i_3,i_4}$$

De index i_1 loopt van 1 tot n_1, i_2 van 1 tot n_2, enz. Men kan nu vragen naar de voorwaarden voor correlatievrijheid van x_4 t.o.v. de 3 andere kenmerken. Deze moet, analoog met (4), luiden:

$$\frac{f_{i_1,i_2,i_3,i_4}}{\sum_{i_4} f_{i_1,i_2,i_3,i_4}} = \frac{\sum_{i_1,i_2,i_3} f_{i_1,i_2,i_3,i_4}}{\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} f_{i_1,i_2,i_3,i_4}} \qquad (14)$$

geldig voor alle rangnummers der vrije indices.

Men kan bij een V_4 echter ook hebben, dat twee kenmerken, b.v. x_1 en x_2, correlatievrij zijn t.o.v. de beide anderen. De uitdrukking hiervoor zal, zoals gemakkelijk is in te zien, moeten luiden:

$$\frac{f_{i_1,i_2,i_3,i_4}}{\Sigma_{i_1,i_2} f_{i_1,i_2,i_3,i_4}} = \frac{\Sigma_{i_3,i_4} f_{i_1,i_2,i_3,i_4}}{\Sigma_{i_1,i_2,i_3,i_4} f_{i_1,i_2,i_3,i_4}} \quad (15)$$

geldig voor alle rangnummers der vrije indices. Immers, hier staat, dat de relatieve frequentie van de twee- dimensionale gebonden verdeling i_1,i_2 onafhankelijk is van de rangnummers i_3 en i_4. In (14) en (15) kan men noemer links verwisselen met teller rechts; (14) geeft dus tevens de voorwaarde voor de correlatievrijheid van 3 der kenmerken t.o.v. het vierde en (15) evenzo van de kenmerken x_3 en x_4 t.o.v. x_1 en x_2.

In het algemeen zal men bij meer- dimensionale verdelingen correlatievrijheid moeten onderscheiden van een groep kenmerken t.o.v. de groep der overigen. Hieromtrent zouden dan eigenschappen kunnen worden afgeleid. Voor de later te maken toepassingen kan men zich echter beperken tot één eigenschap: het meer- dimensionale analogon van (11). Eerst echter zullen de definities 1.3.-1 en 1.4.-1 van correlatievrijheid uitgebreid moeten worden. De algemene definitie luidt als volgt:

Definitie 1.4.-2. In de V_n met de kenmerken x_1, x_2 ..... x_n is de groep kenmerken x_1, x_2 ..... x_k correlatievrij t.o.v. de groep der overige kenmerken x_{k+1}, x_{k+2}, ...x_n als voldaan is aan:

$$\frac{f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_k} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}} = \frac{\Sigma_{i_{k+1},i_{k+2},\ldots i_n} f_{i_1,i_2\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}$$

waarin f de frequentie is en $i_1,i_2,\ldots i_n$ de rangnummers zijn van de respectieve intervallen van de kenmerken x_1, x_2..... x_n.

Volgens deze definitie is dus in de n- dimensionale verdeling het kenmerk x_1 correlatievrij t.o.v. de groep der overige kenmerken, als:

$$\frac{f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}} = \frac{\Sigma_{i_2,i_3,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}$$

Hieruit volgt, dat

$$\frac{f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,i_3,\ldots i_n}} = \frac{\Sigma_{i_1} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}} \times \times \frac{\Sigma_{i_2,i_3\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}} \quad (17)$$

het n- dimensionale analogon van (6).

Men heeft nu de volgende eigenschap:

Eigenschap.

In een volledig correlatievrije V_n is

$$\frac{f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} = \frac{\Sigma_{i_2,i_3,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} \cdot \frac{\Sigma_{i_1,i_3,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} \times \frac{\Sigma_{i_1,i_2,i_4,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} \ldots \frac{\Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_{n-1}} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} \qquad (18)$$

waarin $S = \Sigma_{i_1,i_2,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}$.

Het bewijs wordt geleverd door volledige inductie. Men onderstelt daartoe, dat de eigenschap geldig is in een V_{n-1}. Neem voor deze V_{n-1} die, welke ontstaat als in de V_n één der kenmerken, b.v. x_1, buiten beschouwing wordt gelaten en dus de (n-1)- dimensionale totaalverdeling der overige kenmerken ontstaat. Geldt nu de eigenschap in een V_{n-1}, dan heeft men

$$\frac{\Sigma_{i_1} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} = \frac{\Sigma_{i_1,i_3,i_4,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S} \cdot \frac{\Sigma_{i_1,i_2,i_4,\ldots i_n} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S}$$

$$\ldots\ldots \frac{\Sigma_{i_1,i_2,i_3,\ldots i_{n-1}} f_{i_1,i_2,\ldots i_n}}{S}$$

Is nu x_1 correlatievrij t.o.v. de groep der (n-1) overige kenmerken, dan geldt (17). Vermenigvuldiging van (17) met de zoeven opgeschreven vergelijking levert (18). Geldt dus de eigenschap voor een V_{n-1}, dan geldt zij ook voor een V_n. De eigenschap is bewezen voor een V_2, zodat het bewijs van (18) is geleverd.

In woorden staat in (18), dat in een correlatievrije V_n de relatieve frequentie dezer verdeling het gedurig product van die der n één- dimensionale totaalverdelingen is.

1.5. Slotbeschouwing.

In het voorafgaande is bijeengebracht hetgeen nodig is voor de behandeling van waarnemingsreeksen. Op een enkel punt is echter nog een korte toelichting gewenst. Tot nu toe is aangenomen, dat frequentieverdelingen gegeven waren, daarom bleef een principiële moeilijkheid, die zich bij het verzamelen van het materiaal voor een verdeling voordoet, onbesproken, en wel de volgende. Het is n.l. niet

steeds met zekerheid uit te maken of een bepaald geval tot de verdeling behoort, ja of neen. Bij het in § 1.3. gegeven voorbeeld van de peren kan men bij het experiment een peer aantreffen, waarvan de groei kennelijk belemmerd is, b.v. door een tak, die er tegen hing. Moet men deze misvormde peer ook opnemen ? Ofschoon men zal trachten een zo scherp mogelijke omschrijving te geven van de individuen, waarover het onderzoek loopt, zullen er toch steeds grensgevallen blijven, waarvan niet met zekerheid uit te maken is, of zij toegelaten mogen worden. De onderzoeker kan zich dan slechts laten leiden door zijn ervaring en door zijn kennis van het gebied der wetenschap, waartoe het experiment behoort. Hij moet proberen, in zulke gevallen de beslissing zo te nemen, dat geen schade gedaan wordt aan de uitkomst van het onderzoek.

Het is echter duidelijk, dat in principe het subjectieve oordeel van de mens hier nimmer kan worden uitgeschakeld. Bij alle theorieën, die hierover zijn geschreven, komt ergens dit subjectieve element er in voor, ergens moet men zeggen: " deze wel en die niet ". Het is van belang, dit steeds scherp voor ogen te houden.

HOOFDSTUK II.

Bestudering van waarnemingsreeksen met behulp van de mathematische statistiek.

2.1. Inleiding.

Eén der eerste ervaringen, die bij het waarnemen wordt opgedaan, is wel deze, dat het een toeval is, wanneer twee waarnemingen, ook al worden ze onder ogenschijnlijk volmaakt dezelfde omstandigheden en door dezelfde waarnemer verricht, eenzelfde uitkomst opleveren. Waarnemingsuitkomsten hebben de eigenschap, aan schommeling onderhevig te zijn.

In eerste aanleg zou men kunnen denken, dat door grotere oplettendheid, betere voorzorgsmaatregelen of andere werkmethoden de geconstateerde onzekerheid van de uitkomsten opgeheven zou kunnen worden. Bij nader inzien zal al spoedig blijken, dat men hiermede in sommige gevallen wel de mate van onzekerheid kan verkleinen, maar dat er geen enkele reden is om aan te nemen, dat er ooit een stadium in de ontwikkeling van de methoden of waarnemingstechniek zou zijn te bereiken, waarbij de onzekerheid geheel verdwenen zou zijn.

Het physisch gebeuren, waarin wij geplaatst zijn, is een ononderbroken stroom van gebeurtenissen, die alle op elkaar inwerken en waarvan geen enkele zich voltrekt, los van de anderen. In beginsel kan dus een meetproces, als deel van dit geheel, nimmer geïsoleerd worden Ook kan geen proces precies worden herhaald. Immers herhaling zou stilstand betekenen van de keten van doorlopende processen en dit kan niet, want wat geweest is, is op hetzelfde moment onherroepelijk geschiedenis geworden.

Is dit op zichzelf reeds een voldoende verklaring voor de onzekerheid van de waarnemingsuitkomsten, ook door de bouw van de stof, die bestaat uit zich in voortdurende beweging bevindende partikeltjes, is ten enen male aan speculaties over een steeds voortgezette verfijning van meetmethoden met als einddoel de algehele zekerheid, paal en perk gesteld. Men denke maar eens wat men op grond van evengenoemde inzichten onder de lengte van een meetstaaf moet verstaan !

De bij de gewone, dagelijks voorkomende experimenten te constateren onzekerheid in waarnemingsuitkomsten is derhalve niet weg te werken of zelfs maar weg te denken door een beroep te doen op een voortgezette verfijning van de waarnemingstechniek. Zij moet worden aanvaard als een algemeen optredende natuurwet.

In de eerste plaats is daarom nodig, inzicht te verkrijgen in de

wijze, waarop de waarnemingsuitkomsten schommelen en gepoogd zal moeten worden, daarin zo mogelijk iets van regelmaat te ontdekken. Dit zal moeten geschieden door waarnemingsreeksen aan een onderzoek te onderwerpen. Immers het alles beheersende verschijnsel van het schommelen van een waarnemingsuitkomst kan slechts aan het licht worden gebracht, als door een zo goed mogelijke herhaling van het experiment een aantal uitkomsten ter beschikking staat.

De bestudering van waarnemingsreeksen geschiedt volgens de methoden van de mathematische statistiek. Omdat deze methoden slechts bij aanwezigheid van veel materiaal kunnen worden gebezigd, zal men over grote waarnemingsreeksen moeten kunnen beschikken: reeksen, gevormd door 500, 1000 en meer waarnemingen. Deze reeksen worden in de practijk van de waarnemingstechniek zelden aangetroffen. Men zal zich deze dan door speciaal daarvoor uitgevoerde experimenten moeten verschaffen.

2.2. Eén- dimensionale waarnemingsreeksen.

Wanneer één enkele grootheid verschillende malen wordt waargenomen verkrijgt men een één- dimensionale waarnemingsreeks. Hier volgen twee voorbeelden.

I. Te Greenwich zijn 1000 waarnemingen uitgevoerd van de rechte klimming van de Poolster[1]. Het bedrag van de waarneming, gerekend ten opzichte van een ongeveer in het midden van de reeks gelegen waarde, is met x aangeduid , f is het aantal keren, dat de waarde als uitkomst verkregen is.

De reeks luidt:

x	-3,5	-3,0	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	+0,5	+1,0
f	2	12	25	43	74	126	150	168	148	129

+1,5	+2,0	+2,5	+3,0	totaal
78	33	10	2	1000

De waarnemingen zijn hier afgerond op halve secunden. Het onder de uitkomst van b.v. -1,0 vermeld aantal 126 betekent, dat er 126 uitkomsten gelegen waren tussen -1,25 en -0,75. De bedragen x zijn dus de middens van de klassen, die telkens 0,5 "breed" zijn. De klassegrenzen liggen midden tussen elk tweetal opvolgende waarden van x.

1) Ontleend aan Whittaker and Robinson, The Calculus of Observations, London 1924.

II. Op een blad papier werd op onscherpe wijze een punt aangegeven. Uitgaande van een willekeurig beginpunt als nulpunt werd de ligging in horizontale richting van het punt 1000 maal opgemeten. De waarnemingsuitkomst is weer aangeduid met x, de bijbehorende frequentie met f.

x in mm.	6.5	6.0	5.5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0.5	totaal
f		4	31	62	145	193	183	177	103	56	34	10	2	1000

In dit voorbeeld zijn voor x de klassegrenzen opgegeven.

In de figuren 2.2.-1 en 2.2.-2 zijn van de bovenaangegeven waarnemingsreeksen de histogrammen getekend. In elk der figuren zijn op een horizontale as de klassegrenzen uitgezet, en wel in beide gevallen even breed. Op het stuk van de as, een klasse-interval voorstellend, is een rechthoek geconstrueerd, waarvan de oppervlakte gelijk is aan de bij de klasse behorende relatieve frequentie. Hiervoor moet men in elk der tekeningen een schaal voor de oppervlakte aannemen. Deze is ook in beide figuren gelijk gekozen en wel zo, dat met 1 cm^2 een relatieve frequentie van 0,020 correspondeert.

De histogrammen doen zien, dat in beide gevallen eenzelfde typisch beeld verkregen wordt. Het meest karakteristieke is:

a. de frequentie is ongeveer in het midden het grootst en vermindert vrij snel naar beide einden ;

b. de verdeling is min of meer symmetrisch.

De ervaring heeft geleerd, dat de meeste in de practijk voorkomende waarnemingsreeksen bovenbeschreven karakter vertonen.

2.3. Onderlinge vergelijking van waarnemingsreeksen.

Vergelijken we op het oog de histogrammen, getekend in de figuren 2.2.-1 en 2.2.-2, dan vertonen ze wel ongeveer hetzelfde beeld, maar die in de tweede figuur verloopt iets steiler. De waarnemingen zijn daar meer in het midden opeengehoopt.

De overeenkomst in het karakter van beide figuren doet de gedachte aan de hand, die in fig. 2.3.-1 is verwezenlijkt. In deze figuur is het histogram van figuur 2.2.-1 op dezelfde wijze opnieuw getekend, d.w.z. met even brede klasse-intervallen, 1 cm, en eenzelfde schaal voor de oppervlakte 1 $cm^2 \rightarrow$ 0,02 relatieve frequentie. Dit histogram is door een volgetrokken lijn voorgesteld.

Het tweede histogram is iets veranderd. De breedte van het klasse-interval is hier 1,2 maal zo groot voorgesteld. De schaal voor het uitzetten van de oppervlakten der rechthoeken is echter dezelfde als in figuur 2.2.-2. Door de genoemde verbreding van de intervallen zullen de hoogten van de rechthoeken in dezelfde verhouding kleiner worden, waar-

door het tweede histogram breder wordt, maar ook platter. De factor 1,2 is zo gekozen, dat nu de bovenkanten van de histogrammen zo goed mogelijk overeenkomen. Hoe de factor 1,2 ontstaan is, doet thans weinig ter zake. Men kan zich voorstellen, dat dit door herhaald proberen is geschied, waarbij telkens de figuren door onderlinge horizontale verschuiving zo goed mogelijk tot dekking werden gebracht. De bovenkant van het tweede histogram is door een streeplijn voorgesteld.

Inderdaad doet de nu verkregen figuur zien, dat in zekere mate van een overeenstemming van de waarnemingsreeksen kan worden gesproken. Men moet nl. bij de beoordeling van het bereikte resultaat er aan denken, dat de frequenties van een waarnemingsreeks getallen zijn, die vrij onzeker zijn. Zou men zich b.v. een nieuwe reeks van 1000 waarnemingen van de rechte klimming van de Poolster verschaffen, dan is niet te verwachten, dat deze precies dezelfde frequenties zou vertonen als de gegevene. Integendeel, het ligt in de natuur van deze aantallen, dat zij schommelen. Bij de beschouwing van figuur 2.3.-1 gaat het dan ook niet zo zeer om de details, als wel om het algemene karakter van de verdelingen.

Het resultaat doet de vraag rijzen of het wellicht een algemeen voorkomend verschijnsel is, dat waarnemingsreeksen de zoeven besproken eigenschap bezitten. De ervaring heeft geleerd, dat dit niet zo is, soms treden waarnemingsreeksen van een andere soort op. Het schijnt echter, dat deze afwijkende reeksen tot de uitzonderingen behoren. Wij nemen derhalve aan, dat er een voldoend groot aantal gevallen is, waarin waarnemingsreeksen optreden, die de tot nu toe besproken kenmerken bezitten, om het lonend te maken, verdere beschouwingen aan dit soort van reeksen te wijden. Deze beschouwingen gelden dan natuurlijk niet algemeen, doch uitsluitend voor de bestudeerde soort waarnemingsreeksen. De verdeling bij deze reeksen zal in het vervolg de <u>normale verdeling</u> worden genoemd.

Om te weten of een nieuwe waarnemingsreeks de normale verdeling bezit, moet zij vergeleken worden met een reeks, waarvan bekend is, dat zij normaal is. Aangenomen wordt daarom, dat er over zo'n reeks beschikt kan worden. De vergelijking geschiedt op de wijze, zoals dat in deze paragraaf bij de bespreking van figuur 2.3.-1 uiteengezet is.

Als conclusie van het bovenstaande wordt geformuleerd:

<u>Aanname 2.3.-1: Waarnemingsreeksen, die normaal verdeeld zijn, kunnen, onder aanname van een voor alle reeksen gelijke schaal voor de oppervlakten, door geschikte keuze van de schaal der klassebreedten, in histogrammen worden voorgesteld, waarvan de gebroken lijnen, gevormd door de bovenkanten van de rechthoeken, nagenoeg samenvallen.</u>

<u>Opmerking.</u> Naar aanleiding van het bovenstaande zal men wellicht de conclusie hebben getrokken, dat het uitmaken of een waarnemingsreeks

een normale verdeling bezit, een aangelegenheid van een subjectief karakter is. Men zij er zich van bewust, dat, over welke middelen van vergelijking men ook zou beschikken, het subjectieve element uit de beoordeling nimmer uit te schakelen is. Het min of meer primitieve in de wijze van vergelijken van twee verdelingen heeft met het eigenlijke wezen daarvan niets uit te staan. Of van een reeks mag worden aangenomen, dat zij normaal verdeeld is, is geen vraag, waarop een regel of een formule antwoord geeft; ook nimmer kan geven.

Immers, het voorkomen van een bepaalde waarnemingsreeks is een physisch verschijnsel en slechts met subjectieve middelen kan het physische wereldgebeuren toegankelijk gemaakt worden voor de toepassing van de abstracte denkwetten. Zo moet ook elke natuurkundige grootheid eerst gedefinieerd worden en elke definitie is subjectief.

Het is dus niets bijzonders, wanneer bij het vergelijken van waarnemingsreeksen genoegen genomen moet worden met een zekere mate van willekeur. De ontwikkelde methode van vergelijking is volkomen afdoende. Zij is echter omslachtig en daarom zullen te zijnertijd andere middelen hiervoor worden aangegeven.

2.4. Modulus van een waarnemingsreeks.

Uit het feit, dat een normaal verdeelde waarnemingsreeks kan worden voorgesteld door een histogram van een vaste gedaante en wel door een geschikte keuze voor de breedte van het klasse-interval op de horizontale as, volgt, dat aan een waarnemingsreeks een grootheid kan worden toegevoegd, die de modulus van de reeks zal worden genoemd en door welke grootheid de reeks gekarakteriseerd is.

Beschouw daartoe nog eens figuur 2.3.-1. Abstraheert men zich een ogenblik van de indeling van beide histogrammen in rechthoeken, dan zijn ze beide in hun algemeen beloop gelijk, afgezien dan van de overblijvende verschillen. Vergelijkt men de voorstelling van de intervallen, dan ziet men, dat het interval van 0,5 seconden in het ene histogram dezelfde rol vervult als een interval van $\frac{1}{1,2} \times 0,5$ [1] mm in het andere. (De breedte van de intervallen van het tweede histogram waren met 1,2 vermenigvuldigd). Noemt men nu de modulus van de eerste reeks μ_1 en die van de tweede μ_2, dan definieert men

1) Het is een toeval, dat beide intervallen 0,5 eenheden zijn. Dit is van geen essentiële betekenis.

$$\mu_1 : \mu_2 = (\ 0{,}5 \text{ seconden}\ ) : (\ \tfrac{1}{1{,}2} \times 0{,}5 \text{ mm}\ )$$

of:

$$\mu_1 : \mu_2 = (\ 6 \text{ seconden}\ ) : (\ 5 \text{ mm}\ ) \qquad (1)$$

Hieruit volgt, dat dus de modulus een benoemde grootheid is. Verder zullen we de modulus steeds positief aannemen, hetgeen betekent, dat we geen aandacht schenken aan de omstandigheid of de getallen van de klasse-indeling in het histogram van links naar rechts in de figuur dalen of stijgen. Men kan dit doen, omdat de normale verdeling symmetrisch verloopt.

Nu het begrip modulus is verkregen, is het van belang, het volgende op te merken. Laten we aannemen, dat de modulus van de eerste reeks 1" is, dan was die van de tweede 0,83 mm. In elke reeks drukken we nu de waarnemingen in de modulus als eenheid uit. We moeten dan ook de getallen, die in figuur 2.3.-1 zijn vermeld, door deze moduli delen. De rij der getallen voor de eerste reeks blijft dan onveranderd, alleen worden zij onbenoemd, omdat men moet delen door 1 seconde. Die van de andere rij worden gedeeld door $\frac{5}{6}$ mm, waardoor eveneens een rij onbenoemde getallen ontstaat. Men krijgt dan langs de as het volgende.

zie figuur 2.3.-2

Let men er op, dat de breedte van een interval van de tweede reeks $\frac{6}{5}$ maal zo groot was, als dat van de eerste, dan leest men uit figuur 2.3.-2 af, dat de intervallen van beide reeksen op dezelfde schaal zijn voorgesteld. Immers, het interval 0,5 van de eerste reeks maal $\frac{6}{5}$ is 0,6 is gelijk aan dat van de tweede.

Men heeft dus de

Eigenschap: drukt men van twee waarnemingsreeksen van elk de waarnemingen uit in hun modulus als eenheid, dan zullen de histogrammen, indien men deze zo vervaardigt, dat de schalen voor de intervalverdelingen langs de horizontale as gelijk zijn, evenals de schalen voor het uitzetten van de oppervlakten der rechthoeken, door horizontale verschuiving tot dekking te brengen zijn.

Men kan dus vaststellen, dat alle waarnemingsreeksen gelijk zijn, mits men de waarnemingen uitdrukt in hun modulus als eenheid.

Wanneer men een vaste waarnemingsreeks als standaardreeks aanneemt en die de modulus 1 toekent, kan men door vergelijking van andere reeksen met deze standaardreeks een modulus voor elk dezer reeksen vaststellen.

Laat b.v. de reeks van figuur 2.2.-1 de standaardreeks zijn. Men deelt nu de waarnemingen hiervan door 1 sec. om onbenoemde getallen te verkrijgen en kent aan de aldus verkregen reeks de modulus 1 toe. De frequenties zijn numeriek gelijk gebleven. Uit (1) volgt dan:

$$1 : \mu_2 = 6 : (5 \text{ mm})$$

(het zijn nu niet 6 seconden meer, maar we moeten het onbenoemde getal 6 gebruiken). We krijgen dan

$$\mu_2 = \frac{5}{6} \text{ mm}.$$

Spreekt men dus in het vervolg van de modulus van een waarnemingsreeks, dan moet men altijd denken aan de vergelijking met een standaardreeks, waarvan de modulus gesteld is op één. Het is niet van belang, in dit stadium de standaardreeks vast te leggen.

2.5. Enige opmerkingen.

Opmerking 1. Heeft men twee waarnemingsreeksen van gelijksoortige grootheden, is dus bij elk der reeksen waargenomen een hoek of een afstand of een temperatuur enz., dan kan men de reeks met de kleinste modulus de nauwkeurigste noemen van de twee.

Laten de veranderlijken van de waarnemingsreeksen zijn x en y en hun moduli resp. μ_x en μ_y. Wij denken ons nu van elk een histogram gemaakt, waarbij op de horizontale assen uitgezet zijn $\frac{x_i}{\mu_x}$ en $\frac{y_i}{\mu_y}$, als x_i en y_i de grenzen van de klassen zijn. Zoals in het voorgaande is aangetoond, zullen dan de beide histogrammen tot dekking zijn te brengen.

Met een segment d op de as correspondeert in het ene histogram een interval $\Delta x = \mu_x d$ en in het andere een interval $\Delta y = \mu_y d$.

Is nu $\mu_x > \mu_y$ dan is ook

$$\Delta x > \Delta y$$

Bij de reeks voor y zijn dus fijnere nuances tot uiting gekomen dan bij die voor x.

Bij reeksen van ongelijksoortige grootheden gaat de bovenstaande redenering niet op. Bij de reeksen van de figuren 2.2.-1 en 2.2.-2 b.v. kan men niet zeggen, dat de laatste nauwkeuriger is dan de eerste: immers bij een bedrag in mm en één in secunden kan men niet spreken van de grootste of de kleinste. Ter vermijding van nutteloze gedachtenassociaties, welke ontstaan door de vage betekenis, die aan het begrip nauwkeurigheid, zoals dit in het dagelijks leven wordt gebruikt, wordt gehecht, zal in het vervolg uitsluitend het begrip modulus van een waarnemingsreeks worden gebruikt.

Opmerking 2. Het zou onjuist zijn, uit het voorgaande de conclusie te trekken, dat men door een verkleining ad libitum van het waarnemingsinterval een reeks met kleinere modulus, een " betere " reeks zou kunnen verkrijgen. Om dit in te zien, denke men b.v. aan het aflezen van een verdeelde rand. Neem aan, dat dit geschiedt met een micrometer, waarbij op de trommel wordt afgelezen. Het aflezingsinterval kan men willekeurig verkleinen door steeds grotere afleestrommels te nemen. Het is echter duidelijk, dat de innerlijke waarde van het experiment hier niet in het minst door verandert. Deze toch is naar boven begrensd door de deugdelijkheid van de randverdeling. Het willekeurig opvoeren van het aantal decimalen in de aflezing is volmaakt zinloos. De vraag is echter hoe de waarnemingsreeks zou reageren op een dergelijke handelwijze.

In de eerste plaats moet worden opgemerkt, dat men het aantal waarnemingen zou moeten opvoeren in verhouding van de verkleining van het interval. Doet men dit niet, dan zal, gezien de willekeur, die in de laatste decimalen van de aflezing bestaat.en het niet voldoende gevuld zijn van de klassen, het histogram belangrijke onregelmatigheden gaan vertonen, in de geest, zoals schetsmatig in figuur 2.4.-1 is getekend. Het algemene beloop van de verdeling is dan wel normaal, maar in details is dit niet het geval.

Voert men het aantal waarnemingen wel op, dan zal men hoogstens de oude vorm van het histogram weer terug kunnen krijgen. Stel b.v. dat een behoorlijk histogram verkregen werd bij een aflezing tot in mm. Men doet nu 10 maal zoveel aflezingen en leest af in tienden van mm. Binnen de mm van eerst zal iedere 0,1 millimeter waarschijnlijk ongeveer evenveel malen voorkomen, als inderdaad de verkleining van het interval zinloos is. Dan echter zal men in het histogram naast elkaar een aantal rechthoeken krijgen, die even hoog zijn, waarmee het oude histogram weer opnieuw te voorschijn komt. In dit geval is het duidelijk, dat generlei voordeel is verkregen.

Het spreekt vanzelf, dat eveneens een te grove aflezing verkeerd is. In de gevolgen van de in dit geval optredende afrondingen van de aflezingsuitkomsten gaat het gedrag van de reeks geheel verloren.

Bij elk waarnemingsproces behoort derhalve min of meer gedwongen een bepaalde waarnemingseenheid. Deze is natuurlijk niet met zekerheid aan te geven. Dit is voor de practijk trouwens ook niet nodig, van wezenlijke betekenis is het, dat deze eenheid aan grenzen gebonden is. Een goed histogram kan men verwachten van ongeveer 20 intervallen.

Opmerking 3. De ervaring leert, dat bij een waarnemingsreeks er eveneens sprake is van een verband tussen de breedte van het totale interval, waar binnen alle waarnemingen liggen, en de bij het waarne-

mingsproces behorende eenheid van de aflezing. Ook dit verband is niet met zekerheid aan te geven, In het voorbeeld van de reeks betreffende de waarnemingen van de rechte klimming van de Poolster is het duidelijk, dat geen waarneming kan optreden, die b.v. 1' groter zou zijn, dan de grootste in de tabel opgegeven waarde. Zelfs 10" groter was al zeer bezwaarlijk te verwachten. Waar hier de grens getrokken moet worden, is niet uit te maken, omdat de begrenzing van het totale interval vaag is. De bovenvermelde samenhang tussen totale intervalbreedte en waarnemingseenheid is echter aanwezig. Bij een bepaald meetproces behoort dus een afleeseenheid, benevens een totale intervalbreedte. Geen van beiden zijn scherp bepaald.

Opmerking 4. Ten slotte een opmerking van historische aard. In het stadium van ontwikkeling der theorie, die met de tot nu toe gegeven beschouwingen bereikt is, speelt in de bestaande literatuur het vervangen van de trapsgewijs verlopende bovenkant van het histogram door een vloeiende lijn een zeer belangrijke rol. Ten einde dit plausibel te maken wordt meestal opgemerkt, dat een des te beter histogram verkregen zou worden, naarmate het waarnemingsinterval kleiner en kleiner gekozen zou worden. Wordt de verkleining ver genoeg doorgezet, dan zou ten slotte de ideale toestand, nl. de vloeiende lijn in plaats van de trappenlijn, verkregen worden. Men maakt dus in de redenering van een limietovergang gebruik.

Bij de vorige opmerking is uiteengezet, dat pogingen tot het verkleinen van het waarnemingsinterval door alleen in meer decimalen af te lezen tot geen resultaat voeren. Het is dus nodig, het gehele waarnemingsproces te verbeteren.

Is de waarnemingsreeks die van een hoek, gemeten met een theodoliet, met aflezing op een minuut, dan zal men in bovengenoemde gedachtengang om een " betere " waarnemingsreeks te verkrijgen, een theodoliet moeten nemen, die b.v. de seconden geeft. Het waarnemingsinterval is dan 60 maal verkleind. Het is echter onjuist, te menen, dat het eerste histogram opnieuw verkregen wordt, doch nu met 60 keer zoveel intervallen, dus een beter histogram.

Wat men zal zien, is, dat de tweede waarnemingsreeks volkomen analoog is aan de eerste. Het aantal intervallen is van dezelfde orde van grootte, terwijl het totale interval ruw $\frac{1}{60}$ deel zal zijn van dat bij de eerste reeks. Men krijgt dus het zelfde resultaat als de eerste keer, alleen op een zoveel kleinere schaal.

De genoemde gedachtengang ten aanzien van het doen ontstaan van de vloeiende kromme is dus physisch niet realiseerbaar. Bij de basering van een betoog op de aanschouwing mag men hiervan dus niet gebruik maken.

2.6. Twee stellingen omtrent moduli.

Stelling 2.6.-1. Van x is een normale waarnemingsreeks gegeven met modulus μ_x. Is a een constante, dan behoort bij x-a eveneens een normale waarnemingsreeks, terwijl voor de modulus μ_{x-a} van deze reeks geldt:

$$\mu_{x-a} = \mu_x$$

Het bewijs is bijna triviaal. De afleiding van de reeks van x-a uit die van x geschiedt door van alle getallen x het constante getal a af te trekken. In het histogram van de reeks van x betekent dit het aanbrengen van een nieuwe becijfering langs de x- as. De verdeling zelf voor x-a is identiek met die van x, waarmee de juistheid van de stelling is aangetoond.

Stelling 2.6.-2. Van x is een normale waarnemingsreeks gegeven met modulus μ_x. Is y = px (p constant), dan behoort bij y weer een normale waarnemingsreeks met modulus

$$\mu_y = |p|\mu_x$$

Bewijs. Laat f_{12} het aantal waarnemingen voor x zijn, gelegen tussen de klassegrenzen x_1 en x_2. Deze geven f_{12} waarden voor y, gelegen tussen px_1 en px_2. Men kan dus uit de reeks voor x die voor y afleiden door de klassegrenzen van de verdeling voor x met p te vermenigvuldigen. De frequentie voor elk interval van y is verder gelijk aan die van het overeenkomstige interval van x.

Hieruit volgt, dat bij y ook een normaal verdeelde waarnemingsreeks behoort.

Is verder het histogram voor de reeks van x zo geconstrueerd, dat op de horizontale as uitgezet is $x : \mu_x$, dan blijkt, omdat

$$\frac{x}{\mu_x} = \frac{px}{p\mu_x} = \frac{y}{p\mu_x}$$

dat voor het histogram van y moet worden aangenomen, dat langs de horizontale as uitgezet is $y : p\mu_x$. Daar beide histogrammen elkaar bedekken, is volgens de definitie van modulus

$$\mu_y = p\mu_x$$

Omdat een modulus niet negatief kan zijn, moet voor het geval p negatief is, van p de absolute waarde worden genomen.

Derhalve is algemeen:

$$\mu_y = |p|\mu_x$$

Gevolgen.

a. Is y = px - a, dan is $\mu_y = |p|\mu_x$; (combinatie van stelling 1 en 2)

b. Is $y = -x$, dan is $\mu_y = \mu_x$.

Stelling 2.6.-3. Is gegeven x met een normaal verdeelde waarnemingsreeks (modulus μ_x) en is $y = f(x)$, dan is met zekere beperkingen:

$$\mu_y = \left| \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_o} \right| \mu_x$$

Bewijs. Aangenomen wordt, dat f (x) differentieerbaar is in het interval van x, waarover de waarnemingsreeks zich uitstrekt. Laat x_o een waarde van x uit dit interval zijn, dan is, als f' (x) de afgeleide van f (x) is:

$$y = f(x_o) + (x-x_o) f'\{x_o + \theta(x-x_o)\} \quad 0 < \theta < 1 \qquad (1)$$

Figuur 2.6.-1 bevat de bekende meetkundige voorstelling van deze formule. De laagste waarde van x in de gegeven waarnemingsreeks is a genoemd, de hoogste b. Om f (x) te vinden moet f (x_o) vermeerderd worden met $x-x_o$ maal de waarde, die f' (x) ergens in het interval x_o,x aanneemt, en wel in dat punt, waar de raaklijn evenwijdig is aan de koorde, die de punten van de kromme, waarvoor de abcissen x_o en x zijn, verbindt.

Men kan uit de verdeling voor x weer die van y afleiden. Laat f_{12} het aantal waarnemingen zijn tussen x_1 en x_2. Voor y zijn er dus eveneens f_{12} waarden tussen $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$. De verdeling voor y krijgt men dus als bij de bedragen van de klassegrenzen voor x die van y worden berekend. Is f (x) een niet- lineaire functie van x, dan zullen de intervallen van de y- verdeling niet even groot worden. Uit de regelmatige becijfering van de intervalverdeling voor x ontstaat een onregelmatige voor y. Construeert men met de onregelmatige intervalverdeling van y een histogram, dan worden de breedten van de rechthoeken onderling ongelijk. Met de even brede rechthoeken in het histogram van x_1 corresponderen ongelijke breedten voor de rechthoeken in het histogram van y. De hoogten van de rechthoeken in het histogram van y zullen dus ook anders zijn dan die bij het histogram van x. Er ontstaat voor y een histogram, dat in beginsel een volkomen willekeurige gedaante kan aannemen.

De grootheid y zal dus in het algemeen niet normaal verdeeld zijn. Bovendien zijn er gevallen, waarbij het zelfs onmogelijk is om een verdeling van y uit die van x af te leiden. Men denke zich b.v. het geval, waarbij f (x) in het interval a-b eerst toe en daarna afneemt.

In de practijk zijn echter meestal de optredende functies van dien aard, dat in het smalle gebied, waarin de veranderlijke x gelegen is, de functie als lineair beschouwd mag worden. Men denke b.v. aan

het gedrag van een functie als sin x in een interval van b.v. $0{,}5^{o}$. In dit geval is de factor van $x-x_o$ in (1) practisch constant en nagenoeg gelijk aan $f'(x_o)$. Men heeft dan met voldoende benadering

$$y = f(x_o) + (x-x_o) f'(x_o)$$

zodat voor de berekening van de modulus μ_y van y de regel voor een lineaire functie kan worden toegepast. Men heeft dus:

$$\mu_y = \left| f'(x_o) \right| \mu_x$$

of

$$\mu_y = \left| \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x=x_o} \mu_x \qquad (2)$$

Voorbeelden.

1. Aangenomen wordt, dat het totale interval van x enkele minuten bedraagt, dan is, als $y = \sin x$, en x_o een waarde van x uit het interval voor x is:

$$\mu_y = \left| \cos x_o \right| \mu_x$$

2. Is bij dezelfde onderstelling $y = tg\ x$, dan is

$$\mu_y = \frac{1}{\cos^2 x_o} \mu_x$$

Omdat voor $x_o = \frac{\pi}{2}$, $\cos x_o = 0$, is deze formule ongeldig voor x_o in de buurt van $\frac{\pi}{2}$.

Een beperking in de toepassing van de regel als bovenvermeld voor $y = tg\ x$ is voor de practijk van geen wezenlijke betekenis. De functie zelf is voor x in de buurt van $\frac{\pi}{2}$ voor de waarnemingspractijk onbruikbaar, laat staan, dat de behoefte zich doet gevoelen, een modulus te moeten kennen. Niettemin is het nuttig, zich de beperkte geldigheid van de regel voor ogen te houden.

Opmerking. Men moet bij het bovenstaande noodzakelijkerwijze enigszins vaag blijven. Het zou beter zijn, wanneer een regel kon worden opgesteld, aan de hand waarvan men in elk concreet geval kon uitmaken of de toepassing van (2) geoorloofd was of niet. Een dergelijke regel kan echter niet worden gegeven, immers met deze regel zou men dan moeten kunnen uitmaken of de verdeling van y tot de normale behoort en dit is onmogelijk (zie de opmerking bij paragraaf 2.3.).

HOOFDSTUK 3.

De twee- en meer- dimensionale correlatievrije normale verdeling.

3.1.

Men komt nieuwe eigenschappen van de normale verdeling op het spoor door de bestudering van de uit zulke verdelingen opgebouwde correlatievrije twee- dimensionale verdelingen.

Deze verkrijgt men, door (zie stelling 1.2.) vermenigvuldiging van de relatieve frequenties van twee één- dimensionale verdelingen. Voor deze laatsten kan men nemen elk tweetal normale verdelingen. Omdat het hier slechts gaat om het formele gedrag van de normale verdeling, kan men ook uitgaan van tweemaal dezelfde verdeling. Dit is gedaan bij het samenstellen van figuur 3.1.-1. Boven en naast het tableau vindt men aangegeven de reeds eerder gebruikte (zie § 2.2.) frequentieverdeling van 1000 waarnemingen van Polaris. De getallen in het tableau zijn hieruit verkregen door paarsgewijze vermenigvuldiging van de frequenties dezer verdelingen. Zo is het getal 189,0 ontstaan als $150 \times 126 \times 10^{-2}$ (er is door 100 gedeeld om niet te grote getallen te krijgen). De som van alle getallen in het tableau is dus $1000 \times 1000 \times 10^{-2} = 10.000$.

Men kan de tabel dus opvatten als een twee- dimensionale correlatievrije verdeling, waarbij de neergeschreven getallen de frequenties aanduiden bij 10.000 gevallen. Onder aanname, dat de getallen bij de middens van de vakjes behoren, zijn in het tableau enkele krommen geconstrueerd, die punten verbinden van gelijke frequentie: nl. de krommen "50", "100", "150". (Dit is een bezigheid, geheel analoog aan het construeren van hoogtelijnen in een kaart.) Het opmerkelijke is nu, dat deze krommen een sterke gelijkenis met een stelsel concentrische cirkels vertonen.

De figuur 3.1.-2 is op volkomen analoge wijze als figuur 3.1.-1 samengesteld uit twee <u>verschillende</u> verdelingen, nl. uit de beide verdelingen van § 2.2. Bij de constructie van dit tableau zijn voor beide verdelingen verschillende schaaleenheden gebruikt en wel in de verhouding van 2 : 2,4. Dit is dezelfde verhouding, die men voor de schalen op de horizontale as in figuur 2.3.-1 moest aannemen om de histogrammen tot samenvalling te kunnen brengen ; het is de verhouding van de omgekeerden der moduli. Ook nu komt in bevredigende mate het stelsel van concentrische cirkels te voorschijn.

Het is duidelijk, dat, wanneer in fig.3.1.-2 de schaaleenheden op andere wijze b.v. gelijk waren genomen voor het construeren van de horizontale en de verticale schaalverdeling, het stelsel concentrische cirkels zou zijn veranderd in een stelsel ellipsen met gemeenschappelijk middelpunt en met samenvallende asrichtingen (evenwijdig aan de coör-

dinaatassen).

Bij het geval van figuur 3.1.-1 komen de cirkels iets fraaier te voorschijn dan bij dat van figuur 3.1.-2. Ook in het tweede geval echter is het cirkelvormige karakter van de krommen aanwezig.

Wij zullen thans terugkeren tot de verdeling van figuur 3.1.-1. Wij stellen ons deze ruimtelijk voor door op de vierkanten van het tableau rechthoekige parallelopipeda te denken, waarvan de inhoud op één of andere schaal gelijk is aan de relatieve frequentie. De krommen, in de figuur getrokken, kunnen dan als de hoogtelijnen worden beschouwd van het lichaam, door de parallelopipeda gezamenlijk gevormd. Zijn deze hoogtelijnen nagenoeg concentrische cirkels, dan moet het lichaam nagenoeg een omwentelingslichaam zijn. Om uit dit lichaam de totaalverdeling van het x- kenmerk terug te vinden, hebben wij het slechts door evenwijdige en op gelijke afstand loodrecht op de x- as staande vlakken in plakken te snijden. De inhoud van elke plak is dan een relatieve frequentie van de verdeling van het x- kenmerk. We kunnen dit ook doen voor het y- kenmerk, waarbij we dezelfde verdeling als voor de x moeten vinden.

Wanneer het inderdaad een omwentelingslichaam is, waarmee we te doen hebben, dan zal het onverschillig moeten zijn, in welke richting we de snijvlakken aanbrengen, steeds moeten we dan dezelfde verdeling vinden, nl. de verdeling, waarmee de frequenties van het tableau zijn verkregen. Hierin ligt dus een middel tot onderzoek van het frequentielichaam.

In de verdeling van figuur 3.1.-1 hebben we de snijvlakken onder een hoek van 45° met de assen genomen, als in de figuur aangegeven. De berekening van de bijbehorende frequenties geschiedt eenvoudig door de inhouden van de plakken te berekenen, daarbij lettend op de stukken, waarin de vierkanten van het tableau door de nieuwe lijnen worden verdeeld. Enkele van deze frequenties zijn in de figuur bijgeschreven. Men vindt er voor in de richting A - B :

0,0 0,1 0,6 3,1 11,7 35,4 89,1 188,8 340,5 545,3 769,4 978,5
1127,7 1187,0 1143,8 1018,5 836,2 634,9 445,0 289,7 174,3 95,5
47,1 21,3 8,5 2,9 0,6 0,1 0,0

In figuur 3.1.-3 is de nieuwe verdeling in een histogram voorgesteld. Wij zien hier een grote mate van overeenstemming. Een dergelijk onderzoek kunnen we in de andere verdeling uitvoeren, waarbij ook, zij het een iets minder mooi, resultaat zal worden verkregen.

Opgave. De lezer voere op de verdeling van figuur 3.1.-2 deze bewerking uit.

Het schijnt op grond van bovenstaande overwegingen gemotiveerd te zijn, de volgende aanname te doen:

Aanname 3.1.-1. In een twee- dimensionale correlatievrije verdeling , afgeleid uit twee één- dimensionale verdelingen, waarvan de modu-

li zich verhouden als μ_1 en μ_2, bestaat de meetkundige plaats van punten met gelijke relatieve frequenties uit cirkels, als:
1ste het tableau op rechthoekige assen is ontworpen ;
2de de veranderlijken uitgedrukt zijn elk in zijn modulus als eenheid.

3.2. Uitbreiding tot de meer-dimensionale verdeling.

Het resultaat van de vorige paragraaf kan gemakkelijk tot de meerdimensionale normale verdeling worden uitgebreid. Beschouwen wij eerst 3 normale verdelingen van de kenmerken x_1, x_2 en x_3. We nemen voor het gemak aan, dat deze verdelingen gelijke modulus hebben. De voorstelling in de drie-dimensionale ruimte op drie loodrechte assen van de driedimensionale verdeling, waarvan de frequenties door vermenigvuldiging van de frequenties der één-dimensionale verdeling worden verkregen, wordt hier zodanig, dat de meetkundige plaatsen van de punten met gelijke frequenties concentrische bollen zijn. Beschouw om dit in te zien het oppervlak, behorende bij een bepaalde frequentie f. Bij een vaste waarde van x_3 behoort een twee-dimensionale verdeling van x_1 en x_2. De frequenties, die bij deze verdeling behoren, liggen in een vlak loodrecht op de x_3-as en de punten in dit vlak met frequentie f liggen volgens het resultaat van de vorige paragraaf op een cirkel. Neemt men nu een andere waarde voor x_3, dan liggen in de daarbij behorende verdeling van x_1 en x_2 de frequenties f weer op een cirkel. De cirkels, die hier optreden, behoren tot het gezochte oppervlak, dat dus de eigenschap heeft, door een stelsel evenwijdige vlakken volgens cirkels doorsneden te worden. Maar hetzelfde geldt voor twee andere stellen van vlakken: immers men kan in het bovenstaande de rol van x_3 doen overnemen door x_1 of door x_2. Een oppervlak, dat door drie onderling loodrechte stelsels van evenwijdige vlakken volgens cirkels gesneden wordt, moet een bol zijn. Alle op deze wijze verkregen bollen moeten concentrisch zijn, omdat zij drie onderling loodrechte vlakken volgens concentrische cirkels doorsnijden.

Zijn de moduli van de samenstellende verdelingen van x_1, x_2 en x_3 niet gelijk, dan worden in de grafische voorstelling weer dan bollen als meetkundige plaatsen verkregen, als de kenmerken eerst weer in hun moduli als eenheid worden uitgedrukt en dan de grafiek wordt gemaakt.

Verdelingen van meer dan drie dimensies zijn niet meer meetkundig voor te stellen. Ofschoon het daarom in eerste aanleg geen zin heeft, meetkundige bewoordingen te gebruiken, is het gemakkelijk, dit toch te blijven doen. Dit moge blijken uit de volgende zeer beknopte uiteenzetting.

In de drie-dimensionale ruimte spreekt men van het punt, b.v. 2,3,-6, daarmee bedoelende het punt, waarvan de rechthoekige of scheef-

hoekige parallelcoördinaten 2,3 en -6 zijn. Met het woord " punt " wordt derhalve een groep van 3, in bepaalde volgorde opgeschreven, getallen aangeduid.

In een R_n (een n- dimensionale ruimte) noemt men naar analogie van het bovenstaande de groep van de n getallen:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$$

een punt. Een lineaire betrekking tussen de coördinaten b.v.

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + A_nx_n = A_o$$

bepaalt in de R_n een lineaire R_{n-1}, op dezelfde wijze als een lineaire betrekking tussen de drie coördinaten in de R_3 een plat vlak bepaalt. Twee lineaire betrekkingen bepalen in de R_n een lineaire R_{n-2}, drie een lineaire R_{n-3} en ten slotte n-2 een lineaire R_2 of een plat vlak en n-1 een lineaire R_1 of een rechte.

Een willekeurige betrekking tussen de coördinaten:

$$f\ (x_1,\ x_2, \ldots\ldots x_n) = 0$$

zal in de R_n in het algemeen een gebogen R_{n-1} bepalen. Zo is op rechthoekige assen in een R_3 de vergelijking van de bol, waarvan het middelpunt in de corsprong ligt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

Analoog hiermee is in de R_n

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots\ldots + x_n^2 = r^2$$

de vergelijking van de " hypersfeer " op rechthoekige assen, met middelpunt in de oorsprong. De hypersfeer is het meer- dimensionale analogon van de bol in de R_3.

De meetkundige namen vergemakkelijken de terminologie. Zo is het zelfs na bovenstaande zeer summiere beschouwing volkomen duidelijk, wat onder twee concentrische hypersferen moet worden verstaan, onder de straal van een hypersfeer, onder de afstand van twee punten in de R_n enz. Zonder de meetkundige namen zou de beschrijving met algebraische bewoordingen onoverzichtelijker en vermoeiender zijn. Verder schijnt het, ondanks het feit, dat er van een meetkundige voorstelling geen sprake kan zijn, dat de voorstellingen, die men gewend is zich in de R_3 te maken bij de algebra in de R_n een zekere steun geven, waardoor deze laatste doorzichtiger wordt.

Wat nu de n- dimensionale correlatievrije verdeling betreft zal het duidelijk zijn, dat naar analogie met de drie- dimensionale de volgende aanname geformuleerd kan worden.

mensionale verdelingen met moduli, die zich verhouden als $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots \mu_n$, bestaat de meetkundige plaats van punten met gelijke frequentie uit een stelsel concentrische hypersferen, als:

1ste de assen van het coördinatensysteem rechthoekig zijn ;

2de de veranderlijken uitgedrukt zijn elk in zijn modulus als eenheid.

Opmerking. Deze aanname is de generalisatie van aanname 3.1.-1 en omvat die dus.

3.3. Eigenschap van de moduli.

Gegeven is een correlatievrije verdeling, verkregen door vermenigvuldiging van de frequenties van de normale verdelingen van x en y, met moduli, die zich verhouden als μ_x en μ_y. De verdeling wordt voorgesteld op een rechthoekig assensysteem, na eerst x en y elk in zijn modulus te hebben uitgedrukt. Volgens aanname 3.1.-1 liggen punten met gelijke frequenties op concentrische cirkels. Wij denken ons verder het drie- dimensionale histogram geconstrueerd van § 3.1. Het frequentielichaam kan dan nu als een omwentelingslichaam beschouwd worden (de as loodrecht op het x,y vlak). De inhoud van dit lichaam is 1, zoals bekend is.

We beschouwen de grootheid

$$z = px + qy \qquad (1)$$

waarin p en q constanten zijn.

Uit de verdelingen voor x en y kan er één voor z worden afgeleid. Voor z wordt daartoe een intervalverdeling aangenomen.

De deelpunten zijn:

$$z_o, z_o + \Delta z, z_o + 2\Delta z, z_o + 3\Delta z, \ldots\ldots$$

Δz is het interval, z_o het begin van telling.

Het komt er nu op aan, de relatieve frequenties te bepalen voor z in deze intervalverdeling: men moet daarvoor voor elk interval het aantal gevallen tellen, waarin z volgens (1) een waarde aanneemt, die in dat interval gelegen is.

Om een goed inzicht in de aangelegenheid te krijgen is in figuur 3.3.-1 de verdeling schematisch voorgesteld. Voor de constructie van het tableau hebben we x en y moeten uitdrukken in hun moduli.

Stel dus

$$\xi = \frac{x}{\mu_x}$$

$$\eta = \frac{y}{\mu_y}$$

ξ en η zijn dan de coördinaten, die voor de constructie van het tableau

moeten dienen. Met het invoeren van ξ en η hebben wij ons van de complicatie, veroorzaakt door het verschil in moduli, ontdaan. Bij ξ en η behoren verdelingen met gelijke moduli 1.

In ξ en η geschreven wordt (1)

$$z = p\mu_x\xi + q\mu_y\eta \qquad (2)$$

De waardestellen van ξ en η, die een z opleveren in het interval $z_o + k\Delta z$ en $z_o + (k+1)\Delta z$, zijn de coördinaten van de punten, gelegen in de strook van het ξ,η-vlak, begrensd door de rechten :

$$z_o + k\Delta z = p\mu_x\xi + q\mu_y\eta \qquad (3)$$

en

$$z_o + (k+1)\Delta z = p\mu_x\xi + q\mu_y\eta \qquad (4)$$

De rechten zijn evenwijdig en hun afstand

$$d = \frac{\Delta z}{\sqrt{p^2\mu_x^2 + q^2\mu_y^2}} \qquad (5)$$

Laten we k de rangnummers 1,2,.... in (3) doorlopen, dan krijgen we een stelsel evenwijdige rechten, alle op dezelfde afstand d. Door deze rechten denken we ons vlakken loodrecht op het ξ,η-vlak aangebracht. Deze vlakken verdelen het frequentielichaam in even dikke platte schijven en nu is de inhoud van elk dezer schijven de relatieve frequentie in de verdeling van z voor het bijbehorende interval.

Het is reeds bekend, dat de verdeling van z weer normaal is, eenvoudig omdat het frequentielichaam een omwentelingslichaam was. Wij zullen nu de modulus van de nieuwe verdeling berekenen.

Wij kunnen Δz altijd zo kiezen, dat d gelijk wordt aan het interval $\Delta\xi$, dat wij voor de constructie van het tableau hebben gebruikt. Hierdoor kan (5) als volgt geschreven worden:

$$\frac{\Delta\xi}{1} = \frac{\Delta z}{\sqrt{p^2\mu_x^2 + q^2\mu_y^2}} \qquad (6)$$

Omdat de verdeling van z nu identiek is met die van ξ (afgezien van de gebruikelijke verschillen in de frequenties) moeten we hebben

$$\mu_z = \sqrt{p^2\mu_x^2 + q^2\mu_y^2} \qquad (7)$$

Dit volgt direct uit (6), omdat daar te lezen staat, dat men Δz en dus ook z moet delen door $\sqrt{p^2\mu_x^2 + q^2\mu_y^2}$ om de verdeling van z in de gedaante te brengen van de verdeling van ξ. De modulus van ξ is 1, zodat die van z voorgesteld moet worden door (7).

Wij hebben dus nu gevonden, als

$$z = px + qy$$

dat:

a. z een verdeling heeft ;
b. die verdeling normaal is ;
c. $\mu_z^2 = p^2\mu_x^2 + q^2\mu_y^2$.

Het gevonden resultaat laat zich onmiddellijk uitbreiden tot een lineaire functie van een willekeurig aantal veranderlijken. Men kan nu nl. gemakkelijk de volgende stelling bewijzen.

Stelling 3.3.-1. Is

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n \qquad (8)$$

dan is, als de verdelingen voor $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ normaal en correlatievrij zijn, de voor z af te leiden verdeling eveneens normaal.
Zijn verder $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ de moduli van $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, dan is, als μ_z de modulus is van z

$$\mu_z^2 = p_1^2\mu_1^2 + p_2^2\mu_2^2 + \ldots\ldots + p_n^2\mu_n^2 \qquad (9)$$

Bewijs. De stelling is bewezen voor 2 veranderlijken. Kan worden aangetoond, dat, als ze geldt voor n veranderlijken, ze ook geldt voor n+1, dan is het bewijs geleverd.

Stel

$$u = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n + p_{n+1}x_{n+1} \qquad (10)$$

en

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n$$

dan is

$$u = z + p_{n+1}x_{n+1}$$

u is nu een lineaire functie van de 2 veranderlijken z en x_{n+1}. Omdat z als lineaire functie van n veranderlijken normaal verdeeld is, is dit met u als functie van z en x_{n+1} ook het geval. Men heeft verder:

$$\mu_u^2 = \mu_z^2 + p_{n+1}^2\mu_{n+1}^2$$

Vult men voor μ_z de waarde volgens (9) in, dan ontstaat:

$$\mu_u^2 = p_1^2\mu_1^2 + p_2^2\mu_2^2 + \ldots\ldots + p_n^2\mu_n^2 + p_{n+1}^2\mu_{n+1}^2$$

waarmede het bewijs geleverd is.

Het voorschrift, gegeven door (9), zal worden genoemd de bijzondere voortplantingswet van de moduli.

Stelt men in (8) en (9) alle coëfficiënten p_i op p_1 na nul, dan ontstaat uit stelling 3.3.-1 stelling 2.6.-2. Deze laatste is dus een bijzonder geval van de algemene stelling 3.3.-1.

Is z een niet lineaire functie van een aantal grootheden, waarbij normale verdelingen behoren, dan geldt in het algemeen stelling 3.3.-1 niet. Om dit in te zien, neme men het geval, dat z een functie van twee veranderlijken is, dus

$$z = f\ (\ x_1,\ x_2)$$

Men stelle zich nu het tableau x_1, x_2 voor met het lichaam der parallelopipeda. Voor z wordt een intervalverdeling aangenomen

$$z_o,\ z_o + \Delta z,\ z_o + 2\Delta z,\ \ldots\ldots$$

en men moet nu weer voor ieder interval het aantal waardestellen x_1, x_2 bepalen, dat aanleiding geeft tot een waarde van z, die daartoe behoort. De waardestellen x_1 en x_2, die een z geven in het interval, begrensd door $z_o + k\Delta z$ en $z_o + (\ k+1\ )\Delta z$, zijn coördinaten ξ_1 en ξ_2 van een punt, gelegen in een strook, begrensd door

$$z_o + k\Delta z = f\ (\xi_1, \xi_2) \qquad (\ 11\ )$$

$$z_o + (\ k+1\ )\Delta z = f\ (\xi_1, \xi_2) \qquad (\ 12\ )$$

waarin $x_1 = \mu_1 \xi_1$ en $x_2 = \mu_2 \xi_2$, als μ_1 en μ_2 de moduli van x_1 en x_2 zijn. Voor het geval f niet lineair is, zijn (11) en (12) krommen. De relatieve frequentie van z in het beschouwde interval is gelijk aan de inhoud van een schil, waarvan het grondvlak de strook is tussen de krommen (11) en (12), die zijdelings begrensd worden door twee cylinderoppervlakken met als richtkrommen de beide genoemde krommen en beschrijvenden loodrecht op het vlak ξ_1, ξ_2 en aan de bovenkant door een gedeelte van het bovenvlak van het lichaam der parallelopipeda.

Alleen voor het geval de functie f zo is, dat in het gebied, waarbinnen de veranderlijken zich bewegen, de schillen weinig afwijken van platte schijven, kan de stelling 3.3.-1 worden toegepast.

Men neemt dan in het totale interval van x_1 een willekeurige waarde $x_{1,0}$ aan en in dat van x_2 de willekeurige waarde $x_{2,0}$. Stel

$$x_1 = x_{1,0} + \Delta x_1 \ ; \quad x_2 = x_{2,0} + \Delta x_2$$

dan is, als aangenomen wordt, dat z differentieerbaar is naar x_1 en x_2:

$$z = f\ (x_{1,0}, x_{2,0}) + \Delta x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\substack{x_1 = x_{1,0} + \theta_1 \Delta x_1 \\ x_2 = x_{2,0} + \theta_2 \Delta x_2}} + \Delta x_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\substack{x_1 = x_{1,0} + \theta_1 \Delta x_1 \\ x_2 = x_{2,0} + \theta_2 \Delta x_2}}$$

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

Is de schil nagenoeg een platte schijf, dan verschilt z in het beschouwde gebied weinig van een lineaire functie van Δx_1 en Δx_2. Dan moeten in dit gebied $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ en $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ongeveer constant zijn. Men kan dan de waarden van deze partiële differentiaalquotienten nemen voor $x_1 = x_{1,0}$ en $x_2 = x_{2,0}$.

Toepassing van stelling 3.3.-1 levert nu:

a. bij z behoort een nagenoeg normale verdeling;

b.

$$\mu_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2_{\substack{x_1 = x_{1,0} \\ x_2 = x_{2,0}}} \mu_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2_{\substack{x_1 = x_{1,0} \\ x_2 = x_{2,0}}} \mu_2^2$$

Het is duidelijk, dat het gevonden resultaat tot een functie van een willekeurig aantal veranderlijken mag worden uitgebreid. Is

$$z = f (x_1, x_2, \ldots . x_n)$$

dan behoort bij z onder bepaalde omstandigheden een normale verdeling, terwijl in dat geval, als z differentieerbaar naar de veranderlijken x_i wordt ondersteld:

$$\mu_z^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 \mu_1^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 \mu_2^2 + \ldots\ldots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 \mu_n^2 \quad (13)$$

de waarden van de partiële differentiaalquotienten, genomen voor een stel waarden uit de totale intervallen van de veranderlijken.

Dit is de bijzondere voortplantingswet der moduli, uitgebreid tot niet lineaire functies.

3.4. Discussie en omkering van de gedachtengang.

De stelling 3.3.-1 betreffende het zich reproduceren van de normale verdeling bij een lineaire functie, met de in vele gevallen bestaande mogelijkheid van uitbreiding tot niet lineaire functies, is van groot belang. Uit waargenomen grootheden moeten vaak andere worden berekend. Men krijgt dus bij de toepassingen te maken met twee soorten grootheden: direct gemeten grootheden en zulke, daaruit afgeleid. De betekenis van stelling 3.3.-1 is, dat men tussen deze twee soorten nimmer onderscheid behoeft te maken. Een grootheid, die afgeleid wordt uit waargenomen grootheden, mag, omdat ook zij de normale wet volgt, zelf als waargenomen grootheid worden beschouwd. Er behoeft slechts ten aanzien van die afgeleide grootheden een uitzondering te worden gemaakt, die niet lineaire functies zijn van waargenomen grootheden en waarvoor de onderstellingen, gemaakt bij de afleiding van de bijzondere voortplantingswet, niet gelden. Deze gevallen komen in de practijk echter uiterst zelden voor, zodat in de practijk dan ook steeds beide soorten grootheden door elkaar kunnen worden gebruikt.

De stelling is van zoveel waarde, dat het niet wel denkbaar is, het er zonder te moeten doen. Het rekenen met waarnemingsuitkomsten zou dan vrijwel onmogelijk worden en van elke experimentele grootheid zou moeten worden vermeld of deze regelrecht gemeten was en zo niet uit welke andere gemeten grootheden ze was afgeleid en hoe ze daarmee samenhing.

Stelling 3.3.-1 vloeide voort uit twee aannamen. De eerste was die, waarbij werd uitgesproken, dat histogrammen van waarnemingsreeksen terug te brengen waren tot een nagenoeg zelfde gedaante, wanneer slechts geschikte eenheden voor de constructie van de schalen op de horizontale as werden ingevoerd. Bij de tweede aanname werd aanvaard, dat in

het histogram van een twee- dimensionale correlatievrije verdeling punten met gelijke frequenties bij gebruik van geschikte schalen op concentrische cirkels waren gelegen.

Beide aannamen waren niet dwingend. De wisselvalligheid van de frequenties van een reeks waarnemingen is zo groot, dat ook andere aannamen denkbaar zijn. Van de gekozen aannamen kan hoogstens geconstateerd worden, dat zij eenvoudig zijn, zo niet de eenvoudigste en dat zij bovenal het voordeel hebben, tot de zo nuttige stelling 3.3.-1 te voeren. Deze stelling komt echter in de tot nu toe gevolgde gedachtengang min of meer bij toeval te voorschijn.

Nu eenmaal het bijzondere nut van deze stelling is ingezien en blijkbaar de wisselvalligheid van de frequentieverdeling van een waarnemingsreeks ruimte laat voor velerlei aannamen, ligt het voor de hand, de gehele gedachtengang om te keren en te zoeken naar een zodanige beschrijving van het experiment, dat het bestaan van stelling 3.3.-1 in elk geval gewaarborgd is. De stelling is afgeleid door volledige inductie, nadat het bestaan er van voor een functie van twee veranderlijken was aangetoond. Het is dus ook nu voldoende, van een functie van twee veranderlijken uit te gaan, die bovendien lineair kan worden ondersteld. Men komt dan tot de volgende probleemstelling.

Er zijn twee waarnemingsreeksen gegeven, één voor x en één voor y. Aannemende, dat waarnemingsreeksen een frequentieverdeling vertonen, die nader te bepalen algemene eigenschappen bezit, wordt gevraagd hoe deze eigenschappen zijn, opdat als

$$z = px + qy$$

de reeks, die voor z kan worden afgeleid uit de reeksen van x en y, dezelfde eigenschappen bezit als een waargenomen reeks.

Stel eerst $q = 0$

dan wordt $z = px$

In dit geval wordt de reeks voor z uit die van x afgeleid door de becijfering van de horizontale as in het voor de reeks ^{x}gemaakte histogram te veranderen. De aldus voor z verkregen reeks moet nu de kenmerken van een waarnemingsreeks hebben. Dit betekent, dat waarnemingsreeksen de eigenschap moeten hebben, bij gebruikmaking van geschikte schalen voor de constructie van hun histogrammen, door een histogram van een vaste gedaante voorgesteld te kunnen worden. Ook volgens deze gedachtengang moet dus dezelfde eigenschap bestaan, die eerder werd geformuleerd naar aanleiding van de uitkomsten van experimenten. Aangezien nu verder door het invoeren van moduli alle waarnemingsreeksen van de beschouwde soort tot identieke reeksen kunnen worden herleid, is het voor het volgende voldoende, voor x en y identieke reeksen te onderstellen.

Uit de reeksen voor x en y wordt door toepassing van de vermenig-

vuldigingsregel een twee- dimensionale correlatievrije verdeling afgeleid. Men denkt zich hiervan het tableau gegeven met daarbij het lichaam der parallelopipeda. Men verkrijgt dan weer de verdeling voor z, indien men het zoëven genoemde lichaam in even dikke platte schijven verdeelt. De richting van de verdeling in schijven hangt af van de coëfficiënten p en q. Onder de mogelijke verdelingen, die aldus kunnen worden verkregen, behoren ook die van x en y, die ontstaan als men de schijven loodrecht op de x-, resp. de y- as kiest. Zal nu voor z eenzelfde verdeling als voor x en y te voorschijn komen, dan moet het lichaam der parallelopipeda een omwentelingslichaam zijn. Hiermede is aangetoond, dat stelling 3.3.-1 noodzakelijk bestaan moet. zullen waarnemingsreeksen de eigenschap bezitten van zich te reproduceren, zoals bij de laatste gedachtengang voorop werd gesteld.

Recapitulerende komen de tot hier toe gehouden beschouwingen over waarnemingsreeksen op het volgende neer.

Experimenteel verkregen en aan de waarnemingspractijk ontleende waarnemingsreeksen laten ruimte voor verschillende aannamen omtrent hun karakter. Binnen de grenzen van de mogelijkheden zijn de aannamen zo gekozen, dat een gemakkelijk hanteerbare theorie er het gevolg van is. Andere theorieën, die het natuurverschijnsel in kwestie nauwkeuriger beschrijven of eenvoudiger eigenschappen bezitten, zijn dus in principe denkbaar. De gegeven theorie moet derhalve worden beschouwd als één, die mogelijk is en die aanvaard wordt, zolang er geen aanleiding is, ze te veranderen.

3.5. Constanten als waargenomen grootheden gedefinieerd.

Tot nu toe zijn in de beschouwingen grootheden opgetreden, waarbij waarnemingsreeksen behoren, hetzij, dat deze regelrecht zijn waargenomen, hetzij, dat deze verkregen zijn door ze af te leiden uit andere reeksen. Daarnaast heeft men echter ook nog met constanten te maken. Het kan van gemak zijn, een constante als een waargenomen grootheid op te vatten en dit kan. Wij behoeven dan slechts de volgende definitie te aanvaarden.

Definitie 3.5.-1. Een constante grootheid mag als een waargenomen grootheid beschouwd worden, waarbij een waarnemingsreeks behoort met modulus nul.

De geldigheid van de voortplantingswet van de moduli wordt door het bovenstaande niet aangetast. Is

$$z = px + a$$

waarin a een constante is, dan was vroeger afgeleid

$$\mu_z^2 = p^2 \mu_x^2$$

Kent men daarentegen aan a een waarnemingsreeks toe met modulus $\mu_a = 0$, dan heeft men:

$$\mu_z^2 = p^2\mu_x^2 + \mu_a^2 = p^2\mu_x^2$$

hetzelfde resultaat als boven.

Op soortgelijke manier toont men aan, dat, als men aan p een waarnemingsreeks toekent met modulus $\mu_p = 0$, de voortplantingswet eveneens geldig blijft.

HOOFDSTUK IV.

Lineaire transformatie van een normale drie-dimensionale correlatievrije verdeling.

4.1. Lineaire transformatie van de veranderlijken.

Voor elk der grootheden x_1, x_2 en x_3 is een normale waarnemingsreeks gegeven. De moduli dezer reeksen zijn resp. μ_1, μ_2 en μ_3. Met deze drie reeksen wordt door toepassing van de vermenigvuldigingsregel een drie- dimensionale correlatievrije verdeling op een rechthoekig assensysteem geconstrueerd gedacht; de oorsprong van het stelsel ligt in het centrum van de verdeling.

Om te bereiken, dat de meetkundige plaatsen van punten met gelijke relatieve frequentie een stelsel van concentrische bollen vormen, moeten we voor het vaststellen van de schalen langs de assen eerst de grootheden x_i uitdrukken in hun modulus. Om iets algemener te blijven is het ook voldoende om de x_i uit te drukken in eenheden, die zich op dezelfde wijze verhouden als de moduli.

We stellen daartoe

$$\mu_1 \mu_1 = g^{11} \mu\mu \; ; \; \mu_2 \mu_2 = g^{22} \mu\mu \; ; \; \mu_3 \mu_3 = g^{33} \mu\mu$$

De ingevoerde grootheden g^{ii} verhouden zich dan op dezelfde wijze als de moduli en we moeten dus de x_1, x_2 en x_3 nu uitdrukken in $\sqrt{g^{11}}$, $\sqrt{g^{22}}$, $\sqrt{g^{33}}$ als eenheid en dan de aldus verkregen getallen uitzetten als coördinaten langs de assen. Als we dus stellen

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g^{11}}} \; ; \; \xi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{g^{22}}} \; ; \; \xi_3 = \frac{x_3}{\sqrt{g^{33}}}$$

kunnen we de ξ_i als " gewone " rechthoekige coördinaten beschouwen.

We leiden gemakkelijk af, dat de modulus van ξ_1

$$\mu_{\xi_1} = \frac{\mu_1}{\sqrt{g^{11}}} = \mu$$

en zo zijn ook

$$\mu_{\xi_2} = \mu_{\xi_3} = \mu$$

We definieren verder nog

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} \; ; \; g_{22} = \frac{1}{g^{22}} \; ; \; g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

waardoor

$$\xi_i = x_i \sqrt{g_{ii}} \qquad i = 1, \; 2 \text{ of } 3.$$

De grootheden $\sqrt{g_{ii}}$ kunnen we de maateenheden op de assen noemen. Immers is b.v. $x_1 = 1$, dan is $\xi_1 = \sqrt{g_{11}}$, is $x_1 = 2$, dan is $\xi_1 = 2\sqrt{g_{11}}$ enz., zodat dus inderdaad voor de uitzetting van x_1 de grootheid $\sqrt{g_{11}}$ als de eenheid voor de uit te zetten afstand fungeert. Het is uit het voorafgaande gemakkelijk in te zien, dat de maateenheden omgekeerd evenredig met de moduli zijn.

Wordt de oorsprong van het assenstelsel in het gemeenschappelijk middelpunt van de bollen gedacht, dan is de vergelijking van één dier bollen

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r^2$$

of

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 = r^2 \qquad (1)$$

De thans met behulp van x_1, x_2 en x_3 beschreven 3- dimensionale verdeling willen we voorstellen met behulp van 3 andere grootheden X_1, X_2, X_3, die bepaald zijn door:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ X_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ X_3 &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Deze drie vergelijkingen worden onafhankelijk ondersteld, zodat x_1, x_2 en x_3 er uit oplosbaar zijn. Laat de oplossing zijn:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1X_1 + B_1X_2 + C_1X_3 \\ x_2 &= A_2X_1 + B_2X_2 + C_2X_3 \\ x_3 &= A_3X_1 + B_3X_2 + C_3X_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

dan bestaan tussen de coëfficiënten van (3) en van (2) de volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 &= 1 \\ B_1a_1 + B_2a_2 + B_3a_3 &= 0 \\ C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 &= 0 \\ B_1b_1 + B_2b_2 + B_3b_3 &= 1 \\ C_1b_1 + C_2b_2 + C_3b_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3 &= 0 \\ B_1c_1 + B_2c_2 + B_3c_3 &= 0 \\ C_1c_1 + C_2c_2 + C_3c_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Deze betrekkingen worden verkregen, wanneer men de uitdrukking voor x_1, x_2 en x_3 volgens (3) instelt in (2) en daarna de coëffi-

ciënten van X_1, X_2 en X_3 links en rechts van het gelijkteken aan elkaar gelijkstelt. Substitueert men daarentegen X_1, X_2 en X_3 uit (2) in (3), dan ontstaan op dezelfde wijze de negen betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 &= 1 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 &= 0 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 &= 0 \\ a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 &= 1 \\ a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 &= 0 \\ a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 &= 0 \\ a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

De betrekkingen (7), (8) en (9) zijn afhankelijk van de betrekkingen (4), (5) en (6).

Meetkundig stelt (2) een affiene transformatie van het assensysteem voor, met behoud van de oorsprong. De vergelijkingen in het oude stelsel van de nieuwe coördinaatvlakken zijn

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Voor de hoek $\angle_{12}$ tussen het eerste en het tweede coördinaatvlak geldt

$$\cos \angle_{12} = \frac{g^{11}a_1b_1+g^{22}a_2b_2+g^{33}a_3b_3}{\sqrt{g^{11}a_1a_1 + g^{22}a_2a_2 + g^{33}a_3a_3}\ \sqrt{g^{11}b_1b_1 + g^{22}b_2b_2 + g^{33}b_3b_3}} \qquad (11)$$

waaruit de formules voor de andere hoeken $\angle_{23}$ en $\angle_{31}$ volgen door cyclische verwisseling van de letters a, b en c. Men leidt (11) af door in (10) over te gaan op de coördinaten ξ_1, ξ_2 en ξ_3, waardoor ontstaan

$$\begin{aligned} a_1\xi_1\sqrt{g^{11}} + a_2\xi_2\sqrt{g^{22}} + a_3\xi_3\sqrt{g^{33}} &= 0 \\ b_1\xi_1\sqrt{g^{11}} + b_2\xi_2\sqrt{g^{22}} + b_3\xi_3\sqrt{g^{33}} &= 0 \\ c_1\xi_1\sqrt{g^{11}} + c_2\xi_2\sqrt{g^{22}} + c_3\xi_3\sqrt{g^{33}} &= 0 \end{aligned}$$

De richtingscosinussen van de normaal van b.v. het eerste dezer vlakken verhouden zich dus als

$$a_1\sqrt{g^{11}} : a_2\sqrt{g^{22}} : a_3\sqrt{g^{33}}$$

waarmee dan (10) direct is op te schrijven.

De berekening van de hoeken van de nieuwe assen en de maateenheden daarop geschiedt door uit te gaan van de formule voor het kwadraat van

de afstand l van een punt tot de oorsprong. In het eerste stelsel is

$$l^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2$$

Hierin substitueert men de waarden van x_1, x_2 en x_3 uit (3). Er ontstaat dan voor l een eveneens kwadratische uitdrukking in X_1, X_2 en X_3 nl.

$$l^2 = G_{11}X_1X_1 + G_{22}X_2X_2 + G_{33}X_3X_3 + 2\,G_{23}X_2X_3 + 2\,G_{31}X_3X_1 + 2\,G_{12}X_1X_2 \qquad (12)$$

Deze vergelijking geeft het kwadraat van de afstand, geschreven in de nieuwe coördinaten. Men verifieert gemakkelijk, dat

$$\left.\begin{aligned} G_{11} &= g_{11}A_1A_1 + g_{22}A_2A_2 + g_{33}A_3A_3 & G_{23} &= g_{11}B_1C_1 + g_{22}B_2C_2 + g_{33}B_3C_3 \\ G_{22} &= g_{11}B_1B_1 + g_{22}B_2B_2 + g_{33}B_3B_3 & G_{31} &= g_{11}C_1A_1 + g_{22}C_2A_2 + g_{33}C_3A_3 \\ G_{33} &= g_{11}C_1C_1 + g_{22}C_2C_2 + g_{33}C_3C_3 & G_{12} &= g_{11}A_1B_1 + g_{22}A_2B_2 + g_{33}A_3B_3 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

(Bij de grootheden G_{ik} behoeft op de volgorde der indices niet te worden gelet: $G_{12} = G_{21}$ etc.)

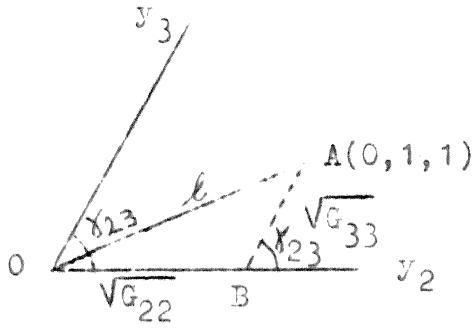
De maateenheid op de X_1 - as vindt men door na te gaan hoe groot de afstand wordt van het punt met coördinaten 1,0,0 tot de oorsprong. Men vindt volgens (11)

$$l^2 = G_{11}$$

zodat dus $\sqrt{G_{11}}$ de maateenheid is op de X_1 - as. Op analoge wijze leidt men voor de maateenheden op de X_2 - en X_3 - as af resp. $\sqrt{G_{22}}$ en $\sqrt{G_{33}}$.

De hoek γ_{23}, gevormd door de assen X_2 en X_3, wordt gevonden uit de formule voor de afstand van het punt 0,1,1 tot de oorsprong. Volgens (11) is

$$l^2 = G_{22} + 2\,G_{23} + G_{33} \qquad (14)$$



figuur 4.1.-1

In figuur 4.1.-1 is A het punt met coördinaten 0,1,1. In het vlak $y_2O\,y_3$ is volgens de cosinusregel

$$l^2 = G_{22} + G_{33} + 2\sqrt{G_{22}}\,\sqrt{G_{33}}\cos\gamma_{23},$$

zodat door vergelijking met (14)

$$\cos\gamma_{23} = \frac{G_{23}}{\sqrt{G_{22}}\,\sqrt{G_{33}}} \qquad (15)$$

moet zijn.

Hieruit volgt voor de beide andere hoeken door cyclische verwisseling

$$\cos \gamma_{31} = \frac{G_{31}}{\sqrt{G_{33}}\sqrt{G_{11}}} \qquad (16)$$

$$\cos \gamma_{12} = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}}\sqrt{G_{22}}} \qquad (17)$$

Nu worden de grootheden G^{ik} ingevoerd:

$$\left.\begin{aligned} G^{11} &= g^{11}a_1a_1 + g^{22}a_2a_2 + g^{33}a_3a_3 & G^{23} &= g^{11}b_1c_1 + g^{22}b_2c_2 + g^{33}b_3c_3 \\ G^{22} &= g^{11}b_1b_1 + g^{22}b_2b_2 + g^{33}b_3b_3 & G^{31} &= g^{11}c_1a_1 + g^{22}c_2a_2 + g^{33}c_3a_3 \\ G^{33} &= g^{11}c_1c_1 + g^{22}c_2c_2 + g^{33}c_3c_3 & G^{12} &= g^{11}a_1b_1 + g^{22}a_2b_2 + g^{33}a_3b_3 \end{aligned}\right\} (18)$$

Ook voor de grootheden G^{ik} is de volgorde der indices willekeurig.

Hier wordt volgens (11) :

$$\cos \measuredangle_{12} = \frac{G^{12}}{\sqrt{G^{11}}\sqrt{G^{22}}} \qquad (19)$$

$$\cos \measuredangle_{23} = \frac{G^{23}}{\sqrt{G^{22}}\sqrt{G^{33}}} \qquad (20)$$

$$\cos \measuredangle_{31} = \frac{G^{31}}{\sqrt{G^{33}}\sqrt{G^{11}}} \qquad (21)$$

Er bestaat een direct verband tussen de G_{ik} en de G^{ik}. Volgens (13) is:

$$a_1G_{11}+b_1G_{12}+c_1G_{13} = A_1g_{11}(A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1) + A_2g_{22}(A_2a_1+B_2b_1+C_2c_1) + A_3g_{33}(A_3a_1+B_3b_1+C_3c_1)$$

Letttende op de eerste betrekkingen van elk der stellen (7), (8) en (9) wordt dit

$$a_1G_{11} + b_1G_{12} + c_1G_{13} = A_1g_{11} \qquad (22)$$

Op overeenkomstige wijze leidt men af

$$a_2G_{11} + b_2G_{12} + c_2G_{13} = A_2g_{22} \qquad (23)$$

$$a_3G_{11} + b_3G_{12} + c_3G_{13} = A_3g_{33} \qquad (24)$$

Vermenigvuldig nu (22) met a_1g^{11}, (23) met a_2g^{22}, (24) met a_3g^{33} en tel op. Dan komt er

$$G_{11}(g^{11}a_1a_1 + g^{22}a_2a_2 + g^{33}a_3a_3) + G_{12}(g^{11}a_1b_1 + g^{22}a_2b_2 + g^{33}a_3b_3) + G_{13}(g^{11}a_1c_1 + g^{22}a_2c_2 + g^{33}a_3c_3) = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3,$$

of volgens (10) en de eerste vergelijking van (4)

$$G_{11}G^{11} + G_{12}G^{12} + G_{13}G^{13} = 1 \qquad (25)$$

Nu vermenigvuldigt men (22), (23) en (24) achtereenvolgens met b_1g^{11}, b_2g^{22} en b_3g^{33}. Dan komt er op overeenkomstige wijze als boven

$$G_{11}G^{12} + G_{12}G^{22} + G_{13}G^{23} = 0 \qquad (26)$$

terwijl door vermenigvuldiging van (22), (23) en (24) resp. met c_1g^{11}, c_2g^{22} en c_3g^{33} ontstaat

$$G_{11}G^{13} + G_{12}G^{23} + G_{13}G^{33} = 0 \qquad (27)$$

Uit deze laatste 3 vergelijkingen kunnen G_{11}, G_{12} en G_{13} worden opgelost, als alle G^{ik} gegeven zijn.

Op volkomen analoge wijze kunnen nog twee andere stelsels afgeleid worden. Deze zijn:

$$\left.\begin{aligned} G_{12}G^{11} + G_{22}G^{12} + G_{23}G^{13} &= 0 \\ G_{12}G^{12} + G_{22}G^{22} + G_{23}G^{23} &= 1 \\ G_{12}G^{13} + G_{22}G^{23} + G_{23}G^{33} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

$$\left.\begin{aligned} G_{13}G^{11} + G_{23}G^{12} + G_{33}G^{13} &= 0 \\ G_{13}G^{12} + G_{23}G^{22} + G_{33}G^{23} &= 0 \\ G_{13}G^{13} + G_{23}G^{23} + G_{33}G^{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

(28) en (29) kunnen dienen ter berekening van resp. het stel G_{12}, G_{22}, G_{23} en het stel G_{13}, G_{23}, G_{33} uit de G^{ik}.

De 9 vergelijkingen tussen de G_{ik} en de G^{ik} kunnen ook omgekeerd gebruikt worden. Zo levert de combinatie van (25) met de eerste vergelijking van (28) en de eerste van (29) een stelsel vergelijkingen ter berekening von G^{11}, G^{12} en G^{13}, als de G_{ik} gegeven zijn.

Ter vermijding van schrijfwerk is het van belang, dat de 9 zoeven beschouwde vergelijkingen op een zeer eenvoudige manier geschreven kunnen worden, nl.

$$\sum_{i=1}^{i=3} G_{ik}G^{il} = \delta_k^l \qquad (30)$$

In deze uitdrukking kan voor l zowel als voor k willekeurig één van de indices 1,2 of 3 worden ingesteld, hetgeen inderdaad 9 verschillende mogelijkheden geeft, corresponderend met de eerste leden van de 9 vergelijkingen (25), (26), (27), (28) en (29). δ_k^l wordt het symbool van Kronecker genoemd. Deze grootheid is 1, als l = k en 0 als $l \neq k$.

Een nog eenvoudiger schrijfwijze ontstaat, als men, zoals Einstein in dergelijke gevallen voorstelde te doen, het somteken weglaat en afspreekt, dat in een dergelijke uitdrukking steeds gesommeerd moet worden

als er onder en boven een zelfde index voorkomt. Men schrijft dan in plaats van (30)

$$G_{ik}G^{il} = \delta^l_k \qquad (31)$$

Men moet nu echter weten wat het bereik van de indices is. Men legt dit aan het begin van de berekening vast. De schrijfwijze zelf is steeds het zelfde, hoe groot de rij van rangnummers ook is, die de indices kunnen aannemen.

Resumerende is het volgende verkregen.

Met behulp van de coëfficiënten van de transformatievergelijkingen (2) berekent men volgens (13) de G^{ik} en met (31) uit de G^{ik} de G_{ik}. Omdat volgens (15), (16) en (17)

$$\cos \gamma_{ik} = \frac{G_{ik}}{\sqrt{G_{ii}}\sqrt{G_{kk}}}$$

$$\cos \gamma_{ik} = \frac{G^{ik}}{\sqrt{G^{ii}}\sqrt{G^{kk}}}$$

zijn hiermee de hoeken tussen de nieuwe coördinaatassen en die tussen de nieuwe coördinaatvlakken bekend. Verder waren $\sqrt{G_{11}}$, $\sqrt{G_{22}}$, $\sqrt{G_{33}}$ de maateenheden op de assen. Alle gegevens omtrent het nieuwe stelsel der X_i zijn derhalve aanwezig. Uit (12) volgt nog, dat de vergelijking van een bol uit het stelsel der concentrische bollen op het nieuwe stelsel moet luiden

$$G_{11}X_1X_1 + G_{22}X_2X_2 + G_{33}X_3X_3 + 2\,G_{23}X_2X_3 + 2\,G_{31}X_3X_1 + 2\,G_{12}X_1X_2 = r^2 \qquad (32)$$

waarin r de straal van de bol is.

De grootheden G^{11}, G^{22} en G^{33} hebben nog de volgende betekenis. Volgens (18) was

$$G^{11} = g^{11}a_1a_1 + g^{22}a_2a_2 + g^{33}a_3a_3$$

of in verband met de definitie op blz.40 van de g^{ii}

$$G^{11}\mu\mu = a_1a_1\mu_1\mu_1 + a_2a_2\mu_2\mu_2 + a_3a_3\mu_3\mu_3.$$

Let men op de eerste der vergelijkingen (2), dan blijkt, dat de uitdrukking in het tweede lid volgens de bijzondere voortplantingswet van de moduli het kwadraat van de modulus van X_1 is. Noemt men de moduli van X_1, X_2 en X_3 resp. M_1, M_2 en M_3, dan is:

$$\mu\mu G^{11} = M_1^2 \;;\; \mu\mu G^{22} = M_2^2 \;;\; \mu\mu G^{33} = M_3^2$$

Deze G^{ii} zijn dus evenredig met de kwadraten van de modu - [illegible] van de 3 nieuwe veranderlijken.

De grootheden G^{23}, G^{31} en G^{12} bepalen de hoeken van de nieuwe coördinaatvlakken. Zijn ze alle drie nul, dan is het nieuwe stelsel recht-

hoekig. Uit (25) tot en met (29) volgt, dat in dit geval

$$G_{23} = G_{31} = G_{12} = 0$$

en

$$G_{11} = \frac{1}{G^{11}} \; ; \; G_{22} = \frac{1}{G^{22}} \; ; \; G_{33} = \frac{1}{G^{33}}$$

In dit geval spelen de grootheden G_{ii} en G^{ii} ten aanzien van de nieuwe veranderlijken geheel dezelfde rol als de g_{ii} en g^{ii} ten aanzien van de oude. De nieuwe veranderlijken zijn nu ook correlatievrij.

Belangrijker voor de ontwikkeling van de theorie is het echter, wanneer het nieuwe stelsel niet rechthoekig is ; hierop zal in de volgende paragraaf nader worden ingegaan.

Opmerking.

In de uitdrukking (31)

$$G_{ik}G^{il} = \delta^l_k \qquad \begin{matrix} (\delta^l_k = 1 \text{ als } l = k) \\ (\delta^l_k = 0 \text{ als } l \neq k) \end{matrix}$$

treden drie indices op. Zij lopen allen in het beschouwde geval van 1 tot 3 en hebben overigens een gelijke taak. Dergelijke indices noemt men gelijksoortig. Voor een bepaald soort index reserveert men een aantal letters, waaruit men naar willekeur kiest.

Een index bepaalt door de plaats, die hij inneemt, de structuur van een uitdrukking. Het is duidelijk, dat b.v. de beide uitdrukkingen

$$G_{ik}G^{il} \quad \text{en} \quad G_{kl}G^{ki}$$

identiek zijn, wanneer i, k en l gelijksoortige indices voorstellen.

4.2. De gecorreleteerde drie- dimensionale verdeling.

Thans zal de frequentieverdeling van de drie nieuwe veranderlijken X_1, X_2 en X_3 worden afgeleid uit die van x_1, x_2 en x_3, waarbij op de meetkundige gedachtengang van de vorige paragraaf zal worden voortgebouwd.

Op elk der drie assen X_1, X_2 en X_3, die in het algemeen een scheefhoekig stelsel vormen, brengt men een intervalverdeling aan, waarbij de grootte van het interval voor elke as in principe willekeurig is. Men denke zich dit voor het gemak van dezelfde orde van grootte als de intervallen bij de oorspronkelijke veranderlijken x_1, x_2 en x_3. Door de deelpunten van de aangenomen intervalverdelingen worden vlakken gebracht evenwijdig aan de coördinaatvlakken van het nieuwe stelsel. Er ontstaat dan een indeling van de ruimte in scheefhoekige parallelopipeda. Voor ieder dezer parallelopipeda wordt de frequentie berekend, hetgeen geschiedt in analogie met de handelwijze in § 3.3.,

die daar voor de twee- dimensionale verdeling wordt toegepast. Men gaat na uit welke delen van parallelopipeda van de oude verdeling x_1, x_2 en x_3 een parallelopipedum van de nieuwe verdeling X_1, X_2, X_3 bestaat. Van elk dezer delen wordt de inhoud berekend. Valt nu, naar inhouden gerekend, de helft van een " oud " parallelopipedum in een " nieuw ", dan wordt de helft van de frequentie van het oude parallelopipedum als bijdrage tot de frequentie van het nieuwe gebracht. Naar verhouding dus van de inhouden van de delen, waarin de vlakken van de nieuwe verdeling een parallelopipedum van de oude verdeling verdelen, wordt de frequentie van een oud parallelopipedum over de nieuwe parallelopipeda, die daarvoor in aanmerking komen, verdeeld. (In plaats van met de frequentie kan men ook werken met de relatieve frequentie).

Op bovenstaande manier is de drie- dimensionale verdeling van X_1, X_2 en X_3 verkregen. Een bol uit het stelsel concentrische bollen, die bij de verdeling x_1, x_2 en x_3 de meetkundige plaats was van punten met gelijke (relatieve) frequentie, vervult dezelfde rol voor de nieuwe verdeling X_1, X_2 en X_3. Het stelsel der concentrische bollen blijft door de overgang naar de nieuwe veranderlijken onaangetast. De nieuwe verdeling is dus gekarakteriseerd door de eigenschap, dat <u>indien zij wordt voorgesteld op een geschikt scheefhoekig assensysteem de meetkundige plaatsen van punten met gelijke frequenties of relatieve frequenties een stelsel van concentrische bollen vormen.</u> De vergelijking van een dergelijke bol met straal r op het stelsel X_1, X_2, X_3 was (zie 4.1. vergelijking 32)

$$G_{11}X_1X_1 + G_{22}X_2X_2 + G_{33}X_3X_3 + 2\,G_{23}X_2X_3 + 2\,G_{31}X_3X_1 + 2\,G_{12}X_1X_2 = r^2 \quad (1)$$

Wanneer men echter met een willekeurige drie- dimensionale verdeling te maken krijgt, waarvan nagegaan moet worden of deze tot de soort verdelingen behoort van de zoeven afgeleide verdeling X_1, X_2, X_3, zal men moeten weten hoe de kenmerken van zulk een verdeling zijn, wanneer die op een rechthoekig assenstelsel wordt voorgesteld. Immers ook de te onderzoeken verdeling zal men zich in eerste aanleg op een rechthoekig stelsel denken.

Het is dus zaak, de verdeling X_1, X_2, X_3 op een rechthoekig stelsel met willekeurige maateenheden op de assen voor te stellen. Deze overgang naar het rechthoekig stelsel zal in twee stappen worden uitgevoerd; de eerste stap zal zijn de overgang naar een rechthoekig stelsel met behoud van de maateenheden van het scheefhoekige ; bij de tweede stap zullen de maateenheden worden veranderd.

In de figuren 4.2.-1 en 4.2.-2 is de uitvoering van de eerste stap nader toegelicht. Aangezien de maateenheden gelijk blijven, blijven de segmenten op de assen, die in engere zin de coördinaten zijn van een punt P, gelijk. Aan de vergelijking (1) verandert door de overgang

niets. Op het nieuwe systeem geïnterpreteerd, is (1) de vergelijking van het oppervlak, dat door de uitgevoerde transformatie uit de bol is ontstaan. Dit oppervlak is een kwadratisch oppervlak en meer speciaal een ellipsoïde, zoals uit de aard van de transformatie voortvloeit. (De ellipsoïde snijdt gelijke stukken van de coördinaatassen af, omdat de bol dit deed en stukken op de assen bij de transformatie gelijk blijven).

Wij kunnen het bovenstaande als volgt toelichten. In figuur 4.2.-1 zijn de coördinaten in engere zin $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ en $\bar{\xi}_3$ genoemd. Omdat de maateenheden op de assen $\sqrt{G_{ii}}$ waren, is

$$\bar{\xi}_i = X_i \sqrt{G_{ii}}$$

De vergelijking (1) van een bol wordt in de coördinaten $\bar{\xi}_i$ geschreven

$$\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2 + 2\cos\gamma_{23}\,\bar{\xi}_2\,\bar{\xi}_3 + 2\cos\gamma_{31}\,\bar{\xi}_3\,\bar{\xi}_1 + 2\cos\gamma_{12}\,\bar{\xi}_1\,\bar{\xi}_2 = r^2 \qquad (2)$$

De transformatieformules naar het rechthoekige systeem η_i zijn

$$\bar{\xi}_1 = \eta_1 \; ; \quad \bar{\xi}_2 = \eta_2 \; ; \quad \bar{\xi}_3 = \eta_3$$

Dus de vergelijking (2) wordt

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\cos\gamma_{23}\,\eta_2\,\eta_3 + 2\cos\gamma_{31}\,\eta_3\,\eta_1 + 2\cos\gamma_{12}\,\eta_1\,\eta_2 = r^2 \qquad (3)$$

deze stelt nu een ellipsoïde voor, omdat nu niet meer γ_{12} etc. de hoeken van de assen zijn. Wel snijdt de ellipsoïde gelijke stukken van de assen af, want als men in (3) $\eta_2 = \eta_3 = 0$ stelt, wordt

$$\eta_1 = \pm r$$

en dit zijn de stukken, die de ellipsoïde van de η_1 - as afsnijdt. Tot dezelfde uitkomst raakt men voor de stukken van de andere assen. Geschreven in de grootheden X_i ontstaat uit (3) weer (1) als men in (3) stelt

$$\eta_i = X_i \sqrt{G_{ii}}$$

Nu voeren we nieuwe maateenheden $\sqrt{H_{ii}}$ in. De nieuwe coördinaten in engere zin noemen we ξ_i (zie figuur 4.2.-3).

Nu hebben we

$$\xi_i = X_i \sqrt{H_{ii}}$$

We hadden

$$\eta_i = X_i \sqrt{G_{ii}}$$

dus:

$$\eta_i : \zeta_i = \sqrt{G_{ii}} : \sqrt{H_{ii}}$$

Uitgaande van (3) wordt nu de vergelijking in het nieuwe stelsel

$$\frac{G_{11}}{H_{11}}\zeta_1^2 + \frac{G_{22}}{H_{22}}\zeta_2^2 + \frac{G_{33}}{H_{33}}\zeta_3^2 + 2\frac{\sqrt{G_{22}}\sqrt{G_{33}}}{\sqrt{H_{22}}\sqrt{H_{33}}}\cos\gamma_{23}\zeta_2\zeta_3 + \ldots = r^2$$

Gaan we nu weer terug naar de schrijfwijze in de grootheden X_i, dan ontstaat, als we er weer op letten, dat

$$\cos\gamma_{ik} = \frac{G_{ik}}{\sqrt{G_{ii}}\sqrt{G_{kk}}}$$

opnieuw de vergelijking (1). Op het stelsel ζ_i stelt deze nu wel weer een ellipsoide voor, maar deze snijdt niet meer gelijke stukken van de assen af. Deze worden nl.

$$t_1 = \pm r\frac{\sqrt{H_{11}}}{\sqrt{G_{11}}}; \quad t_2 = \pm r\frac{\sqrt{H_{22}}}{\sqrt{G_{22}}}; \quad t_3 = \pm r\frac{\sqrt{H_{33}}}{\sqrt{G_{33}}} \qquad (4)$$

Als we dus één van de ellipsoiden geconstrueerd denken op het systeem ζ_i met de willekeurig aangenomen maateenheden $\sqrt{H_{ii}}$ kunnen we de verhouding van de maateenheden $\sqrt{G_{ii}}$ berekenen volgens (4), want we hebben:

$$\sqrt{G_{11}} : \frac{\sqrt{H_{11}}}{t_1} = \sqrt{G_{22}} : \frac{\sqrt{H_{22}}}{t_2} = \sqrt{G_{33}} : \frac{\sqrt{H_{33}}}{t_3}$$

We behoeven dus slechts de stukken t_1, t_2 en t_3 op te meten (in cm b.v.), waarna de verhoudingen der G_{ii} bekend zijn.

Beschouwen wij thans de gebonden verdelingen van X_1 en vatten wij tevens één der ellipsoiden in het oog. Deze snijdt op twee plaatsen de serie cellen van een derdelijke gebonden verdeling, nl. daar, waar de frequentie het bedrag vertoont, waarvoor de ellipsoide de meetkundige plaats in kwestie voorstelt. Het vakje met de hoogste frequentie in de gebonden verdeling moet midden tussen beide eerder genoemde vakjes liggen. Denken wij voor elke gebonden verdeling van X_1 deze cellen opgezocht, dan kunnen we gemakkelijk aantonen, dat deze cellen, althans hun middelpunt, alle in een plat vlak liggen. Immers de meetkundige plaats van de middens van evenwijdige koorden van een ellipsoide is een plat vlak, het vlak, dat toegevoegd is t.o.v. in dit geval de richting van de X_1-as. De vergelijking van dit vlak in het stelsel ζ_1, ζ_2, ζ_3 is:

$$\frac{G_{11}}{H_{11}}\zeta_1 + \frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{H_{11}}}\cdot\frac{\sqrt{G_{22}}}{\sqrt{H_{22}}}\cos\gamma_{12}\zeta_2 + \frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{H_{11}}}\cdot\frac{\sqrt{G_{33}}}{\sqrt{H_{33}}}\cos\gamma_{13}\zeta_3 = 0$$

of

$$\frac{G_{11}}{\sqrt{H_{11}}}\xi_1 + \frac{G_{12}}{\sqrt{H_{22}}}\xi_2 + \frac{G_{13}}{\sqrt{H_{33}}}\xi_3 = 0 \qquad (5)$$

Wij kunnen nu in de drie- dimensionale verdeling van X_1, X_2 en X_3 zo goed mogelijk een plat vlak brengen door de middens van de cellen met de hoogste frequentie in de gebonden verdelingen van X_1. Bekend zijn dan de verhoudingen der coëfficiënten in (5), dus ook die van G_{11}, G_{12} en G_{13}.

Het vlak, voorgesteld door (5), is een regressievlak. Er zijn n nog twee andere, nl. die voor X_2 en X_3. De betekenis van de regressievlakken is, dat zij betrekkelijk eenvoudig te construeren zijn en dus een middel bieden, aan de verdeling de nodige grootheden te ontlenen. De beide andere regressievlakken bepalen eveneens elk twee verhoudingen van drie coëfficiënten; de G_{12}, G_{23} en G_{31} komen elk twee maal voor.

Laat men r varieren en beschouwt men dus het stelsel bollen van het scheefhoekige assensysteem, dan ontstaat daaruit een stelsel ellipsoiden, waarvan de assen samenvallen.

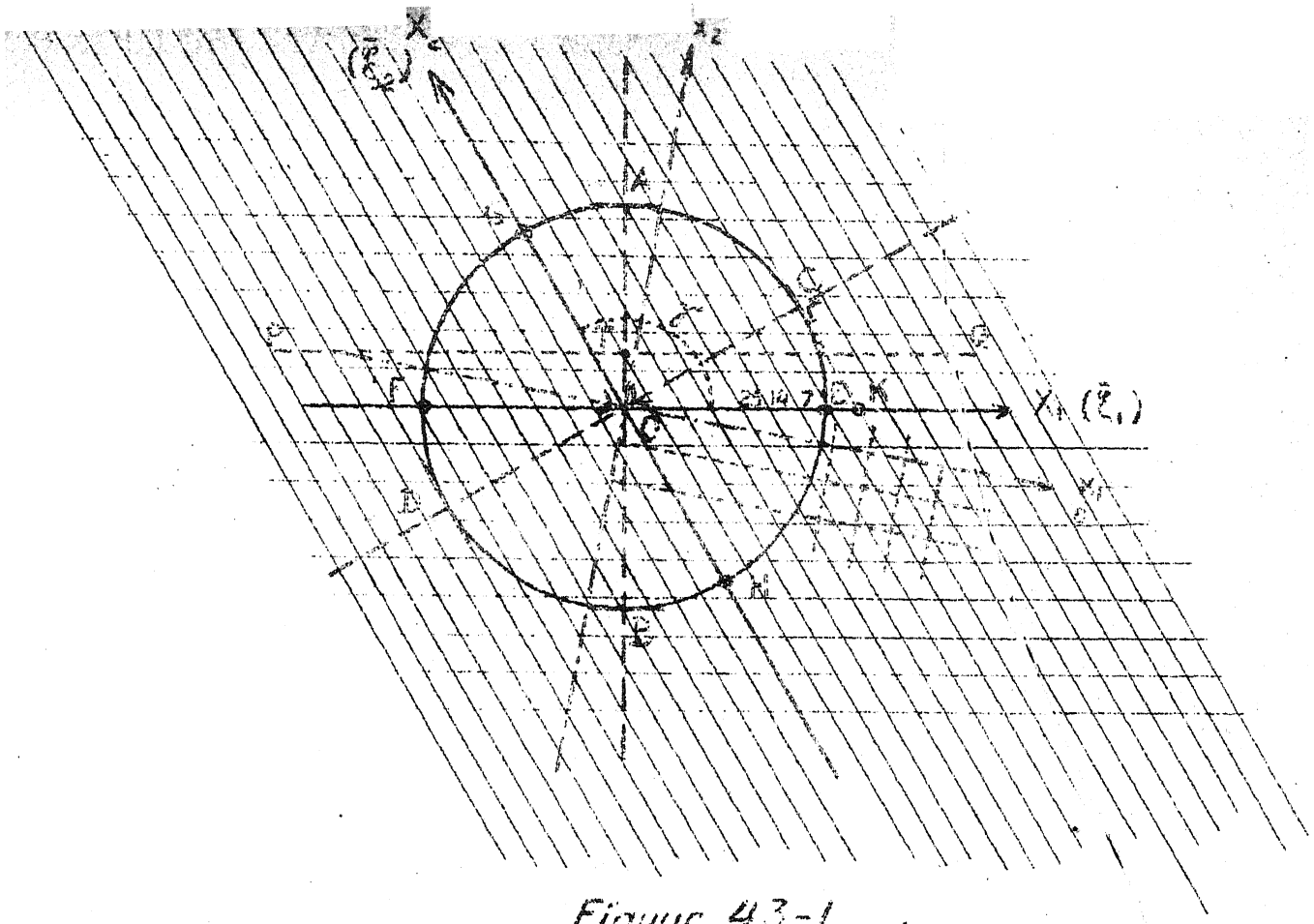
Opmerking.

Het eerste lid van (1) is een definiet positieve kwadratische vorm. (Dit betekent, dat voor alle waardestellen van de veranderlijken de waarde van de vorm steeds >0 is). Deze bewering is juist, omdat het eerste lid van (1) gelijk is aan r^2 en dus steeds positief moet zijn.

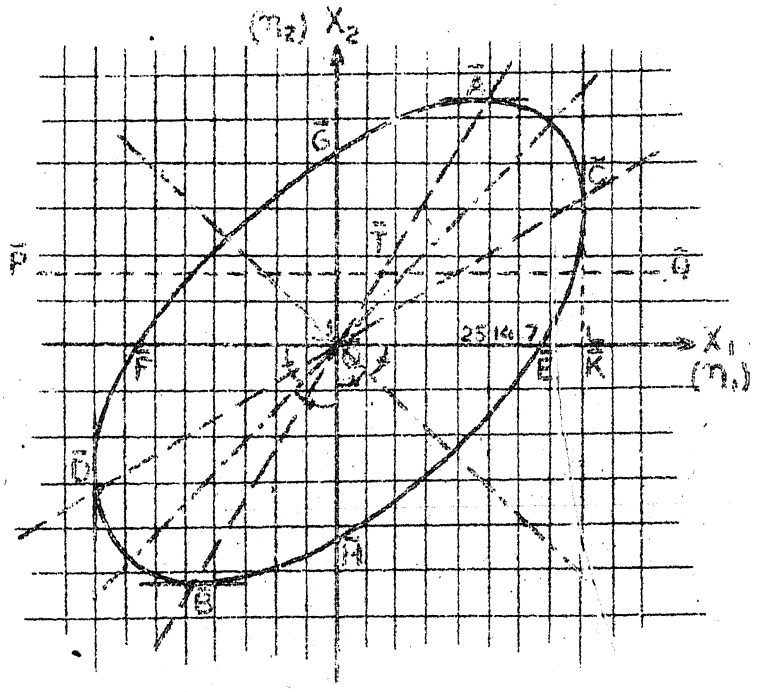
4.3. Vervolg.

De aard van de verdeling zal aan de hand van het twee- dimensionale geval thans nader worden toegelicht.

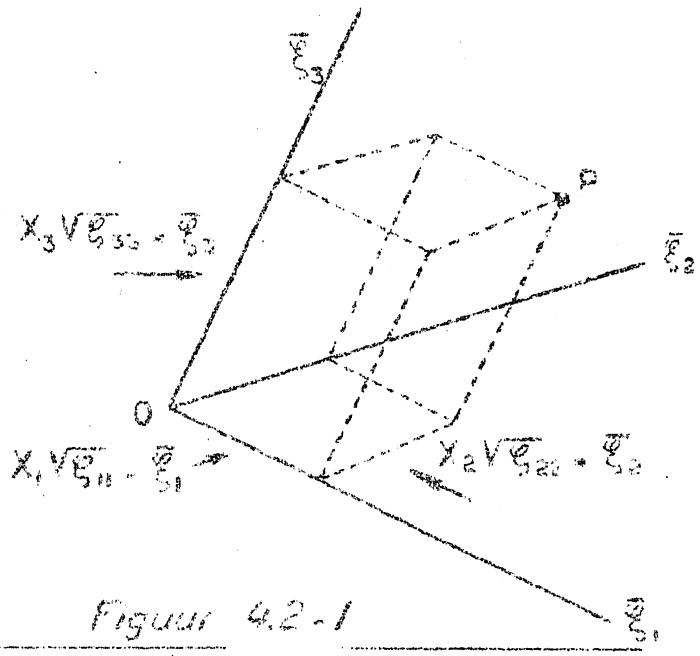
De figuren 4.3.-1, 4.3.-2 en 4.3.-3 geven drie voorstellingen van dezelfde twee- dimensionale verdeling. In overeenkomstige vakjes van de drie figuren denke men zich de frequenties ingeschreven ; voor drie vakjes is dit aangegeven. In figuur 4.3.-1 is een scheefhoekig assenstelsel gebruikt, waarvan de hoek van de assen en de beide maateenheden



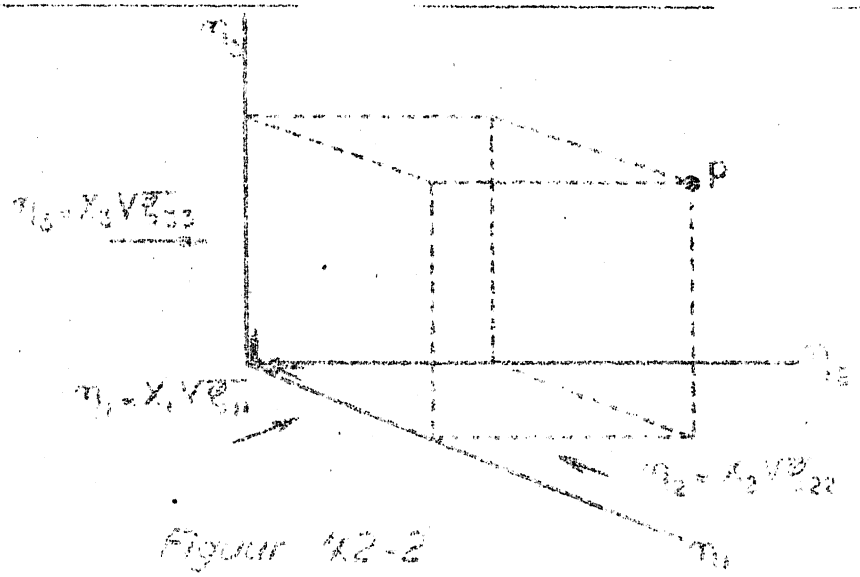
Figuur 43-1



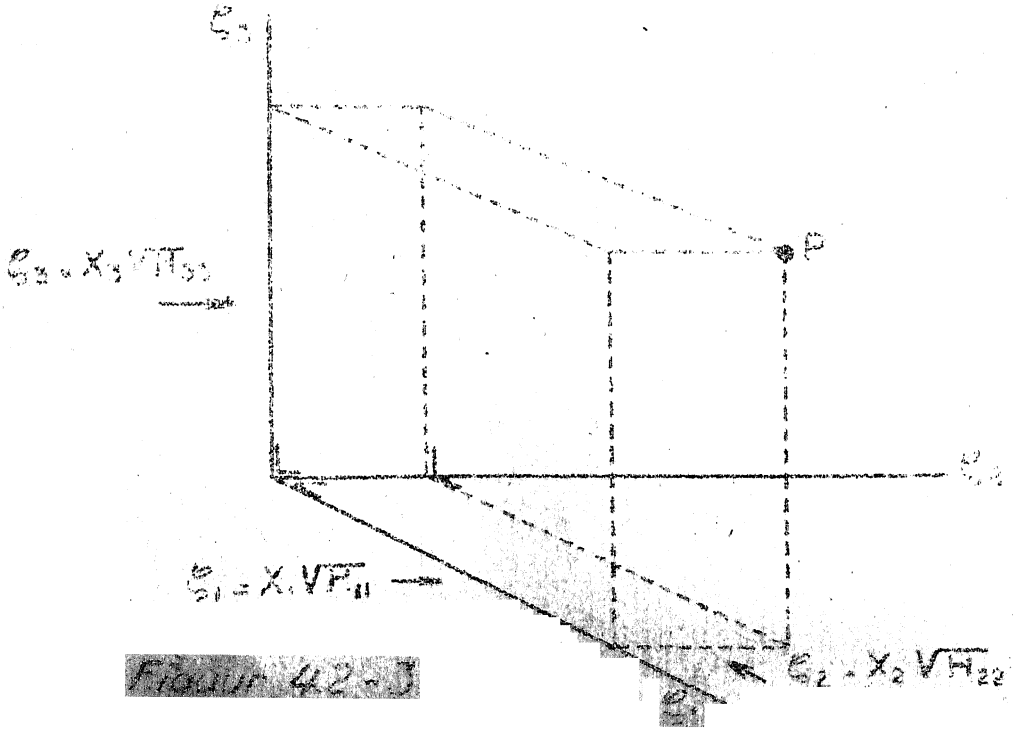
Figuur 43-2



Figuur 4.2-1



Figuur 4.2-2



Figuur 4.2-3

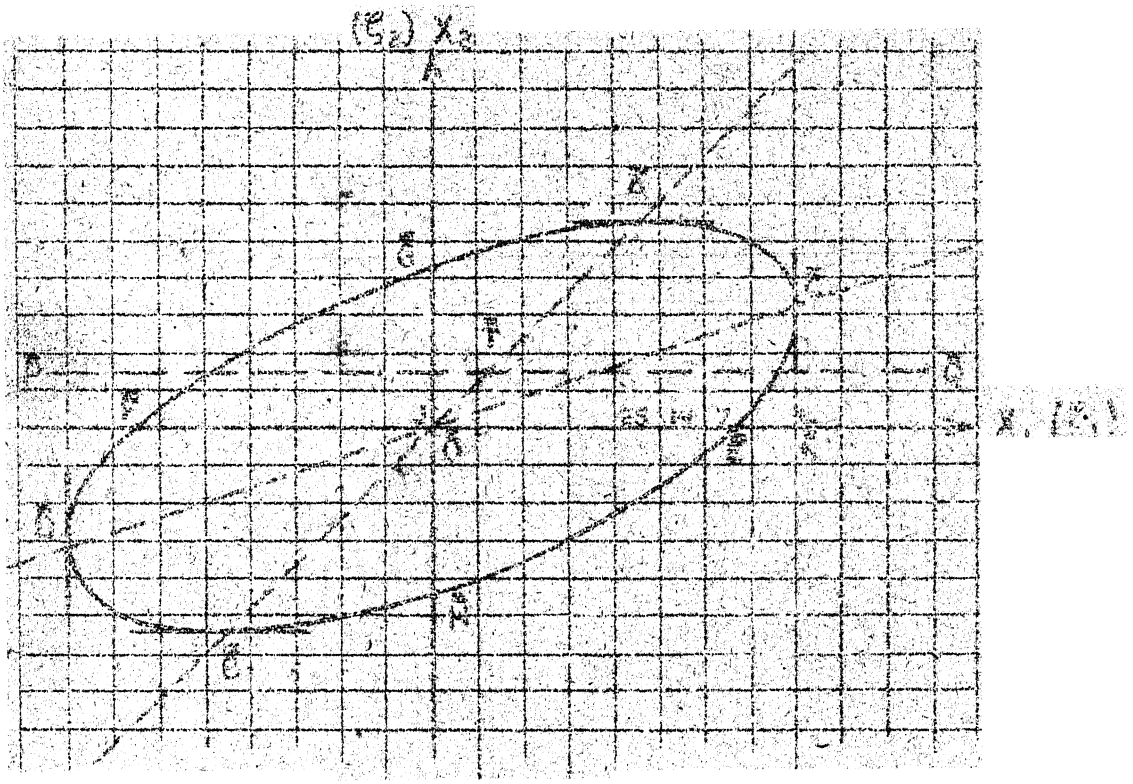


Figure 4.5-3

zo gekozen zijn, dat punten met gelijke frequenties op cirkels liggen. In figuur 4.3.-2 zijn dezelfde maateenheden gebruikt als in figuur 4.3.-1, doch de assen zijn rechthoekig. In figuur 4.3.-3 zijn de maateenheden veranderd. De overgang van figuur 4.3.-1 naar figuur 4.3.-3 via figuur 4.3.-2 is in overeenstemming met de gedachtengang, die in de vorige paragraaf ontwikkeld is aan de hand van een drie- dimensionale verdeling. Men vindt dus die redenering hier met figuren toegelicht. In analogie met de ontstaanswijze van de in de vorige paragrafen behandelde drie- dimensionale verdeling denke men zich de verdeling X_1, X_2 ontstaan door transformatie der veranderlijken uit een correlatievrije verdeling x_1, x_2. Het stelsel dezer laatste veranderlijken is in figuur 4.3.-1 aangegeven. Terwille van het gemakkelijke inzicht denke men zich in figuur 4.3.-1 op de rechthoekige vakjes van de verdeling x_1 en x_2 als grondvlak de prismatische zuiltjes opgericht, waarvan de inhoud gelijk is aan de relatieve frequentie van het vakje. Aangenomen is, dat de maateenheden op de assen x_1 en x_2 zo gekozen zijn, dat punten met gelijke (relatieve) frequentie op een cirkel liggen, hetgeen betekent, dat de ruimtelijke figuur, bestaande uit alle zuiltjes samen, een omwentelingslichaam is, waarvan de as in O loodrecht op het vlak van de tekening staat.

Beschouwen wij thans gebonden verdelingen van X_1. Een dergelijke verdeling wordt gevormd door de frequenties van de vakjes, liggende in een rij, evenwijdig met de X_1 - as ; in figuur 4.3.-1 geeft PQ schematisch zo'n rij aan. De prismatische zuiltjes, die bij deze rij behoren, vormen tezamen een platte schijf van het omwentelingslichaam. Om derhalve alle gebonden verdelingen van X_1 te verkrijgen, moet men het omwentelingslichaam in prismatische zuiltjes met congruente grondvlakken verdelen, waarvan één der verticale begrenzingen evenwijdig aan de X_1- as loopt en deze zuiltjes groeperen volgens platte schijven, evenwijdig aan de X_1- as. Uit het feit, dat het hier een omwentelingslichaam betreft, volgt onmiddellijk, dat de richting, waarin de verdeling in schijven geschiedt, onverschillig is, mits de dikte van de schijven onveranderd blijft. Meer speciaal zal dus elke verdeling in schijven, die men aan kan brengen, tot eenzelfde resultaat voeren als die, waarvan de richting van de doorsnijding evenwijdig is met de x_1 - as. Men verkrijgt dan echter de gebonden verdelingen van x_1. Nu volgt uit de definitie van de correlatievrije verdeling, dat al deze gebonden verdelingen van x_1 eenzelfde modulus hebben. Dit moet dus ook het geval zijn voor de gebonden verdelingen van X_1.

De hoogste frequentie van de gebonden verdeling PQ ligt in T, het voetpunt van de loodlijn uit O op PQ neergelaten; immers voor dit punt van de lijn PQ heeft de cirkel van de concentrische bundel, die er door heen gaat, de kleinste straal en met een kleinere straal correspondeert

een grotere frequentie. De toppen van alle gebonden verdelingen van X_1 liggen dus op de rechte AB, die in O loodrecht staat op OX_1. In de figuren 4.3.-2 en 4.3.-3 wordt AB opvolgend $\overline{AB}$ en $\overline{\overline{AB}}$. Uit het meetkundige verband van de figuren onderling blijkt gemakkelijk, dat $\overline{\overline{AB}}$ de toegevoegde richting is van de richting $\overline{O}X_1$, ten opzichte van een exemplaar van de bundel ellipsen. Opgemerkt wordt nog, dat de assen van een ellips in figuur 4.3.-2 de hoeken van de coördinaatassen middendoor delen. Men kan dit gemakkelijk uit het meetkundige verband van de figuren afleiden.

Vergeleken met de ongecorreleerde verdeling bestaat het afwijkende karakter van de nieuwe verdeling hierin, dat de maximum-frequenties van de gebonden verdelingen van X_1 gelegen zijn op een rechte, die niet samenvalt met de X_2- as. Men ziet bij beschouwing van de gebonden verdelingen van X_1, dat bij stijgende X_2 ook X_1 de neiging heeft, groter te worden. Het is alsof bij toenemende X_2 de gebonden verdelingen van X_1 tekens in horizontale richting naar rechts verschuiven: de verdeling X_1, X_2 vertoont een vorm van <u>correlatie</u>, de kenmerken X_1 en X_2 beinvloeden elkaar. Men kan niet zeggen, dat bij een grotere X_2 ook een grotere X_1 <u>moet</u> behoren, maar er is in dat geval bij X_1 een neiging tot stijgen aanwezig.

De correlatie, die hier optreedt, noemt men <u>lineaire</u> correlatie en wel omdat de maximum-frequenties in de gebonden verdelingen van X_1 op een <u>rechte</u> lijn gelegen zijn. Een meer ingewikkelde vorm van correlatie zou zijn die, waarbij genoemde maxima op een kromme zouden liggen. De rechte $\overline{\overline{AB}}$ wordt <u>regressielijn</u> genoemd.

Over de gebonden verdelingen van X_2 kunnen overeenkomstige beschouwingen als over die van X_1 gehouden worden. Men komt dan tot een tweede regressielijn $\overline{\overline{CD}}$, die de toegevoegde richting van de X_2- as is ten opzichte van een exemplaar van de bundel ellipsen.

In het beschouwde geval noemt men de correlatie <u>positief</u>, omdat bij stijging van de ene veranderlijke de andere neiging vertoont, eveneens te stijgen. De lange as van de ellipsen ligt nu in het eerste en het derde kwadrant. Men spreekt van <u>negatieve</u> correlatie als de lange as van de ellipsen in het tweede en vierde kwadrant ligt. In dat geval zal bij toenemen van de ene veranderlijke de andere geneigd zijn, te dalen. Bij positieve correlatie is de hoek van de coördinaatassen in figuur 4.3.-1 stomp en bij negatieve scherp. Tussen beide gevallen staat het geval van correlatievrijheid, de hoek van de assen X_1, X_2 in figuur 4.3.-1 zou dan recht moeten zijn.

Als maat voor de correlatie neemt men de cosinus van de hoek γ_{12} tussen de assen X_1 en X_2 van figuur 4.3-1; $\cos\gamma_{12}$ noemt men de <u>correlatiecoëfficiënt</u>.

Volgens (17) van § 4.1. is:

$$\cos\gamma_{12} = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}}\sqrt{G_{22}}} \qquad (1)$$

Voor cos γ_{12} kan men ook een uitdrukking afleiden in de G^{ik}. Hiertoe gaat men uit van de formules (30) van § 4.1., die het verband aangeven tussen G_{ik} en G^{ik}. Deze worden voor het geval van twee dimensies:

$$\left.\begin{aligned} G_{11}G^{11} + G_{12}G^{12} &= 1 \qquad G_{12}G^{11} + G_{22}G^{12} = 0 \\ G_{11}G^{12} + G_{12}G^{22} &= 0 \qquad G_{12}G^{12} + G_{22}G^{22} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Hieruit kan men gemakkelijk de G^{ik} oplossen. Stelt men deze waarden in (1) in, dan vindt men

$$\cos\gamma_{12} = \frac{-G^{12}}{\sqrt{G^{11}}\sqrt{G^{22}}} \qquad (3)$$

Aan de hand van (3) kan men nagaan wat er gebeurt als cos γ_{12} gelijk wordt aan $\pm$ 1. Men moet dan hebben:

$$G^{11}.G^{22} = G^{12}.G^{12} \qquad (4)$$

Om hieruit conclusies te trekken, moet men, evenals bij het behandelde drie- dimensionale geval van § 4.1., ook hier de verdeling van X_1, X_2 ontstaan denken uit een correlatievrije verdeling van twee andere veranderlijken. In analogie met (2) van § 4.1. kan men hier stellen:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 \\ X_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

volgens de formules (18) van § 4.1. is dan:

$$\left.\begin{aligned} G^{11} &= g^{11}a_1a_1 + g^{22}a_2a_2 \\ G^{12} &= g^{11}a_1b_1 + g^{22}a_2b_2 \\ G^{22} &= g^{11}b_1b_1 + g^{22}b_2b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Worden deze resultaten ingesteld in (4), dan verkrijgt men:

$$(g^{11}a_1a_1 + g^{22}a_2a_2)(g^{11}b_1b_1 + g^{22}b_2b_2) = (g^{11}a_1b_1 + g^{22}a_2b_2)^2$$

waaruit na uitwerking volgt

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0$$

Dit betekent, dat men moet hebben

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

of

$$a_1 = pb_1 , \quad a_2 = pb_2 \quad (p \text{ is een gelijkvormigheidsfactor })$$

waarna uit (5) blijkt, dat nu ook

$$X_1 = p\,X_2$$

Voor cos $\gamma_{12} = \pm$ 1 zijn dus de veranderlijken X_1 en X_2 lineair af-

hankelijk. Was het ene grensgeval van de correlatie de correlatievrijheid ($\cos \gamma_{12} = 0$), het andere is blijkens bovenstaand onderzoek de lineaire afhankelijkheid. De gebondenheid van X_1 en X_2 is dan maximaal: is de ene bekend, dan volgt daaruit onomstotelijk de andere.

Men merke op, dat ook bij het bestaan van lineaire afhankelijkheid de grootheden G^{ik} hun betekenis behouden. De grootheden G_{ik} kunnen nu echter niet uit de G^{ik} berekend worden, omdat blijkens (4) beide stellen (2) afhankelijk worden. Vandaar dat het nodig was, bij de laatste beschouwingen uit te gaan van (3).

Wat betreft de bepaling van de grootheden G_{ik} kan men hier weer te werk gaan op de wijze, als besproken bij de drie- dimensionale verdeling. Op de assensystemen van de figuren 4.3.-1, 4.3.-2 en 4.3.-3 is de vergelijking van één der ellipsen achtereenvolgens:

$$\bar{\xi}_1^2 + 2 \cos \gamma_{12} \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_2^2 = r^2$$

$$\eta_1^2 + 2 \cos \gamma_{12} \eta_1 \eta_2 + \eta_2^2 = r^2$$

$$\frac{G_{11}}{H_{11}} \zeta_1^2 + 2 \frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{H_{11}}} \cdot \frac{\sqrt{G_{22}}}{\sqrt{H_{22}}} \cos \gamma_{12} + \frac{G_{22}}{H_{22}} \zeta_2^2 = r^2 \qquad (7)$$

terwijl in de coördinaten X_1 en X_2 in alle drie de stelsels de vergelijking

$$G_{11}X_1X_1 + 2\, G_{12}X_1X_2 + G_{22}X_2X_2 = r^2$$

luidt.

De maateenheden in de laatste figuur zijn $\sqrt{H_{11}}$ en $\sqrt{H_{22}}$.
Uit (7) volgt voor de stukken, die de ellips van de assen afsnijdt in figuur 4.3.-3:

$$t_1 = \pm r \frac{\sqrt{H_{11}}}{\sqrt{G_{11}}} \quad ; \qquad t_2 = \pm r \frac{\sqrt{H_{22}}}{\sqrt{G_{22}}}$$

Hieruit is de verhouding van G_{11} en G_{22} te vinden. Verder zijn de vergelijkingen van de regressielijnen als toegevoegde richtingen van de assen ζ_1 en ζ_2 weer volgens (7)

$$\frac{G_{11}}{\sqrt{H_{11}}} \zeta_1 + \frac{G_{12}}{\sqrt{H_{22}}} \zeta_2 = 0 \qquad (8)$$

en

$$\frac{G_{12}}{\sqrt{H_{11}}} \zeta_1 + \frac{G_{22}}{\sqrt{H_{22}}} \zeta_2 = 0 \qquad (9)$$

Worden dus deze lijnen in het tableau getrokken en noemen wij de hoek, die de eerste lijn met de ζ_1- as maakt φ_1, dan leert (8), dat

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{G_{11}}{\sqrt{H_{11}}} : \frac{G_{12}}{\sqrt{H_{22}}} \qquad (10)$$

Meet men dus $tg\varphi_1$ op, dan geeft (10) de mogelijkheid om G_{12} te vinden. Uit (9) kan men op soortgelijke manier een waarde voor G_{12} afleiden. Komen beide uitkomsten voldoende bij elkaar, dan kan men dit beschouwen als een aanwijzing, dat de verdeling normaal is.

Ten slotte wordt in figuur 4.3.-4 een twee- dimensionale verdeling gegeven met correlatie, waarop bovenstaande theorie kan worden toegepast. In figuur 4.3.-5 is deze verdeling voorgesteld op een rechthoekig tableau, met inachtneming van de juiste verhouding der maateenheden en in figuur 4.3.-6 op een scheefhoekig tableau, waarbij de meetkundige plaatsen tot cirkels geworden zijn.

4,4. Generalisatie tot de n- dimensionale verdeling.

Thans moeten de verkregen resultaten uitgebreid worden tot de n- dimensionale verdeling. Men zal een gedachtengang moeten volgen analoog aan die van § 4.1. Het is echter niet nodig, de afleiding volledig te doen. Verschillende resultaten kunnen onmiddellijk als generalisatie van de in § 4.1. verkregen uitkomsten verkregen worden. Thans moeten wij uitgaan van n één- dimensionale verdelingen van n grootheden x, die nu, om een overzichtelijke notatie te krijgen, aangeduid zullen worden met een bovenindex. Voor de index zullen gebruikt worden de letters i,k,l,m, die dus lopen van 1 tot n. Indices, die dezelfde rij rangnummers doorlopen, noemen we gelijksoortig. Bij elke x^i behoort een reeks. De moduli dezer reeksen zijn:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots, \mu_n$$

Ingevoerd worden de grootheden g^{ii}, evenredig met $\mu_i\,\mu_i$:

$$\mu^2 g^{ii} = \mu_i\,\mu_i$$

waarin μ^2 een constante is.

Uit de verdelingen van de x^i wordt een n- dimensionale correlatievrije verdeling geconstrueerd door toepassing van de vermenigvuldigingsregel. Men denkt zich deze verdeling voorgesteld op een n- dimensionaal rechthoekig assenstelsel. De oorsprong ligt in het centrum van de verdeling, de maateenheden op de assen zijn $\sqrt{g_{ii}}$. Voor deze g_{ii} geldt:

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}$$

De $\sqrt{g_{ii}}$ zijn dus omgekeerd evenredig met de moduli μ_i. De punten met gelijke frequenties vormen een stelsel concentrische hypersferen:

$$g_{11}x^1x^1 + g_{22}x^2x^2 + \ldots\ldots + g_{nn}x^nx^n = r^2 \qquad (1)$$

(Vergelijk § 4.1.(1))

Er worden nu n nieuwe grootheden X^i ingevoerd, die bepaald zijn door:

$$X^1 = e^1_1 x^1 + e^1_2 x^2 + \ldots\ldots + e^1_n x^n = e^1_i x^i$$
$$X^2 = e^2_1 x^1 + e^2_2 x^2 + \ldots\ldots + e^2_n x^n = e^2_i x^i$$
$$\vdots$$
$$X^n = e^n_1 x^1 + e^n_2 x^2 + \ldots\ldots + e^n_n x^n = e^n_i x^i$$

Het laatste lid in elk der bovenstaande vergelijkingen is de afgekorte schrijfwijze voor het tweede lid; de afspraak is, zoals bekend, dat wanneer boven en onder een gelijke index voorkomt over deze index gesommeerd moet worden. Alle vergelijkingen kan men samenvatten tot:

$$X^k = e^k_i x^i \qquad (2)$$

(i,k en l zijn gelijksoortige indices; doorlopen alle de rangnummers 1 → n)

De vergelijkingen van het stelsel worden naar de x^i oplosbaar ondersteld, d.w.z. aangenomen wordt, dat zij lineair onafhankelijk zijn. Laat deze oplossing zijn

$$x^1 = E^1_1 X^1 + E^1_2 X^2 + \ldots\ldots + E^1_n X^n = E^1_i X^i$$
$$x^2 = E^2_1 X^1 + E^2_2 X^2 + \ldots\ldots + E^2_n X^n = E^2_i X^i$$
$$\vdots$$
$$x^n = E^n_1 X^1 + E^n_2 X^2 + \ldots\ldots + E^n_n X^n = E^n_i X^i$$

of samengevat

$$x^k = E^k_i X^i \qquad (3)$$

De vergelijkingen (2) en (3) zijn de overeenkomstige (2) en (3) van § 4.1. De betrekkingen tussen de e^i_k en de E^i_k vindt men door de x^i uit (3) in te stellen in (2). Het resultaat is:

$$X^k = e^k_l E^l_i X^i \qquad (4)$$

(4) is verkregen door eerst in (2) in plaats van i de index l te denken, hetgeen geoorloofd is, omdat men een verzadigde index steeds mag vervangen door een andere letter uit de groep letters, die men voor de bepaalde index heeft gereserveerd, dus

$$X^k = e^k_l x^l$$

Daarna denkt men voor (3)

$$x^l = E^l_i X^i$$

waarna de substitutie kan plaats vinden en (4) te voorschijn komt. Dit verwisselen van de letters voor het aangeven van een index is dikwijls nodig en moet steeds dan geschieden wanneer het er op aan komt, dubbelzinnigheden in de sommeringen te vermijden. Men kan er zich ge-

makkelijk aan wennen om uit (2) en (3) direct (4) op te schrijven. Een contrôle is altijd, dat wanneer men een stel gelijke onder- en bovenindices wegdenkt, de overblijvende indices links en rechts van het gelijkteken moeten kloppen.

In (4) moeten de coëfficiënten der X^i links en rechts van het gelijkteken gelijk zijn. Links staat alleen X^k met de coëfficiënt 1 ; de coëfficiënt van X^k rechts is:

$$e_l^k \, E_k^l \qquad (5)$$

Deze moet 1 zijn , de coëfficiënt van alle andere X^i, waarvoor dus $i \neq k$, zijn 0. Men heeft dus:

$$e_l^k \, E_i^l = \delta_i^k$$

waarin δ_i^k weer het symbool van Kronecker voorstelt. Dit symbool was 1 voor $k = i$ en 0 voor $k \neq i$. De vergelijkingen (5) zijn de overeenkomstige van de stellen (4), (5) en (6) van §4.1.

Men kan ook de X^i uit (2) instellen in (3). Dit geeft:

$$x^k = E_i^k \, e_l^i \, x^l$$

waaruit door gelijkstelling van de coëfficiënten links en rechts van het gelijkteken volgt

$$E_i^k \, e_l^i = \delta_l^k \qquad (6)$$

welke vergelijkingen de overeenkomstige zijn van de stellen (7), (8) en (9) van §4.1.

De vergelijkingen van de nieuwe coördinatenvlakken op het oude stelsel verkrijgt men door in (2) de X^i nul te nemen.
Zij zijn dus

$$e_i^k \, x^i = 0 \qquad (7)$$

De uitdrukking voor het kwadraat van de afstand l van een punt x^i tot de oorsprong luidt in het stelsel x^i (vergelijk (1))

$$l^2 = g_{11}x^1x^1 + g_{22}x^2x^2 + \ldots\ldots + g_{nn}x^nx^n$$

We kunnen deze uitdrukking in eenvoudiger notatie weergeven als we invoeren de algemenere symbolen g_{ik} en definieren $g_{ik} = 0$ voor $i \neq k$. We kunnen dan schrijven

$$l^2 = g_{ik}x^ix^k \qquad (7^a)$$

Werken we namelijk deze dubbele som uit, dan ontstaat

$$l^2 = g_{1k}x^1x^k + g_{2k}x^2x^k + \ldots\ldots + g_{nk}x^nx^k$$

of

$$\begin{aligned} l^2 = {} & \underline{g_{11}x^1x^1} + g_{12}x^1x^2 + \ldots\ldots + g_{1n}x^1x^n + \\ & + g_{21}x^2x^1 + \underline{g_{22}x^2x^2} + \ldots\ldots + g_{2n}x^2x^n + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + g_{n1}x^nx^1 + g_{n2}x^nx^2 + \ldots\ldots + \underline{g_{nn}x^nx^n}. \end{aligned}$$

waarin dan alléén de onderstreepte termen overblijven.

Aan de grootheden g^{ii} zullen we een analoge uitbreiding geven. We voeren ook hier in g^{ik} met de bepaling, dat deze aan de g_{ik} gebonden zijn door de vergelijkingen

$$g_{ik}g^{il} = \delta^{l}_{k} \qquad (7^b)$$

Wegens $g_{ik} = 0$ voor $i \neq k$ volgt hieruit

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} \qquad \text{en } g^{ik} = 0 \text{ als } i \neq k \qquad (7^c)$$

Ook dit valt gemakkelijk in te zien. De vergelijkingen (7^b) omvatten n stelsels van n vergelijkingen ter bepaling der g^{ik}. Eén der stelsels is

$$\begin{aligned} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{12} + \ldots\ldots + g_{1n}g^{1n} &= 1 \\ g_{12}g^{11} + g_{22}g^{12} + \ldots\ldots + g_{2n}g^{1n} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ g_{1n}g^{11} + g_{2n}g^{12} + \ldots\ldots + g_{nn}g^{1n} &= 0 \end{aligned}$$

Na het nul stellen der g_{ik} met ongelijke indices reduceren de vergelijkingen zich tot

$$\begin{aligned} g_{11}g^{11} &= 1 \\ g_{22}g^{12} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ g_{nn}g^{1n} &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dan, dat

$$g^{12} = g^{13} = \ldots\ldots = g^{1n} = 0$$

en

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$$

Doet men dit ook voor de andere stelsels uit (7^b), dan blijkt dus inderdaad de juistheid van (7^c). Het verband tussen de g^{ik} en de g_{ik} is dus in overeenstemming met de vroegere definitie dezer grootheden.

Met (3) elimineren we uit (7^a) de x^i, waardoor we de formule voor het kwadraat van een afstand in de X^i vinden. Deze wordt:

$$l^2 = g_{ik}E^{i}_{l}\,X^{l}\,E^{k}_{m}\,X^{m}$$

Schrijft men hiervoor

$$l^2 = G_{lm}\,X^{l}\,X^{m} \qquad (8)$$

dan is dus

$$G_{lm} = g_{ik}\,E^{i}_{l}\,E^{k}_{m} \qquad (9)$$

Deze laatste vergelijking is de overeenkomstige van de vergelijkingen (13). Men heeft $G_{ik} = G_{ki}$.

Naar analogie van (18) van § 4.1. worden verder ingevoerd de

grootheden G^{ik}. Deze zijn:

$$G^{ik} = g^{11} e^i_1 e^k_1 + g^{22} e^i_2 e^k_2 + \ldots\ldots + g^{nn} e^i_n e^k_n$$

of

$$G^{ik} = g^{lm} e^i_l e^k_m \qquad (10)$$

Men heeft nu weer

$$G_{ik} G^{il} = \delta^l_k \qquad (11)$$

Deze betrekking moet voor n veranderlijken bestaan naar analogie van (31) van § 4.1. Men kan ze als volgt bewijzen:

Men had volgens (9) en (10)

$$G_{ik} = g_{lm} E^l_i E^m_k \quad \text{en} \quad G^{ik'} = g^{l'm'} e^i_{l'} e^{k'}_{m'}$$

i,k,l, m en k', l', m' zijn gelijksoortige indices. Dus

$$G_{ik} G^{ik'} = g_{lm} E^l_i E^m_k g^{l'm'} e^i_{l'} e^{k'}_{m'} \qquad (\alpha)$$

Omdat

$$E^l_i e^i_{l'} = \delta^l_{l'}$$

is

$$E^l_i e^i_{l'} g^{l'm'} = \delta^l_{l'} g^{l'm'} = g^{lm'} \qquad (\beta)$$

Ter toelichting hierop wordt opgemerkt, dat het middelste lid een som is, die uitgeschreven luidt:

$$\delta^l_1 g^{1m'} + \delta^l_2 g^{2m'} + \ldots\ldots + \delta^l_n g^{nm'}$$

De enige $\delta^l_{l'}$, die 1 is, is δ^l_l, de anderen zijn nul. Van de som blijft slechts één term over, nl.

$$g^{lm'}$$

Door (β) gaat (α) over in

$$G_{ik} G^{ik'} = g_{lm} g^{lm'} E^m_k e^{k'}_{m'}$$

of, daar

$$g_{lm} g^{lm'} = \delta^{m'}_m$$

$$G_{ik} G^{ik'} = \delta^{m'}_m E^m_k e^{k'}_{m'} = E^{m'}_k e^{k'}_{m'} = \delta^{k'}_k$$

Waarmee (11) bewezen is.

(11) is de verkorte schrijfwijze voor n stellen van n vergelijkingen. Deze dienen om de G^{il} te berekenen, als de G_{ik} gegeven zijn of omgekeerd ter berekening van de G_{ik} uit de G^{il}.

De vergelijking van de hypersfeer (1) in de nieuwe coördinaten geschreven is (vergelijk (8)):

$$G_{ik} X^i X^k = r^2$$

De grootheden G^{ik} kunnen op de volgende wijze in een matrix worden gerangschikt:

$$\left\| \begin{array}{llll} G^{11} & G^{12} & G^{13} \ldots\ldots & G^{1n} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \ldots\ldots & G^{2n} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \ldots\ldots & G^{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ G^{n1} & G^{n2} & G^{n3} \ldots\ldots & G^{nn} \end{array} \right\| \qquad (12)$$

Omdat $G^{ik} = G^{ki}$ is deze matrix symmetrisch. Het stelsel der grootheden G^{ik} wordt een tensor genoemd, de G^{ik} zelf zijn de componenten of de kentallen van de tensor; deze tensor zal in het vervolg de nauwkeurigheidstensor worden genoemd.

De grootheden G_{ik} zijn evenzeens de kentallen van een tensor. Deze tensor zal genoemd worden de gewichtstensor. Tussen de kentallen van beide tensoren bestaan de betrekkingen (11) ; de tensoren zijn elkaars inverse.

Evenals dit bij de 3- dimensionale verdeling het geval was, zijn

$$\sqrt{G_{11}} \quad , \quad \sqrt{G_{22}} \quad , \quad \sqrt{G_{33}} \quad \ldots\ldots$$

de maateenheden op de nieuwe assen van het stelsel X^i. Verder is, als γ_{12}, γ_{13} ..., algemeen γ_{ik}, de hoeken tussen de coördinaatassen voorstellen:

$$\cos \gamma_{ik} = \frac{G_{ik}}{\sqrt{G_{ii}}\,\sqrt{G_{kk}}}$$

Men geeft zich hiervan rekenschap op analoge wijze als bij het 3 -dimensionale geval.

Ondersteld werd verder, dat de vergelijkingen (2) oplosbaar waren naar de x^i. In dit geval is de hoofddeterminant van het stelsel der vergelijkingen (2) niet nul, dus:

$$\text{Det. } e^i_k = \left| \begin{array}{llll} e^1_1 & e^1_2 & \ldots\ldots & e^1_n \\ e^2_1 & e^2_2 & \ldots\ldots & e^2_n \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ e^n_1 & e^n_2 & \ldots\ldots & e^n_n \end{array} \right| \neq 0$$

Men kan gemakkelijk aantonen, dat nu ook

$$\text{Det. } G^{ik} = \left| \begin{array}{llll} G^{11} & G^{12} & \ldots\ldots & G^{1n} \\ G^{21} & G^{22} & \ldots\ldots & G^{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ G^{n1} & G^{n2} & \ldots\ldots & G^{nn} \end{array} \right| \neq 0$$

is.

Immers uit hoofde van (10) is

$$\text{Det.}G^{ik} = \begin{vmatrix} \sqrt{g^{11}}\,e_1^1 & \sqrt{g^{22}}\,e_2^1 & \ldots\ldots & \sqrt{g^{nn}}\,e_n^1 \\ \sqrt{g^{11}}\,e_1^2 & \sqrt{g^{22}}\,e_2^2 & \ldots\ldots & \sqrt{g^{nn}}\,e_n^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sqrt{g^{11}}\,e_1^n & \sqrt{g^{22}}\,e_2^n & \ldots\ldots & \sqrt{g^{nn}}\,e_n^n \end{vmatrix}^2 = g^{11}.g^{22}\ldots\ldots g^{nn}\,(\text{Det. } e_k^i)^2 \qquad (13)$$

Is dus $\text{Det.}e_k^i \neq 0$, dan is dit ook het geval met Det. G^{ik}. Dit betekent, dat de G_{ik} uit de vergelijkingen (11) op te lossen zijn. Uit (13) leest men ook nog af, dat Det. G^{ik} steeds positief is, hetgeen zo moest zijn, omdat volgens (8) het tweede lid van deze vergelijking een definiet positieve vorm is.

Is Det. $e_k^i = 0$, dan zijn de nieuwe grootheden X^i niet alle algebraisch onafhankelijk. Tussen 2 of meer X^i bestaat dan een lineaire betrekking. Volgens (13) is nu ook Det. $G^{ik} = 0$, waarmee de G_{ik} niet meer uit (11) oplosbaar zijn. Is omgekeerd Det. $G^{ik} = 0$, dan kan men volgens (13) besluiten, dat Det. $e_k^i = 0$, dus tot de aanwezigheid van een lineaire betrekking tussen enige of alle X^i. Het is van belang, hierop iets dieper in te gaan.

Laat tussen X^1, X^2 en X^3 een betrekking bestaan, b.v.

$$\lambda X^1 + \mu X^2 + \nu X^3 = 0 \qquad (14)$$

Door substitutie hierin van de x^i volgens (2) ontstaat:

$$\lambda e_i^1 x^i + \mu c_i^2 x^i + \nu e_i^3 x^i = 0$$

Deze uitdrukking is een identiteit, dus moet de coëfficiënt van elke x^i nul zijn, of

$$\lambda e_i^1 + \mu e_i^2 + \nu e_i^3 = 0 \qquad (15)$$

Men toont gemakkelijk aan, dat voor elk rangnummer k van 1 tot n nu ook

$$\lambda G^{1k} + \mu G^{2k} + \nu G^{3k} = 0 \qquad (16)$$

is en wel als volgt. Stel in (16) voor de G's de tweede leden van (10) in, dan moet men dus hebben, dat

$$\lambda(g^{11}e_1^1e_1^k + g^{22}e_2^1e_2^k + \ldots\ldots + g^{nn}e_n^1e_n^k) +$$

$$+\mu(g^{11}e_1^2e_1^k + g^{22}e_2^2e_2^k + \ldots\ldots + g^{nn}e_n^2e_n^k) +$$

$$+\nu(g^{11}e_1^3e_1^k + g^{22}e_2^3e_2^k + \ldots\ldots + g^{nn}e_n^3e_n^k) \equiv 0$$

of

$$g^{11}(\lambda e_1^1 + \mu e_1^2 + \nu e_1^3)e_1^k + g^{22}(\lambda e_2^1 + \mu e_2^2 + \nu e_2^3)e_2^k + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots g^{nn}(\lambda e_n^1 + \mu e_n^2 + \nu e_n^3)e_3^k = 0$$

en dit is juist wegens (15). De betrekking (14) induceert (16). Uit (16) blijkt eveneens, dat Det. $G^{ik} = 0$ wordt, zoals eerder reeds was opgemerkt. Het omgekeerde geldt ook, zoals boven was opgemerkt; dus uit (16) moet (14) volgen. Inderdaad is dit zo. Men kan dat aan de hand van bovenstaande afleiding verifieren. Het is echter niet nodig, dat aan (16) voor elk rangnummer k van 1 tot n voldaan is. Men kan aantonen, dat als (16) geldt voor k: 1,2,3 het bestaan van de betrekkingen voor k: 4,5,....n hieruit volgt.

Als nl. aan (16) voldaan is voor k: 1,2,3 dan is:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} G^{11} & G^{21} & G^{31} \\ G^{12} & G^{22} & G^{32} \\ G^{13} & G^{23} & G^{33} \end{vmatrix} = 0$$

vervangt men in deze determinant elk element door het overeenkomstige 2de lid van (10) dan ontstaat een determinant, die men volgens een bekende eigenschap kan schrijven als een som van kwadraten:

$$\Delta = g^{11}g^{22}g^{33}\begin{vmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{vmatrix}^2 + G^{11}g^{22}g^{44}\begin{vmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_4^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_4^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_4^3 \end{vmatrix}^2 + \ldots\ldots \qquad (17)$$

In het tweede lid treden alle determinanten van 3 rijen en 3 kolommen op, die men kan vormen uit de elementen van de matrix

$$\left\| \begin{matrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 & e_4^1 & \ldots\ldots & e_n^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_4^2 & \ldots\ldots & e_n^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 & e_4^3 & \ldots\ldots & e_n^3 \end{matrix} \right\|$$

door hiervan telkens 3 kolommen te nemen. Aan (17) ziet men, dat Δ niet anders nul kan worden, dan wanneer elk der determinanten rechts nul wordt.

Uit het nul zijn van de eerste determinant rechts in (17) volgt, dat:

$$\lambda e_1^1 + \mu e_1^2 + \nu e_1^3 = 0$$

$$\lambda e_2^1 + \mu e_2^2 + \nu e_2^3 = 0$$

$$\lambda e_3^1 + \mu e_3^2 + \nu e_3^3 = 0$$

Het nul zijn van de tweede determinant rechts voert dan verder tot:

$$\lambda e_4^1 + \mu e_4^2 + \nu e_4^3 = 0$$

en zo vervolgens, zodat men voor elke i heeft:

$$\lambda e_i^1 + \mu e_i^2 + \nu e_i^3 = 0$$

Dit is dezelfde uitdrukking als (15). Dan bestaat echter ook (14) en is daardoor aan (16) voldaan. Uit $\Delta = 0$ kan dus besloten worden tot een lineaire betrekking tussen X^1, X^2 en X^3. Omdat nu aan (16) voldaan was, is Det. $G^{ik} = 0$, zijn de G_{ik} onbepaald en is Det. $e_k^i = 0$.

Licht men uit (12) een andere symmetrische determinant, b.v.:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} G^{22} & G^{24} & G^{27} & G^{28} \\ G^{42} & G^{44} & G^{47} & G^{48} \\ G^{72} & G^{74} & G^{77} & G^{78} \\ G^{82} & G^{84} & G^{87} & G^{88} \end{vmatrix}$$

dan gelden voor $\Delta' = 0$ soortgelijke beschouwingen als voor $\Delta = 0$. Is $\Delta' = 0$, dan mag men besluiten tot een lineaire betrekking tussen X^2, X^4, X^7 en X^8, b.v.

$$\kappa X^2 + \lambda X^4 + \mu X^7 + \nu X^8 \equiv 0 \qquad (18)$$

terwijl dan voor elke k:

$$\kappa G^{2k} + \lambda G^{4k} + \mu G^{7k} + \nu G^{8k} = 0$$

moet zijn.

Het gaat dus telkens om een determinant, waarvan de hoofddiagonaal bestaat uit elementen van de hoofddiagonaal van de matrix (12): dus uit elementen G^{ik} met 2 gelijke indices.

Men kan natuurlijk ook hebben, dat 2 of meer dezer determinanten onafhankelijk van elkaar nul zijn. Dan bestaan er evenveel betrekkingen tussen de X^i.

Meetkundig betekent het bestaan van een betrekking tussen de X^i een degeneratie van het coördinatensysteem; vergelijk het geval van de tweedimensionale verdeling, waarbij als

$$\begin{vmatrix} G^{11} & G^{12} \\ G^{12} & G^{22} \end{vmatrix} = 0$$

de beide assen samenvielen. Zo betekent (18), dat de 4 R_{n-1}'s

$$X^2 = 0 \; ; \quad X^4 = 0 \; ; \quad X^7 = 0 \; ; \quad X^8 = 0$$

een gemeenschappelijke R_{n-3} bezitten. Immers volgens (17) voldoen de coördinaten van een punt, die $X^2 = 0$, $X^4 = 0$ en $X^7 = 0$ bevredigen, ook aan $X^8 = 0$. De R_{n-1}, bepaald door $X^8 = 0$, gaat dus door de " snijruimte " van $X^2 = 0$; $X^4 = 0$ en $X^7 = 0$. Deze snijruimte is een R_{n-3}.

Thans zal het voorkomen van correlatievrijheid in de behandelde n- dimensionale verdeling aan een onderzoek worden onderworpen. Het algemene geval is, zoals in Hoofdstuk I werd uiteengezet, dat correlatievrijheid kan optreden tussen een groep van veranderlijken ten opzichte van de groep, gevormd door de overblijvende veranderlijken.

Laten de veranderlijken van de ene groep zijn X^1, X^2, X^α en die van de andere $X^{\alpha+1}$, $X^{\alpha+2}$, ... X^n ($\alpha < n$). Er is nu volgens de vroeger gegeven definitie correlatievrijheid, als voor elk stel waarden, die men aan de kenmerken van de tweede groep kan toekennen, de daarbij behorende gebonden verdeling, gevormd door de kenmerken van de eerste groep, onafhankelijk is van het gekozen stel waarden van de kenmerken van de tweede groep; of alle gebonden verdelingen, die men op bovenbeschreven wijze kan vormen, zijn identiek.

Laat

$$G_{ik}\, X^i\, X^k = r^2 \qquad (19)$$

een exemplaar zijn van de hyperellipsoiden, die de meetkundige plaatsen zijn van punten met gelijke (relatieve) frequentie. Het assenstelsel is rechthoekig met gelijke maateenheden op de assen ondersteld. De oorsprong ligt in het gemeenschappelijke middelpunt van de hyperellipsoiden. Aan de veranderlijken $X^{\alpha+1}$, $X^{\alpha+2}$, ... X^n worden in opvolging de constante waarden $a^{\alpha+1}$, $a^{\alpha+2}$, ... a^n gegeven.

De vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} X^{\alpha+1} &= a^{\alpha+1} \\ &\vdots \\ X^n &= a^n \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

bepalen als doorsnijding met (19) een hyperellipsoide van α dimensies H_α.

Van deze H_α zullen de coördinaten van het middelpunt worden berekend. Eliminatie der $X^{\alpha+1}$ ..... X^n met behulp van (20) uit (19) geeft de vergelijking van de " projectie " van H_α op de α-dimensionale coördinatenruimte K_α, bepaald door de X^1, X^2 ..... en X^α -assen. Deze projectie is eveneens een hyperellipsoide van α dimensies, die we H'_α zullen noemen. Stel de coördinaten van het middelpunt van H'_α

$$c^1,\ c^2,\ \ldots\ \ldots,c^\alpha,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0$$

dan zijn die van het middelpunt van H_α :

$$c^1,\ c^2,\ \ldots\ldots,c^\alpha,\ a^{\alpha+1},\ \ldots\ldots,\ a^n$$

De c^1, ... , c^α zullen berekend worden. In de K_α verschuiven we de oorsprong van het assensysteem naar het middelpunt van H'_α. De transformatieformules zijn:

$$Y^1 = X^1 - c^1$$
$$Y^2 = X^2 - c^2$$
$$\vdots$$
$$Y^\alpha = X^\alpha - c^\alpha$$

waarin $Y^1, \ldots\ldots Y^\alpha$ de nieuwe coördinaten voorstellen. In deze coördinaten geschreven wordt de vergelijking van H'_α

$$G_{11}(Y^1+c^1)(Y^1+c^1) + 2G_{12}(Y^1+c^1)(Y^2+c^2) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ G_{\alpha\alpha}(Y^\alpha+c^\alpha)(Y^\alpha+c^\alpha) + 2G_{1,\alpha+1}(Y^1+c^1)a^{\alpha+1} +$$
$$+2G_{1,\alpha+2}(Y^1+c^1)a^{\alpha+2} + \ldots\ldots + G_{\alpha+1,\alpha+1}a^{\alpha+1}a^{\alpha+1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ G_{nn}a^n a^n = r^2 \qquad (21)$$

Zullen $c^1, \ldots\ldots c^\alpha$ nu de coördinaten van het gezochte middelpunt zijn, dan moeten de eerstegraads termen uit (21) verdwijnen, d.w.z. de coëfficiënten van $Y^1, Y^2, \ldots\ldots Y^\alpha$ moeten 0 zijn. Dus moet:

$$\left.\begin{array}{l} G_{11}c^1 + G_{12}c^2 + \ldots\ldots + G_{1\alpha}c^\alpha + G_{1,\alpha+1}a^{\alpha+1} + \ldots\ldots + G_{1n}a^n = 0 \\ G_{12}c^1 + G_{22}c^2 + \ldots\ldots + G_{2\alpha}c^\alpha + G_{2,\alpha+1}a^{\alpha+1} + \ldots\ldots + G_{2n}a^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{1\alpha}c^1 + G_{2\alpha}c^2 + \ldots\ldots + G_{\alpha\alpha}c^\alpha + G_{\alpha,\alpha+1}a^{\alpha+1} + \ldots\ldots + G_{\alpha n}a^n = 0 \end{array}\right\} (22$$

Deze α vergelijkingen bepalen de $c^1, \ldots\ldots c^\alpha$.

De gebonden verdelingen van de eerste groep $X^1, \ldots\ldots X^\alpha$ der veranderlijken moesten, wilde er correlatievrijheid zijn, onafhankelijk zijn van de speciale waarden, toegekend aan de kenmerken van de andere groep. In het bijzonder zullen dus de coördinaten van het middelpunt van elke gebonden verdeling onafhankelijk van de $a^{\alpha+1}, \ldots\ldots a^n$ moeten zijn. Volgens (22) kan dit slechts dan het geval zijn, wanneer alle coëfficiënten van de $a^{\alpha+1}, \ldots\ldots a^n$ nul zijn. Derhalve zijn al die $G_{ik} = 0$, waarvan de ene index behoort bij de ene, de andere bij de andere groep van veranderlijken.

Uit de afleiding blijkt gemakkelijk, dat ook het omgekeerde geldt. Er bestaat dus correlatievrijheid tussen twee groepen van veranderlijken, indien aan de zoeven genoemde eigenschappen van de G_{ik} is voldaan.

Zijn er b.v. vijf veranderlijken, dan komt, als de eerste groep uit twee, de andere uit drie veranderlijken bestaat, bij correlatievrijheid

dezer groepen de matrix der G_{ik} er aldus uit te zien:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} G_{11} & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & G_{34} & G_{35} \\ 0 & 0 & G_{34} & G_{44} & G_{45} \\ 0 & 0 & G_{35} & G_{45} & G_{55} \end{array} \right\|$$

Voor de berekening der G^{ik} moet worden gebruik gemaakt van de vergelijkingen:

$$G_{ik}\, G^{il} = \delta^{l}_{k} \qquad (23)$$

In het voorbeeld van de vijf veranderlijken krijgt men voor het stel vergelijkingen ter berekening van G^{11}, G^{12}, ... G^{15}:

$$\begin{aligned} G_{11}\, G^{11} + G_{12}\, G^{12} &= 1 \\ G_{12}\, G^{11} + G_{22}\, G^{12} &= 0 \\ G_{33}\, G^{13} + G_{34}\, G^{14} + G_{35}\, G^{15} &= 0 \\ G_{34}\, G^{13} + G_{44}\, G^{14} + G_{45}\, G^{15} &= 0 \\ G_{35}\, G^{13} + G_{45}\, G^{14} + G_{55}\, G^{15} &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat

$$G^{13} = G^{14} = G^{15} = 0$$

op analoge wijze vindt men uit het tweede stel

$$G^{23} = G^{24} = G^{25} = 0$$

Men ziet aan dit voorbeeld, dat algemeen voor de G^{ik} hetzelfde geldt als voor de G_{ik}, dat nl. al die G^{ik} nul zijn, waarvan de eerste index behoort tot de ene groep en de andere tot de andere groep van veranderlijken.

Ook het omgekeerde is waar: uit het nul zijn der G^{ik} voor indices i en k van verschillende groepen, volgt het nul zijn van de overeenkomstige G_{ik}. Men kan dit gemakkelijk verifieren.

De vergelijkingen (23) vallen, zoals het voorbeeld laat zien, bij correlatiewijheid uiteen in twee groepen. In het geval der vijf veranderlijken bestaat de eerste groep uit de beide stellen

$$\begin{aligned} G_{11}\, G^{11} + G_{12}\, G^{12} &= 1 \\ G_{12}\, G^{11} + G_{22}\, G^{12} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{en} \qquad \begin{aligned} G_{11} G^{12} + G_{12}\, G^{22} &= 0 \\ G_{12} G^{12} + G_{22}\, G^{22} &= 1 \end{aligned}$$

en de tweede uit de drie stellen:

$$G_{33}\,G^{33} + G_{34}\,G^{34} + G_{35}\,G^{35} = 1 \qquad G_{33}\,G^{34} + G_{34}\,G^{44} + G_{35}\,G^{45} = 0$$
$$G_{34}\,G^{33} + G_{44}\,G^{34} + G_{45}\,G^{35} = 0 \qquad G_{34}\,G^{34} + G_{44}\,G^{44} + G_{45}\,G^{45} = 1$$
$$G_{35}\,G^{33} + G_{45}\,G^{34} + G_{55}\,G^{35} = 0 \qquad G_{35}\,G^{34} + G_{45}\,G^{44} + G_{55}\,G^{45} = 0$$

$$G_{33}\,G^{35} + G_{34}\,G^{45} + G_{35}\,G^{55} = 0$$
$$G_{34}\,G^{35} + G_{44}\,G^{45} + G_{45}\,G^{55} = 0$$
$$G_{35}\,G^{35} + G_{45}\,G^{45} + G_{55}\,G^{55} = 1$$

Beide groepen van veranderlijken staan dus wat betreft de samenhang van de G_{ik} en de G^{ik} volkomen los van elkaar. Het verband tussen de G_{ik} en de G^{ik} is in elke groep gelijk aan dat, hetwelk in het algemeen bestaat, nl.

$$G_{i'k'}\,G^{i'l'} = \delta^{l'}_{k'} \quad (i', k', l' \text{ 1 of 2})$$

$$G_{i''k''}\,G^{i''l''} = \delta^{l''}_{k''} \quad (i'', k'', l'' \text{ 3, 4 of 5})$$

Heeft men in het bijzonder, dat <u>alle</u> kenmerken over en weer correlatievrij zijn, dan zijn alle $G_{ik} = 0$, waarvoor i en k ongelijk zijn, terwijl

$$G^{11} = \frac{1}{G_{11}} \qquad G^{22} = \frac{1}{G_{22}} \qquad \text{enz.}$$

of algemeen

$$G^{ii} = \frac{1}{G_{ii}}$$

4.5. <u>De voortplantingswet der moduli</u>, <u>algemene vorm.</u>

Volgens de stelling 3.3.-1. was, als de verdelingen voor x_1, x_2, ... x_n normaal en correlatievrij zijn en de moduli $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots \mu_n$ bezitten, voor

$$z = p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + \ldots\ldots + p_n\,x_n \qquad (1)$$

de verdeling eveneens normaal en

$$\mu_z^2 = p_1^2\mu_1^2 + p_2^2\mu_2^2 + \ldots\ldots + p_n^2\mu_n^2 \qquad (2)$$

waarin μ_z de modulus van z is.

Vergelijking (2) werd de bijzondere voortplantingswet der moduli genoemd. Deze stelling moet thans worden uitgebreid tot het geval, waarin de grootheden, die in het rechterlid van (1) optreden, gecorreleerd zijn. Zij

$$U = a_1\,X^1 + a_2\,X^2 + \ldots\ldots a_n\,X^n = a_i\,X^i \qquad (3)$$

Gebruik wordt gemaakt van de gedachtengang van de vorige paragraaf, waarbij de X^i ondersteld werden lineaire functies te zijn van de x^i. Deze x^i waren correlatievrij, hun moduli waren:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$$

Verder waren de grootheden g^{ii} gedefinieerd door

$$\frac{1}{\mu_i \mu_i} = g^{ii} \qquad (4)$$

De lineaire samenhang tussen de X^i en de x^i was, zie (2) van de vorige paragraaf:

$$X^i = e^i_k \, x^k$$

Door substitutie van deze uitdrukkingen voor X^i in (3) ontstaat

$$U = a_1 \, e^1_k \, x^k + a_2 \, e^2_k \, x^k + \ldots + a_n \, e^n_k \, x^k = a_i \, e^i_k \, x^k \qquad (6)$$

Omdat U nu uitgedrukt is in de correlatievrije x^i, kan de zoeven gememoreerde stelling 3.3.-1 worden toegepast. Hieruit volgt, dat de verdeling van U ook normaal is en dat voor de modulus μ_U

$$\frac{1}{\mu_U^2} = (a_i \, e^i_1)(a_k \, e^k_1) \frac{1}{\mu_1 \mu_1} + \ldots + (a_i \, e^i_n)(a_k \, e^k_n) \frac{1}{\mu_n \mu_n}$$

of in verband met (4)

$$\frac{1}{\mu_U^2} = \left\{ (a_i \, e^i_1)(a_k e^k_1) \, g^{11} + \ldots + (a_i \, e^i_n)(a_k \, e^k_n) g^{nn} \right\} \frac{1}{\mu^2}$$

De tussen ronde haakjes geschreven sommen kan men uitgeschreven denken en de vermenigvuldigingen uitgevoerd. Men krijgt dan

$$\frac{1}{\mu_{U_1}^2} = \left\{ (e^1_1 e^1_1 g^{11} + e^1_2 e^1_2 g^{22} + \ldots + e^1_n e^1_n g^{nn}) a_1 a_1 + 2(e^1_1 e^2_1 g^{11} + \right.$$

$$+ e^1_2 e^2_2 g^{22} + \ldots + e^1_n e^2_n g^{nn}) a_1 a_2 + \ldots + (e^n_1 e^n_1 g^{11} +$$

$$\left. + e^n_2 e^n_2 g^{22} + \ldots + e^n_n e^n_n g^{nn}) a_n a_n \right\} C \qquad (7)$$

Volgens (10) van de vorige paragraaf was

$$G^{ik} = g^{11} e^i_1 e^k_1 + g^{22} e^i_2 e^k_2 + \ldots + g^{nn} e^i_n e^k_n$$

waardoor dus (7) wordt

$$\frac{1}{\mu_U^2} = \left\{ G^{11} a_1 a_1 + 2 G^{12} a_1 a_2 + \ldots + G^{nn} a_n a_n \right\} \frac{1}{\mu^2}$$

of

$$\frac{1}{\mu_U^2} = G^{ik} a_i a_k \frac{1}{\mu^2} \qquad (8)$$

Alvorens op dit resultaat nader in te gaan, zal het bovenstaande iets uitgebreid worden. Zij

$$V = b_i \, X^i \qquad (9)$$

een tweede lineaire functie der X^i en laat ten slotte

$$W = pU + qV = (pa_i + qb_i) X^i$$

Volgens (8) is

$$\mu_W^2 = G^{ik} (pa_i + qb_i)(pa_k + qb_k)\mu^2$$

$$= pp\, G^{ik} a_i a_k \mu^2 + 2\, pq\, G^{ik} a_i b_k \mu^2 + qq\, G^{ik} b_i b_k \mu^2 \quad (1$$

Omdat volgens (8)

$$\mu_V^2 = G^{ik} b_i b_k \mu^2 \qquad (11)$$

is

$$\mu_W^2 = \mu^2_{pU + qV} = pp\,\mu_U^2 + 2\, pq\, G^{ik} a_i b_k \mu^2 + qq\,\mu_V^2 \qquad (12)$$

Beschouwen wij thans eerst (8). Deze formule geeft de μ_U uitgedrukt in de G^{ik}, de kentallen van de nauwkeurigheidstensor der X^i. Het is dus blijkens dit resultaat niet nodig, de samenhang van de X^i met de x^i te kennen. Uit (3) kan regelrecht (8) worden opgeschreven.

Wil men met grootheden als U en V onafhankelijk van de x^i opereren, dan blijkt uit (12), dat het nodig is, ook nog te kennen de grootheid

$$G^{ik} a_i b_k \mu^2$$

Stelt men

$$\mu_{UV} = G^{ik} a_i b_k \mu^2 \qquad (13)$$

dan wordt (12)

$$\mu_W^2 = pp\,\mu_U^2 + 2\, pq\,\mu_{UV} + qq\,\mu_V^2 \qquad (14)$$

Men kan ook bij U, V en W grootheden invoeren, analoog aan de G^{ik}. Stel

$$\mu_U^2 = H^{11}\mu^2;\ \mu_{UV} = H^{12}\mu^2;\ \mu_V^2 = H^{22}\mu^2;\ \mu_W^2 = H^{WW}\mu^2$$

dan is volgens (14)

$$H^{WW} = p^2 H^{11} + 2\, pq\, H^{12} + q^2 H^{22} \qquad (15)$$

en is volgens (8), (11) en (13):

$$H^{11} = G^{ik} a_i a_k\ ;\quad H^{12} = G^{ik} a_i b_k\ ;\ H^{13} = G^{ik} b_i b_k \quad (16)$$

De vergelijking (8) is de uitdrukking voor de algemene voortplantingswet der moduli. Algemeen, omdat deze ons het middel geeft, de modulus te vinden van een grootheid, die een lineaire functie is van grootheden, die onderling normaal of lineair gecorreleerd zijn. Naast (8) is (13) van belang. Deze vergelijking geeft aan hoe van twee grootheden, die lineaire functies van dezelfde veranderlijken zijn, het correlatiebedrag berekend moet worden. Ter wille van de duidelijkheid wordt de coëfficiënt van μ^2 in (13) hier uitgeschreven:

$$G^{ik}\, a_i\, b_k = G^{11}\, a_1 b_1 + G^{12}(\, a_1 b_2 + a_2 b_1\,) + G^{13}(\, a_1 b_3 + a_3 b_1) + ..$$
$$+ G^{22}\, a_2\, b_2 \qquad + G^{23}(\, a_2 b_3 + a_3 b_2) + ..$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ ..$$

Met dezelfde reserves, die vroeger bij de afleiding van de bijzondere voortplantingswet besproken werden, kan men ook van een grootheid, die een niet - lineaire functie van gecorreleerde grootheden is, de modulus berekenen. Hiervoor moet de functie in het gebied van de veranderlijken, waarover de verdeling zich uitstrekt, in een reeks worden ontwikkeld. Laat

$$U = F\,(\, X^1, X^2, \ldots\ldots X^n)$$

zijn en X_o^1, X_o^2, ... X_o^n een stel waarden uit het gebied van de verdeling van X^1 ..... X^n en U_o de bijbehorende waarde van U.

Stel verder:

$$U = U_o + \Delta U \;; \qquad X^i = X_o^i + \Delta X^i$$

dan is

$$\Delta U = \frac{\partial F}{\partial X^1}\,\Delta X^1 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial X^n}\,\Delta X^n + \text{hogere graads termen},$$

waarin de waarden van de partiele afgeleiden genomen moeten worden voor het waardestel X_o^i. De reeksontwikkeling wordt afgebroken na de eerstegraads termen, hetgeen, indien het bereik der veranderlijken dit toelaat, bij een aantal functies een in de practijk toelaatbare benadering is. Men kan dan de algemene voortplantingswet toepassen.

Omdat ΔU en U dezelfde modulus hebben en ook ΔX^i en X^i is het resultaat volgens (8)

$$\mu_U^2 = \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial X^1}\right)^2 G^{11} + 2\,\frac{\partial F}{\partial X^1}\,\frac{\partial F}{\partial X^2}\,G^{12} + \ldots\ldots \right\} \mu^2$$

Formule (13) kan een analoge generalisatie ondergaan.

Opmerking. De in deze paragraaf beschouwde grootheid W was een functie van U en V ; deze op hun beurt waren functies van de X^i en deze weer van de x^i. Wegens de vroeger besproken eigenschap van het zich reproduceren van de normale verdeling bij lineaire functies (en in vele gevallen ook bij niet-lineaire), waarmede bedoeld wordt, dat een grootheid, die een lineaire functie is van enige normaal verdeelde grootheden, zelf weer een normale verdeling bezit, zijn alle hier genoemde grootheden weer normaal verdeeld.

Bij elke volgende stap kan men van de nieuwe veranderlijken moduli berekenen volgens de algemene voortplantingswet, die in bijzondere geval-

len , nl. bij correlatieverwijdering van de veranderlijken, ontaardt in de bijzondere. Het voorschrift is echter voor elke volgende stap volkomen identiek met dat voor de vorige.

Men kan werken met de moduli of wel met de G^{ik} en analoge grootheden, die evenredig zijn met de moduli. In het laatste geval moet men bij de toepassingen er voor waken, geen fouten te maken, door tijdens de berekeningen ongemerkt over te gaan in een ander verhoudingssysteem.

HOOFDSTUK V.

De methode der kleinste vierkanten.

5.1. Het vereffenen.

Een belangrijk middel voor het beschrijven en bestuderen van een natuurverschijnsel is het mathematische model. De Euclidische meetkunde b.v. is een model om de eigenschappen van de ruimte te beschrijven, de kinetische gastheorie een model voor het gedrag van gassen, de formules, waarnaar de getijtafels worden berekend, een model voor het gedrag van de getijden, enz. Het model is een mathematische abstractie ; de aan de natuur ontleende grootheden worden met grootheden uit het model geïdentificeerd, waarna de natuurverschijnselen toegankelijk zijn geworden voor de toepassing van het wiskundige formalisme. Het model is uit de aard der zaak nimmer volmaakt ; men kan een goed of een beter model hebben, dit hangt af van de hoeveelheid en de kwaliteit van de informatie, waarover beschikt kan worden en van de meer of mindere genialiteit van de scheppende denker, die het geconstrueerd heeft. Het blijft echter altijd een instrument van het menselijke denken en staat als zodanig naast de realiteit.

Wanneer men waarnemingen doet, begint men veelal een model aan te nemen. De landmeter bedient zich voor het behandelen van zijn opmetingen van het model der Euclidische planimetrie. De astronoom, die de baan van een komeet uit zijn waarnemingen wil berekenen, gebruikt het model van de klassieke mechanica. Als de landmeter de hoeken van een zeer grote driehoek in het terrein meet, zal hij opmerken, dat een planimetrisch model niet meer voldoende is, omdat de som van de hoeken groter dan 180° is. De astronoom, die waarneemt, dat een dicht langs de zon vallende lichtbundel van een ster van zijn richting wordt afgebogen, zal zijn model van de klassieke mechanica moeten herzien.

Men ziet, dat er steeds een wisselwerking is tussen het inpassen van waarnemingen in een model en het wijzigen van het model. Bij dit laatste moet men volstrekt niet denken aan wereldschokkende revoluties als de relativiteitstheorie. Ook in de eenvoudige dagelijkse practijk van het waarnemen heeft men hiermee te maken. Voor het er op betrekken van een waarnemingsproces zal men nl. altijd het eenvoudigste model kiezen. Stel iemand bepaalt door lengtemeting een afstand in het terrein. Als hij zijn meting grof doet, b.v. in meters, dan behoeft hij zich over de invloed van de temperatuur op de lengte van de meetband niet ongerust te maken. Zou hij daarentegen met uiterste zorg, b.v. in mm, werken, dan komt wel degelijk de temperatuursinvloed in het geding. Hij gebruikt dan echter een ander model dan de eerste keer.

Van belang is het, een meting steeds zo in te kleden, dat een contrôle van het model mogelijk is. Dit geschiedt door het meten van z.g.

overtollige waarnemingen. Overtollig is een waarneming, als men deze onder gebruikmaking van het model uit de andere waarnemingen zou kunnen berekenen. Een overtollige waarneming verschaft dus omgekeerd het middel, de juistheid van het gekozen model te controleren.

Een ander principiële reden voor het verrichten van overtollige waarnemingen, is dat men een betere aanpassingsmogelijkheid van het model aan de werkelijkheid krijgt. Uit de voorafgaande hoofdstukken weten we, dat waarnemingsuitkomsten aan fluctuaties onderhevig zijn. Het is duidelijk, dat, als er meer waarnemingen zijn dan strikt noodzakelijk is en men gebruikt al die waarnemingen voor het bepalen van de einduitkomsten, de onzekerheden, die met het aanpassen van het model verbonden zijn, enigermate worden ingeperkt.

Een derde reden voor het doen van overtollige waarnemingen is, dat men daarmee een dikwijls gewenste symmetrie kan verkrijgen. Als men de vorm van een driehoek wil bepalen, zal men niet twee, doch alle drie hoeken meten, als dit mogelijk is, en daarmee de gelijkwaardigheid van elk der hoeken te verkrijgen. Als men enige gelijksoortige grootheden moet waarnemen, zal men dit doen eenmaal in de volgorde 1,2,3,4 en een tweede maal in de volgorde 4,3,2,1. Kleine invloeden, die men niet altijd kan vatten en die min of meer evenredig zijn met de tijd, kunnen dan uit de eindresultaten geëlimineerd worden.

Het is dus zo, dat bij een goed opgesteld waarnemingsprogramma overtollige waarnemingen worden verkregen. Deze zullen in het algemeen, als ze worden ingesteld in mathematische betrekkingen van het model, kleine sluitfouten opleveren. Zijn deze sluitfouten van die aard, dat ze uit de onvermijdelijke onzekerheden van de metingsuitkomsten kunnen worden verklaard, dan zal men de waarnemingen corrigeren en daarmee de sluitfouten doen verdwijnen. Het afleiden van het voorschrift, waarnaar deze correctie moet geschieden, vormt het onderwerp van dit hoofdstuk. Zijn de sluitfouten te groot, dan moet eerst het model veranderd worden, voor men tot het corrigeren van de waarnemingen kan overgaan.

Het corrigeren van de waarnemingen noemt men vereffenen.

Opmerking.

Methoden voor de bestudering van de sluitfouten, de contrôle op het model dus, welke bestudering gepaard behoort te gaan met die van de bedragen van de aan te brengen correcties, vormen een afzonderlijk te behandelen onderwerp. Het ligt grotendeels op het terrein van de statistiek.

5.2. De gegevens voor het vereffeningsvraagstuk.

We zullen eerst onderstellen, dat de betrekkingen tussen de waar-

genomen grootheden P_1, P_2, ... , P_n lineair zijn. Laten we aannemen, dat er drie zijn:

$$\left.\begin{aligned} u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3 + ... + u_nP_n &= u_o \\ v_1P_1 + v_2P_2 + v_3P_3 + ... + v_nP_n &= v_o \\ w_1P_1 + w_2P_2 + w_3P_3 + ... + w_nP_n &= w_o \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

De vergelijkingen worden lineair onafhankelijk ondersteld.

De uitkomsten van de waarnemingen zullen worden voorgesteld door p_1, p_2, p_3, ... ,p_n, zodat p_1 de waarneming is voor de grootheid P_1 enz. De p_i zullen, indien in (1) gesubstitueerd, in het algemeen aan deze betrekkingen niet voldoen. Zij moeten daarom gecorrigeerd worden. Noem de correcties ε_i ; de gecorrigeerde waarnemingen worden dan $p_1 + \varepsilon_1$, $p_2 + \varepsilon_2$, ... , $p_n + \varepsilon_n$. Deze waarden voor de P_i in (1) in de plaats gesteld moeten aan die vergelijkingen voldoen. Men verkrijgt dan

$$\left.\begin{aligned} u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + u_3\varepsilon_3 + ... + u_n\varepsilon_n &= u_o - u_1p_1 - u_2p_2 ...-u_np_n = t_u \\ v_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 + v_3\varepsilon_3 + ... + v_n\varepsilon_n &= v_o - v_1p_1 - v_2p_2 ...-v_np_n = t_v \\ w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + w_3\varepsilon_3 + ... + w_n\varepsilon_n &= w_o - w_1p_1 - w_2p_2 ...-w_np_n = t_w \end{aligned}\right\} (2)$$

Omdat $n > 3$ (voor $n = 3$ zou er geen vereffeningsvraagstuk zijn, daar de ε_i dan bepaald waren) bepalen de vergelijkingen (2) de ε_i nog niet. De af te leiden regel zal nu in het ontbrekende moeten voorzien.

Voor hiertoe kan worden overgegaan moeten eerst de waarnemingen nog aan een nadere beschouwing onderworpen worden. Niet alle waarnemingen behoeven, wat hun betrouwbaarheid of hun waardering aangaat, gelijkwaardig te zijn. Zo zal bij het lengtemeten met een meetband de uitkomst van het meten van een korte afstand hoger aangeslagen moeten worden dan die van een lange. Ook kan het voorkomen, dat in een vereffening waarnemingen opgenomen moeten worden, die met verschillende instrumenten zijn gemeten. Betreft het dan instrumenten, waarvan het ene beter is dan het andere, dan ontstaat hierdoor ook ongelijkwaardigheid in het waarnemingsmateriaal. Ten slotte komt het veel voor, dat grootheden van verschillende soort (dimensie), zoals b.v. hoeken en lengten, in een probleem optreden, hetgeen eveneens een verstoring is van de homogeniteit van het materiaal. Het zal dus nodig zijn, de eigenaardigheden van de waarnemingen in de beschouwingen te betrekken. We zouden nu kunnen denken aan de theorie over de waarnemingsreeksen, zoals deze in de vorige hoofdstukken is ontwikkeld, omdat we daar de modulus en de correlatie als middelen hebben leren kennen om waarnemingsreeksen en hun onderling gedrag te beschrijven. Bij de vereffening heb-

ben we echter te maken met enkele waarnemingen en niet met reeksen en men mag natuurlijk niet zonder meer een eigenschap van een reeks op een enkele waarneming overdragen. Wanneer men er evenwel over doordenkt, wat men onder de betrouwbaarheid van een enkele waarneming zou willen verstaan, dan wordt het al spoedig duidelijk, dat men zonder herhalingen van die waarneming toch nooit tot enig inzicht hierin kan geraken. Wanneer men over één waarneming beschikt, gedaan met een instrument, dat men voor het eerst in handen heeft, dan is het ten enen male uitgesloten, ook maar enig idee over de waarde van deze observatie te kunnen hebben. Men kan hier slechts dan een oordeel uitspreken, wanneer men zelf ervaring heeft opgedaan met het meten met het instrument in kwestie of de beschikking heeft over de ervaring van anderen. Het komt er dan echter op neer, dat wij onze ene waarneming beschouwen als één van een categorie van gelijkwaardige exemplaren. Men moet er dan toch toe komen, elke waarneming, die in een vereffeningsvraagstuk optreedt, op te vatten als een exemplaar van een waarnemingsreeks.

Omdat het nodig is, ook met de correlatie van waarnemingen rekening te houden, is het bovenstaande nog niet voldoende. Hiervoor moeten wij, als bij een vereffeningsvraagstuk n waarnemingen optreden, dit stel opvatten als één exemplaar van een n- dimensionale verdeling, die wij op grond van onze voorgaande beschouwingen normaal kunnen aannemen. De cofactoren, de grootheden, die vroeger aangeduid zijn als g^{ik}, van deze n- dimensionale verdeling worden dan op het enkele stel waarnemingen overgedragen. Wanneer dus b.v. sprake is van twee waarnemingen, die gecorreleerd zijn, wordt daarmee bedoeld, dat de 2 - dimensionale verdeling, die uit een groot aantal van deze paren zou kunnen worden geconstrueerd, een verdeling is met correlatie.

Waar aldus de vereffening gekoppeld is aan de normale verdeling, is het duidelijk, dat alleen waarnemingen, waarbij zulke verdelingen behoren, volgens het te ontwikkelen voorschrift zullen kunnen worden vereffend. Van te voren zal men dus door experimenten het karakter van de waarnemingen aan een onderzoek moeten onderwerpen om vast te stellen of inderdaad normale verdelingen optreden en zo ja, welke bedragen voor de g^{ik} moeten worden genomen.

Door het zeer grote aantal exemplaren, waarover men moet beschikken voor het statistisch onderzoek van een meer- dimensionale verdeling, is het een geluk, dat meestal de waarnemingen als correlatievrij mogen worden aangenomen. Omdat, zoals later zal blijken, het slechts nodig is, de cofactoren g^{ik} en niet de moduli en correlatiebedragen zelf te kennen, blijft er dan over, de verhouding van de moduli, dus van de g^{ik} met twee gelijke indices vast te stellen. In veel gevallen kan men hier door overleg toe geraken. Wanneer men b.v. met een zelfde instrument onder niet te sterk uiteenlopende omstandigheden een aantal hoeken meet,

dan mag men aannemen, dat de moduli dezer waarnemingen onderling gelijk zijn. Weliswaar zou men kunnen opmerken, dat toch dezelfde persoon de waarnemingen verricht en ook hetzelfde instrument wordt gebruikt en hierdoor stellig een zekere mate van afhankelijkheid van de waarnemingen mag worden verwacht, men is echter niet gewoon om in zo'n geval correlatie aan te nemen. Blijkbaar wordt deze, indien aanwezig, te gering geacht. Trouwens correlatie tussen waarnemingen zal altijd wel aanwezig zijn, want geen twee gebeurtenissen zullen zich op deze wereld volmaakt onafhankelijk van elkaar voltrekken. Een dergelijke overweging is echter voor de practijk van de waarnemingsrekening van geen betekenis. Als b.v. bij eenzelfde vereffening lengten en hoeken optreden, zal het altijd wel een veilige aanname zijn om tussen de hoekmeting enerzijds en de lengtemeting anderzijds correlatievrijheid aan te nemen.

Ook kan men soms langs algebraische weg onder toepassing van de voortplantingswet van de moduli tot verhouding der moduli van de waarnemingen geraken. Dit doet zich b.v. voor bij het waterpassen. Het hoogteverschil tussen twee punten in het terrein verkrijgt men door het maken van een aantal slagen. Per slag wordt op een voor- en achterbaak afgelezen met de kijker van het waterpasinstrument, waaruit het hoogteverschil van de standplaatsen van de baken wordt gevonden door de aflezingen af te trekken. De algebraïsche som van de hoogteverschillen per slag geeft het hoogteverschil van begin- en eindpunt van de gehele trek. Men heeft dus:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n = H \qquad (3)$$

waarin $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de hoogteverschillen per slag en H het totale verschil is. Als de slagen ongeveer even lang zijn, mag men de h_i als gelijkwaardige waarnemingen beschouwen en aan elk dus een gelijke modulus μ toekennen. Voor de modulus μ_H van H vindt men dan door toepassing van de voortplantingswet

$$\mu_H^2 = n\mu^2$$

Bij twee waterpassingen met een aantal slagen van n_1 en n_2 verhouden zich derhalve de kwadraten der moduli als deze aantallen, of, als de slagen nagenoeg even lang zijn, als de afstanden, waarover de waterpassingen zijn uitgevoerd. Men behoeft nu nog slechts te weten of het verschil van de aflezingen op voor- en achterbaak aan de eisen van de normale verdeling voldoet. Als echter dit het geval is voor een aflezing op één baak, is dit ook zo met het verschil van twee zulke aflezingen. Er blijft dus slechts over een onderzoek in te stellen naar het aflezen met een kijker op een verdeelde baak. Hiervoor moet men dan een groot aantal aflezingen op een baak doen en deze aan een statistische behandeling onderwerpen.

In veel gevallen zal de vaststelling der g^{ik} op bevredigende wijze

kunnen gebeuren.

Bij elk vereffeningsvraagstuk moeten dus de g^{ik}, derhalve de tensor der cofactoren, bekend zijn. Uitgeschreven is deze tensor:

$$\begin{Vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} & \ldots\ldots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} & \ldots\ldots & g^{2n} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} & \ldots\ldots & g^{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ g^{n1} & g^{n2} & g^{n3} & \ldots\ldots & g^{nn} \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

We weten, dat de determinant van de tensor definiet positief is en dat $g^{ik} = g^{ki}$

5.3. Afleiding van het vereffeningsvoorschrift.

Om de hierna volgende afleiding niet te ingewikkeld te maken zullen we aannemen, dat er vijf waar te nemen grootheden P_i zijn, waartussen drie lineaire betrekkingen bestaan. Deze luiden:

$$\begin{aligned} u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3 + u_4P_4 + u_5P_5 &= u_o \\ v_1P_1 + v_2P_2 + v_3P_3 + v_4P_4 + v_5P_5 &= v_o \\ w_1P_1 + w_2P_2 + w_3P_3 + w_4P_4 + w_5P_5 &= w_o \end{aligned} \qquad (1)$$

Deze drie vergelijkingen stellen dus het model voor, zij zijn onafhankelijk. De waarnemingsuitkomsten voor de grootheden P_i zijn p_i. We nemen aan, dat de p_i correlatievrij zijn en dat hun moduli zijn μ_i. Stellen we dan

$$\mu_i \mu_i = g^{ii} \mu \mu$$

dan zijn de g^{ii} de cofactoren van de p^i. Wegens de correlatievrijheid zijn de grootheden g^{ik}, waarin i en k ongelijke indices hebben, nul. De tensor der cofactoren (§5.2.-(4)) wordt dus hier:

$$\begin{Vmatrix} g^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g^{55} \end{Vmatrix}$$

De waarnemingen zullen aan de betrekkingen (1) niet voldoen. Zij worden daartoe gecorrigeerd met de correcties ε_i en wij willen dan heb-

$$P_i = p_i + \varepsilon_i$$

dan wordt verkregen

$$u_1 (p_1 + \varepsilon_1) + u_2 (p_2 + \varepsilon_2) + \ldots\ldots + u_5 (p_5 + \varepsilon_5) = u_o$$
$$v_1 (p_1 + \varepsilon_1) + v_2 (p_2 + \varepsilon_2) + \ldots\ldots + v_5 (p_5 + \varepsilon_5) = v_o$$
$$w_1 (p_1 + \varepsilon_1) + w_2 (p_2 + \varepsilon_2) + \ldots\ldots + w_5 (p_5 + \varepsilon_5) = w_o$$

of

$$u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + u_5\varepsilon_5 = u_o - u_1p_1 - u_2p_2 \ldots\ldots - u_5p_5 = t_u$$
$$v_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + v_5\varepsilon_5 = v_o - v_1p_1 - v_2p_2 \ldots\ldots - v_5p_5 = t_v \quad (2)$$
$$w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + w_5\varepsilon_5 = w_o - w_1p_1 - w_2p_2 \ldots\ldots - w_5p_5 = t_w$$

De grootheden t_u, t_v en t_w zijn de tegenspraken in de betrekkingen, als daarin voor de P_i de waarnemingen p_i worden gesubstitueerd.

Wij gaan nu het probleem door een affiene (lineaire) transformatie tot een eenvoudiger geval terugbrengen. Wij mogen dit doen, omdat wij in de vorige paragraaf de enkele waarneming aan de waarnemingsreeks gekoppeld hebben en de theorie van de waarnemingsreeksen affien invariant is.

Wij nemen als transformatieformules:

$$u_1P_1 + u_2P_2 + \ldots\ldots + u_5P_5 = R_1$$
$$v_1P_1 + v_2P_2 + \ldots\ldots + v_5P_5 = R_2$$
$$w_1P_1 + w_2P_2 + \ldots\ldots + w_5P_5 = R_3 \qquad (4)$$
$$a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots\ldots + a_5P_5 = R_4$$
$$b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots\ldots + b_5P_5 = R_5$$

De a_i en b_i moeten zó gekozen worden, dat deze vergelijkingen onafhankelijk zijn, hetgeen altijd kan. De waarnemingen p_i geven volgens deze formules de " waargenomen " waarden van de R_i, nl. de r_i, dus

$$u_1p_1 + u_2p_2 + \ldots\ldots + u_5p_5 = r_1$$
$$v_1p_1 + v_2p_2 + \ldots\ldots + v_5p_5 = r_2$$
$$w_1p_1 + w_2p_2 + \ldots\ldots + w_5p_5 = r_3 \qquad (5)$$
$$a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots\ldots + a_5p_5 = r_4$$
$$b_1p_1 + b_2p_2 + \ldots\ldots + b_5p_5 = r_5$$

Trekken wij de vergelijkingen (5) van de overeenkomstige uit (4) af, dan krijgen we:

$$
\begin{aligned}
u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + u_5\varepsilon_5 &= R_1 - r_1 = \eta_1 \\
v_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + v_5\varepsilon_5 &= R_2 - r_2 = \eta_2 \\
w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + w_5\varepsilon_5 &= R_3 - r_3 = \eta_3 \\
a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + a_5\varepsilon_5 &= R_4 - r_4 = \eta_4 \\
b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + b_5\varepsilon_5 &= R_5 - r_5 = \eta_5
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

De ingevoerde grootheden η_i zijn dus de correcties aan de r_i. Omdat de r_i lineaire functies van de p_i zijn, mogen we de r_i op grond van de ontwikkelde theorie van de waarnemingsreeksen, weer als waargenomen grootheden opvatten. Na de transformatie is het probleem er nu als volgt komen uit te zien.

Uit (1) en (4) volgen de nieuwe betrekkingen:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= u_o \\
R_2 &= v_o \\
R_3 &= w_o
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Betrekkingen dus, waarbij in iedere vergelijking slechts één der grootheden R_i voorkomt; de R_4 en R_5 komen er niet in voor.

De waarnemingen voor de R_i zijn de r_i. Onder toepassing van de voortplantingswet vinden we uit (5) de cofactoren G^{ik} der r_i. B.v.

$$G^{11} = u_1u_1g^{11} + u_2u_2g^{22} + \ldots\ldots + u_5u_5g^{55} \qquad (7a)$$

$$G^{12} = u_1v_1g^{11} + u_2v_2g^{22} + \ldots\ldots + u_5v_5g^{55} \qquad (7b)$$

enz.

De gecorrigeerde r_i, dus de $r_i + \eta_i$, moeten aan de betrekkingen voldoen, dus:

$$
\begin{aligned}
r_1 + \eta_1 &= u_o \\
r_2 + \eta_2 &= v_o \\
r_3 + \eta_3 &= w_o
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

In woorden luidt nu het probleem aldus:

Er zijn vijf grootheden gemeten (r_i); van r_1, r_2 en r_3 weten we, dat ze gelijk gemaakt moeten worden aan resp. u_o, v_o en w_o (zie (7)). Volgens (8) betekent dit dus, dat:

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= u_o - r_1 \\
\eta_2 &= v_o - r_2 \\
\eta_3 &= w_o - r_3
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Hoe staat het echter met de correcties η_4 en η_5 ? Voor de grootheden r_4 en r_5 is er geen informatie aanwezig, immers de R_4 en R_5 komen niet in enigerlei betrekking voor. Dit betekent, dat ten aanzien van r_4 en

r_5 geen vereffening behoeft te geschieden en dat dus η_4 en η_5 nul gesteld behoren te worden, wat dit betreft. Deze redenering is echter niet juist, omdat de r_i gecorrelateerd zijn. Wij moeten in zo'n geval de r_i samen als één exemplaar van een 5-dimensionale waarnemingsreeks beschouwen en zo bezien is de informatie, neergelegd in (7), er niet één, enkel voor de r_1, r_2 en r_3, maar voor het gehele stel r_1, r_2, ..., , r_5. Tegenover de informatie staat het complete stel der r_i als één geheel, als één individu (statistische taal). Hoe de r_4 en r_5 zullen veranderen als de r_1, r_2 en r_3 veranderingen ondergaan, is niet te zeggen. Vast staat, dat, als er correlatie is, zij dit stellig zullen moeten doen, immers correlatie tussen kenmerken betekent: juist, dat het ene kenmerk het andere beïnvloedt. We weten echter ook, dat, als er geen correlatie is tussen de kenmerken, er geen beïnvloeding is. We mogen dus alleen besluiten tot $r_4 = \eta_4 = 0$, als beide der waarnemingen r_4 en r_5 gecorreleerd zijn met beide der waarnemingen r_1, r_2 en r_3, hetgeen betekent, dat dan

$$G^{14} = G^{24} = G^{34} = 0$$

en

$$G^{15} = G^{25} = G^{35} = 0$$

moeten zijn. Het is nu nodig, na te gaan of aan deze voorwaarden kan worden voldaan. Uitgeschreven luiden zij:

$$\begin{aligned} G^{14} &= a_1 u_1 g^{11} + \ldots\ldots + a_5 u_5 g^{55} = 0 \\ G^{24} &= a_1 v_1 g^{11} + \ldots\ldots + a_5 v_5 g^{55} = 0 \\ G^{34} &= a_1 w_1 g^{11} + \ldots\ldots + a_5 w_5 g^{55} = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} G^{15} &= b_1 u_1 g^{11} + \ldots\ldots + b_5 u_5 g^{55} = 0 \\ G^{25} &= b_1 v_1 g^{11} + \ldots\ldots + b_5 u_5 g^{55} = 0 \\ G^{35} &= b_1 w_1 g^{11} + \ldots\ldots + b_5 w_5 g^{55} = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Beide der stellen a_i en b_i moet derhalve aan dezelfde drie lineaire, homogene vergelijkingen voldoen, terwijl zij bovendien moeten voldoen aan de eis, met de stellen u_i, v_i en w_i tot een stelsel lineair onafhankelijke transformatieformules (4) te voeren.

Wij moeten nu aantonen, dat het inderdaad mogelijk is, de stellen a_i en b_i op de bovengenoemde wijze te kiezen. Daarvoor maken we gebruik van de volgende

Stelling uit de Algebra. Het stelsel van p homogene lineair onafhankelijke vergelijkingen in n veranderlijken, heeft precies $n - p$ stellen lineair onafhankelijke oplossingen (zie hiervoor b.v. Bôcher, Introduction to higher algebra, Chapter III).

Er zijn dus inderdaad 2 stellen oplossingen van de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1 u_1 g^{11} + \ldots\ldots + x_5 u_5 g^{55} &= 0 \\ x_1 v_1 g^{11} + \ldots\ldots + x_5 v_5 g^{55} &= 0 \\ x_1 w_1 g^{11} + \ldots\ldots + x_5 w_5 g^{55} &= 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

te vinden, die we dan voorgesteld hebben door de a_i en de b_i, waarvan we dan nu tevens weten, dat zij lineair onafhankelijk zijn. Wij moeten nu nog nagaan of de vergelijkingen (4) wel lineair onafhankelijk zijn. Nu zijn de eerste drie daarvan onafhankelijk, omdat dit tot de onderstelling van het probleem behoorde. Wij zullen nu eerst aantonen, dat de vierde vergelijking niet afhankelijk kan zijn van de drie voorafgaande. In het geval van de afhankelijkheid zou men moeten hebben

$$a_i = \lambda u_i + \mu v_i + \nu w_i$$

waarin λ, μ en ν niet alle drie tegelijk nul zouden moeten zijn.

We zouden dan moeten hebben:

$$\begin{aligned} G^{14} &= \lambda G^{11} + \mu G^{12} + \nu G^{13} = 0 \\ G^{24} &= \lambda G^{12} + \mu G^{22} + \nu G^{23} = 0 \\ G^{34} &= \lambda G^{13} + \mu G^{23} + \nu G^{33} = 0 \end{aligned}$$

Nu is, omdat de G^{ik} cofactoren zijn van een stelsel onafhankelijke grootheden (hier r_1, r_2 en r_3), de determinant, waarvan deze cofactoren de elementen zijn, niet nul (zie blz.62 en 63). De vergelijkingen hebben dus geen oplossing, waarbij niet één van de veranderlijken niet nul is. De vierde vergelijking van het stelsel (4) is dus niet afhankelijk van de voorafgaande.

Op analoge wijze toont men aan, dat de vijfde vergelijking evenmin afhankelijk kan zijn van de eerste drie.

Men zou nu nog kunnen hebben, dat

$$b_i = \lambda u_i + \mu v_i + \nu w_i + \kappa a_i$$

Dan wordt

$$\begin{aligned} G^{15} &= \lambda G^{11} + \mu G^{12} + \nu G^{13} &&= 0 \\ G^{25} &= \lambda G^{12} + \mu G^{22} + \nu G^{23} &&= 0 \\ G^{35} &= \lambda G^{13} + \mu G^{23} + \nu G^{33} &&= 0 \\ G^{45} &= &\kappa G^{44} &= G^{45} \end{aligned}$$

Uit de eerste drie vergelijkingen volgt weer

$$\lambda = \mu = \nu = 0$$

Er zou dan blijven

$$b_i = \kappa a_i$$

en dit is uitgesloten, omdat de stellen a_i en b_i juist zo gekozen waren, dat zij onafhankelijk zijn.

Na dit onderzoek mogen wij dus aannemen, dat het inderdaad mogelijk is, de a_i en b_i te kiezen, zodanig, dat voldaan is aan (10) en (11) en het stelsel (4) uit onderling onafhankelijke vergelijkingen bestaat We mogen dus nu concluderen $\eta_4 = 0$ en $\eta_5 = 0$, zodat we voor de bepaling van de ξ_i volgens (6) en (9) hebben gekregen:

$$\left.\begin{aligned} u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \ldots\ldots + u_5\xi_5 &= t_u \\ v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + \ldots\ldots + v_5\xi_5 &= t_v \\ w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + \ldots\ldots + w_5\xi_5 &= t_w \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots\ldots + a_5\xi_5 &= 0 \\ b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots\ldots + b_5\xi_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

De leden t_u, t_v en t_w zijn verkregen door in de tweede leden van (9) r_1, r_2 en r_3 te vervangen door hun waarden uit (5) en te letten op de definitie van t_u enz. volgens (2). Naast (13) en (14) hebben we nog (10) en (11) als betrekkingen voor a_i en b_i. De bovenaangehaalde stelling uit de algebra kan in omgekeerde zin worden toegepast. De stellen a_i en b_i waren de lineair onafhankelijke oplossingen van de vergelijkingen (12). Omgekeerd zijn deze vergelijkingen 3 onafhankelijke vergelijkingen, waaraan de beide stellen a_i en b_i voldoen. Er zijn er niet meer en niet minder dan drie. Moeten de stellen a_i en b_i ook nog voldoen aan een vergelijking met coëfficiënten ξ_i, waarvan de beide vergelijkingen (14) de uitdrukking zijn, dan moeten de coëfficiënten dezer laatste betrekking lineair afhankelijk zijn van de coëfficiënten van (12), dus zal men moeten hebben:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= g^{11}u_1K_u + g^{11}v_1K_v + g^{11}w_1K_w \\ \xi_2 &= g^{22}u_2K_u + g^{22}v_2K_v + g^{22}w_2K_w \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_5 &= g^{55}u_5K_u + g^{55}v_5K_v + g^{55}w_5K_w \end{aligned} \qquad (15)$$

waarin dan K_u, K_v en K_w coëfficiënten zijn, die kunnen worden berekend door gebruik te maken van de vergelijkingen (13). Substitueert men de ξ_i volgens (15) in (13) dan ontstaan, lettend op (7a) en (7b),

$$G^{11}K_u + G^{12}K_v + G^{13}K_w = t_u$$
$$G^{12}K_u + G^{22}K_v + G^{23}K_w = t_v \qquad (16)$$
$$G^{13}K_u + G^{23}K_v + G^{33}K_w = t_w$$

waarmee het gezochte vereffeningsvoorschrift verkregen is, hetwelk dan neergelegd is in de vergelijkingen (15) en (16). Het afgeleide voorschrift geldt voor ongecorrelateerde waarnemingen.

Samenvattend is de gang van zaken aldus:
Uitgaande van de gegeven betrekkingen (1) en de cofactoren g^{ii} worden de gecorrigeerde waarnemingen in (1) gesubstitueerd en de vergelijkingen (2) afgeleid. Daarna worden de vergelijkingen (15) opgesteld, waarna de aldus verkregen uitdrukkingen voor de ε_i worden gesubstitueerd in (2). Dan zijn de vergelijkingen (16) verkregen, waaruit K_u, K_v en K_w worden opgelost en volgens (15) de waarden der ε_i worden berekend.

K_u, K_v en K_w heten correlaten , de vergelijkingen (15) noemt men de correlatenvergelijkingen en de vergelijkingen (16) de normaalvergelijkingen. Het vereffeningsvoorschrift zelf heet de methode der kleinste vierkanten.

Opmerking 1.

De coëfficiënten van de normaalvergelijkingen zijn de cofactoren van de bekende leden t_u, t_v en t_w. Immers $t_u = u_o - r_1$ enz., waaruit blijkt, dat de cofactoren van t_u, t_v en t_w dezelfde zijn als die van r_1, r_2 en r_3.

Opmerking 2.

Als de betrekkingen (1) lineair onafhankelijk zijn is de hoofddeterminant van de normaalvergelijkingen niet nul en zijn deze dus steeds oplosbaar. r_1, r_2 en r_3 zijn dan nl. onafhankelijk, waarna uit de theorie op blz. 62 en 63 het gestelde volgt.

Opmerking 3.

Ofschoon de afleiding hier doorgevoerd is voor 5 waarnemingen en drie betrekkingen is het duidelijk, dat deze geheel analoog zou verlopen voor een willekeurig aantal (n) waarnemingen en een willekeurig aantal (b) betrekkingen ($b < n$). Wij krijgen dan b correlaten en b normaalvergelijkingen (16). In de correlatenvergelijkingen (15) komen natuurlijk ook alle correlaten voor.

Opmerking 4.

Omdat de methode van de kleinste vierkanten voor correlatievrije waarnemingen slechts de kennis van de grootheden g^{ii} vereist en deze evenredig zijn met de moduli van de waarnemingen, is het derhalve slechts nodig, de verhouding van de moduli van de waarnemingen te kennen. Dit

is van belang, omdat het veelal gemakkelijker is, de verhouding van de moduli, dan deze zelf te bepalen. Zo zal, als wij van onze waarnemingen weten, dat zij onder nagenoeg gelijke omstandigheden met hetzelfde instrumentarium zijn gedaan en overigens bekend is, dat zij als exemplaren van een normale verdeling mogen worden beschouwd, het veelal geoorloofd zijn, de optredende cofactoren alle 1 te stellen.

5.4. Eigenschap van de methode der kleinste vierkanten.

Volgens de vergelijkingen (15) van § 5.3. heeft men, als weer

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}$$

$$g_{ii}\,\varepsilon_i = u_i K_u + v_i K_v + w_i K_w \quad (i : 1 \rightarrow n) \qquad (1)$$

en dus

$$E = \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right] = \left[u_i\varepsilon_i\right]K_u + \left[v_i\varepsilon_i\right]K_v + \left[w_i\varepsilon_i\right]K_w$$

of met het oog op 5.3.-(2):

$$E = \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right] = t_u K_u + t_v K_v + t_w K_w \qquad (2)$$

De vierkante haken zijn door Gauss ingevoerd om een som aan te geven. Hier gaat de sommatie over i van 1 tot n. We zullen aantonen, dat E een minimum is d.w.z. dat voor alle mogelijke stellen ε_i, die we, ter onderscheiding met het volgens het vereffeningsvoorschrift bepaalde η_i, aan zullen duiden met ε_i, die aan 5.3.-(2) voldoen, dus waarvoor

$$\begin{aligned} \left[u_i\eta_i\right] &= t_u \\ \left[v_i\eta_i\right] &= t_v \\ \left[w_i\eta_i\right] &= t_w \end{aligned} \qquad (3)$$

geldt:

$$\left[g_{ii}\eta_i\eta_i\right] \gg \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right]$$

Nu is, omdat

$$\eta_i = \varepsilon_i + (\eta_i - \varepsilon_i)$$

$$\left[g_{ii}\eta_i\eta_i\right] = \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right] + 2\left[g_{ii}\varepsilon_i(\eta_i - \varepsilon_i)\right] + \left[g_{ii}(\eta_i - \varepsilon_i)(\eta_i - \varepsilon_i)\right] \qquad (4)$$

Nu is de middelste term in het tweede lid nul, hetgeen blijkt, als we er de uitdrukkingen volgens (1) der ε_i in substitueren. We krijgen dan

$$\left[g_{ii}\varepsilon_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] = K_u \left[u_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] + K_v \left[v_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] + K_w \left[w_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right]$$

Nu is, omdat

$$\left[u_i \varepsilon_i \right] = t_u$$

volgens 5.3.-(2), en

$$\left[u_i \eta_i \right] = t_u$$

volgens (3),

$$\left[u_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] = 0$$

Zo zijn ook de coëfficiënten van K_v en K_w nul en is dus inderdaad

$$\left[g_{ii} \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] = 0$$

De derde term in het tweede lid van (4) is steeds positief, dus is hiermee bewezen, dat

$$\left[g_{ii}\eta_i\eta_i \right] > \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i \right]$$

Aan de minimum eigenschap denkt het vereffeningsproces zijn naam, want als de g_{ii} alle 1 zijn, wordt $\left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i \right]$

$$\left[\varepsilon_i\varepsilon_i \right]$$

en dit is dan een som van kwadraten. Feitelijk zou de methode dus moeten heten: " de methode van de kleinste som van vierkanten ". Men gebruikt echter de naam: " methode der kleinste vierkanten ".

Omgekeerd volgt uit de eis, dat E een minimum moet zijn, het afgeleide vereffeningsvoorschrift. Wij gaan daartoe weer uit van (4). De η_i voldoen aan (4) en de ε_i aan een overeenkomstig stelsel. Is nu de middelste term in het tweede lid van (4) nul voor <u>elk</u> waardestel η_i, dat aan (3) voldoet, dan is, zoals we gezien hebben, $\left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i \right]$ een minimum. Deze eis is dus <u>voldoende</u>. Dat de eis ook <u>noodzakelijk</u> is, kan als volgt worden aangetoond. Stel

$$\zeta_i = \varepsilon_i + \rho(\eta_i - \varepsilon_i)$$

Een stel ζ_i voldoet dan ook aan een stel vergelijkingen als (3) voor elke waarde van ρ. We hebben dan

$$\left[g_{ii}\zeta_i\zeta_i \right] = \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i \right] + 2\rho \left[g_{ii}\varepsilon_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] + \rho^2 \left[g_{ii} \ (\eta_i - \varepsilon_i)(\eta_i - \varepsilon \right.$$

We kunnen nu ρ altijd zo klein denken, dat de laatste term uit het tweede lid verwaarloosd mag worden tegenover de andere termen.

Is nu

$$\left[g_{ii}\varepsilon_i \ (\eta_i - \varepsilon_i) \right] > 0$$

dan nemen we ρ negatief en dan is

$$\left[g_{ii}g_i\varepsilon_i\right] < \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right] \qquad (5)$$

Is daarentegen

$$\left[g_{ii}g_i\left(\eta_i - \varepsilon_i\right)\right] < 0$$

dan kan ρ positief genomen worden, waarmee men eveneens tot (5) komt. In beide gevallen dus kan $\left[g_{ii}\varepsilon_i\,\varepsilon_i\right]$ geen minimum zijn. Dit kan alleen zich voordoen als inderdaad

$$\left[g_{ii}\varepsilon_i\left(\eta_i - \varepsilon_i\right)\right] = 0$$

of

$$\left[g_{ii}\varepsilon_i\eta_i\right] = \left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right] \qquad (6)$$

voor alle waardestellen η_i, die aan (3) voldoen.

Dan echter moeten de coëfficiënten van de η_i in (6) lineair afhankelijk zijn van die van (3), dus

$$g_{ii}\varepsilon_i = u_iK_u + v_iK_v + w_iK_w$$

of

$$\varepsilon_i = g^{ii}\left(u_iK_u + v_iK_v + w_iK_w\right)$$

en

$$\left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right] = t_uK_u + t_vK_v + t_wK_w \qquad (7)$$

waarmee het eerder afgeleide voorschrift opnieuw verkregen is.

Opmerking.

Bij de oplossing van practische vraagstukken verdient het aanbeveling $\left[g_{ii}\varepsilon_i\varepsilon_i\right]$ te berekenen eenmaal uit de ε_i zelf, een tweede maal volgens (7). Dit is een waardevolle contrôle op het rekenwerk.

5.5. Meetkundige illustratie van de methode der kleinste vierkanten.

Laten we aannemen, dat er 3 waar te nemen grootheden P_i zijn en 2 betrekkingen.

$$\left.\begin{aligned} u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3 &= u_o \\ v_1P_1 + v_2P_2 + v_3P_3 &= v_o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

De waarnemingen zijn p_i en de bijbehorende cofactoren g^{ii}. Wij nemen nu een rechthoekig assensysteem aan, met maateenheden op de assen, gelijk aan $\sqrt{g_{ii}}$. Als dan x_i de coördinaten van een punt zijn, geldt voor de afstand l van dit punt tot de oorsprong

fig. 5.5.-1

$$l^2 = g_{11}x_1x_1 + g_{22}x_2x_2 + g_{33}x_3x_3 \qquad (2)$$

De betrekkingen (1) bepalen elk een plat vlak. Laat a daarvan de snijlijn zijn. Is verder G het punt met de coördinaten p_i (G wordt het " gemeten " punt genoemd), dan zal in het algemeen G niet op a liggen, omdat de p_i in het algemeen niet aan (1) zullen voldoen.

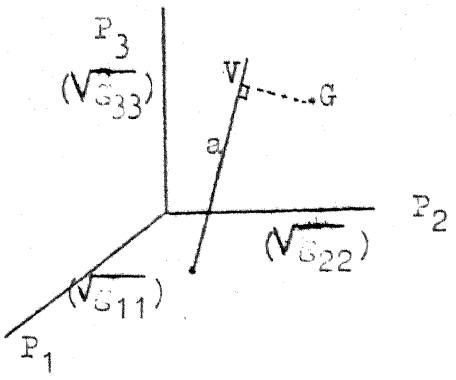


fig. 5.5.-1.

Wij corrigeren nu de p_i elk met een bedrag ξ_i. Het punt V, waarvan de coördinaten $p_i + \xi_i$ zijn, zal op a moeten liggen, omdat de gecorrigeerde waarnemingen wel aan (1) moeten voldoen. (V noemen we het " vereffende"punt). Dit punt V nu moet zo gekozen worden, dat

$$g_{11}\xi_1\xi_1 + g_{22}\xi_2\xi_2 + g_{33}\xi_3\xi_3 \qquad (3)$$

minimaal is. Omdat de ξ_i de coördinaatverschillen zijn van de punten G en V stelt,in verband met (2), (3) het kwadraat van de afstand GV voor. Wanneer deze afstand minimum moet zijn, met V het voetpunt zijn van de loodlijn uit G op a neergelaten.

Is er één betrekking in plaats van twee, dan is de meetkundige plaats van V een plat vlak en moet uit G de loodlijn op dit platte vlak neergelaten worden.

Als er meer dan drie waarnemingen zijn missen we de mogelijkheid van een meetkundige voorstelling, maar wij kunnen in een meetkundige terminologie blijven spreken. Bij vijf waarnemingen en drie betrekkingen geeft iedere betrekking in de 5- dimensionale werkruimte een R_4 (een ruimte van 4 afmetingen). De 3 R_4's doorsnijden elkaar volgens een R_2, een plat vlak dus. De 5 waarnemingen p_i bepalen weer het gemeten punt, waaruit we de loodlijn op het snijvlak (de R_2) moeten neerlaten. De afgeleide formules van de methode der kleinste vierkanten geven dan de oplossing van dit 5- dimensionale meetkundige probleem.

Het kan in bepaalde gevallen van gemak zijn, aan dit meetkundige beeld te denken.

5.6. Algemene afleiding van de methode der kleinste vierkanten. Gecorrelateerde waarnemingen.

We zullen gebruik maken van de notatie van de " Ricci- rekening ". De gegeven betrekkingen zijn

$$u_i^{\rho}\, p^i = u_o^{\rho} \qquad (1)$$

De index i, eventueel k, l, m, doorloopt de rangnummers 1 tot n. Er zijn dus n grootheden P^i. De index ρ, en de gelijksoortige σ, τ, nummeren de betrekkingen. Zij lopen van 1 tot b ($b < n$). We onderstellen, dat de vergelijkingen (1) onafhankelijk zijn. De waarnemingen zijn p^i, hun correcties ξ^i en hun cofactoren g^{ik}, waarbij we nu hebben, dat de g^{ik} met ongelijke index niet nul zijn, althans niet alle. De p^i kunnen dus gecorrelateerd zijn. We volgen geheel dezelfde gedachtengang als bij de afleiding van het vereffeningsvoorschrift voor correlatievrije waarnemingen.

De gecorrigeerde waarnemingen moeten aan (1) voldoen, dus

$$u_i^\rho \, (\, p^i + \xi^i \,) = u_o^\rho$$

of

$$u_i^\rho \xi^i = u_o^\rho - u_i^\rho p^i = t^\rho \qquad (2)$$

waarin de t^ρ weer de tegensprakken zijn. We onderwerpen de P^i aan de lineaire transformatie

$$u_i^\rho P^i = R^\rho \qquad (3)$$

$$b_i^\alpha P^i = R^\alpha \qquad (4)$$

De index α, eventueel β, γ, doorloopt de rangnummers b+1 tot n.

Voor de waarnemingen levert de transformatie

$$u_i^\rho p^i = r^\rho \qquad (5)$$

$$b_i^\alpha p^i = r^\alpha \qquad (6)$$

Trekken we (5) van (3) en (6) van (4) af, dan hebben we nog

$$u_i^\rho \xi^i = R^\rho - r^\rho = \eta^\rho \qquad (7)$$

$$b_i^\alpha \xi^i = R^\alpha - r^\alpha = \eta^\alpha \qquad (8)$$

De r^ρ en r^α zijn de "waarnemingen" voor de R^ρ en de R^α, η^ρ en η^α hun correcties.

De cofactoren der r^ρ en r^α berekenen we met de voortplantingswet uit (5) en (6).

Er zijn drie soorten

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u_i^\rho u_k^\sigma$$

$$G^{\rho\beta} = g^{ik} u_i^\rho b_k^\beta$$

$$G^{\alpha\beta} = g^{ik} b_i^\alpha b_k^\beta$$

We kiezen nu de b_i^α zo, dat het stel grootheden r^α enerzijds en het stel r^ρ anderzijds correlatievrij zijn. Daarvoor moet gezorgd worden, dat de cofactoren $G^{\rho\beta}$ nul worden. Dus moeten volgens (5) en (6) de b_i^α voldoen aan:

$$G^{\rho\beta} = g^{ik} u_i^\rho b_k^\beta = 0 \qquad (9)$$

Volgens de in § 5.3. genoemde stelling uit de algebra is het mogelijk, n - b stellen b_k^α te vinden, die lineair onafhankelijk zijn, waarbij elk stel aan deze b vergelijkingen (9) voldoet. Wij moeten nu nog aantonen, dat deze stellen b_i^α met de u_i^ρ voeren tot een lineair onafhankelijk stelsel transformatieformules (3), (4). Afhankelijkheid zou bestaan als

$$\lambda_\rho u_i^\rho + \mu_\alpha b_i^\alpha = 0$$

waarin niet <u>alle</u> λ_ρ en μ_α nul zijn. Dan zou ook

$$\lambda_\rho g^{ik} u_i^\rho u_k^\sigma + \mu_\alpha g^{ik} b_i^\alpha u_k^\sigma = 0$$

of

$$\lambda_\rho G^{\rho\sigma} + \mu_\alpha G^{\alpha\sigma} = 0 \qquad (10)$$

en

$$\lambda_\rho g^{ik} u_i^\rho b_k^\beta + \mu_\alpha g^{ik} b_i^\alpha b_k^\beta = 0$$

of

$$\lambda_\rho G^{\rho\beta} + \mu_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \qquad (11)$$

Wegens (9) reduceren (10) en (11) zich tot

$$\lambda_\rho G^{\rho\sigma} = 0 \qquad (12)$$

en

$$\mu_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \qquad (13)$$

(12) is een stelsel van b homogene lineaire vergelijkingen in de b coëfficiënten λ_ρ. De determinant van dit stelsel is niet nul, omdat het stelsel (3) onafhankelijk is (gegeven). (13) is een stelsel van (n - b)/ veranderlijken μ_α, waarvan de determinant ook niet nul is, omdat we de b_i^α in (4) zo konden kiezen, dat ook dit stelsel onafhankelijk was. We zien dus, dat noch (12), noch (13) een oplossing kunnen hebben, waarbij niet alle λ_ρ en μ_α nul zijn. Hiermee is dan de onafhankelijkheid van de transformatieformules (3) en (4) aangetoond.

In de nieuwe veranderlijken luidt nu het vraagstuk als volgt: Voor de n grootheden R^ρ en R^α bestaan de betrekkingen

$$R^\rho = u_o^\rho$$

(volgen uit (3) en (1)). De waarnemingen zijn r^ρ en r^α, hun correcties η^ρ en η^α en hun cofactoren:

/ homogene vergelijkingen in (n - b)

$$\left\| G^{ik} \right\| \equiv \left\| \begin{array}{cccccccc} G^{11} & G^{12} & \ldots\ldots & G^{1b} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ G^{12} & G^{22} & \ldots\ldots & G^{2b} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ G^{1b} & G^{2b} & \ldots\ldots & G^{bb} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & G^{b+1,b+1} & \ldots\ldots & G^{b+1,n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & G^{b+1,b+2} & \ldots\ldots & G^{b+2,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & G^{b+1,n} & \ldots\ldots & G^{n,n} \end{array} \right\|$$

Vullen we de gecorrigeerde waarnemingen in de betrekkingen in, dan krijgen we

$$\eta^{\rho} = u_o^{\rho} - r^{\rho} \qquad (14)$$

Omdat de r^{α} correlatievrij zijn met de r^{ρ} en de R^{α} niet in de betrekkingen voorkomen, waardoor dus de r^{α} buiten de vereffening vallen, is:

$$\eta^{\alpha} = 0 \qquad (15)$$

Volgens (13) en (7) is dus

$$u_i^{\rho}\xi^i = u_o^{\rho} - r^{\rho}$$

of in verband met (2) en (5)

$$u_i^{\rho}\xi^i = t^{\rho} \qquad (16)$$

en volgens (14) en (8)

$$b_i^{\alpha}\xi^i = 0 \qquad (17)$$

Om uit (15) en (16) de ξ^i op te lossen, bedenken we, dat de b_i^{α} n - b onafhankelijke oplossingen waren, zoals (9) aangeeft, van de b homogene vergelijkingen in de c_i

$$g^{ik}u_k^{\rho}c_i = 0 \qquad (18)$$

Omgekeerd zijn deze vergelijkingen precies de b onafhankelijke vergelijkingen, waar de b_i^{α} aan voldoen. Moeten de b_i^{α} nu ook nog aan de homogene vergelijking (16 voldoen, dan moet deze laatste lineair afhankelijk zijn van de b vergelijkingen (17), dus

$$\xi^i = g^{ik}u_k^{\rho}K_{\rho} \qquad (19)$$

waarmee de correlatenvergelijkingen verkregen zijn.

Substitueren we deze uitdrukkingen voor de ξ^i in (15), dan ontstaan de normaalvergelijkingen

$$G^{\rho\sigma}K_{\sigma} = t^{\rho} \qquad (20)$$

waarin

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma} \qquad (21)$$

(18), (19) en (20) vormen het vereffeningsvoorschrift voor gecorrelateerde waarnemingen. Als bijzonder geval vloeit hier natuurlijk het eerder afgeleide voorschrift voor ongecorrelateerde waarnemingen uit voort.

Definiëren we de grootheden g_{ik} weer door

$$g_{ik} g^{il} = \delta_k^l$$

dan volgt uit (18)

$$g_{ik} \varepsilon^i = u_k^{\rho} K_{\rho}$$

en wordt

$$E = g_{ik} \varepsilon^i \varepsilon^k = u_k^{\rho} \varepsilon^k K_{\rho} = t^{\rho} K_{\rho} \qquad (22)$$

. Opmerking.

Ook bij het vereffeningsvraagstuk met gecorrelateerde waarnemingen is gebleken, dat het voldoende is, de cofactoren g^{ik} te kennen. Van de moduli en correlatiebedragen komt derhalve het alleen op hun verhouding aan.

5.7. Niet lineaire betrekkingen.

Zijn de betrekkingen niet lineair, zoals tot nu toe werd ondersteld, dan worden deze op de volgende wijze tot lineaire herleid.

Stel

$$f (P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n) = 0$$

is een dergelijke betrekking. Substitutie hierin van de gecorrigeerde waarnemingen geeft

$$f\{(p_1 + \varepsilon_1), (p_2 + \varepsilon_2), \ldots\ldots, (p_n + \varepsilon n)\} = 0$$

Ontwikkeld in een reeks van Taylor ontstaat hieruit:

$$f (p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n) + \frac{\partial f}{\partial p_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2} \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \varepsilon_n +$$

$$+ \text{hogere graads termen} = 0$$

waarin de waarden van de partiële afgeleiden te berekenen zijn voor het stel waarden $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$. De ε_i zijn veelal klein. Laten we dus de hogere graads termen weg bij de reeksontwikkeling, dan maken we weliswaar een fout, maar meestal een zeer kleine. De betrekking is echter nu lineair in ε_i geworden en de ontwikkelde handelwijze voor lineaire betrekkingen kan worden toegepast. Zijn de ε_i gevonden, dan kan men met de oorspronkelijk gegeven betrekking nagaan of de gecorrigeerde waarne-

mingen deze in voldoende mate bevredigen. Mocht dit niet zo zijn, dan moet men te werk gaan volgens een iteratieproces, d.w.z. volgens een stapsgewijze benadering. Wij zullen hier niet op ingaan, omdat bij de practische toepassing dit geval zich maar uiterst zelden voordoet.

HOOFDSTUK VI.

De ontwikkeling van de techniek van de methode der kleinste vierkanten voor correlatievrije waarnemingen.-

6.1. De gewichten.

Bij de afleiding van het beginsel van de methode der kleinste vierkanten hebben we de cofactoren g^{ii} gebruikt, die evenredig waren met het kwadraat van de modulus. Verder traden op de g_{ii}, omgekeerd evenredig met het kwadraat van de modulus. Men is gewoon, bij de vereffeningsvraagstukken, waarbij de waarnemingen ongecorreleerd zijn, alleen te benigen de gewichten g_{ii}. Eenvoudigheidshalve schrijft men dan g_i, in welke notatie echter het karakter dezer grootheden minder juist uitkomt.

Men schrijft dus (de bovenindex is een exponent)

$$\frac{\mu^2}{g_i} = \mu_i^2$$

waarin μ_i de modulus van de waarneming p_i is en g_i het bijbehorende gewicht. Anders geschreven is

$$\mu_1^2 : \frac{1}{g_1} = \mu_2^2 : \frac{1}{g_2} = \ldots\ldots = \mu_n^2 : \frac{1}{g_n} = \mu^2 : \frac{1}{1}$$

Blijkens deze aaneengeschakelde evenredigheid is μ op te vatten als de modulus van die waarneming, die in het gekozen systeem van gewichten het gewicht 1 zou verkrijgen.

6.2. Standaardvraagstuk I.

De vorm, waarin het probleem gesteld is in §5.3., waar het beginsel van de methode voor de vereffening werd afgeleid, noemen we standaardvraagstuk I. Samenvattend hadden we daar het volgende.

Gegeven de betrekkingen

$$u_1P_1 + u_2P_2 + \ldots\ldots + u_nP_n = u_o$$

$$v_1P_1 + v_2P_2 + \ldots\ldots + v_nP_n = v_o$$

$$w_1P_1 + w_2P_2 + \ldots\ldots + w_nP_n = w_o$$

tussen de te meten grootheden P_i, en de waarnemingen p_i met hun gewichten g_i.

Gevraagd de correcties ε_i aan de p_i.

Oplossing. Substitueer de gecorrigeerde waarnemingen $p_i + \varepsilon_i$ in de betrekkingen en bereken de tegenspraken t_u, t_v en t_w.

$$u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + u_n\varepsilon_n = u_o - \left[u_i p_i\right] = t_u$$
$$v_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + v_n\varepsilon_n = v_o - \left[v_i p_i\right] = t_v \qquad (1)$$
$$w_1\varepsilon_1 + w_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + w_n\varepsilon_n = w_o - \left[w_i p_i\right] = t_w$$

De correcties zijn

$$g_i\varepsilon_i = u_i K_u + v_i K_v + w_i K_w \qquad (2)$$

Dit zijn de correlatenvergelijkingen. De ε_i hieruit, gesubstitueerd in (1), levert de normaalvergelijkingen

$$\left[\frac{u_i u_i}{g_i}\right]K_u + \left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]K_v + \left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]K_w = t_u$$
$$\left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]K_u + \left[\frac{v_i v_i}{g_i}\right]K_v + \left[\frac{v_i w_i}{g_i}\right]K_w = t_v \qquad (3)$$
$$\left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]K_u + \left[\frac{v_i w_i}{g_i}\right]K_v + \left[\frac{w_i w_i}{g_i}\right]K_w = t_w$$

en ten slotte

$$E = \left[g_i\varepsilon_i\varepsilon_i\right] = K_u t_u + K_v t_v + K_w t_w \qquad (4)$$

Wij zijn hier uitgegaan van lineaire betrekkingen. Hoe te handelen voor het geval ze niet lineair zijn, is aangegeven in § 5.7. Het komt dikwijls voor, dat men geinteresseerd is in een grootheid, die een functie is van de vereffende waarnemingen. Wij nemen deze functie eerst lineair en stellen

$$\wedge = l_1 P_1 + l_2 P_2 + \ldots\ldots + l_n P_n$$

De waarde van deze grootheid vinden we door voor de P_i de vereffende waarnemingen $p_i + \varepsilon_i$ te substitueren, dus

$$\wedge = l_1 (p_1 + \varepsilon_1) + l_2 (p_2 + \varepsilon_2) + \ldots\ldots + l_n(p_n + \varepsilon_n) \qquad (5)$$

Meestal zal men dan ook de modulus van $\wedge$ wensen te kennen. Wij zullen hiervoor twee afleidingen geven.

Afleiding 1.

Bij dit en soortgelijke problemen komt het berekenen van de modulus van een functie van de waarnemingen neer op het berekenen van de cofactor van de grootheid in kwestie en wel in het systeem van cofactoren en dus van de gewichten, die aan het vereffeningsprobleem, waaraan de waarnemingen werden onderworpen, ten grondslag is gelegd. De cofactor, vermenigvuldigd met μ^2, levert dan het kwadraat van de gezochte middelbare fout op. Men zie § 4.5.

De coëfficiënten van de normaalvergelijkingen zijn de cofactoren van

de bekende leden t_u, t_v, t_w (Opmerking 1, § 5.3.). Wij hebben dus

$$\overline{t_u, t_u} = \left[\frac{u_i u_i}{g_i}\right]$$

$$\overline{t_u, t_v} = \left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]$$

enz.

waarbij wij dus met de streep boven twee door een komma gescheiden grootheden hun cofactor hebben aangegeven.

Met de normaalvergelijkingen hebben we nu

$$\left[\frac{u_i u_i}{g_i}\right]\overline{K_u, t_u} + \left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]\overline{K_v, t_u} + \left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_w, t_u} = \overline{t_u, t_u} = \left[\frac{u_i u_i}{g_i}\right]$$

$$\left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]\overline{K_u, t_u} + \left[\frac{v_i v_i}{g_i}\right]\overline{K_v, t_u} + \left[\frac{v_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_w, t_u} = \overline{t_v, t_u} = \left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]$$

$$\left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_u, t_u} + \left[\frac{v_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_v, t_u} + \left[\frac{w_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_w, t_u} = \overline{t_w, t_u} = \left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]$$

waaruit direct volgt

$$\overline{K_u, t_u} = 1 \; ; \quad \overline{K_v, t_u} = 0 \; ; \quad \overline{K_w, t_u} = 0$$

Op geheel analoge manier leiden we af

$$\overline{K_u, t_v} = 0 \; ; \quad \overline{K_v, t_v} = 1 \; ; \quad \overline{K_w, t_v} = 0$$

en

$$\overline{K_u, t_w} = 0 \; ; \quad \overline{K_v, t_w} = 0 \; ; \quad \overline{K_w, t_w} = 1$$

Opnieuw de normaalvergelijkingen gebruikend, is verder

$$\left[\frac{u_i u_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_u} + \left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_v} + \left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_w} = \overline{K_u, t_u} = 1$$

$$\left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_u} + \left[\frac{v_i v_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_v} + \left[\frac{v_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_w} = \overline{K_u, t_v} = 0$$

$$\left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_u} + \left[\frac{v_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_v} + \left[\frac{w_i w_i}{g_i}\right]\overline{K_u, K_w} = \overline{K_u, t_w} = 0$$

Een analoog stelsel van 3 vergelijkingen kunnen we afleiden voor $\overline{K_u, K_v}$ $\overline{K_v, K_v}$ en $\overline{K_v, K_w}$, waarvan de bekende leden in opvolging 0, 1, 0 zijn en een derde stel in $\overline{K_u, K_w}$, $\overline{K_v, K_w}$ en $\overline{K_w, K_w}$ met bekende leden 0, 0, 1. Vergelijken we de situatie hier met de stelsels vergelijkingen (2), (3), (4), (5) en (6) van § 4.1., dan zien we, dat, als het stelsel

$$K_u = Q_{uu}t_u + Q_{uv}t_v + Q_{uw}t_w$$
$$K_v = Q_{vu}t_u + Q_{vv}t_v + Q_{vw}t_w \qquad (6)$$
$$K_w = Q_{wu}t_u + Q_{wv}t_v + Q_{ww}t_w$$

de oplossing van de normaalvergelijkingen geeft, dat we moeten hebben

$$\left[\frac{u_i u_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uu} + \left[\frac{u_i v_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uv} + \left[\frac{u_i w_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uw} = 1$$
$$\left[\frac{u_i v_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uu} + \left[\frac{v_i v_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uv} + \left[\frac{v_i w_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uw} = 0$$
$$\left[\frac{u_i w_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uu} + \left[\frac{v_i w_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uv} + \left[\frac{w_i w_i}{\varepsilon_i}\right] Q_{uw} = 0$$

en nog twee analoge stelsels, waaruit volgt

$$Q_{uu} = \overline{K_u, K_u}$$
$$Q_{uv} = Q_{vu} = \overline{K_u, K_v}$$
$$Q_{uw} = Q_{wu} = \overline{K_u, K_w}$$
enz.

m.a.w. <u>de cofactoren van de correlaten zijn de coëfficiënten van de bekende termen in de oplossing van de normaalvergelijkingen.</u>

Wij gaan nu verder rekenen. Volgens (2) is

$$\varepsilon_i \overline{\varepsilon_i, t_u} = u_i \overline{K_u, t_u} + v_i \overline{K_v, t_u} + w_i \overline{K_w, t_u} = u_i$$

Omdat

$$t_u = u_o - \left[u_i p_i\right]$$

is

$$\overline{p_i, t_u} = -\frac{u_i}{\varepsilon_i}$$

Uit beide resultaten volgt

$$\overline{(p_i + \varepsilon_i), t_u} = 0$$

Zo is ook

$$\overline{(p_i + \varepsilon_i), t_v} = 0$$
$$\overline{(p_i + \varepsilon_i), t_w} = 0$$

Dus een gecorrigeerde waarneming is niet gecorrelateerd met de tegensprakken. Met het oog op (6) is voorts

$$\overline{(p_i + \varepsilon_i), K_u} = Q_{uu}\overline{(p_i + \varepsilon_i), t_u} + Q_{uv}\overline{(p_i + \varepsilon_i), t_v} + Q_{uw}\overline{(p_i + \varepsilon_i), t_w} = 0$$

en evenzo

$$\overline{(p_i + \varepsilon_i)\,,\,K_v} = 0 \qquad \overline{(p_i + \varepsilon_i)\,,\,K_w} = 0$$

Op analoge wijze is dan volgens (2) ook

$$\overline{(p_i + \varepsilon_i)\,,\,\varepsilon_k} = 0$$

of in woorden:

alle grootheden van de groep gecorrigeerde waarnemingen enerzijds en alle grootheden van de groep correcties anderzijds, zijn onderling correlatievrij. Dan is echter ook een lineaire functie van de grootheden van de eerste groep correlatievrij met een lineaire functie van de grootheden van de andere groep, dus

$$\overline{\left[l_i\,(p_i + \varepsilon_i)\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} = 0 \qquad (7)$$

Nu kan de berekening van de cofactor van $\wedge$, zie (5), gemakkelijk geschieden.

$$\begin{aligned}\overline{\wedge\,,\wedge} &= \overline{\left[l_i\,(p_i + \varepsilon_i)\right]\,,\,\left[l_i\,(p_i + \varepsilon_i)\right]} \\ &= \overline{\left[l_i\,(p_i + \varepsilon_i)\right]\,,\,\left[l_i p_i\right]} + \overline{\left[l_i\,(p_i + \varepsilon_i)\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} \\ &= \overline{\left[l_i p_i\right]\,,\,\left[l_i p_i\right]} + \overline{\left[l_i\varepsilon_i\right]\,,\,\left[l_i p_i\right]}\end{aligned}$$

of omdat volgens (7)

$$\overline{\left[l_i p_i\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} + \overline{\left[l_i\varepsilon_i\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} = 0$$

$$\overline{\wedge\,,\wedge} = \overline{\left[l_i p_i\right]\,,\,\left[l_i p_i\right]} - \overline{\left[l_i\varepsilon_i\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} \qquad (8)$$

Om de tweede term in het tweede lid te berekenen moeten we uitgaan van (2). We hebben

$$\left[l_i\varepsilon_i\right] = \left[\frac{u_i l_i}{s_i}\right] K_u + \left[\frac{v_i l_i}{s_i}\right] K_v + \left[\frac{w_i l_i}{s_i}\right] K_w$$

of

$$\left[l_i\varepsilon_i\right] = B_u K_u + B_v K_v + B_w K_w$$

dus

$$\begin{aligned}\overline{\left[l_i\varepsilon_i\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} = {} & B_u B_u Q_{uu} + 2\,B_u B_v Q_{uv} + 2\,B_u B_w Q_{uw} + \\ & + B_v B_v Q_{vv} + 2\,B_v B_w Q_{vw} + \\ & + B_w B_w Q_{ww}\end{aligned}$$

Deze uitdrukking kunnen we symbolisch schrijven door een grootheid als Q_{uw} te schrijven als $Q_u . Q_w$. De Q met één index is dan een symbool en geen algebraische grootheid. Het product van twee zulke symbolen levert pas een algebraische grootheid. We krijgen dan

$$\overline{\left[l_i\varepsilon_i\right]\,,\,\left[l_i\varepsilon_i\right]} = (B_u Q_u + B_v Q_v + B_w Q_w)^2$$

De eerste term in het tweede lid van (8) berekenen we eenvoudig door de voortplantingswet. We vinden

$$\overline{\left[l_i p_i\right], \left[l_i p_i\right]} = \left[\frac{l_i l_i}{g_i}\right]$$

waarmee het eindresultaat wordt

$$\overline{\Lambda, \Lambda} = \left[\frac{l_i l_i}{g_i}\right] - \left(B_u Q_u + B_v Q_v + B_w Q_w \right)^2 \qquad (9)$$

Wenst men de modulus van Λ te kennen, dan geschiedt de berekening daarvan eenvoudig door de gevonden cofactor met de evenredigheidsfactor μ μte vermenigvuldigen.

$$\overline{\mu\Lambda, \mu\Lambda} = \overline{\Lambda, \Lambda}\,\mu\mu$$

Zijn er meerdere grootheden Λ bij het probleem betrokken, b.v.

$$\Lambda^1 = \left[l_i^1 p_i\right] \qquad (10)$$

$$\Lambda^2 = \left[l_i^2 p_i\right] \qquad (11)$$

dan kan het zijn, dat men de cofactor $\overline{\Lambda^1, \Lambda^2}$ moet weten. Om deze te berekenen kan men de eenvoudige kunstgreep toepassen en eerst opschrijven $\overline{\Lambda^3, \Lambda^3}$ als

$$\Lambda^3 = \Lambda^1 + \Lambda^2 \qquad (12)$$

en het resultaat naderhand splitsen. Volgens (10) en (11) is

$$\Lambda^3 = \left(l_i^1 + l_i^2 \right) p_i$$

we hebben dan

$$B_u^3 = \left[\frac{u_i \left(l_i^1 + l_i^2 \right)}{g_i}\right] = B_u^1 + B_u^2$$

$$B_v^3 = B_v^1 + B_v^2$$

$$B_w^3 = B_w^1 + B_w^2$$

Formule (9) levert

$$\overline{\Lambda^3, \Lambda^3} = \left[\frac{(l_i^1 + l_i^2)(l_i^1 + l_i^2)}{g_i}\right] \left\{ \left(B_u^1 + B_u^2 \right) Q_u + \left(B_v^1 + B_v^2 \right) Q_v + \left(B_w^1 + B_w^2 \right) Q_w \right\}^2$$

$$= \left[\frac{l_i^1 l_i^1}{g_i}\right] - \left(B_u^1 Q_u + B_v^1 Q_v + B_w^1 Q_w \right)^2 +$$

$$+ 2\left[\frac{l_i^1 l_i^2}{g_i}\right] - 2 \left(B_u^1 Q_u + B_v^1 Q_v + B_w^1 Q_w \right)\left(B_u^2 Q_u + B_v^2 Q_v + B_w^2 Q_w \right) +$$

$$+ \left[\frac{l_i^2 l_i^2}{g_i}\right] - \left(B_u^2 Q_u + B_v^2 Q_v + B_w^2 Q_w \right)^2 \qquad (13)$$

Volgens (12) moet

$$\overline{\Lambda^3,\Lambda^3} = \overline{\Lambda^1,\Lambda^1} + 2\overline{\Lambda^1,\Lambda^2} + \overline{\Lambda^2,\Lambda^2}$$

zodat we door vergelijking met (13) direct vinden

$$\overline{\Lambda^1,\Lambda^2} = \left[\frac{l_i^1 l_i^2}{\varepsilon_i}\right] - \left(B_u^1 Q_u + B_v^1 Q_v + B_w^1 Q_w\right)\left(B_u^2 Q_u + B_v^2 Q_v + B_w^2 Q_w\right)$$

ook symbolisch geschreven.

Afleiding 2.

Wij gaan weer uit van (5), waarin we de ε_i volgens (2) substitueren. Het resultaat is

$$\Lambda = \left[l_i p_i\right] + \left[\frac{l_i u_i}{\varepsilon_i}\right] K_u + \left[\frac{l_i v_i}{\varepsilon_i}\right] K_v + \left[\frac{l_i w_i}{\varepsilon_i}\right] K_w$$

of als we weer stellen

$$\left[\frac{l_i u_i}{\varepsilon_i}\right] = B_u$$

$$\left[\frac{l_i v_i}{\varepsilon_i}\right] = B_v \qquad (14)$$

$$\left[\frac{l_i w_i}{\varepsilon_i}\right] = B_w$$

$$\Lambda = \left[l_i p_i\right] + B_u K_u + B_v K_v + B_w K_w \qquad (15)$$

Nu moeten we nog de correlaten hierin vervangen door hun uitdrukkingen in t_u, t_v en t_w. We doen dit door de op nul herleide normaalvergelijkingen (3) achtereenvolgens te vermenigvuldigen met L_u, L_v en L_w en ze dan af te trekken van (15). In de komende uitdrukking stellen we dan de coëfficiënten van K_u, K_v en K_w nul, dus

$$\left[\frac{u_i u_i}{\varepsilon_i}\right] L_u + \left[\frac{u_i v_i}{\varepsilon_i}\right] L_v + \left[\frac{u_i w_i}{\varepsilon_i}\right] L_w = B_u$$

$$\left[\frac{u_i v_i}{\varepsilon_i}\right] L_u + \left[\frac{v_i v_i}{\varepsilon_i}\right] L_v + \left[\frac{v_i w_i}{\varepsilon_i}\right] L_w = B_v \qquad (16)$$

$$\left[\frac{u_i w_i}{\varepsilon_i}\right] L_u + \left[\frac{v_i w_i}{\varepsilon_i}\right] L_v + \left[\frac{w_i w_i}{\varepsilon_i}\right] L_w = B_w$$

waarmee de overdrachtscoëfficiënten L_u, L_v en L_w bepaald zijn. We krijgen dan

$$\Lambda = \left[l_i p_i\right] + L_u t_u + L_v t_v + L_w t_w$$

Letten we nu op de betekenis van t_u, t_v en t_w volgens (11), dan is, als we schrijven

$$\Lambda = \left[\alpha_i p_i\right] + C \qquad (17)$$

$$\alpha_i = l_i - u_i L_u - v_i L_v - w_i L_w \qquad (18)$$

en

$$C = u_o L_u + v_o L_v + w_o L_w$$

Λ is nu regelrecht in de p_i uitgedrukt, waardoor we volgens de voortplantingswet hebben

$$\overline{\Lambda,\Lambda} = \left[\frac{\alpha_i \alpha_i}{g_i}\right]$$

(C is een constante).

Volgens (18) is

$$\left[\frac{\alpha_i \alpha_i}{g_i}\right] = \left[\frac{\alpha_i l_i}{g_i}\right] - \left[\frac{\alpha_i u_i}{g_i}\right] L_u - \left[\frac{\alpha_i v_i}{g_i}\right] L_v - \left[\frac{\alpha_i w_i}{g_i}\right] L_w$$

Weer volgens (18) is

$$\left[\frac{\alpha_i u_i}{g_i}\right] = \left[\frac{u_i l_i}{g_i}\right] - \left[\frac{u_i u_i}{g_i}\right] L_u - \left[\frac{u_i v_i}{g_i}\right] L_v - \left[\frac{u_i w_i}{g_i}\right] L_w$$

of met het oog op de eerste vergelijking van (16), lettend op de uitdrukking voor B_u uit de eerste vergelijking van (14)

$$\left[\frac{\alpha_i u_i}{g_i}\right] = 0$$

Men bemerkt op volkomen analoge wijze, dat de coëfficiënten van L_v en L_w eveneens nul zijn. Verder is

$$\left[\frac{\alpha_i l_i}{g_i}\right] = \left[\frac{l_i l_i}{g_i}\right] - \left[\frac{u_i l_i}{g_i}\right] L_u - \left[\frac{v_i l_i}{g_i}\right] L_v - \left[\frac{w_i l_i}{g_i}\right] L_w$$

zodat dus, zie (14),

$$\overline{\Lambda,\Lambda} = \left[\frac{\alpha_i \alpha_i}{g_i}\right] = \left[\frac{l_i l_i}{g_i}\right] - B_u L_u - B_v L_v - B_w L_w \qquad (19)$$

Dit resultaat is gelijkluidend met (9), als men er slechts op let, dat de oplossing van het stelsel (16) luidt, zie (6),

$$L_u = Q_{uu} B_u + Q_{uv} B_v + Q_{uw} B_w$$

$$L_v = Q_{uv} B_u + Q_{vv} B_v + Q_{vw} B_w$$

$$L_w = Q_{uw} B_u + Q_{vw} B_v + Q_{ww} B_w$$

en wanneer deze waarden voor L_u, L_v en L_w in (19) worden ingesteld ontstaat inderdaad (9).

6.3. Standaardvraagstuk II.

Bij standaardvraagstuk I waren de betrekkingen, waarvan we er weer drie aannemen, terwijl we het aantal waar te nemen grootheden weer op 5 hebben gesteld:

$$\begin{aligned} u_1P_1 + u_2P_2 + \ldots\ldots + u_5P_5 &= u_o \\ v_1P_1 + v_2P_2 + \ldots\ldots + v_5P_5 &= v_o \\ w_1P_1 + w_2P_2 + \ldots\ldots + w_5P_5 &= w_o \end{aligned} \qquad (1)$$

Dit zijn drie onafhankelijke lineaire vergelijkingen. Laat nu r_1, r_2, ... , r_5 een stel waarden zijn, dat aan de betrekkingen voldoet, dus

$$\begin{aligned} u_1r_1 + u_2r_2 + \ldots\ldots + u_5r_5 &= u_o \\ v_1r_1 + v_2r_2 + \ldots\ldots + v_5r_5 &= v_o \\ w_1r_1 + w_2r_2 + \ldots\ldots + w_5r_5 &= w_o \end{aligned}$$

Trekken we deze vergelijkingen stuk voor stuk van de overeenkomstige van (1) af, dan krijgen we

$$\begin{aligned} u_1 (P_1 - r_1) + u_2 (P_2 - r_2) + \ldots\ldots + u_5 (P_5 - r_5) &= 0 \\ v_1 (P_1 - r_1) + v_2 (P_2 - r_2) + \ldots\ldots + v_5 (P_5 - r_5) &= 0 \\ w_1 (P_1 - r_1) + w_2 (P_2 - r_2) + \ldots\ldots + w_5 (P_5 - r_5) &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

waarmee drie homogene onafhankelijke lineaire vergelijkingen verkregen zijn in de 5 grootheden $P_i - r_i$. Er zijn dus volgens de reeds eerder gebruikte stelling uit de algebra (zie § 5.3.) twee stellen lineair afhankelijke oplossingen van (2). We noemen deze stellen

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$$

$$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$$

waarvoor dus

$$\begin{aligned} [u_i a_i] &= 0 \qquad [u_i b_i] = 0 \\ [v_i a_i] &= 0 \qquad [v_i b_i] = 0 \\ [w_i a_i] &= 0 \qquad [w_i b_i] = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Elke andere oplossing moet dan lineair afhankelijk zijn van de stellen a_i, b_i . Dus

$$P_i - r_i = a_iX + b_iY$$

of

$$a_iX + b_iY + r_i = P_i \qquad (4)$$

We vinden op deze wijze de waar te nemen grootheden P_i uitgedrukt door de parameters X en Y. Elimineren we omgekeerd X en Y uit (4) door elke vergelijking (4) te vermenigvuldigen met u_i en op te tellen, daarna met v_i, weer optellen, en met w_i en ook optellen, dan krijgen we in verband met (3) de vergelijkingen (1) weer terug. Door (4) is het mathematische model voorgesteld in parametergedaante, maar het is hetzelfde model als eerst door (1) werd gegeven.

Voor de P_i zijn de waarnemingen p_i, met de gewichten g_i en de correcties ε_i. De gecorrigeerde waarnemingen moeten aan (4) voldoen, dus

$$a_i X + b_i Y + r_i = p_i + \varepsilon_i \qquad (5)$$

Deze vergelijkingen worden de correctievergelijkingen genoemd.

Bij standaardvraagstuk I hadden we afgeleid

$$g_i \varepsilon_i = u_i K_u + v_i K_v + w_i K_w$$

Vermenigvuldigen we elk dezer vergelijkingen met a_i en tellen we de resultaten samen, dan ontstaat

$$\left[g_i a_i \varepsilon_i\right] = \left[u_i a_i\right] K_u + \left[v_i a_i\right] K_v + \left[w_i a_i\right] K_w$$

Volgens (3) zijn echter de coëfficiënten van de correlaten nul, dus

$$\left[g_i a_i \varepsilon_i\right] = 0 \qquad (6)$$

Op dezelfde manier leidt men af

$$\left[g_i b_i \varepsilon_i\right] = 0 \qquad (7)$$

Substitueren we nu hierin de ε_i volgens (5), dan zijn de normaalvergelijkingen verkregen, nl.

$$\begin{aligned} \left[g_i a_i a_i\right] X + \left[g_i a_i b_i\right] Y &= \left[g_i a_i \left(p_i - r_i \right)\right] \\ \left[g_i a_i b_i\right] X + \left[g_i b_i b_i\right] Y &= \left[g_i b_i \left(p_i - r_i \right)\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

De normaalvergelijkingen bepalen de parameters X en Y, waarna dan de ε_i met (5) kunnen worden berekend. De oplossing van het standaardvraagstuk II wordt dus gegeven door (5) en (8).

We willen thans nog een uitdrukking afleiden voor

$$E = \left[g_i \varepsilon_i \varepsilon_i\right] \qquad (9)$$

Volgens (5) is

$$E = \left[g_i \varepsilon_i \varepsilon_i\right] = \left[g_i a_i \varepsilon_i\right] X + \left[g_i b_i \varepsilon_i\right] Y - \left[g_i \varepsilon_i \left(p_i - r_i \right)\right]$$

hetgeen volgens (6) en (7) wordt

$$E = - \left[g_i \varepsilon_i \left(p_i - r_i \right)\right]$$

Nu opnieuw (5) gebruikend, levert

$$E = \left[g_i (p_i - r_i)(p_i - r_i)\right] - \left[g_i a_i (p_i - r_i) X\right] - \left[g_i b_i (p_i - r_i) Y\right] \qquad (10)$$

Berekening van E, zowel uit de ε_i volgens (9) als met behulp van (10) levert bij de practische toepassing een contrôle op de juistheid van het rekenwerk.

Bij het rekenen heeft men er veelal voordeel van, voor X en Y benaderde waarden X_o en Y_o in te voeren. We stellen dan in (5)

$$X = X_o + \Delta X$$

$$Y = Y_o + \Delta Y$$

waarna we krijgen

$$a_i \Delta X + b_i \Delta Y = p_i - a_i X_o - b_i Y_o - r_i + \varepsilon_i$$

Stellen we dan nog

$$p_i - a_i X_o - b_i Y_o - r_i = f_i \qquad (11)$$

waardoor we krijgen als nieuwe correctievergelijkingen

$$a_i \Delta X + b_i \Delta Y = f_i + \varepsilon_i \qquad (12)$$

dan zullen de f_i numeriek kleine bedragen zijn. Omdat de vergelijkingen (11) op dezelfde manier gebouwd zijn als (5) moeten de normaalvergelijkingen (8) overgaan in

$$\begin{aligned} \left[g_i a_i a_i\right] \Delta X + \left[g_i a_i b_i\right] \Delta Y &= \left[g_i a_i f_i\right] \\ \left[g_i a_i b_i\right] \Delta X + \left[g_i b_i b_i\right] \Delta Y &= \left[g_i b_i f_i\right] \end{aligned} \qquad (13)$$

terwijl (10) wordt

$$E = \left[g_i \varepsilon_i \varepsilon_i\right] = \left[g_i f_i f_i\right] - \left[g_i a_i f_i\right] \Delta X - \left[g_i b_i f_i\right] \Delta Y \qquad (14)$$

Bedragen voor de benaderde waarden kan men vinden door twee vergelijkingen (5) te nemen, daarin de ε_i nul te stellen en hieruit waarden voor X en Y op te lossen.

6.4. De cofactoren van de parameters bij standaardvraagstuk II.

Bij standaardvraagstuk II hebben we analoge eigenschappen wat de cofactoren betreft, als bij standaardvraagstuk I. Ook hier zijn de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen het stelsel van cofactoren van de bekende leden. Zo is vooreerst

$$\left[g_i a_i f_i\right] , \left[g_i b_i f_i\right] = \left[g_i a_i p_i\right] , \left[g_i b_i p_i\right]$$

omdat volgens (11) f_i en p_i slechts een algebraische grootheid verschillen.

Voorts is

$$\overline{\left[g_i a_i p_i\right], \left[g_i b_i p_i\right]} = g_1 g_1 a_1 b_1 \overline{p_1, p_1} + g_1 g_2 a_1 b_2 \overline{p_1, p_2} + \ldots g_1 a_1 b_n \overline{p_1, p_n}$$

$$g_2 g_1 a_2 b_1 \overline{p_2, p_1} + g_2 g_2 a_2 b_2 \overline{p_2, p_2} + \ldots g_1 a_2 b_n \overline{p_2, p_n}$$

enz.

en omdat

$$\overline{p_i \, , \, p_i} = \frac{1}{g_i} \quad \text{en} \quad \overline{p_i \, , \, p_k} = 0$$

wordt

$$\overline{\left[g_i a_i f_i\right], \left[g_i b_i f_i\right]} = \left[g_i a_i b_i\right]$$

Voor de andere coëfficiënten gelden analoge afleidingen

Laat nu de oplossing van de normaalvergelijkingen luiden

$$\begin{aligned} \Delta X &= Q_{xx}\left[g_i a_i f_i\right] + Q_{xy}\left[g_i b_i f_i\right] \\ \Delta Y &= Q_{yx}\left[g_i a_i f_i\right] + Q_{yy}\left[g_i b_i f_i\right] \end{aligned} \qquad (15)$$

dan is

$$\overline{\Delta X \, , \, \Delta X} = \overline{X \, , \, X} = Q_{xx}$$

$$\overline{\Delta X \, , \, \Delta Y} = \overline{X \, , \, Y} = Q_{xy} = Q_{yx}$$

$$\overline{\Delta Y \, , \, \Delta Y} = \overline{Y \, , \, Y} = Q_{yy}$$

We hebben hier nl. een zelfde situatie als bij standaardvraagstuk I. Daar waren de coëfficiënten van de correlaten in de normaalvergelijkingen de cofactoren van de bekende leden. Daaruit volgde, dat in de oplossing van de normaalvergelijkingen de coëfficiënten van de bekende leden de cofactoren zijn van de correlaten. Hier moeten dus de coëfficiënten in de oplossing van de normaalvergelijkingen de cofactoren van de parameters zijn. We hebben hier natuurlijk ook weer de bekende relaties tussen de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen en die van de oplossing (15), te weten

$$\begin{aligned} \left[g_i a_i a_i\right] Q_{xx} + \left[g_i a_i b_i\right] Q_{xy} &= 1 \\ \left[g_i a_i b_i\right] Q_{xx} + \left[g_i b_i b_i\right] Q_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \left[g_i a_i a_i\right] Q_{xy} + \left[g_i a_i b_i\right] Q_{yy} &= 0 \\ \left[g_i a_i b_i\right] Q_{xy} + \left[g_i b_i b_i\right] Q_{yy} &= 1 \end{aligned}$$

We zullen nu nog de cofactoren berekenen van grootheden, die een functie zijn van de parameters. Laat

$$\Lambda^1 = c_1^1 X + c_2^1 Y \, .$$

Volgens de voortplantingswet (de algemene) is dan

$$\overline{\Lambda^1 , \Lambda^1} = c_1^1 c_1^1 \overline{X,X} + 2\, c_1^1 c_2^1 \overline{X,Y} + c_2^1 c_2^1 \overline{Y,Y}$$

$$= c_1^1 c_1^1 Q_{xx} + 2\, c_1^1 c_2^1 Q_{xy} + c_2^1 c_2^1 Q_{yy}$$

We kunnen hier ook de symbolische schrijfwijze benutten. We kunnen dan schrijven

$$\overline{\Lambda^1 , \Lambda^1} = (c_1 Q_x + c_2 Q_y)^2$$

Voor de cofactor van een tweede grootheid

$$\Lambda^2 = c_1^2 X + c_2^2 Y$$

krijgen we een analoge uitdrukking, terwijl

$$\overline{\Lambda^1 , \Lambda^2} = \overline{(c_1^1 Q_x + c_2^1 Q_y) , (c_1^2 Q_x + c_2^2 Q_y)}$$

6.5. Eigenschap van de methode der kleinste vierkanten.

Het gebeurt dikwijls, dat bij een waarnemingsproces sommige of ook wel alle waarnemingen worden herhaald. Het gemakkelijkst is aan te nemen, dat het model in dit geval gegeven is in de parametergedaante van standaardvraagstuk II, dus

$$a_1 X + b_1 Y + r_1 = P_1$$

$$a_2 X + b_2 Y + r_2 = P_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n X + b_n Y + r_n = P_n$$

Laat nu de eerste waarneming 3 maal plaats gevonden hebben. We noemen deze waarnemingen p_1' , p_1'' en p_1''', elk met gewicht g_i. Verder zijn er dan nog de waarnemingen p_2, p_3, ..., p_n, met gewichten g_2, g_3, ..., g_n. De correctievergelijkingen zullen luiden

$$a_1 X + b_1 Y + r_1 = p_1' + \varepsilon_1' \quad \text{gew. } g_1$$

$$a_1 X + b_1 Y + r_1 = p_1'' + \varepsilon_1'' \quad " \quad g_1$$

$$a_1 X + b_1 Y + r_1 = p_1''' + \varepsilon_1''' \quad " \quad g_1$$

$$a_2 X + b_2 Y + r_2 = p_2 + \varepsilon_2 \quad " \quad g_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n X + b_n Y + r_n = p_n + \varepsilon_n \quad " \quad g_n$$

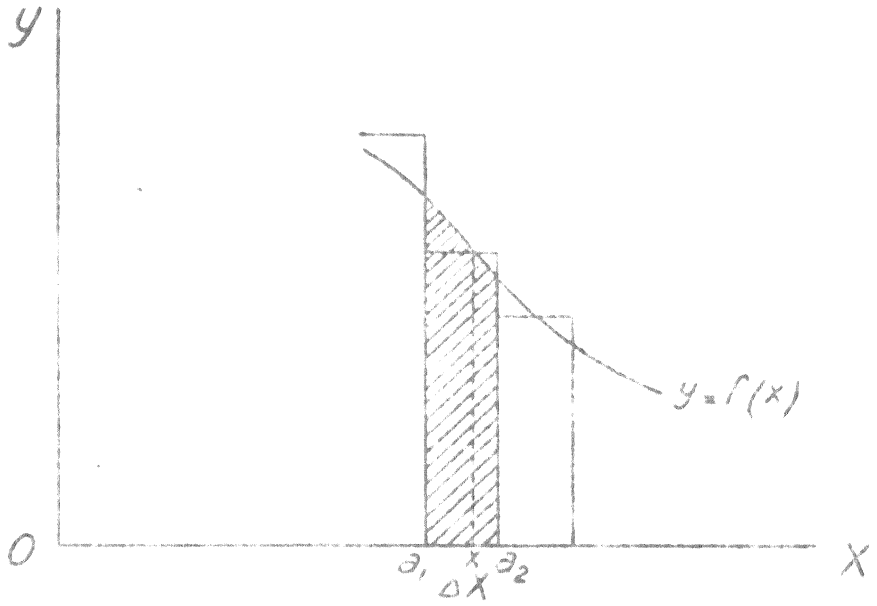


Fig. 9.5 - 1

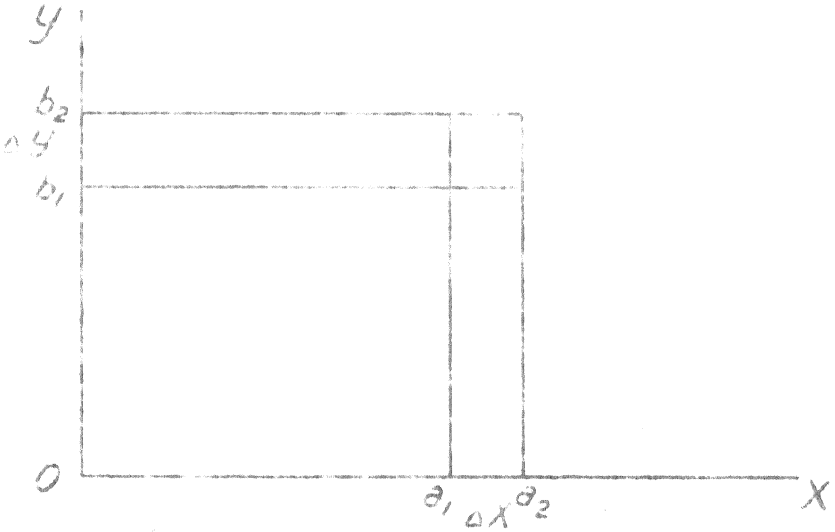


Fig. 9.5 - 2

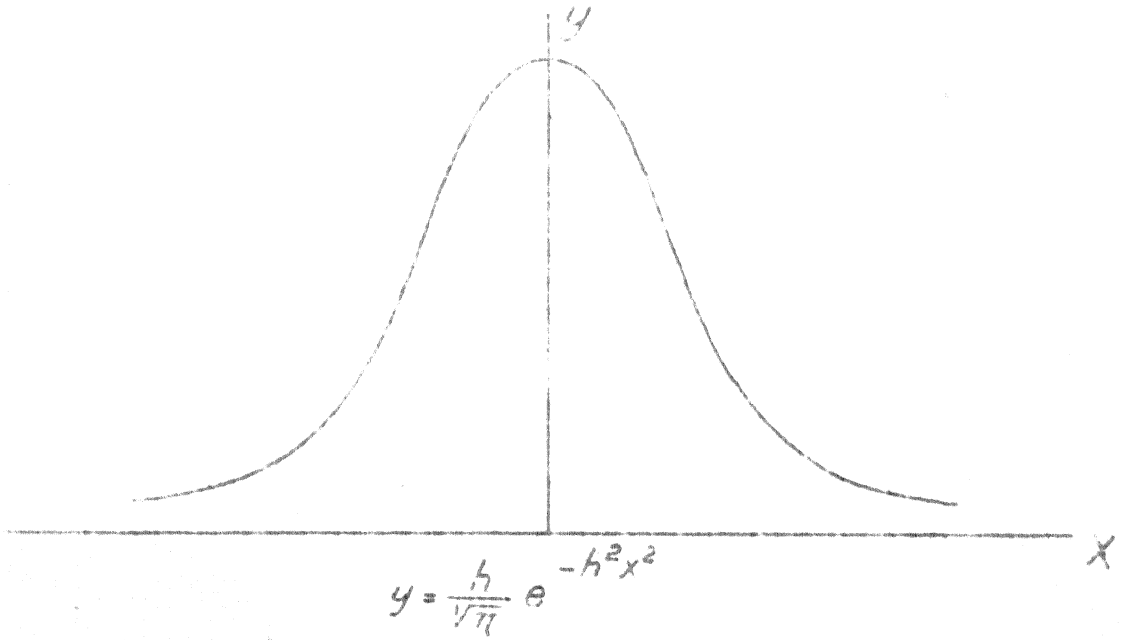


Fig. 9.5 - 3

De bijdrage van de eerste drie correctievergelijkingen tot de coëfficiënt $[g_i a_i a_i]$ van de normaalvergelijking is $3\, g_1 a_1 a_1$; die tot $[g_i a_i b_i]$: $3\, g_1 a_1 b_1$; die tot $[g_i b_i b_i]$: $3 g_1 b_1 b_1$. Die tot $[g_i a_i (p_i - r_i)]$ wordt echter

$$g_1 a_1 \left\{ (p_1' - r_1) + (p_1'' - r_1) + (p_1''' - r_1) \right\}$$

en die tot $[g_i b_i (p_i - r_i)]$

$$g_1 b_1 \left\{ (p_1' - r_1) + (p_1'' - r_1) + (p_1''' - r_1) \right\}$$

Stellen we nu

$$\frac{p_1' + p_1'' + p_1'''}{3} = p_1 \qquad (1)$$

dan gaan de laatste twee bijdragen over in

$$3\, g_1 a_1 p_1 \text{ en } 3\, g_1 b_1 p_1$$

waardoor deze dus een vorm gekregen hebben, geheel in overeenstemming met die van de bijdragen tot de andere coëfficiënten. We krijgen deze zelfde bijdragen als we in plaats van de beschouwde drie correctievergelijkingen nemen de éne

$$a_1 X + b_1 Y + r_1 = p_1 + \varepsilon_1 \qquad \text{gew. } 3\, g_1$$

waarin dan dus p_1 bepaald moet worden volgens (1). Wanneer de waarneming niet driemaal, doch n maal herhaald was, zou het gewicht in plaats van $3\, g_1$ dan $n g_1$ genomen moeten worden, terwijl in plaats van (1) zou komen

$$p_1 = \frac{p_1' + p_1'' + \ldots\ldots + p_1^{(n)}}{n}$$

Waren ook andere waarnemingen herhaald, dan is het duidelijk, dat men deze stuk voor stuk op dezelfde manier mag behandelen.

Ofschoon de eigenschap is aangetoond met behulp van standaardvraagstuk II zal het duidelijk zijn, dat dit een niet wezenlijk element van de eigenschap is. Immers men kan de zaak zo zien. Eerst het rekenkundig gemiddelde bepalen en het nieuwe gewicht vaststellen, daarna standaardvraagstuk II toepassen met de berekende gemiddelden als waarnemingen. Maar dan kan men de vereffening ook uitvoeren volgens standaardvraagstuk I, omdat dit het zelfde probleem is, alleen in andere vorm gesteld.

HOOFDSTUK VII.

De techniek van de methode van de kleinste vierkanten voor gecorrelateerde waarnemingen.

7.1. Standaardvraagstuk I.

De techniek van de methode der kleinste vierkanten kan zeer veel overzichtelijker dan in Hoofdstuk VI ontwikkeld worden, onder gebruikmaking van de notatie van de Ricci-rekening; men kan er dan ook dieper in doordringen. In dit hoofdstuk zal dit geschieden.

Wij sluiten aan bij de afleiding van het beginsel van de methode in §5.6.

De betrekkingen waren

$$u_i^{\rho} p^i = u_o^{\rho} \qquad i,k,l,m : 1 \rightarrow n \qquad \rho,\sigma,\tau,\varphi : 1 \rightarrow b \qquad b < n \qquad (1)$$

De waarnemingen zijn p^i, de correcties ε^i en de cofactoren der waarnemingen g^{ik}. De gecorrigeerde waarnemingen moeten voldoen aan (1), dus

$$u_i^{\rho} (p^i + \varepsilon^i) = u_o^{\rho}$$

of

$$u_i^{\rho} \varepsilon^i = u_o^{\rho} - u_i^{\rho} p^i = t^{\rho} \qquad (2)$$

waarin de t^{ρ} de tegenspraken zijn.

De afgeleide regel luidt dan

$$\varepsilon^i = g^{ik} u_k^{\rho} K_{\rho} \qquad (3)$$

(de correlatenvergelijkingen), met de normaalvergelijkingen

$$G^{\rho\sigma} K_{\rho} = t^{\sigma} \qquad (4)$$

waarin

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma} \qquad (5)$$

en

$$E = g_{ik} \varepsilon^i \varepsilon^k = K_{\rho} t^{\rho} \qquad (6)$$

Dit waren de resultaten van §5.6. De vorm, waarin de betrekkingen gegeven zijn, nl. door (1), is die van het standaardvraagstuk I. De formules (2) tot en met (6) geven dan de vereffening bij dit standaardvraagstuk aan. Voor de behandeling van het probleem, voor het geval de voorwaarden niet lineair zijn, wordt verwezen naar §5.7.

Thans willen wij ons bezig houden met grootheden, die een functie zijn van de P^i, welke functies wij voorlopig lineair aannemen en wel aldus

$$\Lambda^{\alpha} = l_i^{\alpha} P^i \qquad \alpha,\beta,\gamma : 1 \rightarrow A$$

De getalwaarden dezer Λ^{α} bepaalt men door voor de P^i de gecorrigeerde

waarnemingen $p^i + \varepsilon^i$ te substitueren,

$$\wedge^\alpha = l_i^\alpha (p^i + \varepsilon^i) \qquad (7)$$

Dikwijls zal men de cofactoren der $\wedge^\alpha$ willen kennen, die thans zullen worden afgeleid.

We zullen eerst de cofactoren der t^ρ berekenen. Volgens (2) is

$$t^\rho = u_o^\rho - u_i^\rho p^i$$

en

$$t^\sigma = u_o^\sigma - u_i^\sigma p^i$$

dus is volgens de algemene voortplantingswet der moduli

$$\overline{t^\rho, t^\sigma} = g^{ik} u_i^\rho u_k^\sigma = G^{\rho\sigma} \text{ (zie (5))} \qquad (8)$$

derhalve: <u>de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen zijn de cofactoren van de tegenspraken t^ρ.</u>

We lossen nu de normaalvergelijkingen (4) op. Laat de oplossing zijn

$$K_\rho = G_{\rho\sigma} t^\sigma \qquad (9)$$

dan geldt voor de $G_{\rho\sigma}$ de definitie

$$G_{\rho\sigma} G^{\sigma\tau} = \delta_\rho^\tau$$

Volgens (9) is nu

$$\overline{t^\tau, K_\rho} = G_{\rho\sigma} \overline{t^\sigma, t^\tau} = G_{\rho\sigma} G^{\sigma\tau} = \delta_\rho^\tau \qquad (10)$$

en daarna weer volgens (9)

$$\overline{K_\rho, K_\tau} = G_{\rho\sigma} \overline{t^\sigma, K_\tau} = \delta_\tau^\sigma G_{\rho\sigma} = G_{\rho\tau} \qquad (11)$$

of: <u>de coëfficiënten van de t^ρ in de oplossing van de normaalvergelijkingen zijn de cofactoren der K_ρ.</u>

De typische situatie ten aanzien van de cofactoren, zoals deze zich in de normaalvergelijkingen (9) voordoet, zullen wij meer ontmoeten. Het is daarom nuttig, de volgende stelling te formuleren.

<u>Stelling</u>. Als

$$h_{ik} A^i = A_k \qquad i,k,l : 1 \to n \qquad (12)$$

en de h_{ik} de cofactoren van de A_k zijn, dan zijn, als

$$A^i = h^{ik} A_k$$

de oplossing is van (12) en dus

$$h_{ik} h^{il} = \delta_k^l$$

de h^{ik} de cofactoren der A^i.

Het bewijs van deze stelling is boven gegeven bij de afleiding van de cofactoren der K_ρ, zie (11).

Wij willen thans bewijzen, dat

$$\overline{(p^i + \varepsilon^i), t^\rho} = 0$$

Vooreerst is

$$\overline{p^i,\ t^\rho} = \overline{p^i,\ (u_o^\rho - u_k^\rho)p^k} = -u_k^\rho\,\overline{p^i,\ p^k} = -g^{ik}u_k^\rho \qquad (14)$$

Verder is

$$\overline{\varepsilon^i,\ t^\rho} = g^{ik}u_k^\sigma\,\overline{K_\sigma,\ t^\rho} = \delta_\sigma^\rho\, g^{ik}u_k^\sigma = g^{ik}u_k^\rho \qquad (15)$$

Uit (15) en (14) volgt direct (13). Dit resultaat betekent dus, dat de elementen van de groep der gecorrigeerde waarnemingen enerzijds correlatievrij zijn ten aanzien van die van de groep der t^ρ anderzijds. Dan is echter ook

$$\overline{(p^i + \varepsilon^i),\ K_\rho} = 0 \qquad (16)$$

omdat de K_ρ lineaire functies van de t^ρ zijn en eveneens

$$\overline{(p^i + \varepsilon^i),\ \varepsilon^k} = 0 \qquad (17)$$

wegens het feit, dat op hun beurt de ε^k lineaire functies zijn van de K_ρ. Ten slotte volgt hieruit weer

$$\overline{l_i^\alpha\,(p^i + \varepsilon^i),\ l_k^\beta\varepsilon^k} = 0 \qquad (18)$$

waarin de l_i^α, l_k^β de coëfficiënten zijn van (7). We hadden ook uit (13) onmiddellijk tot (18) kunnen besluiten, omdat $l_i^\alpha\,(p^i + \varepsilon^i)$ een lineaire functie is van de $p^i + \varepsilon^i$, $l_k^\beta\varepsilon^k$ een lineaire functie van de t^ρ en volgens (13) elk der $p^i + \varepsilon^i$ correlatievrij is met elk der t^ρ.

Wanneer wij nu terugkeren tot de $\wedge^\alpha$, dan is

$$\overline{\wedge^\alpha,\wedge^\beta} = \overline{l_i^\alpha\,(p^i + \varepsilon^i),\ l_k^\beta\,(p^k + \varepsilon^k)}$$
$$= \overline{l_i^\alpha p^i,\ l_k^\beta\,(p^k + \varepsilon^k)} + \overline{l_i^\alpha\varepsilon^i,\ l_k^\beta\,(p^k + \varepsilon^k)}$$

Volgens (18) is de laatste term rechts nul, zodat

$$\overline{\wedge^\alpha,\wedge^\beta} = \overline{l_i^\alpha p^i,\ l_k^\beta p^k} + \overline{l_i^\alpha p^i,\ l_k^\beta\varepsilon^k}$$

Nu volgt eveneens uit (18)

$$\overline{l_i^\alpha p^i,\ l_k^\beta\varepsilon^k} = -\overline{l_i^\alpha\varepsilon^i,\ l_k^\beta\varepsilon^k}$$

waardoor

$$\overline{\wedge^\alpha,\wedge^\beta} = \overline{l_i^\alpha p^i,\ l_k^\beta p^k} - \overline{l_i^\alpha\varepsilon^i,\ l_k^\beta\varepsilon^k} \qquad (19)$$

Nu moeten nog de beide termen in het rechterlid van (19) worden berekend. Dit verloopt ddus:

$$\overline{l_i^\alpha p^i,\ l_k^\beta p^k} = l_i^\alpha l_k^\beta\,\overline{p^i,\ p^k} = g^{ik}l_i^\alpha l_k^\beta$$

verder is volgens (3)

$$l_i^\alpha\varepsilon^i = g^{ik}l_i^\alpha u_k^\rho K_\rho$$

Of als we stellen

$$g^{ik} l_i^{\alpha} u_k^{\rho} = L^{\alpha\rho} \qquad (20)$$

waardoor

$$l_i^{\alpha} \varepsilon^i = L^{\alpha\rho} K_\rho$$

Dan wordt

$$\overline{l_i^{\alpha}\varepsilon^i,\ l_k^{\beta}\varepsilon^k} = \overline{L^{\alpha\rho}K_\rho,\ L^{\beta\sigma}K_\sigma}$$

$$= L^{\alpha\rho} L^{\beta\sigma} \overline{K_\rho,\ K_\sigma}$$

$$= G_{\rho\sigma} L^{\alpha\rho} L^{\beta\sigma}$$

Met de verkregen resultaten wordt (19)

$$\overline{\Lambda^{\alpha},\ \Lambda^{\beta}} = g^{ik} l_i^{\alpha} l_k^{\beta} - G_{\rho\sigma} L^{\alpha\rho} L^{\beta\sigma} \qquad (21)$$

Om deze formule te kunnen toepassen moet men de $G_{\rho\sigma}$, dus de coëfficiënten van de opgeloste normaalvergelijkingen, kennen.

Men gaat voor de berekening van (21) ook nog wel eens wat anders te werk. Men stelt dan

$$L^{\alpha\cdot}_{\sigma} = G_{\rho\sigma} L^{\alpha\rho}$$

waaruit volgt

$$G^{\rho\sigma} L^{\alpha\cdot}_{\sigma} = L^{\alpha\rho} \qquad (22)$$

De stip in $L^{\alpha\cdot}_{\sigma}$ duidt aan, dat de index ρ (of eventueel σ, τ) daar vandaan is gekomen. In (22) komen de $G^{\rho\sigma}$ voor, dus de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen. Uit dit stelsel worden de $L^{\alpha\cdot}_{\sigma}$ opgelost. Men heeft dus nu niet de $G_{\rho\sigma}$ nodig gehad, want (21) wordt

$$\overline{\Lambda^{\alpha},\Lambda^{\beta}} = g^{ik} l_i^{\alpha} l_k^{\beta} - L^{\alpha\cdot}_{\sigma} L^{\beta\sigma} \qquad (23)$$

De laatste methode verdient echter slechts dan aanbeveling, als men met zeer weinig grootheden Λ^{α} te maken heeft, immers ieder dier grootheden voert tot een stelsel (22) en ieder dier stelsels moet afzonderlijk worden opgelost. Zodra er wat meer Λ^{α} zijn is het veel voordeliger eens en vooral de $G_{\rho\sigma}$ te bepalen, waarna regelrecht (21) kan worden gebruikt.

Ter wille van het overzicht laten we in een tabel de diverse cofactoren van standaardvraagstuk I volgen

We hebben niet al deze cofactoren afgeleid, maar dit kan door de lezer gemakkelijk zelf worden aangevuld.

	p^i	t^ρ	K_ρ	ε^i	$p^i+\varepsilon^i$	$l_i^\alpha(p^i+\varepsilon^i)$
p^k	g^{ik}	$-g^{ik}u_i^\rho$	$G_{\rho\tau}\overline{t^\tau, p^k}$	$-\overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$	$\overline{p^i, p^k} - \overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$	$l_i^\alpha\overline{p^i, p^k} - l_i^\alpha\overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$
t^σ	$-g^{ik}u_k^\sigma$	$G^{\rho\sigma}$	δ_ρ^σ	$g^{ik}u_k^\sigma$	0	0
K_σ	$G_{\rho\sigma}\overline{t^\rho, p^i}$	δ_σ^ρ	$G_{\rho\sigma}$	$-\overline{p^i, K_\sigma}$	0	0
ε^k	$-\overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$	$-g^{ik}u_i^\rho$	$-\overline{p^k, K_\rho}$	$g^{il}g^{km}u_i^\rho u_k^\sigma G_{\rho\sigma}$	0	0
$p^k+\varepsilon^k$	$\overline{p^i, p^k} - \overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$	0	0	0	$\overline{p^i, p^k} - \overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$	$\overline{l_i^\alpha p^k, (p^i+\varepsilon^i)}$
$l_k^\beta(p^k+\varepsilon^k)$	$l_k^\beta\overline{p^i, p^k} - l_k^\beta\overline{\varepsilon^i, \varepsilon^k}$	0	0	0	$l_k^\beta\overline{p^i, (p^k+\varepsilon^k)}$	$\overline{l_i^\alpha p^i, l_k^\beta p^k} - \overline{l_i^\alpha\varepsilon^i, l_k^\beta\varepsilon^k}$

7.2. Standaardvraagstuk II.

Bij standaardvraagstuk I is het model gegeven door de onafhankelijke betrekkingen

$$u_i^\rho p^i = u_o^\rho \qquad i,k,l,m : 1\to n \qquad \rho,\sigma,\tau : 1\to b \qquad (1)$$

Men kan het echter ook in parametergedaante geven. Laat a_o^i een waardestel voor de P^i zijn, die aan (1) voldoen, dus:

$$u_i^\rho a_o^i = u_o^\rho \qquad (2)$$

dan volgt door elke vergelijking (2) van elk der vergelijkingen (1) af te trekken

$$u_i^\rho (P^i - a_o^i) = 0 \qquad (3)$$

Hier staan nu b onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen in $P^i - a_o^i$. Er zijn dus precies n - b stellen lineair onafhankelijke waardestellen a_λ^i (λ,μ,ν : $1\longrightarrow n-b$) voor de $P^i - a_o^i$ aan te wijzen, waarvoor

$$u_i^\rho a_\lambda^i = 0 \qquad (4)$$

Elk ander stel is dus lineair in de a_λ^i uit te drukken, dus

$$P^i - a_o^i = a_\lambda^i X^\lambda$$

of

$$a_\lambda^i X^\lambda + a_o^i = P^i \qquad (5)$$

Volgens (5) is elk der P^i in de n - b parameters X^λ uitgedrukt. Vermenigvuldigt men de P^i met de overeenkomstige u_i^ρ uit één der n - b stellen u_i^ρ en telt men dan op, dan is, lettende op (2) en (4), één der betrekkingen (1) teruggekregen. Elk der n - b stellen u_i^ρ levert o deze manier een betrekking.

In (5) vindt men de grondformules voor standaardvraagstuk II. De oplossing wordt afgeleid uit standaardvraagstuk I. Daar was gevonden, dat

$$\varepsilon^i = g^{ik}u_k^\rho K_\rho$$

waaruit direct volgt

$$g_{ik}\varepsilon^i = u_k^{\rho} K_{\rho}$$

waarin dan, zoals bekend, de g_{ik} gedefinieerd zijn door $g_{ik}g^{il} = \delta_k^l$ en dus vervolgens

$$g_{ik}a_\lambda^k\varepsilon^i = a_\lambda^k u_k^{\rho} K_{\rho} = 0 \quad \text{(volgens (4))} \qquad (6)$$

We vullen nu eerst in (5) de gecorrigeerde waarnemingen in

$$a_\lambda^i X^\lambda + a_o^i = p^i + \varepsilon^i \qquad (6^a)$$

of als we stellen

$$p^i - a_o^i = f^i \qquad (7)$$

$$a_\lambda^i X^\lambda = f^i + \varepsilon^i \qquad (8)$$

Dit zijn de correctievergelijkingen ; wanneer we hieruit de ε^i oplossen en instellen in (6) krijgen we de normaalvergelijkingen.

$$g_{ik}a_\lambda^k a_\mu^i X^\mu = g_{ik}a_\lambda^k f^i \qquad (9)$$

Ten slotte wordt, onder gebruikmaking van (8),

$$E = g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = g_{ik}\varepsilon^k a_\lambda^i X^\lambda - g_{ik}\varepsilon^k f^i$$

of met het oog op (6)

$$E = - g_{ik}f^i\varepsilon^k$$

$$= - g_{ik}f^i a_\mu^k X^\mu + g_{ik}f^i f^k$$

of

$$E = g_{ik}f^i f^k - g_{ik}a_\mu^k f^i X^\mu \qquad (10)$$

We stellen in (9)

$$g_{ik}a_\lambda^k a_\mu^i = G_{\lambda\mu} \qquad (11)$$

en

$$g_{ik}a_\lambda^k f^i = F_\lambda \qquad (12)$$

De normaalvergelijkingen kunnen dan aldus worden geschreven

$$G_{\lambda\mu}X^\mu = F_\lambda \qquad (13)$$

en (10)

$$E = g_{ik}f^i f^k - F_\mu X^\mu \qquad (14)$$

Wij willen thans de cofactoren der X^λ berekenen. Daartoe merken we op, dat

$$\overline{F_\lambda, F_\mu} = G_{\lambda\mu}$$

Dit kan gemakkelijk bewezen worden.

Uit (12) nl. volgt

$$\overline{F_\lambda, f^I} = g_{ik}a_\lambda^k \overline{f^i, f^I} = g_{ik}a_\lambda^k \overline{p^i, p^I}$$

Volgens (7) nl. zijn de cofactoren der f^i dezelfde als die der p^i.

Dan wordt dus

$$\overline{F_\lambda,\ f^I} = g_{ik}a^k_\lambda g^{il} = \delta^l_k a^k_\lambda = a^l_\lambda$$

Verder wordt dan, weer volgens (12),

$$\overline{F_\lambda,\ F_\mu} = g_{ik}a^k_\lambda \overline{f^i,\ F_\mu} = g_{ik}a^k_\lambda a^i_\mu = G_{\lambda\mu}$$

hetgeen te bewijzen was.

Nu zijn dus in de normaalvergelijkingen (13) de coëfficiënten $G_{\lambda\mu}$ de cofactoren der F_λ. Is de oplossing van (13)

$$X^\mu = F_\lambda G^{\lambda\mu}$$

waarin

$$G^{\lambda\mu}G_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$$

dan zijn dus volgens de in de vorige paragraaf geformuleerde stelling de $G^{\lambda\mu}$ de cofactoren der X^μ.

Met het bovenstaande is de theorie van standaardvraagstuk II compleet. Anders dan bij standaardvraagstuk I heeft men hier nodig de g_{ik}, hetgeen betekent, dat men hier de wij omslachtige berekening dezer g_{ik} uit de g^{ik} aan het eigenlijke vereffeningsvraagstuk voor af moet laten gaan.

Opmerking 1.

De n - b stellen a^i_λ zijn lineair onafhankelijk. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat dan ook de determinant op de G^{ik} niet nul is, zodat de normaalvergelijkingen oplosbaar zijn.

Opmerking 2.

Ten einde de practische berekeningen te vergemakkelijken voert men voor de X^λ benaderingen $\overset{X}{0}{}^\lambda$ in en men stelt dan

$$X^\lambda = \overset{X}{0}{}^\lambda + \Delta X^\lambda$$

De vergelijkingen (6a) gaan hierdoor over in

$$a^i_\lambda \Delta X^\lambda = p^i - a^i_\lambda \overset{X}{0}{}^\lambda - a^i_0 + \varepsilon^i$$

Stelt men nu

$$p^i - a^i_\lambda \overset{X}{0}{}^\lambda - a^i_0 = f^i$$

dan wordt

$$a^i_\lambda \Delta X^\lambda = f^i + \varepsilon^i$$

Men heeft dan een aan (8) analoog stel vergelijkingen verkregen. Het karakter der f^i is niet veranderd, f^i is p^i, verminderd met een constante en overigens is het probleem niet veranderd. Er is een translatie der parameters toegepast.

De normaalvergelijkingen worden

$$G_{\lambda\mu}\Delta X^\mu = F_\lambda$$

en (14) gaat over in

$$E = g_{ik} f^i f^k - F_\mu \Delta X^\mu$$

Men heeft nu echter bereikt, dat de ΔX^λ en de f^i numeriek kleine bedragen zijn.

Opmerking 3.

Zijn de vergelijkingen (5) niet lineair in de X^λ, bv.:

$$P^i = F^i (X^1, X^2, \ldots, X^{n-b})$$

dan ontwikkelt men na invoering van de benaderde waarden voor de X^λ de functie in een reeks van Taylor, die men afkapt na de eerstegraads termen. Men stelt dus

$$X^\lambda = \overset{o}{X}{}^\lambda + \Delta X^\lambda$$

waardoor

$$P^i = F^i (\overset{o}{X}{}^1, \overset{o}{X}{}^2, \ldots, \overset{o}{X}{}^{n-b}) + \Delta X^1 \frac{\partial F^i}{\partial X^1} + \ldots + \Delta X^{n-b} \frac{\partial F^i}{\partial X^{n-b}}$$

de waarden van de partiële afgeleiden te nemen voor de waarden $\overset{o}{X}{}^1$, $\overset{o}{X}{}^2$, ... , $\overset{o}{X}{}^{n-b}$ van de veranderlijken. Door deze ontwikkeling is P^i o lineair geworden in de ΔX^λ en kan men dus de ontwikkelde rekenregels voor de vereffening toepassen. Zijn de benaderde waarden goed gekozen, dan is de vervanging van de functie door de afgekapte reeksontwikkeling voldoende. Blijkt dit niet zo te zijn, doordat de ΔX^λ achteraf te groot blijken te zijn uitgevallen, dan gaat men met de verbeterde $\overset{o}{X}{}^\lambda$, dus met de $\overset{o}{X}{}^\lambda + \Delta X^\lambda$, als nieuwe benadering opnieuw de vereffening doorrekenen. Men volgt dan een weg van een benadering stap voor stap, men past dus een iteratieproces toe. Hier zou nu bewezen moeten worden, dat het proces in dit geval convergeert. Wij doen dit niet, omdat in de practijk men zelden in de noodzakelijkheid komt te verkeren, dit toe te passen. De eerste benadering is in bijna alle gevallen voldoende. Voor het enkele geval, dat het iteratieproces zou moeten worden gebruikt, nemen we de convergentie er van aan.

7.3. Standaardvraagstuk III.

We gaan weer uit van Standaardvraagstuk I. De b betrekkingen splitsen we in twee groepen, één van b_1 en de andere van ($b - b_1$) betrekkingen, aldus

$$u_i^\rho P^i = u_o^\rho \qquad \rho, \sigma, \tau : \quad 1 \longrightarrow b_1 \qquad (1)$$

$$u_i^\alpha P^i = u_o^\alpha \qquad \alpha, \beta, \gamma : \quad b_1 + 1 \longrightarrow b \qquad (2)$$

$$i,k,l \quad 1 \longrightarrow n$$

De onderscheiding van de groepen geschiedt dus door het verschil in index. Voor de eerste groep gebruiken we de indices ρ, σ, τ ; voor de tweede de indices α, β, γ.

We gaan nu voor de eerste groep over op het Standaardvraagstuk II, zoals dit in de vorige paragraaf is gedaan. We krijgen dan

$$a^i_\lambda X^\lambda + a^i_o = P^i \qquad \kappa,\lambda,\mu,\nu : 1 \rightarrow (n - b_1) \qquad (3)$$

met

$$u^\rho_i a^i_o = u^\rho_o \qquad (4)$$

en

$$u^\rho_i a^i_\lambda = 0 \qquad (5)$$

Nu substitueren we de P^i volgens (3) in (2). Hierdoor ontstaan de ($b - b_1$) betrekkingen

$$u^\alpha_i a^i_\lambda X^\lambda + u^\alpha_i a^i_o = u^\alpha_o \qquad (6)$$

We stellen nu

$$u^\alpha_i u^i_\lambda = U^\alpha_\lambda \qquad (7)$$

$$u^\alpha_o - u^\alpha_i a^i_o = U^\alpha_o \qquad (8)$$

waardoor (6) wordt

$$U^\alpha_\lambda X^\lambda = U^\alpha_o \qquad (9)$$

Deze vergelijkingen vormen tezamen met (3) de grondvergelijkingen van Standaardvraagstuk III. De n waar te nemen grootheden P^i zijn uitgedrukt in de ($n - b_1$) parameters X^λ, tussen welke X^λ de ($b - b_1$) betrekkingen (9) bestaan. Vervangen we in (3) de P^i door de gecorrigeerde waarnemingen $p^i + \varepsilon^i$, dan moeten we thans voor het geval het vereffeningsprobleem gegeven is door

$$a^i_\lambda X^\lambda + a^i_o = p^i + \varepsilon^i$$

of

$$a^i_\lambda X^\lambda = f^i + \varepsilon^i \qquad f^i = p^i - a^i_o \qquad (10)$$

met

$$U^\alpha_\lambda X^\lambda = U^\alpha_o \qquad (11)$$

de regels voor de behandeling afleiden. Dit kan geschieden door uit te gaan van de oorspronkelijke vorm, waarin het probleem gegeven was, nl. door de betrekkingen (1) en (2). Volgens de regels van Standaardvraagstuk I is, als de g^{ik} weer de cofactoren van de waarnemingen zijn

$$\varepsilon^i = g^{ik} (u^\rho_k K_\rho + u^\alpha_k K_\alpha) \qquad (12)$$

waarin de correlaten eveneens in twee groepen gesplitst zijn, overeenkomstig de splitsing in groepen bij de betrekkingen (1) en (2). Is nu weer

$$g_{ik} g^{il} = \delta^l_k$$

dan volgt uit (12)

$$g_{ik} \varepsilon^i = u^\rho_k K_\rho + u^\alpha_k K_\alpha$$

Wanneer wij nu ieder dezer n vergelijkingen vermenigvuldigen met de bijbehorende a^k_μ en optellen, komt er

$$g_{ik} \varepsilon^i a^k_\mu = a^k_\mu u^\rho_k K_\rho + a^k_\mu u^\alpha_k K_\alpha$$

of volgens (5) en (7)

$$g_{ik} \varepsilon^i a^k_\mu = U^\alpha_\mu K_\alpha \qquad (13)$$

Met behulp van (10) elimineren we hieruit de ε^i, met als resultaat

$$g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu X^\lambda - U_\mu^\alpha K_\alpha = g_{ik}a^k_\mu f^i = F_\mu \qquad (14)$$

Voegen we hierbij de vergelijkingen (11), dan hebben we $n_\lambda - b_1 + b - b_1$ vergelijkingen voor de berekening van de $n - b_1$ parameters X^λ en de $b - b_1$ correlaten K_α. Daarna geeft (10) de ε^i. De vergelijkingen (14) en (11) vormen samen het stelsel der normaalvergelijkingen.

Verder is volgens (10)

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = g_{ik}a^i_\lambda\varepsilon^k X^\lambda - g_{ik}f^i\varepsilon^k$$

of volgens (13) en weer volgens (10)

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = U^\alpha_\lambda X^\lambda K_\alpha + g_{ik}f^i f^k - g_{ik}a^k_\lambda f^i X^\lambda$$

waaruit, lettende op (11) en (14), volgt

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = U^\alpha_o K_\alpha + g_{ik}f^i f^k - F_\lambda X^\lambda \qquad (15)$$

De situatie ten aanzien van de cofactoren van de in dit vraagstuk voorkomende grootheden zal later worden onderzocht, nadat eerst in de volgende paragraaf het probleem aan een nadere beschouwing zal worden onderworpen.

Opmerking.

Voor het geval de functies (3) en (9) niet lineair zijn, worden voor de X^λ benaderde waarden $\overset{\circ}{X}{}^\lambda$ aangenomen en wordt gesteld $X^\lambda = \overset{\circ}{X}{}^\lambda + \Delta X^\lambda$. Wordt verder hetgeen voor de oplossing van het vraagstuk nodig is de F^i vervangen door de $p^i + \varepsilon^i$, dan kan een niet lineaire functie in een reeks van Taylor worden ontwikkeld, waarin de 2de en hogere graads termen worden verwaarloosd. In de ΔX^λ en de ε^i zijn dan de functies lineair.

7.4. De hoofdeigenschap van de methode der kleinste kwadraten.

Wij zullen op de vergelijkingen (10) van §7.3. de rekenregels van het Standaardvraagstuk II toepassen. We laten dus van Standaardvraagstuk III de betrekkingen (11)(§7.3.) buiten beschouwing. De parameters zullen we nu voorstellen door Y^λ en de correcties door η^i. We hebben dan als grondvergelijkingen

$$a^i_\lambda Y^\lambda = f^i + \eta^i \qquad (f^i = p^i - a^i_o)$$

De normaalvergelijkingen bij dit probleem zijn

$$g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu Y^\lambda = g_{ik}a^k_\mu f^i$$

zie (9) van §7.2. Of als we stellen

$$g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu = G_{\lambda\mu}$$

en

$$g_{ik}a^k_\mu f^i = F_\mu$$

$$G_{\lambda\mu}Y^\lambda = F_\mu \qquad (1)$$

Verder is dan, zie (14) §7.2. ,

$$g_{ik}\eta^i\eta^k = g_{ik}f^if^k - F_\lambda Y^\lambda \qquad (2)$$

Ten slotte was in §7.2. afgeleid

$$Y^\lambda, Y^\mu = G^{\lambda\mu} \qquad (3)$$

als

$$G^{\lambda\mu}G_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \qquad (4)$$

Volgens (14) §7.3. was voor Standaardvraagstuk III

$$G_{\lambda\mu}X^\lambda - U^\alpha_\mu K_\alpha = F_\mu \qquad (5)$$

Stellen we nu

$$X^\lambda = Y^\lambda + E^\lambda \qquad (6)$$

dan wordt (5)

$$G_{\lambda\mu}Y^\lambda + G_{\lambda\mu}E^\lambda - U^\alpha_\mu K_\alpha = F_\mu$$

of met het oog op (1)

$$G_{\lambda\mu}E^\lambda = U^\alpha_\mu K_\alpha \qquad (7)$$

Elimineren we met behulp van (6) de X^λ ook uit de betrekkingen (11) van §7.3., dan krijgen we

$$U^\alpha_\lambda E^\lambda = U^\alpha_0 - U^\alpha_\lambda Y^\lambda = T^\alpha \qquad (8)$$

Men kan nu uit (7) de E^λ oplossen, hetgeen geeft

$$E^\lambda = G^{\lambda\mu}U^\alpha_\mu K_\alpha \qquad (9)$$

en deze uitdrukkingen instellen in (8). Het resultaat wordt

$$G^{\lambda\mu}U^\alpha_\lambda U^\beta_\mu K_\beta = T^\alpha \qquad (10)$$

Dit zijn ($b - b_1$) vergelijkingen in de ($b - b_1$) correlaten K_α, die hieruit op te lossen zijn, daarna zijn de E^λ te berekenen uit (9).

Hiermee hebben we een oplossing van Standaardvraagstuk III tot stand gebracht in twee trappen. De eerste trap bestaat in de toepassing van Standaardvraagstuk II op de vergelijkingen (10) §7.3. Gevonden worden dan de waarden Y^λ van de parameters volgens (1) en de correcties η^i van de waarnemingen. Tevens moeten de $G^{\lambda\mu}$ worden berekend, hetzij volgens (4), hetzij door de normaalvergelijkingen (1) met algebraische tweede leden op te lossen. Dit is dan de eerste trap van de vereffening. De tweede bestaat in de berekening van de T^α volgens (8). Dan worden de normaalvergelijkingen (10) opgesteld ter berekening van de K_β, waarna de E^λ volgen uit (9) en dus de X^λ bepaald zijn (6).

Deze tweede trap is niets anders dan de toepassing van de rekenregels van Standaardvraagstuk I op de betrekkingen (11) §7.3. met de Y^λ als waarnemingen en de $G^{\lambda\mu}$ als hun cofactoren. Om dit duidelijk in te zien zullen we de bewerkingen van de tweede trap nog eens samenvatten.

De gegeven betrekkingen zijn

$$U_\lambda^\alpha X^\lambda = U_0^\alpha \quad (\text{vergelijk } (1)\ §7.1.)$$

De waarnemingen zijn Y^λ, hun correcties E^λ en hun cofactoren $G^{\lambda\mu}$.
We substitueren de gecorrigeerde waarnemingen

$$Y^\lambda + E^\lambda$$

in de betrekkingen, hetgeen geeft

$$U_\lambda^\alpha E^\lambda = U_0^\alpha - U_\lambda^\alpha Y^\lambda = T^\alpha \quad (\text{vergelijk } (2)\ §7.1.)$$

Volgens de correlatenvergelijkingen (3) §7.1. moet nu

$$E^\lambda = G^{\lambda\mu} U_\mu^\alpha K_\alpha$$

hetgeen klopt met (9). Substitueren we nu deze waarden der E^λ in de betrekkingen, dan krijgen we de normaalvergelijkingen (10), die in vorm overeenstemmen met (4) §7.1., als we bedenken, dat daar volgens (5) §7.1.

$$G^{\alpha\beta} = g^{ik} u_i^\alpha u_k^\beta$$

was.

Wanneer men belang stelt in de correcties, die de <u>oorspronkelijke</u> waarnemingen p^i ondergaan, als gevolg van de vereffening bij de tweede trap, dan kan men daar zeer gemakkelijk een formule voor vinden. Met de parameters X^λ hadden we volgens (10) §7.3.

$$a_\lambda^i X^\lambda = f^i + \varepsilon^i$$

en in de parameters Y^λ

$$a_\lambda^i Y^\lambda = f^i + \eta^i$$

Trekt men beide stellen overeenkomstige vergelijkingen van elkaar af, dan komt er

$$a_\lambda^i (X^\lambda - Y^\lambda) = \varepsilon^i - \eta^i$$

of

$$a_\lambda^i E^\lambda = \varepsilon^i - \eta^i \qquad (11)$$

en deze $\varepsilon^i - \eta^i$ zijn de correcties, die de eenmaal gecorrigeerde waarnemingen $p^i + \eta^i$ nog moeten ondergaan om ze te brengen op $p^i + \varepsilon^i$, de waarden, die ze na het tweede tempo moeten verkrijgen.

Schrijven we nu

$$\varepsilon^i = \eta^i + \varepsilon^i - \eta^i$$

dan wordt

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = g_{ik}\eta^i\eta^k + 2\, g_{ik}\eta^i (\varepsilon^k - \eta^k) + g_{ik}(\varepsilon^i - \eta^i)(\varepsilon^k - \eta^k) \qquad (12)$$

Hierin is

$$g_{ik}\eta^i (\varepsilon^k - \eta^k) = g_{ik}\eta^i a_\lambda^k E^\lambda = 0$$

omdat volgens de regels van Standaardvraagstuk II

$$g_{ik}\eta^i a^k_\lambda = 0$$

(zie (6) §7.2.). We zien dus, dat in het tweede lid van (12) alleen een deel overblijft uitsluitend van de eerste trap afkomstig en een deel uitsluitend afkomstig van de tweede trap. Dit laatste deel kunnen we nog met behulp van (11) een andere gedaante geven, nl.

$$g_{ik}(\xi^i - \eta^i)(\xi^k - \eta^k) = g_{ik}a^i_\lambda a^k_\mu E^\lambda E^\mu = G_{\lambda\mu}E^\lambda E^\mu$$

en in de laatste gedaante is deze uitdrukking volkomen in overeenstemming met het middelste lid in (6) §7.1., waarmee we zien, dat ook hier de parallel met Standaardvraagstuk I opgaat. We hebben dan dus:

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = g_{ik}\eta^i\eta^k + G_{\lambda\mu}E^\lambda E^\mu$$

en volgens (6) §7.1. en (2)

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = g_{ik}f^if^k - F_\lambda Y^\lambda + K_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

Men kan dus voor iedere trap afzonderlijk de bijdragen berekenen tot $g_{ik}\xi^i\xi^k$ volgens de bekende, hiervoor geldende regels en naderhand de bijdragen samenvoegen.

Let men er nu op, hoe Standaardvraagstuk III ontstaan is, door de gegeven betrekkingen in twee groepen (1) en (2) §7.3. te splitsen en de betrekkingen van de tweede groep om te werken tot betrekkingen tussen de parameters X^μ, dan is de in deze paragraaf besproken vereffening van de eerste trap, die op de betrekkingen (1) en is de tweede trap de vereffening op de groep (2) van de betrekkingen. Wij kunnen daarom nu de volgende eigenschap formuleren

Hoofdeigenschap.

Men mag elk vereffeningsvraagstuk splitsen in een willekeurig aantal trappen, mits men bij elke volgende trap met cofactoren verder werkt, zoals deze uit de vorige trap(pen) volgen.

Weliswaar is slechts aangetoond, dat men het probleem in twee trappen mag splitsen, maar het is duidelijk, dat men op elke trap weer opnieuw een splitsing mag toepassen. Als grensgeval mag men een vereffening op voorwaarde na voorwaarde uitvoeren.

7.5. De hoofdeigenschap (vervolg).

Het bestaan van de hoofdeigenschap is aan het licht gekomen bij de behandeling van Standaardvraagstuk III, dat ontstond door de betrekkingen van de eerste groep de gedaante te geven van de grondvergelijkingen van Standaardvraagstuk II en die van de tweede groep uit te drukken in de parameters. Het is duidelijk, dat de vorm, waarin de vereffening van elke trap wordt uitgevoerd, met het principe van de mogelijkheid van de trapsgewijze behandeling niets uitstaande heeft. De correcties η^i, die gevonden

zijn bij de eerste trap met Standaardvraagstuk II, hadden evengoed berekend kunnen worden met behulp van Standaardvraagstuk I. De tweede trap hadden we kunnen uitvoeren met Standaardvraagstuk II met de parameters Y^{λ} als waarnemingen (cofactoren $G^{\lambda/\lambda}$). We hadden hier echter ook kunnen doorwerken met de eenmaal gecorrigeerde waarnemingen $p^i + \eta^i$ en dan hetzij volgens het eerste, hetzij volgens het tweede standaardvraagstuk. Om dit duidelijk in te zien en ook omdat er dan gelegenheid bestaat, de aandacht op enkele nieuwe gezichtspunten te kunnen vestigen, zal de hoofdeigenschap op een andere manier opnieuw worden afgeleid.

We gaan weer uit van de twee groepen betrekkingen

$$u_{\rho}^{\rho} p^i = u_o^{\rho} \qquad \rho, r, \tau : \ 1 \longrightarrow b_1 \qquad (1)$$

$$i,k,l,m : \ 1 \to n$$

$$u_{\alpha}^{\alpha} p^i = u_o^{\alpha} \qquad \alpha, \beta, \gamma : \ b_1 + 1 \longrightarrow b \qquad (2)$$

$$b_1 < b < n$$

De waarnemingen voor de P^i zijn de p^i ; de correcties aan de p^i zijn de ξ^i en de cofactoren er van g^{ik}. Voor de vereffening op alle voorwaarden tegelijk is

$$\xi^i = g^{ik} u_k^{\rho} K_{\rho} + g^{ik} u_k^{\alpha} K_{\alpha} \qquad (3)$$

(correlatenvergelijkingen) en

$$g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma} K_{\rho} + g^{ik} u_i^{\alpha} u_k^{\sigma} K_{\alpha} = t^{\sigma} \qquad (4)$$

$$g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\beta} K_{\rho} + g^{ik} u_i^{\alpha} u_k^{\beta} K_{\alpha} = t^{\beta} \qquad (5)$$

waarin

$$t^{\sigma} = u_o^{\sigma} - u_i^{\sigma} p^i$$

$$t^{\beta} = u_o^{\beta} - u_i^{\beta} p^i$$

We hebben in het bovenstaande de correlaten overeenkomstig de betrekkingen in twee groepen gesplitst op dezelfde wijze als dit in §7.3. is gedaan. (Zie (12) aldaar).

Door te stellen

$$g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma} = G^{\rho\sigma}$$

$$g^{ik} u_i^{\alpha} u_k^{\sigma} = G^{\alpha\sigma}$$

$$g^{ik} u_i^{\alpha} u_k^{\beta} = G^{\alpha\beta}$$

worden de vergelijkingen (4) en (5)

$$G^{\rho\sigma} K_{\rho} + G^{\alpha\sigma} K_{\alpha} = t^{\sigma} \qquad (6)$$

$$G^{\rho\beta} K_{\rho} + G^{\alpha\beta} K_{\alpha} = t^{\beta} \qquad (7)$$

Als nu

$$G_{\rho\tau} G^{\rho\sigma} = \delta_{\tau}^{\sigma}$$

kunnen we K_{ρ} uit (6) oplossen. Het resultaat is

$$K_\rho = G_{\rho\sigma} t^\sigma - G_{\rho\sigma} G^{\sigma\alpha} K_\alpha \qquad (8)$$

We stellen vervolgens

$$G_{\rho\sigma} t^\sigma = \overline{K}_\rho \qquad (9)$$

en

$$- G_{\rho\sigma} G^{\sigma\alpha} K_\alpha = \Delta \overline{K}_\rho \qquad (10)$$

dan wordt dus

$$K_\rho = \overline{K}_\rho + \Delta \overline{K}_\rho \qquad (11)$$

$\overline{K}_\rho$ is de correlaat, die men zou vinden als men alleen op het stel (1) van de betrekkingen zou vereffenen.

Men kan nu uit (7) K_ρ elimineren met behulp van (8). Men verkrijgt

$$(G^{\alpha\beta} - G_{\rho\sigma} G^{\sigma\alpha} G^{\rho\beta}) K_\alpha = t^\beta - G_{\rho\sigma} G^{\sigma\alpha} t^\sigma = t^\beta - G^{\alpha\beta} \overline{K}_\rho = T^\beta \qquad (12)$$

Is hieruit de K_α opgelost, dan berekent men de $\Delta \overline{K}_\rho$ met (10). Op het bovenstaande berust de gedachtengang van Boltz, die in zijn uitwerking het " Ontwikkelingsproces " wordt genoemd. Wij komen hier nader op terug.

De correctie ξ^i volgens (3) gaat door (11) over in

$$\xi^i = g^{ik} u_k^\rho \overline{K}_\rho + g^{ik} u_k^\rho \Delta \overline{K}_\rho + g^{ik} u_k^\alpha K_\alpha$$

of met het oog op (10) in

$$\xi^i = g^{ik} u_k^\rho \overline{K}_\rho + (g^{ik} u_k^\alpha - g^{ik} u_k^\rho G_{\rho\sigma} G^{\sigma\alpha}) K_\alpha$$

De eerste term in het tweede lid is de correctie aan ieder der waarnemingen als alleen op de voorwaarden van de eerste groep vereffend is en die in de vorige paragraaf η^i is genoemd. We hebben dus

$$\begin{aligned} \xi^i - \eta^i &= g^{ik} u_k^\alpha K_\alpha - g^{ik} u_k^\rho G_{\rho\sigma} G^{\sigma\alpha} K_\alpha \\ &= g^{ik} u_k^\alpha K_\alpha - g^{ik} u_k^\rho G_{\rho\sigma} g^{lm} u_l^\alpha u_m^\sigma K_\alpha \end{aligned}$$

of als we in de tweede term van het tweede lid de indices k en l omwisselen

$$\xi^i - \eta^i = (g^{ik} - g^{il} u_l^\rho g^{km} u_m^\sigma G_{\rho\sigma}) u_k^\alpha K_\alpha \qquad (13)$$

Nu is volgens de theorie van Standaardvraagstuk I

$$\overline{(p^i + \eta^i), (p^k + \eta^k)} = \overline{p^i, p^k} - \overline{\eta^i, \eta^k}$$

en omdat

$$\eta^i = g^{ik} u_k^\rho K_\rho$$

$$\overline{\eta^i, \eta^k} = g^{il} u_l^\rho g^{km} u_m^\sigma K_{\rho\sigma}$$

Er op lettende, dat

$$\overline{p^i, p^k} = g^{ik}$$

volgt uit (13), dat

$$\xi^i - \eta^i = (p^i + \eta^i),(p^k + \eta^k).\ u_k K_\alpha$$

Deze uitkomst leert ons, dat we geheel volgens de regel van Standaardvraagstuk I de correctie $\xi^i - \eta^i$ bij het 2de tempo moeten berekenen, maar nu met de cofactoren van de reeds eenmaal gecorrigeerde waarnemingen $p^i + \eta^i$. Laten we deze nieuwe cofactoren $\bar{g}^{ik}$ noemen, dan is dus volgens (13)

$$\xi^i - \eta^i = \bar{g}^{ik} u_k K_\alpha \qquad (14)$$

waarin dan volgens (13)

$$\bar{g}^{ik} = g^{ik} - g^{il} u_l g^{km} u_m G_{\alpha\beta} \qquad (15)$$

Deze eenmaal gecorrigeerde waarnemingen zijn nu opnieuw de waarnemingen voor de tweede phase. We geven ze een tweede correctie $\xi^i - \eta^i$ en stellen de aldus gecorrigeerde nieuwe waarnemingen in de betrekkingen (2) in. Dit levert

$$u_i^\alpha (p^i + \xi^i) + u_i^\alpha (\xi^i - \eta^i) = u_o^\alpha$$

of

$$\begin{aligned} u_i^\alpha (\xi^i - \eta^i) &= u_o^\alpha - u_i^\alpha (p^i + \eta^i) \\ &= u_o^\alpha - u_i^\alpha p^i - u_i^\alpha g^{ik} u_k^\beta K_\beta \\ &= t^\alpha - G^{\alpha\beta} K_\beta = T^\alpha \end{aligned} \qquad (15^a)$$

Zie (12). Substitueren we nu de correcties uit (14) hierin, dan moeten we de normaalvergelijkingen krijgen. Er ontstaat

$$u_i^\alpha (\xi^i - \eta^i) = \bar{g}^{ik} u_i^\alpha u_k^\beta K_\beta = T^\alpha$$

of met (15)

$$(g^{ik} u_i^\alpha u_k^\beta - g^{il} u_i^\alpha u_l^\gamma g^{km} u_k^\beta u_m^\delta G_{\gamma\delta}) K_\beta = T^\alpha$$

$$(G^{\alpha\beta} - G^{\alpha\gamma} G^{\beta\delta} G_{\gamma\delta}) K_\beta = T^\alpha$$

hetgeen klopt met (13).

Deze contrôle doet ons zien, dat we inderdaad bij het tweede tempo consequent de regels van Standaardvraagstuk I mogen toepassen, mits we slechts de $\bar{g}^{ik}$ als cofactoren gebruiken.

Het is duidelijk, dat door het aanbrengen van de tweede correcties $\xi^i - \eta^i$ het voldoen aan de voorwaarden van de eerste groep niet mag worden verstoord. We zullen dus moeten hebben

$$u_i^\beta (\xi^i - \eta^i) = 0$$

Dit is daarom duidelijk, omdat we hebben

$$u_i^\beta \xi^i = t^\beta$$

en

$$u_i^\beta \eta^i = t^\beta$$

waaruit door aftrekking direct eerdergenoemde betrekking volgt. We kunnen deze echter door directe berekening controleren. Daartoe merken we eerst op, dat

$$u_i^{\rho}\,\overline{(\,p^i + \eta^i\,),(\,p^k + \eta^k\,)} = 0$$

We hebben nl.

$$u_i^{\rho}\,(\,p^i + \eta^i\,) = u_o^{\rho}$$

en dus

$$u_i^{\rho}\,\overline{(\,p^i + \eta^i\,),(\,p^k + \eta^k\,)} = \overline{u_o^{\rho},\,(\,p^k + \eta^k\,)} = 0 \qquad (16)$$

omdat de cofactor met een waargenomen grootheid of een functie van waargenomen grootheden met een algebraische grootheid nul moet zijn. Dit resultaat klopt met de afgeleide formules, omdat

$$\begin{aligned} u_i^{\tau}\,\overline{(\,p^i + \eta^i\,),(\,p^k + \eta^k\,)} &= u_i^{\tau} g^{ik} \\ &= u_i^{\tau} g^{ik} - g^{il} u_i^{\tau} u_l^{\rho} g^{km} u_m^{\sigma} G_{\rho\sigma} \quad \text{(zie (15))} \\ &= u_i^{\tau} g^{ik} - G^{\tau\rho} G_{\rho\sigma} g^{km} u_m^{\sigma} \\ &= u_i^{\tau} g^{ik} - \delta_{\sigma}^{\tau} g^{km} u_m^{\sigma} \\ &= u_i^{\tau} g^{ik} - u_m^{\tau} g^{km} = 0 \end{aligned}$$

Nu wordt inderdaad

$$u_i^{\tau}\,(\,\xi^i - \eta^i\,) = u_i^{\tau} g^{ik} u_k^{\alpha} K_{\alpha} = 0 \qquad (17)$$

Ten slotte is

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = g_{ik}\eta^i\eta^k + 2\,g_{ik}\eta^i\,(\,\xi^k - \eta^k\,) + g_{ik}\,(\,\xi^i - \eta^i\,)(\,\xi^k - \eta^k\,)$$

Hierin is

$$\begin{aligned} g_{ik}\eta^i(\,\xi^k - \eta^k\,) &= g_{ik} g^{il} u_l^{\rho}\,(\,\xi^k - \eta^k\,)\,K_{\rho} \\ &= \delta_k^l u_l^{\sigma}\,(\,\xi^k - \eta^k\,)\,K_{\rho} \\ &= u_k^{\rho}\,(\,\xi^k - \eta^k\,)\,K_{\rho} = 0 \quad \text{(wegens (17))} \end{aligned}$$

zodat

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = g_{ik}\eta^i\eta^k + g_{ik}\,(\,\xi^i - \eta^i\,)(\,\xi^k - \eta^k\,)$$

hetgeen overeenstemt met het gevondene in § 7.4. De tweede term rechts kunnen we nu verder behandelen. Volgens (14) en (15) is

$$g_{ik}\,(\xi^i - \eta^i\,) = g_{ik}\,(\,g^{ij} - g^{il} u_l^{\rho} g^{jm} u_m^{\sigma} G_{\rho\sigma}\,)\,u_j^{\alpha} K_{\alpha}$$

als j een index is gelijksoortig met i,k,l,m.

Dus

$$\begin{aligned} g_{ik}\,(\xi^i - \eta^i\,) &= (\delta_k^j - \delta_k^l u_l^{\rho} g^{jm} u_m^{\sigma} G_{\rho\sigma})\,u_j^{\alpha} K_{\alpha} \\ &= u_k^{\alpha} K_{\alpha} - u_k^{\rho} u_m^{\sigma} g^{jm} u_j^{\alpha} G_{\rho\sigma} K_{\alpha} \\ &= u_k^{\alpha} K_{\alpha} - u_k^{\rho} G^{\alpha\sigma} G_{\rho\sigma} K_{\alpha} \end{aligned}$$

Hiermee wordt dan

$$g_{ik}\,(\xi^i - \eta^i)(\xi^k - \eta^k) = u_k^{\alpha}\,(\xi^k - \eta^k)\,K_{\alpha} - u_k^{\rho}(\xi^k - \eta^k)G^{\alpha\sigma}G_{\rho\sigma}K_{\alpha}$$

of volgens (15a) en (17)

$$g_{ik}\,(\xi^i - \eta^i)(\xi^k - \eta^k) = T^{\alpha}K_{\alpha}$$

Omdat volgens de regels van Standaardvraagstuk I

$$g_{ik}\eta^i\eta^k = t^{\rho}\overline{K}_{\rho}$$

wordt dus

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = t^{\rho}\overline{K}_{\rho} + T^{\alpha}K_{\alpha}$$

een resultaat, dat we ook hadden kunnen afleiden uitgaande van (3), hetgeen echter aan de lezer wordt overgelaten.

Met de bovenstaande afleiding is opnieuw de in de vorige paragraaf geformuleerde hoofdeigenschap aangetoond. Het bestaan van deze eigenschap maakt de vereffeningsmethode zeer buigzaam en verhoogt daardoor in sterke mate de hanteerbaarheid er van. Bij de meeste vereffeningsmethoden wordt van deze eigenschap dan ook op één of andere manier gebruik gemaakt.

Opmerking 1.

Het kan voorkomen, dat een waarneming niet in het tweede of algemeen in een volgend tempo van de vereffening voorkomt. Dit neemt niet weg, dat zo'n waarneming toch een tweede correctie verkrijgt.

Opmerking 2.

De eigenschappen, uitgedrukt door de formules (16) en (17), zijn van belang, omdat zij de mogelijkheid opleveren, de berekening van de $\overline{g}^{ik}$ en van de $\xi^i - \eta^i$ te controleren.

7.6. De cofactoren bij Standaardvraagstuk III.

De bestudering van de cofactoren zullen we uitvoeren aan de hand van de formules van de in de beide tempo's gesplitste oplossing.

Men zal bij dit probleem het meest geïnteresseerd zijn in de cofactoren der X^λ of in functies der Y^λ. De berekening hiervan kan geschieden volgens de gedachtengang, ontwikkeld bij Standaardvraagstuk I, omdat het 2de tempo van Standaardvraagstuk III hiermee overeenstemde. De Y^λ waren de waarnemingen, correcties E^λ en cofactoren $G^{\lambda\mu}$; (11) §7.3. geeft de betrekkingen, (9) §7.4. de correcties, terwijl (10) §7.4. de normaalvergelijkingen zijn. Uit de tabel van de cofactoren aan het slot van § 7.1. lezen we direct af

$$\overline{X^\lambda, X^\mu} = \overline{(Y^\lambda + E^\lambda), (Y^\mu + E^\mu)}$$

$$= \overline{Y^\lambda, Y^\mu} - \overline{E^\lambda, E^\mu}$$

en verder

$$\overline{E^\lambda, E^\mu} = G^{\lambda\nu} G^{\mu\nu} U^\alpha_\nu U^\beta_\lambda H_{\alpha\beta} \quad \text{enz.}$$

We hebben hierbij in de normaalvergelijkingen gesteld

$$G^{\lambda\mu} U^\alpha_\lambda U^\beta_\mu = H^{\alpha\beta}$$

waardoor deze komen te luiden

$$H^{\alpha\beta} K_\beta = T^\alpha$$

Stellen we

$$H_{\alpha\beta} H^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$$

dan wordt de oplossing

$$K_\beta = H_{\alpha\beta} T^\alpha$$

en zijn de $H_{\alpha\beta}$ de cofactoren der K_α, zoals dit bij Standaardvraagstuk I is afgeleid.

Omdat de P^i expliciet in de X^λ zijn uitgedrukt, kan men een functie van de P^i altijd herleiden tot één in de X^λ, zodat men bij de practische toepassingen steeds uitkomt met de kennis van de cofactoren der X^λ.

7.7. Standaardvraagstuk IV.

De grondvergelijkingen van Standaardvraagstuk IV luiden

$$u^\rho_i P^i = u^\rho_0 + a^\rho_\lambda X^\lambda \qquad (1)$$

$$i,k,l,m : 1 \rightarrow n$$

$$\rho,\sigma,\tau : 1 \rightarrow b$$

$$\lambda,\mu,\nu : 1 \rightarrow h$$

Elimineren we de h parameters X^λ uit de b betrekkingen, dan houden we over b - h betrekkingen tussen de n waar te nemen grootheden P^i en hebben we Standaardvraagstuk I verkregen. Zal dus het probleem zinvol zijn, dan moet

$$n > b - h$$

en uiteraard

$$b - h \rangle 0$$

De bovenbedoelde eliminatie kunnen we uitvoeren door elk der betrekkingen (1) te vermenigvuldigen met een factor r_ρ en op te tellen. We krijgen dan

$$r_\rho u_i^\rho p^i = r_\rho u_o^\rho + r_\rho a_\lambda^\rho X^\lambda \qquad (2)$$

Kiezen we nu de r_ρ zo, dat

$$r_\rho a_\lambda^\rho \qquad (3)$$

dan zijn de X^λ uit (2) overbodig. (3) stelt voor h homogene lineaire vergelijkingen in de b veranderlijken r_ρ, met $b \rangle h$. Als we de h stellen van n veranderlijken a_λ^ρ lineair onafhankelijk onderstellen, zijn de vergelijkingen (3) dit eveneens. Volgens de meermalen gebruikte stelling uit de algebra omtrent de lineaire afhankelijkheid zijn er dan b - h stellen r_ρ op te schrijven, die aan (3) voldoen en lineair onafhankelijk zijn. Laten we deze stellen noemen r_ρ^α , waarin $\alpha, \beta, \gamma : 1 \longrightarrow (b - h)$ Met ieder der stellen r_ρ^α kunnen we dan komen tot een betrekking tussen de P^i, waaruit de X^λ geëlimineerd zijn. Zij luiden

$$r_\rho^\alpha u_i^\rho p^i = r_\rho^\alpha u_o^\rho \qquad \alpha, \beta, \gamma : 1 \longrightarrow (b - h) \qquad (4)$$

terwijl

$$r_\rho^\alpha a_\lambda^\rho = 0 \qquad (5)$$

Zijn nu weer p^i de waarnemingen, g^{ik} hun cofactoren en ε^i de correcties aan de waarnemingen, dan volgt uit (4)

$$r_\rho^\alpha u_i^\rho \varepsilon^i = r_\rho^\alpha u_o^\rho - r_\rho^\alpha u_i^\rho p^i = T^\alpha \qquad (6)$$

Volgens de algorithmus van Standaardvraagstuk I is nu

$$\varepsilon^i = g^{ik} r_\rho^\alpha u_k^\rho k_\alpha \qquad (7)$$

waarin k_α de correlaten zijn. Deze uitdrukking voor de ε^i substitueren we in (6), waarmee we de normaalvergelijkingen verkrijgen, ter berekening van de k_α . In deze oplossing treden de r_ρ^α op, die in de grondvergelijkingen (1) niet voorkomen en voor de eliminatie der X^λ nodig waren. Wij willen daarom de oplossing omvormen en wel zodanig, dat daarin de r_ρ^α niet meer optreden. Om te beginnen kunnen we stellen

$$r_\rho^\alpha k_\alpha = K_\rho \qquad (8)$$

waardoor (7) wordt

$$\varepsilon^i = g^{ik} u_k^\rho K_\rho \qquad (9)$$

Na invulling van de gecorrigeerde waarnemingen in (1) gaan deze over in

$$u_i^\rho \varepsilon^i = u_o^\rho - u_i^\rho p^i + a_\lambda^\rho X^\lambda = t^\rho + a_\lambda^\rho X^\lambda \qquad (10)$$

en hierin substitueren we de waarden van ε^i volgens (9). Dit geeft

$$g^{ik}u_i^{\rho}u_k^{\sigma}K_{\sigma} = t^{\rho} + a_{\lambda}^{\rho}X^{\lambda} \qquad (11)$$

Verder is volgens (8)

$$a_{\lambda}^{\rho}K_{\rho} = a_{\lambda}^{\rho}r_{\rho}^{\alpha}k_{\alpha}$$

of met het oog op (5)

$$a_{\lambda}^{\rho}K_{\rho} = 0 \qquad (12)$$

De vergelijkingen (11) en (12) vormen het stelsel van b + h normaalvergelijkingen in de h parameters X^{λ} en de b correlaten K_{ρ}, die daaruit kunnen worden opgelost. De vergelijkingen (9) geven dan de correcties. Met het bovenstaande is dus ook de oplossing van Standaardvraagstuk IV gegeven.

Ofschoon dikwijls de oplossing op bovenstaande manier zal worden verricht, zijn er niettemin gevallen, waarin de navolgende modificatie er van een nuttige toepassing kan vinden.

Stel in (11)

$$g^{ik}u_i^{\rho}u_k^{\sigma} = G^{\rho\sigma}$$

en laat

$$G_{\rho\tau}G^{\rho\sigma} = \delta_{\tau}^{\sigma}$$

dan volgt de oplossing voor de K_{σ} uit (11)

$$K_{\sigma} = G_{\rho\sigma}t^{\rho} + G_{\rho\sigma}a_{\lambda}^{\rho}X^{\lambda} \qquad (12a)$$

We substitueren deze uitdrukking voor de K_{σ} in (12), hetgeen geeft

$$G_{\rho\sigma}a_{\lambda}^{\rho}a_{\mu}^{\sigma}X^{\lambda} = -G_{\rho\sigma}a_{\mu}^{\sigma}t^{\rho} \qquad (13)$$

en waarmee dus de K_{ρ} uit de normaalvergelijkingen geëlimineerd zijn.

De vergelijkingen (13) hebben de vorm van de normaalvergelijkingen van Standaardvraagstuk II met als waarnemingen

$$-t^{\rho} = u_i^{\rho}p^i - u_o^{\rho}$$

immers de cofactoren dezer waarnemingen zijn

$$\overline{t^{\rho}, t^{\sigma}} = \overline{u_i^{\rho}p^i, u_k^{\sigma}p^k} = u_i^{\rho}u_k^{\sigma}g^{ik} = G^{\rho\sigma}$$

en dus hun gewichten

$$G_{\rho\sigma}$$

Schrijft men nu (10) in de vorm

$$a_{\lambda}^{\rho}X^{\lambda} = u_i^{\rho}p^i - u_o^{\rho} + u_i^{\rho}\varepsilon^i$$

en stelt men

$$u_i^{\rho}p^i - u_o^{\rho} = \overline{p}^{\rho} \qquad (14)$$

$$u_i^{\rho}\varepsilon^i = \overline{\varepsilon}^{\rho} \qquad (15)$$

waardoor

$$a_{\lambda}^{\rho}X^{\lambda} = \overline{p}^{\rho} + \overline{\varepsilon}^{\rho} \qquad (16)$$

dan heeft men hier voor zich de correctievergelijkingen van Standaard-

vraagstuk II met de waarnemingen $\overline{p}^\rho$, hun correcties $\overline{\varepsilon}^\rho$ en de parameters X^λ. Deze geven dan met de gewichten $G_{\rho\sigma}$ van de $\overline{p}^\rho$ aanleiding tot de normaalvergelijkingen

$$G_{\rho\sigma}a^\rho_\lambda a^\sigma_\mu X^\lambda = G_{\rho\sigma}a^\sigma_\mu \overline{p}^\rho \qquad (17)$$

die overeenstemmen met (13).

Heeft men hieruit de X^λ berekend, dan leveren de vergelijkingen (11) de K_ρ en ten slotte de vergelijkingen (9) de ε^i en dit is niet anders dan het rekenvoorschrift van Standaardvraagstuk I, toegepast op de vergelijkingen (1), waarin thans de X^λ als bekende grootheden worden beschouwd.

Het gehele proces komt dus hierop neer, dat men in (1) het gehele eerste lid, verminderd met de bekende term u^ρ_o, beschouwt als één grootheid, dus men stelt

$$u^\rho_i p^i - u^\rho_o = \overline{p}^\rho$$

als waarnemingen heeft men de $\overline{p}^\rho$ als in (14) met de correcties $\overline{\varepsilon}^\rho$. Men bepaalt nu de cofactoren $G^{\rho\sigma}$ door toepassing van de voortplantingswet op (14) en uit deze de $G_{\rho\sigma}$. Daarna stelt men, uitgaande van (16), de normaalvergelijkingen (17) op. Na berekening der X^λ past men op (1) het eerste standaardvraagstuk toe, waarin de X^λ bekend zijn.

Verder is nog

$$\begin{aligned} g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k &= u^\rho_k \varepsilon^k K_\rho && (\text{zie } (9)) \\ &= (t^\rho + a^\rho_\lambda X^\lambda) K_\rho && (\text{zie } (10)) \\ &= K_\rho t^\rho && (\text{zie } (12)) \end{aligned} \qquad (18)$$

Ook is

$$\begin{aligned} g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k &= u^\rho_k \varepsilon^k K_\rho \\ &= \overline{\varepsilon}^\rho K_\rho && (\text{zie } (15)) \\ &= \overline{\varepsilon}^\rho G_{\rho\sigma}(t^\sigma + a^\sigma_\lambda X^\lambda) && (\text{zie } (12a)) \\ &= G_{\rho\sigma}\overline{\varepsilon}^\rho u^\sigma_i \varepsilon^i && (\text{zie } (10)) \\ &= G_{\rho\sigma}\overline{\varepsilon}^\rho \overline{\varepsilon}^\sigma && (\text{zie } (15)) \end{aligned}$$

en dus volgens de regels van het tweede standaardvraagstuk

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = G_{\rho\sigma}\overline{\varepsilon}^\rho\overline{\varepsilon}^\sigma = G_{\rho\sigma}\overline{p}^\rho\overline{p}^\sigma - G_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma_\lambda X^\lambda$$

in welke formules weer een aantal contrôlemogelijkheden ligt opgesloten.

Opmerking.

De behandelde modificatie berust op een bepaalde oplossingsmethode van de normaalvergelijkingen, die bestond in het elimineren van de correlaten K_ρ. Het speciale aspect van deze methode is, dat zij bestaat in de achtereenvolgende toepassing van de rekenregels van het tweede en het eerste standaardvraagstuk, hetgeen in verscheidene practische gevallen

tot een overzichtelijke behandeling van het probleem voert. Niettemin kan echter soms een andere oplossing van de normaalvergelijkingen aanbeveling verdienen.

7.8. De cofactoren bij Standaardvraagstuk IV.

Wij kunnen hier niet volstaan met enkel de cofactoren der X^λ, omdat hier de P^i niet expliciet in de X^λ zijn uitgedrukt, zoals bij Standaardvraagstuk III. Wanneer we met een functie der P^i te maken krijgen en daarvan de cofactor moeten bepalen, kunnen we deze niet eerst als een functie der X^λ schrijven. We zullen hier dus ook de cofactoren der $p^i + \varepsilon^i$ moeten afleiden.

Na de overgang op de $\overline{p}^\rho$ hadden we voor de bepaling der X^λ te maken met het tweede standaardvraagstuk. Dit luidde

$$a_\lambda^\rho X^\lambda = \overline{p}^\rho + \overline{\varepsilon}^\rho \qquad (1)$$

met als cofactoren der $\overline{p}^\rho$ de $G^{\rho\sigma}$. De normaalvergelijkingen werden

$$G_{\rho\sigma} a_\lambda^\rho a_\mu^\sigma X^\lambda = G_{\rho\sigma} a_\mu^\sigma \overline{p}^\rho \qquad (2)$$

zie (16) en (17) §7.7.
Stellen we

$$G_{\rho\sigma} a_\lambda^\rho a_\mu^\sigma = H_{\lambda\mu} \qquad (3)$$

dan komen de normaalvergelijkingen te luiden

$$H_{\lambda\mu} X^\lambda = G_{\rho\sigma} a_\mu^\sigma \overline{p}^\rho \qquad (4)$$

en als we dan weer definiëren

$$H_{\lambda\mu} H^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu \qquad (5)$$

dan is de oplossing

$$X^\lambda = H^{\lambda\mu} G_{\rho\sigma} a_\mu^\sigma \overline{p}^\rho \qquad (6)$$

Wij weten nu van Standaardvraagstuk II, dat

$$\overline{X^\lambda, X^\mu} = H^{\lambda\mu} \qquad (7)$$

en eveneens, dat

$$\overline{\overline{\varepsilon}^\rho, (\overline{\varepsilon}^\sigma + \overline{p}^\sigma)} = 0 \qquad (8)$$

Uit (6) volgt

$$\overline{X^\lambda, \overline{p}^\tau} = H^{\lambda\mu} G_{\rho\sigma} a_\mu^\sigma G^{\rho\tau} = H^{\lambda\mu} a_\mu^\sigma \delta_\sigma^\tau$$

en dus

$$\overline{X^\lambda, \overline{p}^\tau} = H^{\lambda\mu} a_\mu^\tau \qquad (9)$$

Nu is volgens (1)

$$a_\lambda^\rho \overline{X^\lambda, \overline{p}^\tau} = \overline{\overline{p}^\rho, \overline{p}^\tau} + \overline{\overline{\varepsilon}^\rho, \overline{p}^\tau}$$

zodat met het oog op (9)

$$\overline{\overline{\xi}^{\rho},\ \overline{p}^{\tau}} = a^{\rho}_{\lambda}a^{\tau}_{\mu}H^{\lambda\mu} - G^{\rho\tau} \qquad (10)$$

Uit (9) volgt dan wegens

$$\overline{\overline{\xi}^{\rho},\ \overline{\xi}^{\sigma}} = -\ \overline{\overline{\xi}^{\rho},\ \overline{p}^{\sigma}}$$

$$\overline{\overline{\xi}^{\rho},\ \overline{\xi}^{\sigma}} = G^{\rho\sigma} - a^{\rho}_{\lambda}a^{\tau}_{\mu}H^{\lambda\mu} \qquad (11)$$

Nu was volgens (11) §7.7.

$$g^{ik}u^{\rho}_{i}u^{\sigma}_{k}K_{\sigma} = t^{\rho} + a^{\rho}_{\lambda}X^{\lambda}$$

of, daar

$$t^{\rho} = -\ \overline{p}^{\rho}$$

zie (10) en (14) §7.7.

$$G^{\rho\sigma}K_{\sigma} = -\ \overline{p}^{\rho} + a^{\rho}_{\lambda}X^{\lambda}$$

of volgens (1)

$$G^{\rho\sigma}K_{\sigma} = \overline{\xi}^{\rho}$$

met als oplossing

$$K_{\sigma} = G_{\rho\sigma}\overline{\xi}^{\rho} \qquad (12)$$

Hieruit volgt dan direct

$$\overline{K_{\rho},\ K_{\sigma}} = G_{\rho\tau}\overline{\overline{\xi}^{\tau},\ \overline{\xi}^{\varphi}}\,G_{\varphi\sigma} \qquad (13)$$

Volgens (9) §7.7. was

$$\xi^{i} = g^{ik}u^{\rho}_{k}K_{\rho} \qquad (14)$$

Met behulp hiervan krijgen we

$$\overline{\xi^{i},\ \xi^{k}} = g^{il}u^{\rho}_{l}\overline{K_{\rho},\ K_{\sigma}}u^{\sigma}_{m}g^{mk}$$

of, lettende op (11) en (13),

$$\overline{\xi^{i},\ \xi^{k}} = g^{il}u^{\rho}_{l}G_{\rho\tau}\left(G^{\tau\varphi} - a^{\tau}_{\lambda}H^{\lambda\mu}a^{\varphi}_{\mu}\right)G_{\varphi\sigma}u^{\sigma}_{m}g^{mk}$$

en na een kleine vereenvoudiging

$$\overline{\xi^{i},\ \xi^{k}} = g^{il}u^{\rho}_{l}G_{\rho\sigma}u^{\sigma}_{m}g^{mk} - g^{il}u^{\rho}_{l}G_{\rho\tau}a^{\tau}_{\lambda}H^{\lambda\mu}a^{\varphi}_{\mu}G_{\varphi\sigma}u^{\sigma}_{m}g^{mk} \qquad (15)$$

Van Standaardvraagstuk I weten we

$$\overline{\left(p^{i} + \xi^{i}\right),\ \left(p^{k} + \xi^{k}\right)} = \overline{p^{i},p^{k}} - \overline{\xi^{i},\xi^{k}}$$

zodat met de afleiding van (13) de gestelde taak volbracht is.

Het zou nu nog kunnen zijn, dat men in een functie, waarvan men de cofactor wilde kennen, tegelijk de P^{i} en de X^{λ} voorkomen.

Wij zullen daarom nog berekenen

$$\overline{\left(p^{i} + \xi^{i}\right),\ X^{\lambda}}$$

Hoewel diverse wegen naar het doel leiden, is de volgende er één, waarbij weinig cijferwerk nodig is.

Uit (1) volgt

$$a_\lambda^\rho \overline{X^\lambda,\ X'} = \overline{(\bar{p}^\rho + \bar{\varepsilon}^\rho),\ X'^\mu}$$

of

$$\overline{(\bar{p}^\rho + \bar{\varepsilon}^\rho),\ X'^\mu} = a_\lambda^\rho H^{\lambda\mu}$$

vergelijken we dit resultaat met (9) dan moet

$$\overline{\bar{\varepsilon}^\rho,\ X'^\mu} = 0$$

Omdat, zie (12), K_ρ een functie is der $\bar{\varepsilon}^\rho$ is dus ook

$$\overline{K_\rho,\ X'^\mu} = 0$$

Verder is, zie (14), ε^i een functie der K_ρ ; derhalve is

$$\overline{\varepsilon^i,\ X'^\mu} = 0$$

We hebben dus reeds gevonden, dat

$$\overline{(p^i + \varepsilon^i),\ X'^\lambda} = \overline{p^i,\ X'^\lambda}$$

Volgens (6) is

$$\overline{p^i,\ X'^\lambda} = H^{\lambda\mu} G_{\rho\sigma} a_\mu^\sigma \overline{\bar{p}^\rho,\ p^i}$$

Letttende op (14) §7.7. is

$$\overline{\bar{p}^\rho,\ p^i} = u_k^\rho g^{ik}$$

en dus wordt

$$\overline{(p^i + \varepsilon^i),\ X'^\lambda} = \overline{\bar{p}^i,\ X'^\lambda} = H^{\lambda\mu} G_{\rho\sigma} a_\mu^\sigma u_k^\rho g^{ik}$$

waarmee ook dit probleem is opgelost.

7.9. Standaardvraagstuk V.

Hier zijn de grondvergelijkingen

$$u_i^\rho p^i = u_o^\rho + a_\lambda^\rho X^\lambda \qquad (1)$$

$$U_\lambda^\alpha X^\lambda = U_o^\alpha \qquad (2)$$

De vergelijkingen zijn alle lineair onafhankelijk.

i,k,l,m : $1 \longrightarrow n$ $\qquad$ ρ,σ,τ : $1 \longrightarrow b$

λ,μ,ν,κ : $1 \longrightarrow h$ $\qquad$ α,β,γ : $1 \longrightarrow B$

We hebben hier n waar te nemen grootheden p^i, h parameters X^λ, b betrekkingen (1) en B betrekkingen (2). We kunnen uit de B + b betrekkingen de X^λ geëlimineerd denken, we houden dan over Standaardvraagstuk I met b + B - h betrekkingen. Hier moet dus

$$n \geq b + B - h \geq 0$$

Verder onderstellen we $h \geq B$. Immers als $h = B$ zouden de X^λ uit (2) kunnen worden opgelost en in (1) ingesteld, waarna we eenvoudig Standaardvraagstuk I zouden hebben. Het probleem had op deze manier dus we

nig zin. Was $h < B$ dan zouden de vergelijkingen (2) afhankelijk zijn, hetgeen met de aanname van de onafhankelijkheid dezer vergelijkingen zou strijden.

Voor het vinden van een voorschrift voor dit vraagstuk gaan we het terugbrengen tot Standaardvraagstuk IV. Laat daartoe B_o^λ een stel grootheden zijn, dat voldoet aan het stelsel (2), dus

$$U_\lambda^\alpha B_o^\lambda = U_o^\alpha \qquad (2a)$$

Trekken we elk dezer vergelijkingen af van de overeenkomstige van (2) dan krijgen we het stelsel

$$U_\lambda^\alpha (X^\lambda - B_o^\lambda) = 0 \qquad (3)$$

Dit zijn B lineaire onafhankelijke homogene vergelijkingen in de h veranderlijken $X^\lambda - B_o^\lambda$. Er zijn dus h - B lineair onafhankelijke stellen grootheden B_φ^λ (φ, χ, ψ : $1 \longrightarrow h - B$) aan te geven als oplossing van (3), waarvoor dus

$$U_\lambda^\alpha B_\varphi^\lambda = 0 \qquad (4)$$

Elke oplossing is dan lineair in de B_φ^λ uit te drukken, zodat

$$X^\lambda = B_o^\lambda + B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (5)$$

We substitueren nu deze waarden van X^λ in (1), waardoor we krijgen

$$u_i^\rho P^i = u_o^\rho + a_\lambda^\rho B_o^\lambda + a_\lambda^\rho B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (6)$$

waarmee nu inderdaad Standaardvraagstuk IV verkregen is met de h - B parameters Z^φ.

Gebruik makende van de resultaten van §7.7. wordt de oplossing in de notatie van het onderhavige probleem de volgende

$$\xi^i = g^{ik} u_k^\rho K_\rho \qquad (7)$$

(zie (9) §7.7.)

$$u_i^\rho \xi^i = T^\rho + a_\lambda^\rho B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (8)$$

waarin

$$T^\rho = u_o^\rho + a_\lambda^\rho B_o^\lambda - u_i^\rho p^i \qquad (9)$$

(vergelijk (10) §7.7.)

$$g^{ik} u_i^\rho u_k^\sigma K_\sigma = T^\rho + a_\lambda^\rho B_\varphi^\lambda Z^\varphi \qquad (10)$$

(vergelijk (11) §7.7.)

$$a_\lambda^\rho B_\varphi^\lambda K_\rho = 0 \qquad (11)$$

(vergelijk (12) §7.7.)

De normaalvergelijkingen, gevormd door (10) en (11) samen, bepalen de Z^φ en de K_ρ, waarna de ξ^i berekend worden volgens (7).
Ten slotte was

$$g^{ik}\xi^i\xi^k = K_\rho T^\rho \qquad (12)$$

(zie (18) §7.7.)

Wij moeten nu deze oplossing omwerken tot een andere, waarin de B_φ^λ niet voorkomen. Vooreerst kunnen we daartoe (10) met behulp van (5) veranderen in

$$g^{ik}u_i^\rho u_k^\sigma K_\sigma = u_o^\rho - u_i^\rho p^i + a_\lambda^\rho X^\lambda$$

of als we stellen

$$g^{ik}u_i^\rho u_k^\sigma = G^{\rho\sigma}$$

en

$$u_o^\rho - u_i^\rho p^i = t^\rho$$

$$G^{\rho\sigma}K_\sigma = t^\rho + a_\lambda^\rho X^\lambda \qquad (13)$$

Verder vormen de vergelijkingen (4) een compleet stel lineaire onafhankelijke homogene vergelijkingen, waaraan de stellen B_φ^λ voldoen. Moeten deze stellen ook nog voldoen aan de andere lineaire vergelijkingen (11), dan moeten de coëfficiënten van elk dezer laatste vergelijkingen, dus de $a_\lambda^\rho K_\rho$, lineaire functies zijn van de coëfficiënten van het stel (4), derhalve

$$a_\lambda^\rho K_\rho = U_\lambda^\alpha k_\alpha \qquad (14)$$

We hebben nu de stellen vergelijkingen (13), (14) en (2) ter bepaling van de X^λ, K_ρ en k_α. Samengevat zijn ze

$$G^{\rho\sigma}K_\sigma - a_\lambda^\rho X^\lambda = t^\rho \qquad (15)$$

$$-a_\mu^\sigma K_\sigma + U_\mu^\alpha k_\alpha = 0 \qquad (16)$$

$$U_\lambda^\alpha X^\lambda = U_o^\alpha \qquad (17)$$

Dit zijn de normaalvergelijkingen. Zijn de onbekenden hieruit bepaald, dan dienen de vergelijkingen (7) voor de berekening der ε^i.

Volgens (12) was

$$g^{ik}\xi^i\xi^k = K_\rho T^\rho$$

of met het oog op (9)

$$g^{ik}\xi^i\xi^k = K_\rho t^\rho + K_\rho a_\lambda^\rho B_o^\lambda$$

Nu is volgens (14)

$$K_\rho a_\lambda^\rho B_o^\lambda = k_\alpha U_\lambda^\alpha B_o^\lambda$$

zodat, verder lettend op (2a),

$$g^{ik}\xi^i\xi^k = K_\rho t^\rho + k_\alpha U_o^\alpha \qquad (18)$$

Ofschoon met het bovenstaande de oplossing gegeven is kan nog van belang zijn, op te merken, dat het soms voordelig is, het vijfde standaardvraagstuk tot het derde terug te brengen volgens dezelfde gedachtengang, waarmee het vierde tot het tweede kon worden gereduceerd.

Met (15) kunnen de K_σ op de bekende wijze in de X^λ worden uitgedrukt als volgt

$$K_\sigma = G_{\rho\sigma} a^\rho_\lambda X^\lambda + G_{\rho\sigma} t^\rho$$

Hiermee kunnen dan de K_σ uit (16) geëlimineerd worden, hetgeen geeft

$$- G_{\rho\sigma} a^\rho_\lambda a^\sigma_\mu X^\lambda + U^\alpha_\mu k_\alpha = G_{\rho\sigma} a^\sigma_\mu t^\rho \qquad (19)$$

Met het stelsel (17) vormt (19) de normaalvergelijkingen van het Standaardvraagstuk III, dat men krijgt, als in de oorspronkelijke vergelijkingen (1) gesteld wordt

$$u^\rho_i p^i = \bar{p}^\rho$$

met de waarnemingen

$$u^\rho_i p^i = \bar{p}^\rho \qquad (20)$$

en de correcties

$$u^\rho_i \varepsilon^i = \bar{\varepsilon}^\rho$$

met cofactoren der $\bar{p}^\rho$

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u^\rho_i u^\sigma_k$$

afgeleid uit (20) door toepassing van de voortplantingswet. Dit Standaardvraagstuk III kan dan desgewenst in 2 trappen worden behandeld.

Standaardvraagstuk V kan echter ook direct in twee trappen worden opgelost. Men kan nl. eerst de betrekkingen (2)

$$U^\alpha_\lambda X^\lambda = U^\alpha_o \qquad (21)$$

buiten beschouwing laten. De eerste trap is dan de oplossing van Standaardvraagstuk IV, uitgaande van de vergelijkingen (1). Men vindt dan voor de parameters waarden Y^λ, waarbij men de cofactoren berekent. Deze Y^λ zijn dan de waarnemingen voor de tweede phase, die bestaat in een vereffening op de voorwaarden (21), waarbij voor de Y^λ correcties worden berekend, waarmee deze Y^λ overgaan in de X^λ.

Welke van de drie geschetste processen men zal toepassen zal afhangen van de aard van het probleem, zoals zich dat in de practijk presenteert. Men kan daarvoor geen vaste gedragslijn geven.

Om geheel volledig te zijn moet men nu nog een studie maken van de cofactoren bij Standaardvraagstuk V. Wij laten dit achterwege, uit de overweging, dat dit standaardprobleem weinig zal worden toegepast en als het moet worden gebruikt veelal niet de vrij ingewikkelde algemene formules van de theorie zullen worden gebezigd, maar voor de berekening van de cofactoren eerder gezocht zal worden naar speciale mogelijkheden bij het te behandelen probleem, die gelegen zijn in de bijzondere waarden van coëfficiënten of groepen van coëfficiënten.

HOOFDSTUK VIII.

De rekentechniek van de oplossing van een stelsel normaalvergelijkingen.

C.F. Gauss heeft reeds een rekenschema voor de oplossing van een stelsel normaalvergelijkingen. Men vindt dit op verschillende plaatsen in de literatuur (b.v. J.M. Tienstra: Over de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde dd. 1 October 1946).

Hier wordt dus volstaan met de bijvoeging van het schema en een uitgewerkt eenvoudig voorbeeld.

Voor het behandelen van grote stelsels van normaalvergelijkingen heeft men naar andere methoden gezocht. Hiervan is het " ontwikkelingsproces " van Boltz er één (H. Boltz: Entwickelungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate. Veröffentlichungen des Preuss. Geod. Inst. Neue Folge 90), op blz. 122 genoemd bij de behandeling van Standaardvraagstuk III. Het proces komt op het volgende neer.

De gegeven betrekkingen worden in twee groepen gesplitst.

$$u_i^{\rho} p^i = u_o^{\rho} \quad ; \rho, \sigma, \tau : 1 \longrightarrow b_1 \qquad (1)$$

$$u_i^{\alpha} p^i = u_o^{\alpha} \quad ; \alpha, \beta, \gamma : b_1 \longrightarrow b \qquad (2)$$

$$i,k,l,m : 1 \longrightarrow n \qquad b_1 < b < n$$

Dit zijn de vergelijkingen (1) en (2) van blz. 121.

De normaalvergelijkingen, evenzeer in twee groepen gesplitst overeenkomstig de splitsing in de groepen bij de betrekkingen, zijn:

$$G^{\rho\sigma} K_\rho + G^{\alpha\sigma} K_\alpha = t^{\sigma} \qquad (3)$$

$$G^{\alpha\beta} K_\rho + G^{\alpha\beta} K_\alpha = t^{\beta} \qquad (4)$$

(vergelijk (6) en (7) op blz. 121)

waarin:

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma}$$

$$G^{\alpha\sigma} = g^{ik} u_i^{\alpha} u_k^{\sigma}$$

$$G^{\alpha\beta} = g^{ik} u_i^{\alpha} u_k^{\beta}$$

en

$$t^{\sigma} = u_o^{\sigma} - u_i^{\sigma} p^i$$

$$t^{\beta} = u_o^{\beta} - u_i^{\beta} p^i$$

Is nu

$$G_{\rho\tau} G^{\rho\sigma} = \delta_\tau^\sigma$$

dan luidt de oplossing der K_ρ uit (3)

$$K_\rho = G_{\rho\sigma} t^{\sigma} - G_{\rho\sigma} G^{\alpha\sigma} K_\alpha \qquad (5)$$

Men stelt nu

$$K_\rho = \bar{K}_\rho + \Delta K_\rho \qquad (6)$$

waarin

$$\bar{K}_\rho = G_{\rho\sigma} t^\sigma \qquad (7)$$

zodat dus volgens (5)

$$\Delta K_\rho = - G_{\rho\sigma} G^{\alpha\sigma} K_\alpha \qquad (8)$$

Met (6) wordt (4)

$$G^{\rho\beta} \Delta K_\rho + G^{\alpha\beta} K_\alpha = t^\beta - G^{\rho\beta} \bar{K}_\rho \qquad (9)$$

of na eliminatie van ΔK_ρ met behulp van (8) en van $\bar{K}_\rho$ volgens (7)

$$(G^{\alpha\beta} - G_{\rho\sigma} G^{\alpha\sigma} G^{\rho\beta}) K_\alpha = t^\beta - G^{\rho\beta} G_{\rho\sigma} t^\sigma \qquad (10)$$

(vergelijk de formules (8) t/m (12) op blz. 122).

Men begint dus met uit de eerste groep normaalvergelijkingen de termen met de K_α weg te laten en lost de overblijvende K_ρ , die dan $\bar{K}_\rho$ worden genoemd, op en wel zo, dat men de t^σ als algebraische grootheden in de oplossing meevoert. Men krijgt dan volgens (7) de $\bar{K}_\rho$ als lineaire functies der t^σ , waarmee dus de $G_{\rho\sigma}$ zijn bepaald. Men zou dit procédé misschien eenvoudiger kunnen kenschetsen als dat, waarbij de $G_{\rho\sigma}$ worden berekend. Men berekent nu

$$G_{\rho\sigma} G^{\alpha\sigma} = Z_\rho^\alpha$$

(" tussencorrelaten " genoemd door Boltz)

en daarna

$$G_{\rho\sigma} G^{\alpha\sigma} G^{\rho\beta} = Z_\rho^\alpha G^{\rho\beta}$$

Volgens (10) is dan

$$(G^{\alpha\beta} - Z_\rho^\alpha G^{\rho\beta}) K_\alpha = t^\beta - Z_\sigma^\beta t^\sigma$$

of

$$H^{\alpha\beta} K_\alpha = T^\beta$$

Hieruit lost men, weer met algebraische T^β, de K_α op. Dus

$$K_\alpha = H_{\alpha\beta} T^\beta$$

met

$$H_{\alpha\beta} H^{\beta\gamma} = \delta_\beta^\gamma$$

Hiermee zijn dan de $H_{\alpha\beta}$ bepaald. Men kan nu K_α schrijven als functies der t^β en t^σ:

$$K_\alpha = H_{\alpha\beta} (t^\beta - Z_\sigma^\beta t^\sigma) = - H_{\alpha\beta} Z_\sigma^\beta t^\sigma + H_{\alpha\beta} t^\beta \qquad (11)$$

en evenzo de K_ρ

$$K_\rho = \bar{K}_\rho + \Delta K_\rho$$

of volgens (7) en (8)

$$K_\rho = G_{\rho\sigma} t^\sigma - Z_\rho^\alpha K_\alpha$$

$$K_\rho = G_{\rho\sigma} t^\sigma - Z_\rho^\alpha H_{\alpha\beta} (t^\beta - Z_\sigma^\beta t^\sigma)$$

$$K_\rho = (G_{\rho\sigma} + Z_\rho^\alpha Z_\sigma^\beta H_{\alpha\beta}) t^\sigma - Z_\rho^\alpha H_{\alpha\beta} t^\beta \qquad (12)$$

In (11) en (12) is dan de oplossing met algebraische t^{α} en t^{β} verkregen van het complete stelsel normaalvergelijkingen. Men zou deze oplossing kunnen voorstellen door

$$K_\rho = I_{\rho\sigma} t^{\sigma} + I_{\rho\beta} t^{\beta}$$

$$K_\alpha = I_{\alpha\sigma} t^{\sigma} + I_{\alpha\beta} t^{\beta}$$

waarin dan

$$I_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$$

$$I_{\alpha\sigma} = - H_{\alpha\beta} Z_{\sigma}^{\beta}$$

$$I_{\rho\sigma} = G_{\rho\sigma} + Z_{\rho}^{\alpha} I_{\alpha\sigma}$$

Hierna kan men het proces herhalen en de thans opgeloste normaalvergelijkingen combineren met een nieuw stel normaalvergelijkingen, welke handelwijze men ad libitum kan voortzetten.

Laat men elke groep uit slechts één vergelijking bestaan, dan blijkt het, dat men met de oplossingsmethode van Gauss te maken heeft.

Het toepassen van het beschreven ontwikkelingsproces is slechts dan voordelig, als het merendeel der $G^{\alpha\sigma}$ nul is. Door een handige groepering van de normaalvergelijkingen kan men de moeiten, verbonden aan het berekenen der Z_{ρ}^{α}, sterk reduceren, omdat vele dezer grootheden dan nul worden. Voor de vereffening van grote driehoeksnetten is de methode nog al eens toegepast.

Men kent ook nog een " substitutieproces ", eveneens door Boltz bedacht. Hiervoor wordt echter naar de literatuur verwezen (Veröffentlichungen des Preuss. Geod. Inst. Neue Folge 100).

HOOFDSTUK IX .

De contrôle van het model en de numerieke bepaling van de modulus, middelbare fout.

9.1. Inleiding.

Het is een voor de hand liggend verlangen van de waarnemer te willen weten in welke mate zijn waarnemingen het aangenomen mathematische model bevredigen en het is duidelijk, dat, zo dit model gegeven is op de wijze als bij standaardvraagstuk I, de tegenspraken in de betrekkingen uitsluitsel hieromtrent geven. De moeilijkheid is, dat de tegenspraken niet uitsluitend toegeschreven kunnen worden aan het fluctuerende karakter van de waarnemingen: de meerdere of mindere mate van volkomenheid van het gebruikte model komt er eveneens in tot uiting. In de bestaande vaktaal noemt men de eerste soort invloed " toevallige " en de tweede soort " systematische " fouten. Deze beide namen passen slecht in de gedachtengang van de door ons ontwikkelde theorie ; zij stammen uit de klassieke beschouwingswijze, waarin het begrip " fout " een centrale plaats inneemt. Men kent daar een " ware " waarde van een te meten grootheid tegenover de gemeten waarde. Ware waarde minus gemeten waarde noemt men dan de " ware " fout. Beide begrippen: ware waarde en ware fout zijn nutteloos, omdat wij ze nimmer zullen kennen. Bovendien is de ware waarde een physische absurditeit: een meetstaaf b.v. heeft geen ware lengte. Verder kent men in de klassieke theorie de " schijnbare " fout, dat is referentiewaarde minus waarneming, waarbij als referentiewaarde de vereffende waarde volgens de methode van de kleinste vierkanten wordt gebruikt. De schijnbare fout is dus de tegengestelde waarde van de in onze theorie optredende " correctie " aan de waarneming. De klassieke beschouwingswijze leert verder, dat de fouten, die de waarnemingen aankleven, van tweeerlei aard zijn: " toevallige " fouten en " systematische " fouten. De laatste fouten worden als een naspeurbare soort gedacht: b.v. fouten, veroorzaakt door temperatuursinvloeden e.d. Als deze in genoegzame mate verwijderd zijn beschouwt men hetgeen overblijft als de toevallige fout.

De critiek op bovenstaande gedachtengang richt zich op de volgende punten:

1ste het voorop en centraal stellen van het begrip fout is onjuist. Er kan pas sprake zijn van een fout als eerst een referentiewaarde is gedefinieerd. Deze kan niet anders dan een functie van de waarnemingen zijn. De waarneming is dus primair en logischerwijze behoort deze het uitgangspunt van de theorie te zijn ;

2de de begrippen ware waarde en ware fout zijn nutteloos, omdat zij pure ficties zijn en de waarnemingsleer het er zonder kan doen ,

3de de toevallige fout is niet gedefinieerd. Aan het elimineren van de systematische fouten komt nl. geen eind. Het is stellig verwerpelijk, het begrip toevallige fout te gebruiken alsof hier van een behoorlijk gedefinieerde grootheid sprake was ;

4de de naam systematische fout is in hoge mate misleidend. Waar " fout " in de klassieke theorie steeds betrokken wordt op de waarneming, als het ware de tekortkoming daarvan aangeeft, wordt door de naam het feit verdoezeld, dat het optreden van systematische fouten wijst op onvolkomenheden van het mathematische model.

Het verdient sterk aanbeveling, de gevraakte begrippen uit te schakelen, hetgeen dan ook in de door ons ontwikkelde theorie is geschied. Dit was overigens geen lastig probleem, omdat geen enkele van deze begrippen in een reëel gehouden opzet voorkomt. Wij kennen slechts de waarnemingen, het mathematische model en de regel van de methode der kleinste kwadraten als het middel om de waarnemingen zo te corrigeren, dat zij in het aangenomen model passen.

Het model kan meer of minder volledig zijn en de waarnemingen zorgvuldiger of ruwer zijn verricht en deze beide factoren bepalen het bedrag van de tegenspraken bij substitutie van de waarnemingen in de betrekkingen van het model. Dit is dan ook het kenmerkende van de situatie.

9.2. $g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k$

De uitdrukking

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = K_\rho t^\rho$$

bevat mogelijkheden voor de beantwoording van de vragen, in de vorige paragraaf gesteld. We zullen deze daarom thans aan een nader onderzoek onderwerpen.

Volgens de normaalvergelijkingen is

$$G^{\rho\sigma}K_\sigma = t^\rho$$

en dus is

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = G^{\rho\sigma}K_\rho K_\sigma$$

Het tweede lid schrijven we als een som van kwadraten:

$$G^{11}K_1K_1 + 2\,G^{12}K_1K_2 + \ldots\ldots + 2\,G^{1b}K_1K_b +$$
$$+ \quad G^{22}K_2K_2 + \ldots\ldots + 2\,G^{2b}K_2K_b +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G^{bb}K_bK_b =$$

$$= \left(\sqrt{G^{11}}K_1 + \frac{G^{12}}{\sqrt{G^{11}}}K_2 + \ldots\ldots + \frac{G^{1b}}{\sqrt{G^{11}}}K_b\right)^2 +$$

$$+ \left(G^{22} - \frac{G^{12}G^{12}}{G^{11}}\right)K_2K_2 + 2\left(G^{23} - \frac{G^{12}G^{13}}{G^{11}}\right)K_2K_3 + \ldots\ldots +$$

$$+ \left(G^{33} - \frac{G^{13}G^{13}}{G^{11}}\right)K_3K_3 + \ldots\ldots +$$

$$+ \left(G^{bb} - \frac{G^{1b}G^{1b}}{G^{11}} \right) K_b K_b .$$

Er is nu één kwadraat afgesplitst en wel zodanig, dat alle termen van de oorspronkelijke vorm, waarin K_1 voorkomt, er in zijn opgenomen. De termen, die overblijven, vormen een kwadratische vorm met b - 1 grootheden K_ρ . Op dezelfde wijze, zoals dit met de oorspronkelijke vorm een keer gedaan is, kan nu van de overblijvende termen een kwadraat worden afgesplitst, waarin alle termen met K_2 zijn opgenomen. Op deze wijze voortgaande komt men tot een splitsing in b kwadraten. Het laatste kwadraat bestaat uit 1 term, nl. $K_b K_b$ met een coëfficiënt.

Volgens de oplossingsmethode van Gauss voor de normaalvergelijkingen worden achtereenvolgens de K_ρ geëlimineerd. Na de eerste stap in dit eliminatie-proces, de eliminatie van K_1, komen de resulterende vergelijkingen er als volgt uit te zien:

$$G^{11}K_1 + G^{12}K_2 + G^{13}K_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + G^{1b}K_b = t^1$$

$$\left(G^{22} - \frac{G^{12}G^{12}}{G^{11}} \right) K_2 + \left(G^{23} - \frac{G^{12}G^{13}}{G^{11}} \right) K_3 + \ldots + \left(G^{1b} - \frac{G^{12}G^{1b}}{G^{11}} \right) K_b = t^2 - \frac{G^{12}}{G^{11}} t^1$$

$$\left(G^{23} - \frac{G^{13}G^{12}}{G^{11}} \right) K_2 + \left(G^{33} - \frac{G^{13}G^{13}}{G^{11}} \right) K_3 + \ldots\ldots\ldots = t^3 - \frac{G^{13}}{G^{11}} t^1$$

enz.

Ter bekorting zullen we schrijven

$$G^{22} - \frac{G^{12}G^{12}}{G^{11}} = G^{22}(1)$$

$$G^{23} - \frac{G^{12}G^{13}}{G^{11}} = G^{23}(1) \quad \text{enz.}$$

$$t^2 - \frac{G^{12}}{G^{11}} t^1 = t^2(1) \quad \text{enz.}$$

Gebruik makende van deze notatie en voorts lettende op de eerste normaalvergelijking, hebben we

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = \left(\frac{1}{\sqrt{G^{11}}} t^1 \right)^2 + G^{22}(1)\, K_2K_2 + 2\, G^{23}(1)\, K_2K_3 + \ldots\ldots + G^{bb}(1)\, K_bK_b \qquad (1)$$

en

$$\left.\begin{aligned} G^{11}K_1 + G^{12}K_2 + \ldots\ldots\ldots + G^{1b}K_b &= t^1 \\ G^{22}(1)K_2 + \ldots\ldots\ldots + G^{2b}(1)K_b &= t^2(1) \\ G^{23}(1)K_2 + \ldots\ldots\ldots + G^{3b}(1)K_b &= t^3(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ G^{2b}(1)K_2 + \ldots\ldots\ldots + G^{bb}(1)K_b &= t^b(1) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Wij gaan het proces, waarvan met het bovenstaande de eerste stap gedaan is, voortzetten. We splitsen uit (1) een nieuw kwadraat af en elimineren uit de normaalvergelijkingen K_2.

Stellen we nu

$$G^{33}(2) = G^{33}(1) - \frac{G^{23}(1)G^{23}(1)}{G^{22}(1)}$$

enz.

en

$$t^3(2) = t^3(1) - \frac{G^{23}(1)}{G^{22}(1)} \cdot t^2(1)$$

dan krijgen we

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = \left(\frac{1}{\sqrt{G^{11}}} t^1 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G^{22}(1)}} t^2(1) \right)^2 + G^{33}(2) K_3 K_3 + \ldots + G^{bb}(2) K_b K_b$$

en

$$\left.\begin{aligned} G^{11}K_1 + G^{12}K_2 + G^{13}K_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + G^{1b}K_b &= t^1 \\ G^{22}(1)K_2 + G^{23}(1)K_3 + \ldots\ldots\ldots + G^{2b}(1)K_b &= t^2(1) \\ G^{33}(2)K_3 + \ldots\ldots\ldots + G^{3b}(2)K_b &= t^3(2) \\ G^{34}(2)K_3 + \ldots\ldots\ldots + G^{4b}(2)K_b &= t^4(2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ G^{3b}(2)K_3 + \ldots\ldots\ldots + G^{bb}(2)K_b &= t^b(2) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Op deze wijze kunnen we doorgaan tot alle kwadraten zijn afgesplitst. Het resultaat wordt:

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = \left(\frac{1}{\sqrt{G^{11}}} t^1 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{G^{22}(1)}} t^2(1) \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{G^{bb}(b-1)}} t^b(b-1) \right)^2 \quad (4)$$

en

$$\left.\begin{aligned} G^{11}K_1 + G^{12}K_2 + G^{13}K_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + G^{1b}K_b &= t^1 \\ G^{22}(1)K_2 + G^{23}(1)K_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + G^{2b}(1)K_b &= t^2(1) \\ G^{33}(2)K_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + G^{3b}(2)K_b &= t^3(2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ G^{bb}(b-1)K_b &= t^b(b-1) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Het eliminatieproces van Gauss levert ons dus alle grootheden, nodig voor de splitsing in kwadraten van $g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k$, waardoor deze splitsing dus geen extra werk nodig maakt.

Wij zullen nu onze aandacht richten op het stelsel der cofactoren van de in het tweede lid van (4) voorkomende grootheden. Omdat

$$\overline{t^1, t^1} = G^{11}$$

is $\overline{\frac{1}{\sqrt{G^{11}}}\,t^1,\ \frac{1}{\sqrt{G^{11}}}\,t^1} = 1$

verder is

$$\overline{t^1,\ t^2(1)} = \overline{t^1,\ (t^2 - \frac{G^{12}}{G^{11}}\,t^1)} = G^{12} - \frac{G^{12}}{G^{11}}\,G^{11} = 0$$

$$\overline{t^1,\ t^3(1)} = \overline{t^1,\ (t^3 - \frac{G^{13}}{G^{11}}\,t^1)} = G^{13} - \frac{G^{13}}{G^{11}}\,G^{11} = 0$$

enz.

t^1 is dus ongecorrelateerd met alle andere bekende termen van het stelsel (2) en derhalve ook met alle andere bekende termen van het stelsel (5), omdat deze functies zijn van $t^2(1)$, $t^3(1)$,... $t^b(1)$. Hieruit volgt dan weer, dat de uitdrukking tussen de haakjes van het eerste kwadraat in (4) ongecorrelateerd is met alle overige uitdrukkingen tussen de haakjes.

Wij merken nu nog op, dat in de laatste b-1 vergelijkingen van (2), de coëfficiënten van K_2, K_3 ..... K_b, het stelsel van cofactoren der $t^2(1)$, $t^3(1)$, ... $t^b(1)$ vormen, b.v.

$$\overline{t^2(1),\ t^3(1)} = \overline{(t^2 - \frac{G^{12}}{G^{11}}\,t^1),\ t^3(1)} = \overline{t^2,\ t^3(1)} = t^2, t^3 - \frac{G^{13}}{G^{11}}\,t^1$$

dus

$$\overline{t_1^2,\ t_1^3} = G^{23} - \frac{G^{12}G^{13}}{G^{11}} = G^{23}(1)$$

Hierdoor bestaat wat dit betreft een volkomen overeenkomst met de oorspronkelijke normaalvergelijkingen. We moeten dus ook hebben

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{G^{22}(1)}}\,t^2(1),\ \frac{1}{\sqrt{G^{22}(1)}}\,t^2(1)} = 1$$

terwijl ook weer correlatievrijheid bestaat tussen $\frac{1}{\sqrt{G^{22}(1)}}\,t^2(1)$ met alle in (4) volgende uitdrukkingen tussen de haakjes. In

$$\overline{t^1} = \frac{1}{\sqrt{G^{11}}}\,t^1,\ \overline{t^2} = \frac{1}{\sqrt{G^{22}(1)}}\,t^2(1),\ \overline{t^3} = \frac{1}{\sqrt{G^{33}(2)}}\,t^3(2),\ .....$$

$$....., \overline{t^b} = \frac{1}{\sqrt{G^{bb}(b-1)}}\,t^b(b-1) \quad (6)$$

hebben we dus voor ons een stel grootheden alle met cofactor 1 en dus met modulus μ, die ongecorrelateerd zijn. Hierop kan, mits hun aantal voldoende groot is, een onderzoek door beschouwing van hun verdeling worden ingesteld.

Men komt tot dezelfde $\overline{t}^\rho$ als men de grondbetrekkingen

$$u_i^\rho p^i = u_o^\rho$$

aan de volgende lineaire transformatie onderwerpt:

Houd de eerste betrekking onveranderd aan. Vorm een nieuwe tweede betrekking door er $-\frac{G^{12}}{G^{11}}$ maal de eerste van af te trekken. De coëfficiënten worden dan

$$u_i^2(1) = u_i^2 - \frac{G^{12}}{G^{11}}\, u_i^1$$

en de tegenspraak in deze nieuwe vergelijking

$$t^2(1) = t^2 - \frac{G^{12}}{G^{11}}\, t^1$$

Verminder de derde betrekking met $\frac{G^{13}}{G^{11}}$ maal de eerste, en voor de volgenden analoog. Verminder nu de nieuwe derde betrekking met $\frac{G^{23}(1)}{G^{22}(1)}$ maal de nieuwe tweede betrekking. We krijgen dan als coëfficiënten

$$u_i^3(2) = u_i^3(1) - \frac{G^{23}(1)}{G^{22}(1)}\, u_i^2(1)$$

en voor de tegenspraak

$$t^3(2) = t^3(1) - \frac{G^{23}(1)}{G^{22}(1)}\, t^2(1)$$

enz.

Samengevat worden de nieuwe betrekkingen en de tegenspraken

$$u_i^1 P^i = u_o^1 \quad ; \; t^1$$

$$u_i^2(1)P^i = u_o^2(1) \quad ; \; t^2(1)$$

$$u_i^3(2)P^i = u_o^3(2) \quad ; \; t^3(2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_i^b(b-1)P^i = u_o^b(b-1) \; ; \; t^b(b-1)$$

Worden nu de vergelijkingen nog gedeeld in opvolging door

$$\sqrt{G^{11}}, \quad \sqrt{G^{22}(1)}, \quad \sqrt{G^{33}(2)}, \; \ldots\ldots, \sqrt{G^{bb}(b-1)}$$

dan krijgen we als resultaat van deze lineaire transformatie van de oorspronkelijke betrekkingen een stelsel

$$\bar{u}_i^{\rho} P^i = \bar{u}_o$$

die sluitleden opleveren gelijk aan de $\bar{t}^{\rho}$ uit (6).

Men kan nu gemakkelijk nagaan, dat de coëfficiënten van de hierbij behorende normaalvergelijkingen $\bar{G}^{\rho\sigma}$ worden:

$$\bar{G}^{\rho\sigma} = 0 \quad \text{als } \rho \neq \sigma$$

$$\bar{G}^{\rho\sigma} = 1 \quad \text{als } \rho = \sigma$$

waardoor voor de correlaten $\bar{K}_\rho$ verkregen wordt

$$\bar{K}_1 = \bar{t}^1$$

$$\bar{K}_2 = \bar{t}^2$$

enz.

Vergelijking van deze vergelijkingen met het stelsel (5) doet het verband tussen de $\bar{K}_\rho$ en de K_ρ zien. Verder is

$$\varepsilon_{ik}\varepsilon^{i}\varepsilon^{k} = \bar{K}_\rho \bar{t}^{\rho} = \bar{t}^1\bar{t}^1 + \bar{t}^2\bar{t}^2 + \ldots\ldots + \bar{t}^b\bar{t}^b \qquad (7)$$

welk resultaat overeenkomt met (4).

Het is duidelijk, dat door een lineaire transformatie van de betrekkingen, zoals er boven één is uitgevoerd, de ε^i niet veranderen. Immers elk waardestel der P^i, dat aan het oorspronkelijke stelsel betrekkingen voldoet, voldoet ook aan het nieuwe en omgekeerd.

9.3. Eerste conclusies.

De nieuwe voorwaarden zijn:

$$t^\rho = u_o^\rho + u_i^\rho p^i$$

en dus zijn volgens de theorie der waarnemingsreeksen de t^ρ, omdat zij ongecorrelateerd zijn, grootheden, elk met een normale één-dimensionale waarnemingsreeks, die uit die der p^i kan worden afgeleid. Zij mogen geheel als waarnemingen worden beschouwd. Is bij het begin van het vraagstuk μ^2 aangenomen als evenredigheidsfactor, zodat

$$\mu_{p_1}^2 = s^{11}\mu^2$$

$$\mu_{p_1p_2} = s^{12}\mu^2$$

dan is, omdat de cofactoren der t^ρ alle 1 zijn,

$$\mu_t^2 1 = \mu_t^2 2 = \ldots\ldots\ldots = \mu_t^2 5 = \mu^2$$

De waarnemingsreeksen, die bij de t^ρ behoren, hebben dus alle dezelfde modulus μ: zij zijn identiek. Daarom mogen ook alle t^ρ als " waarnemingen" van eenzelfde grootheid worden beschouwd, die in dit geval nul is, hetgeen volgt uit het stellen van de opgave, nl. om de waarnemingen p^i zo te corrigeren, dat zij aan de voorwaarden voldoen. Hier moet echter wel uitdrukkelijk opgemerkt worden, dat bij bovenstaande redenering uitgegaan wordt van de onderstelling, dat het mathematische model voldoende is en dus de tegenspraken geheel of voor het overgrote deel veroorzaakt worden door de normale onzekerheden in de waarnemingsuitkomsten.

Wij moeten ons de zaak dus als volgt voorstellen: iedere t^ρ heeft in eerste aanleg een eigen normaal histogram met modulus μ en voor elk dezer histogrammen beschikken we over één waarneming. Verder weten we, dat ieder dezer waarnemingen een afwijking ten opzichte van nul is en als er meer waarnemingen per histogram waren, deze om deze nulwaarde zouden schommelen. We kunnen dus de histogrammen met deze nulpunten op elkaar gelegd denken, de histogrammen moeten elkaar dan bedekken, waardoor we ze als één histogram mogen beschouwen, dat dan b waarnemingen heeft. Als nu b behoorlijk groot is kan men aan deze verdeling statistisch gaan behandelen en vergelijken met andere normale verdelingen.

Is de onderstelling ten aanzien van het model terecht geweest, dan zal nu moeten blijken, dat de verdeling der t^ρ normaal is en de modulus er van overeenstemt met de modulus, zoals deze voor de vereffening van het probleem aangenomen was, behoudens dan de normale onzekerheden, die

in de modulus als statistische grootheid te verwachten zijn.

De ontwikkelde gedachtengang kan alleen worden toegepast als er zeer veel overtollige waarnemingen, dus zeer veel betrekkingen, zijn. Dit is nu een eis, waaraan slechts in zeldzame gevallen wordt voldaan.

Ofschoon de ontwikkelde gedachtengang de enige is, die ons de gewenste contrôle volledig kan verschaffen, rijst de vraag of er wellicht nog mogelijkheden zijn, die, zij het dan noodzakelijkerwijze minder volledig, althans enig inzicht geven in de waarde van de uitgevoerde vereffening en die bij vereffeningen met weinig betrekkingen toepassing kunnen vinden. Wij zijn dan genoodzaakt, te zoeken naar een zodanig proces of zodanige grootheden, die onafhankelijk zijn van de lineaire transformatie van de voorwaarden. In de eerste plaats zal men dan denken aan de ε^i. Deze correcties zijn invariant tegenover een transformatie van de betrekkingen. Zij hebben echter hetzelfde bezwaar als de t^ρ : ze zijn gecorrelateerd, terwijl ze als extra complicatie nog algebraisch afhankelijk zijn door de betrekkingen. Dit neemt niet weg, dat men in het algemeen wel beweren kan, dat, wanneer de tegensprekken en dus ook de correcties groter zijn dan het een hiervoor redelijkerwijs op grond van de kwaliteit van de waarnemingen mag worden verwacht, er waarschijnlijk iets met het mathematische model niet in orde is. Tot een methodisch onderzoek komt men echter op deze manier niet.

9.4. De middelbare fout.

We keren terug tot de verdeling van de $\mathfrak{t}^\rho$, die een modulus μ had. Wanneer wij thans de vergelijking (7) van § 2 van dit hoofdstuk, nl.

$$g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k = \mathfrak{t}^1\mathfrak{t}^1 + \mathfrak{t}^2\mathfrak{t}^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{t}^b\mathfrak{t}^b \qquad (1)$$

voor ons nemen, dan hebben we hierin een functie van de $\mathfrak{t}^\rho$ voor ons, die onafhankelijk is van de transformatie van de betrekkingen, immers dit blijkt uit het eerste lid. In wiskundige taal noemt men zo'n vorm een absolute invariant, hier dan tegenover een lineaire transformatie van de betrekkingen. Het is in dit geval de enige (absolute) invariant. Om ons los te maken van het aantal b der kwadraten in (1) delen we door b. We krijgen dan als we het quotient door m^2 voorstellen

$$m^2 = \frac{g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k}{b} = \frac{\mathfrak{t}^1\mathfrak{t}^1 + \mathfrak{t}^2\mathfrak{t}^2 + \ldots\ldots + \mathfrak{t}^b\mathfrak{t}^b}{b}$$

De aldus gedefinieerde grootheid m (men neemt voor m altijd de positieve wortel) wordt in de klassieke theorie de " middelbare fout " genoemd. Wij zullen deze benaming aanhouden. Deze middelbare fout is een geschikte grootheid om ons een indruk te geven van het doorsnee bedrag der $\mathfrak{t}^\rho$, zonder dat we ieder dezer $\mathfrak{t}^\rho$ afzonderlijk kennen. Het is echter duidelijk, dat deze ene grootheid m niet in staat is om ons dezelfde informatie te verstrekken als alle $\mathfrak{t}^\rho$ afzonderlijk dat zouden kunnen doen.

Opmerking 1.

De gedachte om de definitie van de middelbare fout in verband te brengen met de invariantie van het tweede lid van (1) is afkomstig van J. Baarda.

Opmerking 2.

Er is nog geen verband gelegd tussen de modulus en de middelbare fout. De modulus van een reeks wordt verkregen door deze reeks te vergelijken met een andere normale reeks, waarvan de modulus willekeurig 1 gesteld is. In feite kennen we nog slechts verhoudingen van moduli.

9.5. De exponentiële functie.

Om de gedachtengang verder te kunnen ontwikkelen is het nodig, de trappenlijn van het één- dimensionale histogram te benaderen door een vloeiende kromme om daarmee het tot nu toe gebruikte mathematische model van de waarnemingsreeks iets gemakkelijker te kunnen hanteren. C.F. Gauss heeft reeds hiervoor de kromme

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(x-a)^2}$$

aangenomen.

Met wat wij reeds weten van het mathematische model kunnen wij deze kromme te voorschijn brengen door uit te gaan van hypothese II. Met deze hypothese werd uitgesproken, dat wanneer een twee- dimensionale correlatievrije verdeling ontworpen wordt op een rechthoekig tableau met maateenheden langs de assen, die omgekeerd evenredig zijn met de moduli, punten met gelijke relatieve frequentie op concentrische cirkels liggen.

Laat de vergelijking van de gezochte kromme luiden

$$y = f(x)$$

We krijgen nu de relatieve frequentie voor het interval Δx, (zie figuur 9.5.-2), als de oppervlakte van de trapeziumvormige figuur aan de bovenkant door de kromme begrensd. Deze figuur treedt hier in de plaats van de rechthoek, die we vroeger bij de trappenlijn hebben gebruikt. We stellen

$$f_{a_1}^{a_2} = f(x)\,\Delta x \qquad (1)$$

waarin x een willekeurige waarde van x uit het interval $a_1 a_2$ voorstelt. We maken dan weliswaar een fout, maar deze is klein, vergeleken met het bedrag van de frequentie zelf.

We denken ons nu een twee- dimensionale correlatievrije verdeling, met de veranderlijken x en y, ieder met een verdeling, waarvan de moduli gelijk aangenomen worden. Om hier de relatieve frequentie te vinden moeten we de vermenigvuldigingsregel toepassen en de relatieve frequentie van x volgens (1) vermenigvuldigen met die van y, waar wegens de gelijkheid der moduli een analoge uitdrukking voor geldt. We krijgen dan

$$F_{a_1,b_1}^{a_2,b_2} = f(x).\ f(y)\,\Delta x\,\Delta y \qquad (2)$$

Stellen we ons nu het frequentielichaam voor door op elk rechthoekje het parallelopipedum op te richten, waarvan de inhoud gelijk is aan de relatieve frequentie, bij het vak behorend, dan zien we aan (2), omdat $\Delta x\,\Delta y$ de oppervlakte van het rechthoekje is, dat voor de hoogte z geldt,

$$z = f(x).\ f(y)$$

Dit is dan meteen de vergelijking van het drie-dimensionale oppervlak, dat het frequentielichaam aan de bovenkant begrenst. Dit nu moet krachtens hypothese II een omwentelingsoppervlak zijn, waaruit volgt, dat z ook geschreven moet kunnen worden als

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

zodat we moeten hebben

$$f(x).\ f(y) \equiv \varphi(x^2 + y^2)$$

uit welke identiteit nu de onbekende functie moet worden gevonden. Differentieren we de uitdrukking partieel naar x en naar y, dan moet ook

$$f'(x).\ f(y) \equiv \varphi'(x^2 + y^2).\ 2x$$

en

$$f(x).\ f'(y) \equiv \varphi'(x^2 + y^2).\ 2y$$

f' (x), f' (y) en $\varphi'(x^2 + y^2)$ duiden de differentiaalquotienten resp. naar x, y en $x^2 + y^2$ aan. Door deling volgt hieruit

$$\frac{f'(x).\ f(y)}{f(x).\ f'(y)} \equiv \frac{x}{y}$$

of

$$\frac{f'(x)}{x\,f(x)} \equiv \frac{f'(y)}{y\,f(y)} \qquad (3)$$

Aan (3) moet door de coördinaten x en y van alle punten van het oppervlak voldaan zijn. Geven we x een bepaalde waarde, waardoor we uit het oppervlak een kromme uitsnijden, die in een vlak x constant ligt, dan is het eerste lid van (3) constant. Dan moet het tweede lid van (3) deze constante waarde kunnen aannemen voor oneindig veel waarden van y, nl die, behorende bij de punten van de zoeven genoemde kromme. Het tweede lid van (3) is dus constant, maar dan is met het eerste lid dit eveneens het geval, dus

$$\frac{f'(x)}{x\,f(x)} = k_1$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k_1 x$$

Integratie van deze differentiaalvergelijking geeft

$$\ln f(x) = \tfrac{1}{2} k_1 x^2 + k_2$$

of

$$f(x) = e^{\frac{1}{2} k_1 x^2 + k_2} = A\, e^{\frac{1}{2} k_1 x^2}$$

Nu volgt uit de vorm van de trappenlijn, dat de functie bij toenemende x moet afnemen. De constante $\frac{1}{2} k_1$ moet daarom negatief zijn. We brengen dit tot uitdrukking door te schrijven

$$f(x) = A\, e^{-h^2 x^2}$$

De constante A moet nu nog worden bepaald uit de voorwaarde, dat de totale oppervlakte, die de kromme insluit met de x- as gelijk aan 1 is, immers de som van de relatieve frequenties is 1. We zien aan de functie, dat deze pas nul wordt voor $x = \pm \infty$, de bedoelde oppervlakte wordt dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

zodat we hebben

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = 1 \qquad (4)$$

Stellen we in deze integraal

$$hx = t$$

waaruit volgt

$$h\, dx = dt$$

dan gaat (4) over in

$$\frac{A}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

omdat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

waarvoor we naar een werk over de integraalrekening verwijzen, wordt

$$\frac{A}{h}\sqrt{\pi} = 1$$

of

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

De gezochte functie luidt dus ten slotte

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}$$

Het is een kromme, die symmetrisch is, voor x = 0 een maximum gelijk $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ heeft en voor $x = +\infty$ en $x = -\infty$ asymptotisch tot de x- as nadert (zie figuur 9.5.-3).

9.6. Het aanpassen van de kromme aan de traptenlijn.

Wij denken ons op de gebruikelijke wijze een histogram getekend op het assenstelsel ξ, η. Voor de ξ-as de maateenheid ε, zodat

$$\xi = \varepsilon x$$

en voor de relatieve frequentie as R de oppervlakten van de rechthoeken op een vaste schaal, zodat als $\Delta\xi$ de grootte van het interval is

$$\eta = \frac{R}{\Delta\xi}.$$

Wij kunnen nu op een blad doorzichtig papier voor verschillende waarden van de parameter h krommen van Gauss tekenen. Door dit blad op het histogram te schuiven kunnen we de kromme bepalen, die het best aansluit bij de traptenlijn. Als de waarde van de parameter voor deze kromme $\bar{h}$ is en ξ_m de abscis van de symmetrie-as er van, luidt de vergelijking er van

$$\eta = \frac{\bar{h}}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{h}^2 (\xi - \xi_m)^2} \qquad (1)$$

Wanneer de best aansluitende kromme is gevonden hebben we $\bar{h}$ en ξ_m bepaald en zal de relatieve frequentie R_a^b voor het interval, begrensd door de punten x=a en x=b, waarbij b-a = Δx, zoals deze met behulp van de kromme te berekenen is, overeenstemmen met de in het histogram voor het overeenkomstige interval voorgestelde waarde er van. We hebben dan dus:

$$R_a^b = \frac{\bar{h}}{\sqrt{\pi}} \int_{x=a}^{x=b} e^{-\bar{h}^2(\xi - \xi_m)^2} \quad ; \text{ met } \xi = \varepsilon x \qquad (2)$$

of als we overgaan op de veranderlijke x

$$R_a^b = \frac{\bar{h}\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-\bar{h}^2\varepsilon^2 (x - x_m)^2} dx \qquad (3)$$

Stellen we nog

$$\bar{h}\varepsilon = h \qquad (4)$$

dan krijgen we

$$R_a^b = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 (x - x_m)^2} dx \qquad (5)$$

waarin dan h en x_m bekend zijn.

Voor de berekening van deze integraal stelt men

$$h (x - x_m) = y$$

en dus

$$h\, dx = dy$$

Hierdoor krijgt men

$$R_a^b = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{b_1} e^{-y^2} dy$$

waarin

$$a_1 = h (a - x_m)$$

en

$$b_1 = h (b - x_m)$$

Men kan nu gebruik maken van de bestaande tabellen voor de thêta-functie

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

(een uitvoerige tabel vindt men b.v. bij J.L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Sammlung Math.Phys.Lehrbücher nr. 24 Teubner 1927). Men heeft nl.

$$R_a^b = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{b_1} e^{-y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a_1} e^{-y^2} dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\theta(b_1) - \tfrac{1}{2}\,\theta(a_1)$$

Wij laten nu hieronder volgen de waargenomen en de berekende frequenties van de meer gebruikte verdeling van 1000 waarnemingen van de rechte klimming van Polaris, ontleend aan Whittaker and Robinson, The Calculus of Observations, blz. 174. Met $x_m = -0{,}06$ en $h = 0{,}6$ krijgen we

x (in tijdseconden)	gemeten frequentie	berekende frequentie
- 3,5	2	4
- 3,0	12	10
- 2,5	25	22
- 2,0	43	46
- 1,5	74	82
- 1,0	126	121
- 0,5	150	152
0	168	163
+ 0,5	148	147
+ 1,0	129	112
+ 1,5	78	72
+ 2,0	33	40
+ 2,5	10	19
+ 3,0	2	10

Voor de berekening van de frequenties kan men ook gebruik maken van het nomogram van N.D. Haasbroek, gepubliceerd in het Bulletin Géodésique, nouvelle série no. 10 blz.285. Men heeft dan de tabel van de θ-functie niet nodig.

9.7. De numerische bepaling van x_m en h.

In de vorige paragraaf geschiedde de bepaling van x_m en h langs grafische weg. Dit is nogal bewerkelijk, zodat thans gezocht zal worden naar

een numerische berekening.

Voor x_m kunnen we eenvoudig de regel van de methode der kleinste kwadraten toepassen. Er zijn een aantal even betrouwbare waarnemingen van eenzelfde grootheid gegeven, zodat, als hun aantal n is,

$$x_m = \frac{[x]}{n}$$

Voor de berekening van h beschouwen we de grootheden x in het interval Δx. Hun aantal is, als we x tellen uit de symmetrie- as,

$$n \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^p e^{-h^2x^2} \Delta x$$

en dus de som van hun p^{de}-machten (p altijd positief)

$$n \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^p e^{-h^2x^2} \Delta x$$

Voor alle intervallen samengeteld krijgt dit na limietovergang

$$n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-h^2x^2} dx$$

Zoals gemakkelijk is in te zien wordt deze integraal nul voor p oneven. Wij beschouwen daarom voor oneven machten de absolute waarden van x. We delen nog door n, om de gemiddelde waarde van de som der p^{de}-machten te verkrijgen ; noemen we deze $S^{(p)}$, dan is dus

$$S^{(1)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-h^2x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-h^2x^2} dx$$

$$S^{(2)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx$$

$$S^{(3)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x^3| e^{-h^2x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-h^2x^2} dx$$

enz.

De berekening van deze integralen levert als resultaat

$$S^{(1)} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad S^{(2)} = \frac{1}{2h^2} \qquad S^{(3)} = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}$$

$$S^{(4)} = \frac{1.3}{2^2.h^4} \qquad S^{(5)} = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}} \qquad S^{(6)} = \frac{1.3.5.}{2^3.h^6}$$

.....

Uitgaande van het ervaringsfeit, dat de kromme van Gauss een bevredigende benadering is van de trappenlijn van het één- dimensionale histogram kan men met de door waarneming verkregen verdeling analoge grootheden als de $S^{(i)}$ berekenen. Men mag dan aannemen bij verdelingen met

zoveel individuen, dat er een behoorlijk histogram van te construeren is, dat de aldus gevonden waarden een grote mate van overeenstemming met de $S^{(i)}$ zullen vertonen. Uit practische overwegingen zijn de beide eerste sommen het belangrijkst. Stellen we de gemiddelde waarde van de afwijkingen uit het midden η en het gemiddelde kwadraat m dan is dus

$$\eta = \frac{[|x|]}{n}$$

$$m^2 = \frac{[x^2]}{n}$$

η noemt men de gemiddelde fout en m is de eerder gedefinieerde middelbare fout.
Verder stellen we dan

$$\eta = S^{(1)} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

$$m^2 = S^{(2)} = \frac{1}{2h^2}$$

zodat we hebben

$$\eta = m\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

welke formule een numerieke contrôle is op het normaal zijn van een verdeling.

9.8. Modulus en middelbare fout.

In (1) en (2) van §9.6. is $\bar{n}$ een onbenoemd getal, aangezien ξ en η dit zijn. Omdat $\xi = \varepsilon x$ is de dimensie van ε het omgekeerde van die van x , dus is volgens (4) §9.6. de dimensie van h eveneens het omgekeerde van die van x. Hetgeen

$$m^2 = \frac{1}{2h^2}$$

is de dimensie van m dezelfde als die van x. Men kan gemakkelijk nagaan, dat dit ook geldt voor η . De middelbare en de gemiddelde fout zijn beide dus eveneens van dezelfde dimensie als de modulus. We merken verder op, dat we kunnen volstaan met één kromme (1), omdat we door geschikte keuze van de maateenheid elke reeks kunnen aanpassen aan deze ene kromme.

Hebben we nu twee reeksen met parameters h_1 en h_2, moduli μ_1 en μ_2, maateenheden ε_1 en ε_2 en hebben we beide reeksen aangepast aan dezelfde kromme (1), dan is volgens (4)

$$\bar{h}\varepsilon_1 = h_1 \qquad \text{en} \qquad \bar{h}\varepsilon_2 = h_2$$

of

$$h_1 : h_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

en dus

$$\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

dat ook

$$\frac{1}{\mu_1} : \frac{1}{\mu_2} = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

(definitie van modulus bij de bestudering van waarnemingsreeksen) is

$$\mu_1 : \mu_2 = m_1 : m_2$$

dat de moduli zich verhouden als de middelbare fouten. Aangezien we tot nu toe alleen de verhouding van twee moduli hebben gedefinieerd kunnen we voor reeksen, die op behoorlijke wijze in een histogram zijn voor te stellen (reeksen met een voldoend aantal waarnemingen), stellen

$$\mu = m$$

We hadden op geheel analoge manier kunnen beredeneren

$$\mu = \eta \quad (\text{gemiddelde fout})$$

Dit laatste zou echter alleen een andere schaal opleveren, waarin wordt gemeten, immers

$$\mu = m\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Tot analoge resultaten waren we gekomen, uitgaande van $S^{(3)}$ enz. Wij zullen ons echter houden aan

$$\eta = m$$

waarmee wij dan een numerische bepalingsmogelijkheid voor η voor ons hebben. Waarom nu laten wij onze keuze vallen op m ? Bij een reeks met een behoorlijk aantal exemplaren, die bij de redenering was ondersteld, maakt de gelijkstelling van μ met m of die van μ met η weinig verschil uit. Hogere machten gebruiken dan de 2de en de 1ste machten zou meer werk nodig maken en daartegenover geen voordelen bieden. Dat we de middelbare fout kiezen ligt dan ook in hoofdzaak bij de invariante eigenschap, waarvan in §9.4. de betekenis uiteengezet werd.

Zoals reeds eerder werd opgemerkt hebben we meestal bij de vereffeningsvraagstukken te maken met een gering aantal betrekkingen, waardoor wij dus voor de berekening van μ niet meer kunnen steunen op bovenstaande redenering. Men is echter gewoon om dan toch m te berekenen volgens

$$m^2 = \frac{g_{ik}\varepsilon^i\varepsilon^k}{b} \qquad (1)$$

Wij mogen dan niet $m = \mu$ stellen. De met (1) berekende m is een grootheid met een geheel ander karakter dan μ. Zo goed als men bij een gering aantal betrekkingen kan letten op de bedragen der t^f en der ε^i, om zich een inzicht in de waarde van de uitgevoerde vereffening te verschaffen, kan men ook m in de beschouwing betrekken, maar men moet er zich van bewust zijn, dat voor m bij de vereffening van een overeenkomstig stel waarnemingen in de regel afwijkende bedragen gevonden worden. Zijn veel gelijksoortige vereffeningen uitgevoerd, dan kan men de verschillende waarden van m op hun beurt aan een statistische behandeling onderwerpen. De

middelbare fout volgt echter niet de normale wet. Op deze aangelegenheid wordt niet verder ingegaan.

Er is wat betreft de berekening van m uit een gering aantal waarnemingen nog op te merken, dat de ervaring leert, dat in dit geval bij een aantal van ± 20 overtollige waarnemingen reeds een vrij stabiele m verkregen wordt, waaraan de ervaren waarnemer toch wel iets heeft. Het schijnt dus alsof m een zekere mate van ongevoeligheid bezit tegenover zijn berekening uit een bescheiden aantal overtollige waarnemingen. Hoe het echter ook zij, wanneer er slechts weinig overtollige waarnemingen zijn kan een juiste bestudering van zo'n vereffening nooit geschieden op grond van één probleem, doch kan dit alleen gebeuren als er een aantal van deze zelfde vereffeningen ter beschikking staat.