STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 18h

Avondcursus wiskunde 1951-1952;

Analytische meetkunde, 2.

H.J.A. Duparc.

~~1951~~
1952

Deel II. De ruimte.

§1. Inleiding, punten, rechten en platte vlakken.

Wij gaan uit van een rechthoekig assenstelsel, d.i. een stelsel van 3 door 1 punt O(de oorsprong) gaande onderling loodrechte rechten (coördinaatassen genaamd). Op elk dier rechten kiezen wij een positieve richting. Wij kiezen deze 3 richtingen OX, OY, OZ zodanig dat men van de richting ox uit de draaiïng van OY naar OZ met de klok mee ziet. Men krijgt dan een rechts assenstelsel. Vervangt men bij een rechts assenstelsel één der positieve assen door de bijbehorende negatieve, dan ontstaat een links assenstelsel. Dit gebeurt ook, als men twee assen van een rechts assenstelsel verwisselt. In het vervolg zullen wij steeds rechtse assenstelsels gebruiken. Daarbij lette men er op, dat van de positieve z-as uit gezien het coördinatenstelsel XOY niet het stelsel is dat wij in de vlakke analytische meetkunde gebruikten, maar dat daar b.v. uit volgt door x-as en y-as te verwisselen.

Naast de 3 coördinaatassen treden nu ook de 3 door twee hunner bepaalde coördinaatvlakken op.

Onder de rechthoekige coördinaten van een punt P verstaat men de van passend teken voorziene afstanden van dit punt tot de 3 coördinaatvlakken. De x-coördinaat vindt men uit de afstand tot het YOZ-vlak enz. Men schrijft P(x,y,z).

Opg. 1. Bepaal de vergelijkingen der coördinaatvlakken en ook van vlakken die ermee evenwijdig lopen.

Wenst men de vergelijking der x-as te vinden, dan merke men op, dat elk punt hiervan coördinaten coördinaten bezit van de gedaante (a,o,o) en dus voldoet aan $y = 0$, $z = 0$. Wij zien dus dat de vergelijking van de rechte OX gekarakteriseerd wordt door twee vergelijkingen, welke de vlakken aangeven, waarvan OX de snijlijn is.

Opg. 2. Bepaal de vergelijkingen der rechte door het punt (1,2,3), die evenwijdig met de z-as loopt.

Opg. 3. Toon aan dat een willekeurige rechte gelegen in het XOY-vlak tot vergelijkingen heeft $ax + by = c$; $z = 0$.

Opg. 4. De afstand van 2 punten $P_1(x_1,y_1,z_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2)$ is $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$.

Opg. 5. De coördinaten van het midden van het lijnstuk P_1P_2 uit opgave 4 zijn $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Opg. 6. Bepaal de coördinaten van het punt dat het lijnstuk P_1P_2 uit opgave 4 verdeelt in de verhouding $\lambda : \mu$. Druk de coördinaten van het zwaartepunt van het tetraëder $P_1P_2P_3P_4$ uit in die der 4 hoekpunten en bewijs dat dit in het midden ligt van de verbindingsrechte van de middens van twee kruisende ribben.

De vergelijkingen van een rechte door O bepalen wij als volgt. Zij $P(a,b,c)$ een ander punt der rechte dan heeft, zoals men gemakkelijk meetkundig inziet, ieder willekeurig punt der rechte coördinaten van de gedaante (ta,tb,tc) waarin t willekeurig is. Voor $t = 0$ krijgt men het punt O en voor $t = 1$ het punt P. Men kan dus onze rechte karakteriseren

1° door $x = at$; $y = bt$; $z = ct$.

2° door eliminatie der parameter t uit drie betrekkingen, hetgeen oplevert $bx - ay = 0$; $cx - az = 0$; $bz - cy = 0$ (slechts twee dezer betrekkingen zijn onafhankelijk).

3° als geen der grootheden a, b en c nul is, door $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

4° door de eis dat de rang der matrix $\begin{Vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{Vmatrix}$ gelijk is aan 1.

De getallen a, b en c leggen de richting van onze rechte vast.

Een rechte evenwijdig aan de zoëven beschouwde, die in plaats van door O door een punt (x_0,y_0,z_0) gaat is te karakteriseren door

1° $x = x_0 + at$; $y = y_0 + bt$; $z = z_0 + ct$ (parametervoorstelling).

2° twee der betrekkingen $b(x-x_0)-a(y-y_0)= 0$; $c(x-x_0)-a(z-z_0)= 0$; $b(z-z_0)-c(y-y_0)= 0$.

3° als geen der getallen a,b,c nul is door $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

4° door de eis dat de rang der matrix $\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \end{Vmatrix}$ gelijk is aan 1.

Omgekeerd is iedere rechte in elk dezer 4 gedaanten te brengen, want zij d een willekeurige rechte, kies dan op d een willekeurig punt $P_0(x_0,y_0,z_0)$; trek door O de rechte evenwijdig met d, die ons de getallen a,b en c oplevert, dan vindt men bovengevonden 4 karakteriseringen. Dat ieder punt van d daaraan voldoet is dus evident en als voorts een punt P aan 1 dezer karakteriseringen voldoet, houdt dit in dat er een punt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ bestaat zodanig, dat PP_0 evenwijdig loopt met een vaste door O gaande rechte en dus dat ieder dergelijk punt P een rechte door P_0 doorloopt.

Opg. 7. Ga na of een analoge beschouwing in twee dimensies mogelijk is en in hoeverre getallen, die dan de richting vastleggen, samenhangen met de richtingscoëfficiënt van een rechte.

Ook als er onder de grootheden a,b en c voorkomen, die nul zijn geldt de betrekking 3° als men afspreekt, dat bij iedere breuk met noemer nul bedoeld wordt, dat ook zijn teller nul is.

De rechte door 2 punten $P_1(x_1,y_1,z_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2)$ bepalen wij als volgt. Zij is van de gedaante

$$x = x_1 + at \text{ ; } y = y_1 + bt; \ z = z + ct \ .$$

Aangezien P_2 erop gelegen is, bestaat er een t_1 met $x_2 = x_1 + at_1$, $y_2 = y_1 + bt_1$, $z_2 = z_1+ct_1$, dus

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad .$$

Stelt men elk dezer breuken gelijk aan K, dan vindt men de parameter voorstelling uit opg. 6 terug met $\lambda : \mu = K : (1-K)$.
De laatste voorstelling is ook zo te formuleren, dat de rang der matrix

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

gelijk is aan 2.

In het algemeen stellen 2 willekeurige lineair onafhankelijke vergelijkingen van de eerste graad $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ een rechte voor, want laat (x_1,y_1,z_1) een willekeurig punt zijn, dat aan beide verg. voldoet, dan heeft men na substitutie en eliminatie van d en d'.

$$\begin{cases} a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)= 0 \\ a'(x-x_1)+b'(y-y_1)+c'(z-z_1)= 0, \end{cases}$$

waaruit voorstelling 2^o direct volgt door eliminatie van hetzij $x-x_1$, hetzij $y-y_1$, hetzij $z-z_1$. Deze eliminatie is onmogelijk als de rang der matrix $\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\|$ gelijk is aan 1, welk geval later behandeld wordt.

Zijn $h_1=0$ en $h_2=0$ twee vergelijkingen van de eerste graad, die niet in het uitzonderingsgeval verkeren, dan stellen zij een rechte voor welke ook bepaald wordt door de vergelijkingen

$$\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 = 0 \ ; \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 = 0$$

mits $(\lambda\mu)_{12} \neq 0$.

Opg. 8. Toon aan dat ook deze nieuwe vergelijkingen niet in het uitzonderingsgeval verkeren.

Een rechte is dus op oneindig vele wijzen door twee vergelijkingen te bepalen, evenals trouwens blijkens opgave 6 een rechte op oneindig vele wijzen in parametervoorstelling te brengen is op twee willekeurige harer punten.

Uit de voorstelling 1^o kan men door eliminatie der parameter t veelal de rechte in de volgende bruikbare voorstelling brengen:

$$\begin{cases} x = Az + A'. \\ y = Bz + B'. \end{cases}$$

Opg. 9. Toon aan dat de eerste dezer verg. de vergelijking der projectie der rechte op het XOZ vlak voorstelt en een analoog resultaat voor de tweede vergelijking.

Zoals uit de voorstelling 3° blijkt, spelen slechts de verhoudingen der getallen a, b en c een rol bij het bepalen ener rechte d. Vermenigvuldigt men deze getallen nu met een zodanige factor dat de som hunner quadraten gelijk is aan 1, dan hebben deze grootheden een eenvoudige meetkundige betekenis. Zoals men nl. direct meetkundig inziet is de hoek α tussen de rechte en de positieve X-as te vinden uit $\cos\alpha = a$ en analoog heeft men $\cos\beta = b$, $\cos\gamma = c$, waarbij $\beta = \angle(d,OY)$; $\gamma = \angle(d,OZ)$. Men merke hierbij nog op dat men steeds heeft $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. De waarden die de grootheden a, b en c na bovengenoemde vermenigvuldiging kregen, noemt men de richtingscosinussen der rechte.

Opg. 10. Bepaal de richtingscosinussen der rechte

$$10\,x = z + 7;\; 10\,y = 7\,z + 1.$$

Eveneens van de rechte door de punten (1,1,1) en (3,3,2).

Wij bepalen nog de hoek tussen twee rechten met richtingscosinussen (a,b,c) en (a',b',c'). Daar zowel de hoek als deze cosinussen dezelfde blijven, als men de rechten evenwijdig aan zichzelf verplaatst totdat zij door de oorsprong gaan, beschouwen wij die twee rechten door de oorsprong. Kies op deze de punten P(a,b,c) resp. P'(a',b',c').

Voor de gezochte hoek φ vindt men dan

$$PP'^2 = OP^2 + OP'^2 - 2OP.OP' \cos\varphi,$$

dus wegens OP = OP' = 1

$$\cos\varphi = \frac{2-\{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2\}}{2} = aa' + bb' + cc' .$$

Opg. 11. Voor de hoek tussen de rechten

$$\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c} \quad\text{en}\quad \frac{x-x_1}{a'} = \frac{y-y_1}{b'} = \frac{z-z_1}{c'} ,$$

waarbij $a^2 + b^2 + c^2$ en $a'^2 + b'^2 + c'^2$ niet noodzakelijkerwijze gelijk behoeven te zijn aan 1, vindt men

$$\cos\varphi = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} .$$

Opg. 12. De twee rechten in opg. 11 zijn loodrecht als aa'+bb'+cc'= 0. Onder welke voorwaarde staan de rechten

$$\begin{cases} x = Az + A' \\ y = Bz + B' \end{cases} \quad\text{en}\quad \begin{cases} x = Cz + C' \\ y = Dz + D' \end{cases}$$

loodrecht op elkaar?

Opg. 13. Bepaal de vergelijkingen der rechte door het punt (1,2,1) die loodrecht staat op de rechte $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ en op de rechte $x=3z+1$; $y = z+3$.

In de vlakke analytische meetkunde bezat een rechte met vergelijking $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, die hoeken α en β resp. met X-as en Y-as maakte, een richtingscoëfficiënt $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, een resultaat dus geheel overeenkomstig aan het hier gevondene.

De platte vlakken bezitten, zoals wij gaan aantonen, vergelijkingen van de eerste graad. Eén zo'n vergelijking stelt reeds een plat vlak voor.

Opg. 14. Stel die vergelijking op voor de coördinaatvlakken, voor daarmede evenwijdige vlakken en voor vlakken, die door één der coördinaatassen gaan.

Wij bepalen nu de vergelijking van een willekeurig plat vlak V. Zij P de projectie der oorsprong op V. Zij OP = d en laat α, β en γ de hoeken zijn die OP resp. met de X-, Y- en Z-as maakt. Zij (x,y,z) een willekeurig punt van V. Zij Q de projectie van Q op het vlak XOY en Q_1 de projectie van Q (of Q') op OX. Dan heeft men:

OP= Proj.van OQ op OP = Proj.van OQ_1 op OP+proj.van Q_1Q'op OP+ proj. van Q'Q op OP,

dus

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma .$$

Deze betrekking stelt dus de vergelijking voor van het vlak V en wordt de normaalvergelijking van Hesse genoemd. Het is een vergelijking die van de eerste graad is in x, y en z.

Opg. 15. Ga na hoe de gegeven afleiding verloopt in de gevallen dat V evenwijdig loopt of gaat door 1 of 2 der coördinaatassen.

Omgekeerd stelt iedere vergelijking van de eerste graad $ax+by+cz=d$ een plat vlak voor, want de vergelijking is aequivalent met de verg. $\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Men kan zonder de algemeenheid te schaden, $d \geq 0$ veronderstellen, daar men anders beide leden der verg. slechts met -1 behoeft te vermenigvuldigen. Stelt men nu $\frac{a}{v} = \cos\alpha$, $\frac{b}{v} = \cos\beta$, $\frac{c}{v} = \cos\gamma$, (waarin $v = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$) dan betekent de gevonden vergelijking niets anders dan dat elk punt (x,y,z) dat er aan voldoet, de eigenschap bezit, dat zijn projectie op de rechte $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c}{z}$ in het vaste punt $(\frac{da}{v},\frac{db}{v},\frac{dc}{v})$ dier rechte ligt, zodat alle punten die aan de vergelijking voldoen, in een plat vlak liggen loodrecht op genoemde rechte aangebracht, dat een afstand $\frac{d}{v}$ tot de oorsprong bezit.

Opg. 16. Bepaal de afstand van de oorsprong tot het vlak $8x + 4y + z = 9$.

Opg. 17. Bewijs als in de vlakke meetkunde dat de afstand van het punt (x_0, y_0, z_0) tot het vlak $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = d$ luidt

$$\left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - d \right| .$$

Opg. 18. Toon aan dat de vergelijking van het vlak dat van de X-, Y- resp. Z-as een lijnstuk ter lengte a, b resp. c afsnijdt, luidt $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Opg. 19. Laat zien dat de vergelijking van het platte vlak door de punten $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1,2,3)$ luidt

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Laat hieruit zien dat voor een willekeurig punt P (x,y,z) van dit vlak de parametervoorstelling

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \; ; \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \; ; \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

(kortweg geschreven $P = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} P_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} P_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} P_3$)

geldt. De hier optredende parametervoorstelling bevat drie homogene (of twee niet homogene b.v. $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ en $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$) parameters. Eliminatie van deze beide uit de 3 parametervoorstellingen der 3 coördinaten geeft ons als resultaat juist 1 vergelijking, de vergelijking van het gezochte vlak. Bij de rechte was de situatie anders; hier had men te doen met 1 parameter die in de 3 formules voor de coördinaten optrad, waaruit na eliminatie 2 betrekkingen volgden, de vergelijkingen der rechte.

De betekenis der 2 vergelijkingen ener rechte d is nu duidelijk. Elke vergelijking stelt een plat vlak voor en punten die in beide vlakken liggen, liggen op hun snijlijn.

Wij merken nog op dat de coëfficiënten der normaalvergelijking van een vlak V tevens de richtingscosinussen van een normaal op V zijn. Hieruit volgt onmiddellijk

De hoek φ tussen twee vlakken

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad \text{en} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

wordt bepaald door

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} .$$

Opg. 20. Wanneer zijn deze vlakken loodrecht en wanneer evenwijdig?

Opg. 21. Bepaal de vergelijkingen der rechte, die evenwijdig loopt met het vlak $3x + 2y + 4z = 1$, door het punt $(1,2,3)$ gaat en een hoek van 60° met de positieve X-as maakt.

Opg. 22. De vergelijking van een plat vlak door een punt (x_0,y_0,z_0) waarvan de normalen richtingscoosinussen a, b en c hebben, luidt

$$a(x-x_0)+ b(y-y_0)+ c(z-z_0) = 0.$$

Opg. 23. Bewijs dat de coordinaten van het snijpunt van 3 vlakken

$$a_i\, x + b_i\, y + c_i\, z = d_i \qquad (i = 1,2,3) \qquad \text{met } (abc) \neq 0$$

bepaald worden door

$$x = \frac{(dbc)}{(abc)} \;;\; y = \frac{(adc)}{(abc)} \;;\; z = \frac{(abd)}{(abc)} .$$

Ga ook het geval $(abc)= 0$ na.

Opg. 24. Alle figuren van de gedaante $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0$, waarin $V_1 = 0$ en $V_2 = 0$ twee elkaar snijdende platte vlakken zijn, zijn platte vlakken, die door de snijlijn van V_1 en V_2 gaan. De hier optredende figuur heet vlakkenbundel. Hoe luidt deze bewering als V_1 en V_2 evenwijdig zijn? Generaliseer deresultaten voor het geval dat men uitgaat van 3 platte vlakken V_1, V_2 en V_3. De daarbij optredende figuur heet een vlakkennet.

Opg. 25. Bepaal de vergelijking van het platte vlak door de rechte $3x + 2y - z = 3$; $x - y - z = 1$ en door het punt $(1,2,0)$.

Opg. 26. Beschouw 3 punten P_1, P_2 en P_3. Druk de oppervlakte O van $\Delta P_1P_2P_3$ uit in de coördinaten van zijn hoekpunten door op te merken, dat

$$O_\Delta^2 = O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 ,$$

waarin O_1 de projectie is van $\Delta P_1P_2P_3$ op het vlak YOZ enz.

Opg. 27. Bewijs dat de inhoud van het tetraeder $P_1P_2P_3P_4$, waarin

$P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i = 1,2,3,4)$, gelijk is aan de absolute waarde van

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} .$$

Hoe moet men het punt P_4 kiezen bij gegeven punten P_1,P_2 en P_3 opdat deze oppervlakte gelijk aan nul zij? Verklaar dit resultaat meetkundig.

Beschouw de willekeurige rechten bepaald door de vergelijkingen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ resp. $V_3 = V_4 = 0$; hierin zij $V_i = a_ix+b_iy+c_iz+d_i$ $(i = 1,2,3,4)$.

Opg. 28. Deze rechten snijden elkaar dan en slechts dan als (abcd)= 0 en (abc)= 0. De rechten lopen evenwijdig dan en slechts dan als (abcd)=(abc)= 0. Ze kruisen elkaar derhalve, zodra (abcd)$\neq$ 0.

Opg. 29. Bepaal de afstand der rechten $\begin{cases} x = z+1 \\ y = -4z-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2z - 2 \\ y = -6z - 1. \end{cases}$

Opg. 30. Bereken de afstand van het punt (a,b,c) tot de rechte

$$x = x_0 + \alpha t;\ y = y_0 + \beta t;\ z = z_0 + \gamma t.$$

Opg. 31. Bepaal de straal van de omgeschreven en van de ingeschreven bol van het tetraeder met hoekpunten (0,0,0); (a,0,0); (0,b,0); (0,0,c). Bepaal tevens de coordinaten van het hoogtepunt hiervan.

§ 2. Vectoren.

De gevonden formules nemen een eenvoudiger gedaante aan indien wij vectoren invoeren.

Onder een vector $\underline{a}$ verstaan wij een tripel getallen (a_1,a_2,a_3) de componenten van de vector genaamd. Men noemt twee vectoren gelijk als hun overeenkomstige componenten gelijk zijn.

Opg. 1. Bewijs dat het gelijkheidsbegrip een aequivalentiebegrip is.

Onder de som $\underline{a} + \underline{b}$ van twee vectoren $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ verstaat men de vector met componenten $(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$.

Opg. 2. Er bestaat slechts één vector $\underline{0}$, die wij de nulvector noemen, die voldoet aan $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ voor iedere $\underline{a}$.

Onder de vector $-\underline{a}$ verstaat men de vector die met $\underline{a}$ vermeerderd, de nulvector oplevert.

Opg. 4. De vergelijking $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$, waarbij $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gegeven vectoren zijn, bezit één en slechts één oplossing $\underline{x}$.

Onder $k\underline{a}$, waarin k een getal en $\underline{a}$ een vector (a_1,a_2,a_3) voorstelt, verstaat men de vector $k\underline{a} = (ka_1,ka_2,ka_3)$. Men stelt $\underline{a}k = (a_1k, a_2k, a_3k) = k\underline{a}$

Opg. 5. Laat zien dat $-1.\underline{a} = -\underline{a}$.

Opg. 6. Bewijs $h(k\underline{a}) = hk\underline{a}$; $(h+k)\underline{a} = h\underline{a} + k\underline{a}$; $k(\underline{a}+\underline{b}) = k\underline{a} + k\underline{b}$.

Onder de basisvectoren verstaat men de vectoren (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1), welke men resp. aanduidt met $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$.

Opg. 7. Bewijs dat voor iedere vector $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ geldt

$$\underline{a} = a_1\,\underline{i} + a_2\,\underline{j} + a_3\,\underline{k}\ .$$

Iedere vector is dus een lineair compositum der 3 basisvectoren. Men noemt n vectoren $\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \ldots, \underline{a}^{(n)}$ lineair afhankelijk, als er getalen $c_1,c_2,\ldots,c_n$ bestaan (niet alle = 0) met $c_1\,\underline{a}^{(1)} + \ldots + c_n\,\underline{a}^{(n)} = 0$.

Opg. 8. Elk viertal vectoren is lineair afhankelijk. Hetzelfde geldt v meer dan vier vectoren.

Opg. 9. Druk de voorwaarde dat 3 vectoren lineair afhankelijk zijn, uit in hun componenten.

Opg. 10. Als twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ (geen van beide gelijk aan de nulvector) lineair afhankelijk ijn, bestaat er een getal k met $\underline{a} = k\underline{b}$.

Wij hebben in het voorafgaande vectoren opgeteld, afgetrokken en met getallen vermenigvuldigd. Thans gaan wij over tot het invoeren van producten van twee vectoren. Wij zullen twee soorten producten van vectoren invoeren.

1°: Het inwendige of scalar product.

Onder het inwendige product der vectoren $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ verstaat men het getal $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Men schrijft $\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}\ \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

2°: Het uitwendige of vectorproduct.

Hieronder verstaat men bij de vectoren $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ de vector

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) .$$

Opg. 11. Bewijs $\underline{a}\ \underline{b} = \underline{b}\ \underline{a}$; $k\ \underline{a}.\underline{b} = k(\underline{a}\ \underline{b})$; $\underline{a}(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}\ \underline{b} + \underline{a}\ \underline{c}$; $(\underline{a}+\underline{b})^2 = (\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{a}^2 + 2\ \underline{a}\ \underline{b} + \underline{b}^2$; $(\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}-\underline{b}) = \underline{a}^2 - \underline{b}^2$.

Opg. 12. Bereken $\underline{i}\ \underline{i}$, $\underline{j}\ \underline{j}$, $\underline{k}\ \underline{k}$; $\underline{i}\ \underline{j}$; $\underline{j}\ \underline{k}$ en $\underline{k}\ \underline{i}$.

Opg. 13. Toon aan dat niet steeds geldt

$$\underline{a}(\underline{b}\ \underline{c}) = (\underline{a}\ \underline{b})\underline{c} .$$

Laat zien dat deze relatie dan en slechts dan geldt als $\underline{a}$ en $\underline{c}$ lineair afhankelijk zijn.

Opg. 14. Bewijs $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$; $k\ \underline{a} \times \underline{b} = k\ (\underline{a} \times \underline{b})$;

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \ ; \underline{a} \times \underline{a} = 0 .$$

Opg. 15. Bereken $\underline{i} \times \underline{j}$; $\underline{j} \times \underline{k}$; $\underline{k} \times \underline{i}$.

Uit opgave 14 en opgave 15 blijkt dat men het uitwendige product van $\underline{a} = a_1\ \underline{i} + a_2\ \underline{j} + a_3\ \underline{k}$ en $\underline{b} = b_1\ \underline{i} + b_2\ \underline{j} + b_3\ \underline{k}$ vindt door deze drie termen termsgewijze te vermenigvuldigen en daarbij gebruik te maken van de gevonden waarden der producten $\underline{i} \times \underline{i}$, $\underline{i} \times \underline{j}$, enz. Men lette hierbij wel op de volgorde der factoren in de optredende producten.

Opg. 16. Bewijs $\underline{a}.(\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}.(\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c}.(\underline{a} \times \underline{b}) = -\underline{a}(\underline{c} \times \underline{b}) = -\underline{b}(\underline{a} \times \underline{c}) = -\underline{c}(\underline{b} \times \underline{a})$. Druk de waarde van dit product, dat men wel het eindproduct der vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ noemt en dat men wel aanduidt met $(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$, uit in hun componenten.

Opg. 17. Bewijs $\underline{a}.(\underline{a} \times \underline{b}) = 0$.

Opg. 18. Als $\underline{a}.\underline{b} = 0$ en $\underline{a}.\underline{c} = 0$, dan zijn $\underline{a}$ en $\underline{b} \times \underline{c}$ lineair afhankelijk.

Opg. 19. Bewijs $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\ \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\ \underline{b})$.

Wij zien dus nogmaals, dat de associatieve wet $(\underline{b}\ \underline{a})\underline{c} = \underline{b}(\underline{a}\ \underline{c})$ niet geldt want het verschil van beide leden $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ is niet identiek nul, zoals uit een eenvoudig voorbeeld blijkt.

Opg. 20. Bewijs $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = \underline{c}(\underline{a},\underline{b},\underline{d}) - \underline{d}(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$;

$\underline{a}(\underline{b},\underline{c},\underline{d}) - \underline{b}(\underline{c},\underline{d},\underline{a}) + \underline{c}(\underline{d},\underline{a},\underline{b}) - \underline{d}(\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}) = 0.$

Opg. 21. Bewijs $(\underline{a} \times \underline{b}).(\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a}\ \underline{c})(\underline{b}\ \underline{d}) - (\underline{a}\ \underline{d})(\underline{b}\ \underline{c})$.

Onder de absolute waarde $|\underline{a}|$ van een vector $\underline{a}$ verstaat men $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^2}$.

Opg. 22. Bewijs $|k\ \underline{a}| = |k|\,|\underline{a}|$; $\underline{a}^2\ \underline{b}^2 = (\underline{a}\ \underline{b})^2 + (\underline{a} \times \underline{b})^2$.

Men ziet dus op grond van opg. 22, dat $|\underline{a}\ \underline{b}| \leqq |\underline{a}|\,|\underline{b}|$ en krijgt hieruit na quadrateren de "ongelijkheid van de driehoek"

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leqq |\underline{a}| + |\underline{b}|.$$

Opg. 23. Bewijs $|\underline{a} \pm \underline{b}| \geqq \big||\underline{a}| - |\underline{b}|\big|$; $|\underline{a} \pm \underline{b}| \leqq |\underline{a}| + |\underline{b}|$.

Wij gaan de gevonden resultaten nu gebruiken in de analytische meetkunde der ruimte.

Hiertoe identificeren we (de verbindingsrechte van de oorsprong met) een punt $P(p_1,p_2,p_3)$ met de vector $\underline{p}$. Met de oorsprong correspondeert dan de nulvector $\underline{0}$. Men spreekt ook wel van de vector $\underline{p} = \underline{OP}$.

Opg. 24. Bewijs $|OP| = \underline{p}$.

Opg. 25. Bij de vector $\underline{p} + \underline{q}$ behoort het 4e hoekpunt van een parallelogram met hoekpunten P, O en Q, bepaald door de vectoren $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{q}$.

Opg. 26. Bij 2 vectoren $\underline{p}$ en $\underline{q}$ (punten P en Q) heeft men

$$\underline{p}.\underline{q} = |\underline{p}|\ |\underline{q}|.\ \cos\varphi,$$

waarin φ de hoek POQ voorstelt.

Opg. 27. Twee vectoren OP en OQ staan loodrecht op elkaar als $\underline{p}.\underline{q} = 0$.

Wij zoeken nog naar de meetkundige betekenis van de vector $\underline{p} \times \underline{q}$. Beschouw weer de corresponderende punten $P(p_1,p_2,p_3)$ en $Q(q_1,q_2,q_3)$. Aangezien $\underline{p}(\underline{p} \times \underline{q}) = 0$ is staat $\underline{p} \times \underline{q}$ loodrecht op $\underline{p}$ en evenzo loodrecht op $\underline{q}$. De lengte van $(\underline{p} \times \underline{q})$ vindt men uit

$$|\underline{p} \times \underline{q}|^2 + |\underline{p}\ .\ \underline{q}|^2 = |\underline{p}|^2.|\underline{q}|^2 \text{ (verg.opg.22)},$$

dus als men wederom $\angle POQ = \varphi$ stelt

$$|\underline{p} \times \underline{q}|^2 = OP^2.OQ^2(1 - \cos^2\varphi) = OP^2.OQ^2.\sin^2\varphi ,$$

dus $\quad |\underline{p} \times \underline{q}| = OP.OQ\,|\sin\varphi| = 2$ opp. $\triangle$ POQ .

Rest ons dus nog de richting van $\underline{p} \times \underline{q}$ vast te stellen. Beschouw daartoe de derde component $p_1q_2 - p_2q_1$ van $\underline{p} \times \underline{q}$. Deze is positief als $(pq)_{12} > 0$ is, dus van uit de positieve Z-as gezien de draaiing van OP naar OQ met het uurwerk mee is. Dat is dan dus ook het geval van de vector $\underline{p} \times \underline{q}$ uit gezien.

Het is nu mogelijk de in § 1 gevonden formules in vectornotatie om te zetten.

Opg. 28. De afstand van 2 punten $P(p_1,p_2,p_3)$ en $Q(q_1,q_2,q_3)$ is

$|\underline{p} - \underline{q}|$ (verg. opg. 4 van de vorige §).

Opg. 29. Het punt R dat het lijnstuk PQ verdeelt in de verhouding $\lambda:\mu$ behoort bij de vector $\frac{\mu \underline{p}+\lambda \underline{q}}{\lambda+\mu}$ (verg. opg. 6 van de vorige §).

Opg. 30. De punten $X(x_1,x_2,x_3)$ ener rechte zijn in de parameter voorstelling $\underline{x} = \underline{p} + \underline{a}\,t$ te brengen, waarin $P(p_1,p_2,p_3)$ een willekeurig punt der rechte voorstelt en a_1,a_2,a_3 de richtingsgetallen van de vectoren zijn.

Opg. 31. De rechte door de twee punten P en Q bezit de voorstelling

$$\underline{x} = \lambda\, \underline{p} + (1-\lambda)\underline{q} .$$

Opg. 32. De hoek φ der rechten $\underline{x} = \underline{p} + \underline{a}\,t$ en $\underline{x} = \underline{q} + \underline{b}\,t$ wordt bepaald door $\cos\varphi = \frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}$ (verg. opg. 11 van de vorige §).

Twee rechten met richtingsgetallen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ zijn loodrecht als $\underline{a}\,\underline{b} = 0$.

Opg. 33. De bewuste hoek φ wordt ook bepaald uit

$$\sin\varphi = \frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} \qquad \text{(verg. opg. 27).}$$

De rechten zijn dus evenwijdig als $\underline{a}\times\underline{b} = 0$ is.

Opg. 34. De rechte door 2 punten A en B is ook te geven door

$$\underline{x}\times\underline{a} + \underline{a}\times\underline{b} + \underline{b}\times\underline{x} = 0 .$$

Leid deze relatie ook af uit opg. 31 en omgekeerd opg. 31 hieruit.

Opg. 35. De som der zijden van een driehoek ABC, opgevat als resp. de vectoren, $\underline{b}-\underline{c}$. $\underline{c}-\underline{a}$, $\underline{a}-\underline{b}$ is nul. Een analoge stelling bewijze men voor de som der zijvlakken van een viervlak ABCD, eveneens opgevat als vectoren ($(\underline{b}-\underline{a})\times(\underline{c}-\underline{a})$ enz.). Verg. opg. 34.

Opg. 36. De parametervoorstelling van een plat vlak door de punten A,B en C luidt $\underline{x} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c}$ met $\lambda+\mu+\nu = 1$.

Opg. 37. De vergelijking van dit vlak luidt

$$(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) - (\underline{b},\underline{c},\underline{x}) + (\underline{c},\underline{x},\underline{a}) - (\underline{x},\underline{a},\underline{b}) = 0$$

hetgeen men kan brengen in de gedaante

$$\underline{x}.(\underline{a}\times\underline{b} + \underline{b}\times\underline{c} + \underline{c}\times\underline{a}) = (\underline{a},\underline{b},\underline{c}) .$$

Opg. 38. De punten X met $\underline{a}\,\underline{x} = d$ waarbij $\underline{a}$ een gegeven vector is en d een scalar, liggen in een plat vlak, dat loodrecht staat op de vector $\underline{a}$ en deze snijdt in het punt $\underline{x} = \frac{d\,\underline{a}}{|\underline{a}|^2}$.

Opg. 39. Breng het vlak $\underline{a}\,\underline{x} = d$ in de normaalvorm.

Opg. 40. Bepaal de hoek van twee vlakken $\underline{a}\,\underline{x} = d$ en $\underline{b}\,\underline{x} = e$.

Opg. 41. Bepaal de hoek van een vlak $\underline{a}\,\underline{x} = d$ en een rechte $\underline{x} = \underline{b} + t\,\underline{c}$.

Wij bepalen thans de inhoud van het tetraeder OABC.

Wij vonden reeds voor de oppervlakte van OAB de waarde $\frac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}|$. De hoogte h van dit tetraeder maakt met OC een hoek φ, waarvoor geldt OC $\cos\varphi = h$. Verder ziet men in dat juist op grond van de oriëntering van de vector $\underline{a}\times\underline{b}$, deze met de vector $\underline{c}$ een hoek φ insluit, dus $\cos\varphi = \dfrac{(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}}{|\underline{a}\times\underline{b}|\cdot|\underline{c}|}$. De inhoud van het tetraeder OABC is gelijk aan

$$\tfrac{1}{3}h\ \tfrac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}| = \tfrac{1}{6}|\underline{c}|\cdot|\underline{a}\times\underline{b}|\cdot\cos\varphi = \tfrac{1}{6}(\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}) = \tfrac{1}{6}(\underline{a},\underline{b},\underline{c}).$$

Opg. 42. Leid dit resultaat ook af uit opg. 27 van de vorige paragraaf.

Opg. 43. De afstand van de evenwijdige rechten $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}t$ en $\underline{x} = \underline{c} + \underline{b}t$ luidt $\dfrac{|\underline{b}\times(\underline{a}-\underline{c})|}{|\underline{b}|}$.

Opg. 44. De afstand der evenwijdige vlakken $\underline{ax} = d$ en $\underline{ax} = e$ luidt $\dfrac{d-e}{|\underline{a}|}$

Opg. 45. De afstand van het vlak $\underline{ax} = d$ en de ermee evenwijdige rechte $\underline{x} = \underline{b} + \underline{c}t$ luidt $\dfrac{(\underline{ab})-d}{\underline{a}}$.

Opg. 46. Bewijs dat de vergelijking van het vlak door de rechten $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}t$ en $\underline{x} = \underline{a} + \underline{c}t$ luidt $(\underline{b}\times\underline{c})\underline{x} = (\underline{a},\underline{b},\underline{c})$.

Opg. 47. Bewijs dat het voetpunt der loodlijn uit een punt $\underline{a}$ op het vlak $\underline{bx} = d$ het punt $\dfrac{\underline{b}\times(\underline{a}\times\underline{b})+\underline{b}d}{\underline{b}^2}$ is.

Opg. 48. Bewijs dat het voetpunt der loodlijn uit een punt $\underline{a}$ op de rechte $\underline{x} = \underline{b} + \underline{c}t$ het punt $\underline{x} = \underline{b} + \underline{c}\,\dfrac{\underline{c}(\underline{a}-\underline{b})}{\underline{c}^2}$ is.

Opg. 49. De vergelijkingen der bissectrice vlakken van de vlakken $\underline{ax} = b$ en $\underline{cx} = d$ luiden $\dfrac{\underline{ax}-b}{\underline{a}} = \pm\dfrac{\underline{cx}-d}{\underline{c}}$.

Opg. 50. Het middelloodvlak van de punten $\underline{a}$ en $\underline{b}$ luidt $2(\underline{a}-\underline{b})\underline{x} = \underline{a}^2-\underline{b}^2$.

Opg. 51. De middenloodlijn der drie punten $\underline{a},\underline{b}$ en $\underline{c}$ luidt

$$\underline{x} = \frac{\underline{a}(\underline{b}-\underline{c})^2+\underline{b}(\underline{c}-\underline{a})^2+\underline{c}(\underline{a}-\underline{b})^2}{2\,\underline{u}^2} + t\,\underline{u}\,,\ \text{waarin}\ \underline{u} = \underline{a}\times\underline{b} + \underline{b}\times\underline{c} + \underline{c}\times\underline{a}\,.$$

Opg. 52. Bewijs dat de afstand der kruisende rechten $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}t$; $\underline{x} = \underline{c} + \underline{d}t$ gelijk is aan $\dfrac{|(\underline{a}-\underline{c},\underline{b},\underline{d})|}{|\underline{b}\times\underline{d}|}$.

Opg. 53. Bewijs dat de rechten $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}t$ en $\underline{x} = \underline{c} + \underline{d}t$ elkaar snijden als $(\underline{a},\underline{b},\underline{d}) = (\underline{c},\underline{b},\underline{d})$.

Opg.54. Bewijs dat de snijlijn der vlakken $\underline{a}\ \underline{x} = b$ en $\underline{c}\ \underline{x} = d$ de gedaante

$$\underline{x} = \frac{(b\ \underline{c} - d\ \underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{c})}{(\underline{a}\times\underline{c})^2} - (\underline{a}\times\underline{c})\ t$$

bezit.

Opg.55. Bepaal de vergelijking der rechte, die de kruisende rechten $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}\ t$ en $\underline{x} = \underline{c} + \underline{d}\ t$ loodrecht snijdt.

Men vindt een rechte van de gedaante $\underline{x} = \underline{p} + (\underline{b}\times\underline{d})t$, waarbij de vector $\underline{p}$ wegens opg. 53 dient te voldoen aan

$$\underline{p}(\underline{b}\times(\underline{b}\times\underline{d})) = \underline{a}\ (\underline{b}\times(\underline{b}\times\underline{d})) = (\underline{a}\times\underline{b}).(\underline{b}\times\underline{d})$$

en evenzo aan

$$\underline{p}(\underline{d}\times(\underline{b}\times\underline{d})) = (\underline{c}\times\underline{d})(\underline{b}\times\underline{d}) .$$

Gebruik makende van

$$\{\underline{b}\times(\underline{b}\times\underline{d})\}\times\{\underline{d}\times(\underline{b}\times\underline{d})\} = \underline{d}\ (\underline{b},\underline{b}\times\underline{d},\underline{b}\times\underline{d}) - (\underline{b}\times\underline{d})(\underline{b},\underline{b}\times\underline{d},\underline{d})$$
$$= (\underline{b}\times\underline{d})^3$$

vindt men met behulp van opgave 54 voor de gezochte rechte

$$\frac{+[\{(\underline{a}\times\underline{b}).(\underline{b}\times\underline{d})\}\{\underline{d}\times(\underline{b}\times\underline{d})\} - \{(\underline{c}\times\underline{d})(\underline{b}\times\underline{d})\}\{\underline{b}\times(\underline{b}\times\underline{d})\}]\times(\underline{b}\times\underline{d})^3}{(\underline{b}\times\underline{d})^6}$$
$$+(\underline{b}\times\underline{d})t$$

$$= \frac{-\underline{d}\{(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{b}\times\underline{d})\} + \underline{b}\{(\underline{c}\times\underline{d})(\underline{b}\times\underline{d})\}}{(\underline{b}\times\underline{d})^2} + (\underline{b}\times\underline{d})t.$$

§2. Coördinatentransformaties.

Wij kunnen met vectoren op eenvoudige wijze transformatieformules (verplaatsingen) der ruimte afleiden.

Een verschuiving van het stelsel OXYZ naar een ermee parallel stelsel O'X'Y'Z', waarbij O' in het oude stelsel de coördinaten (a_1,a_2,a_3) bezit luidt $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{a}$; hierin geven vectoren zonder / met accent grootheden aan, gemeten ten opzichte van het oude / nieuwe coördinatenstelsel. De inverse formules zijn samen te vatten in $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{a}$.

Wij geven thans formules waarbij overgegaan wordt van het stelsel OXYZ op een stelsel OX'Y'Z' (het analogon der draaiing in het platte vlak).

De punten $\underline{i} = (1,0,0)$; $\underline{j} = (0,1,0)$; $\underline{k} = (0,0,1)$, gelegen op de oude X-, Y- resp. Z-as, bezitten in het nieuwe stelsel coördinaten (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3). Noem de punten (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1) in het nieuwe stelsel $\underline{i}'$, $\underline{j}'$ en $\underline{k}'$. Dan heeft men dus

Analyt. meth. Verv.

$$\underline{i} = a_1\,\underline{i}' + a_2\,\underline{j}' + a_3\,\underline{k}' \;;\quad \underline{j} = b_1\,\underline{i}' + b_2\,\underline{j}' + b_3\,\underline{k}' \;;$$
$$\underline{k} = c_1\,\underline{i}' + c_2\,\underline{j}' + c_3\,\underline{k}'\,,$$

zodat men voor een punt P met oude coördinaten (x_1,x_2,x_3) en nieuwe coördinaten (x_1',x_2',x_3') vindt

$$\underline{x} = x_1\,\underline{i} + x_2\,\underline{j} + x_3\,\underline{k} = (x_1a_1 + x_2b_1 + x_3c_1)\underline{i}' + (x_1a_2+x_2b_2+x_3c_2)\underline{j}' + (x_1a_3 + x_2b_3 + x_3c_3)\underline{k}',$$

dus wegens $\underline{x} = x_1'\,\underline{i}' + x_2'\,\underline{j}' + x_3'\,\underline{k}'$

$$(1)\quad \begin{cases} x_1' = a_1\,x_1 + b_1\,x_2 + c_1\,x_3 \\ x_2' = a_2\,x_1 + b_2\,x_2 + c_2\,x_3 \\ x_3' = a_3\,x_1 + b_3\,x_3 + c_3\,x_3 \end{cases} .$$

De formules (1) geven dus de transformatieformules van OXYZ naar OX'Y'Z' weer. De matrix (abc) der transformatie is orthogonaal, want de lengte der vector $\underline{i}$ is gelijk aan 1, dus heeft men $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Daar $\underline{i}$ en $\underline{j}$ loodrecht op elkaar staan, heeft men $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, enz.

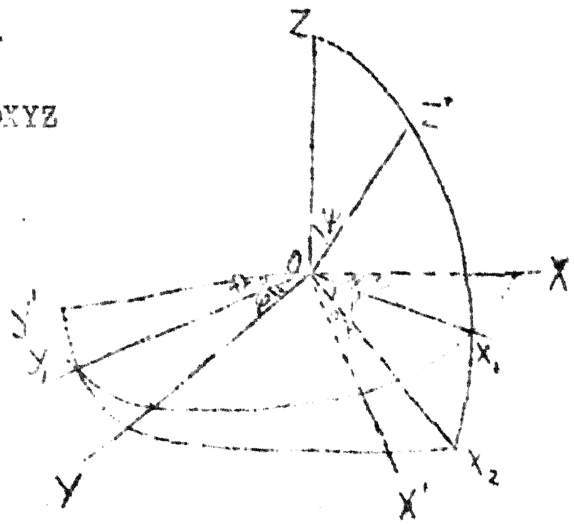
Wij weten dat de determinant van een orthogonale matrix gelijk is aan ± 1. Is deze -1 dan passen wij bv. nog de transformatie $x_3'' = -x_3'$ toe, waardoor de nieuwe Z-as van richting verandert, de matrix orthogonaal blijft en een determinantwaarde +1 krijgt. De overgang van het stelsel OXYZ naar het zo gevonden stelsel OX'Y'Z' is dus vastgelegd door een orthogonale transformatie met determinant +1.

De teruggang van het nieuwe stelsel naar het oude vindt men door uit (1) de grootheden x_1, x_2, x_3 op te lossen. Deze warden uitgedrukt in x_1', x_2', x_3' door minoren van $(abc)_{123}$, welke omdat de matrix orthogonaal is, juist de elementen van de matrix zelf zijn. Men vindt voor de inverse transformatie van (1) als coëfficiënten matrix de inverse matrix van (1):

$$\begin{cases} x_1 = a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' \\ x_2 = b_1x_1' + b_2x_2' + b_3x_3' \\ x_3 = c_1x_1' + c_2x_2' + c_3x_3' \end{cases}$$

welke natuurlijk eveneens orthogonaal is.

Men kan zich afvragen of een transformatie van het gevonden type ook door rotaties te bewerkstelligen is, of anders gezegd, of er een aantal rotaties te vinden is, waardoor het stelsel OXYZ in het stelsel OX'Y'Z' wordt overgevoerd. Inderdaad kan dit bereikt worden. Beschouw daartoe het vlak door OZ en Z' dat het XOY vlak in OX_1 snijdt. Pas nu



eerst uitgaande van het stelsel OXYZ een rotatie om de Z-as toe, (over een hoek φ), waardoor dit stelsel overgaat in het stelsel OX_1Y_1Z; vervolgens rotere men om de Y-as over een hoek $\psi = \angle ZOZ'$, waarna het stelsel OX_1Y_1Z overgaat in het stelsel OX_2Y_1Z' en tenslotte rotere men over een hoek ϑ om de Z'-as totdat het vlak Y_1OX_2 in de gewenste eindstand Y'OX' is gekomen. Men heeft dan als men de coördinaten van een punt P ten opzichte van de stelsels OXYZ, OX_1Y_1Z, OX_2Y_1Z', OX'Y'Z' resp. aanduidt met (x,y,z), (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x',y',z')

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_1 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi\,. \\ z_1 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\psi + z_1\sin\psi. \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = x_1\sin\psi + z_1\cos\psi\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x_2\cos\vartheta + y_2\sin\vartheta \\ y' = -x_2\sin\vartheta + y_2\cos\vartheta \\ z' = z_2 \end{cases}$$

dus

$$\begin{cases} x' = x(\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta) + y(\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta) \\ \qquad - z\sin\psi\cos\vartheta \\ y' = x(-\sin\varphi\cos\psi\sin\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta) + y(-\sin\varphi\cos\psi\sin\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta) \\ \qquad + z\sin\psi\sin\vartheta \\ z' = x\cos\varphi\sin\psi + y\sin\varphi\sin\psi + z\cos\psi. \end{cases}$$

Opg. 1. Druk de hoeken φ, ψ en ϑ uit in de grootheden $a_1, \ldots, c_3$ uit formule (1).

Evenals in de vlakke meetkunde naast rechthoekige coördinaten ook scheefhoekige kunnen optreden, is dat in de ruimte meetkunde ook het geval. Wij geven de overgang van een rechthoekig assenstelsel OXYZ naar een scheefhoekig assenstelsel OX'Y'Z'. Beschouw de punten $\underline{i} = (1,0,0)$; $\underline{j} = (0,1,0)$; $\underline{k} = (0,0,1)$ in het oude stelsel. Laten deze resp. de scheefhoekige coordinaten (a_1,a_2,a_3); (b_1,b_2,b_3); (c_1,c_2,c_3) bezitten. Noem de punten met nieuwe coördinaten (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1) weer $\underline{i}'$; $\underline{j}'$, $\underline{k}'$. Dan heeft men voor een punt P met oude coördinaten (x_1,x_2,x_3)

$$\underline{x} = x_1\,\underline{i} + x_2\,\underline{j} + x_3\,\underline{k} = x_1(a_1\,\underline{i}' + a_2\,\underline{j}' + a_3\,\underline{k}')+$$

$$+ x_2(b_1\,\underline{i}' + b_2\,\underline{j}' + b_3\,\underline{k}')+ x_3(c_1\,\underline{i}' + c_2\,\underline{j}' + c_3\,\underline{k}') =$$

$$= (x_1a_1 + x_2b_1 + x_3c_1)\underline{i}' +(x_1a_2 + x_2b_2 + x_3c_2)\underline{j}' +$$

$$+ (x_1a_3 + x_2b_3 + x_3c_3)\underline{k}' = x_1'\,\underline{i}' + x_2'\,\underline{j}' + x_3'\,\underline{k}',$$

zodat men voor de nieuwe coordinaten x_1', x_2' , x_3' vindt

$$(1)\quad \begin{cases} x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ x_2' = a_2\,x_1 + b_2\,x_2 + c_2\,x_3 \\ x_3' = a_3\,x_1 + b_3\,x_2 + c_3\,x_3\,. \end{cases}$$

De matrix (abc) is nu echter niet orthogonaal, omdat de nieuwe coördinaatassen niet meer loodrecht op elkaar behoeven te staan. De determinant (abc) is echter niet nul, want was dit wel zo, dan waren de punten $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ lineair afhankelijk, dus collineair.

De omkering van (1) levert ons de overgang van het nieuwe naar het oude stelsel.

Wij merken op dat de transformatieformules (1) lineair zijn in de variabelen, zodat een figuur $f(x_1,x_2,x_3)= 0$ van een graad n in de variabelen x_1,x_2 en x_3 door de transformatie overgaat in een figuur $f'(x_1',x_2',x_3')= 0$, die in de nieuwe variabelen x_1',x_2' en x_3' eveneens van de graad n is.

Opg. 2. Toon aan dat de in inhoud van het parallelepipedum, bepaald door de drie ribben $\underline{i}'$, $\underline{j}'$, $\underline{k}'$, gelijk is aan $\frac{1}{(abc)}$.

Opg. 3. Een vergelijking px + qy + rz = s in scheefhoekige coördinaten x, y en z stelt een plat vlak voor.

Opg. 4. In scheefhoekige coördinaten luidt de vergelijking van een plat vlak door de punten $P_i(x_i,y_i,z_i)$ (i = 1,2,3)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

en in parametervoorstelling heeft men weer voor een willekeurig punt P van het vlak $P = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$ met $\lambda + \mu + \nu = 1$.

Opg. 5. In scheefhoekige coördinaten luidt de vergelijking van een rechte door 2 punten $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1,2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

of in parametervoorstelling $P = \lambda P_1 + \mu P_2$ $(\lambda + \mu = 1)$.

Opg. 6. Wat is de meetkundige plaats der punten

$$P = \lambda P_1 + \mu P_2 ,$$

als P_1 en P_2 vaste gegeven punten zijn, maar $\lambda + \mu$ niet langer aan de bepaling $\lambda + \mu = 1$ gebonden is? Beantwoord de analoge vraag voor de punten $P = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$.

Opg. 7. Het snijpunt van 3 vlakken met vergelijking $u_i x + v_i y + w_i z = d_i$ $(i = 1,2,3)$ in scheefhoekige coordinaten luidt

$$x = \frac{(dvw)}{(uvw)} ; \; y = \frac{(udw)}{(uvw)} ; \; z = \frac{(uvd)}{(uvw)} .$$

Naast de rechthoekige en scheefhoekige coördinaten treden nog andere soorten coördinaten op. Wij noemen de cylindercoördinaten en de poolcoördinaten.

De cylindercoördinaten (z, r, φ) van een punt (x, y, z) vindt men door de x- en y-coördinaten te transformeren in de poolcoördinaten r en φ volgens de bekende formules $x = r \cos\varphi$; $y = r \sin\varphi$.

De cylindercoördinaten spelen een rol bij de bepaling van omwentelingsvlakken.

Beschouw in het XOZ vlak de vlakke kromme $f(x,z) = 0$ en laat gevraagd zijn de vergelijking van de figuur te bepalen, die uit deze kromme ontstaat door wenteling om de z-as. Een willekeurig punt (x,y,z) van het oppervlak heeft dan een afstand r tot z-as, die gelijk is aan de afstand van het punt (x,o,z) tot de z-as, waaruit het door wenteling is ontstaan, zodat zo'n punt voldoet aan $f(r,z) = 0$. In cylindercoördinaten wordt dus een omwentelingsoppervlak om de z-as gegeven door een vergelijking waarin de poolhoek φ niet optreedt (en omgekeerd!). In rechthoekige coördinaten luidt de vergelijking dan $f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$, welke zo nodig na quadrateringen in een rationale gedaante in x, y en z te brengen is.

Opg. 8. Bepaal de vergelijking van de omwentelingskegel, ontstaan door de rechte $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ om de z-as te laten wentelen.

Opg. 9. Bepaal de vergelijking der omwentelingsellipsoïde ontstaar de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ om de y-as te laten wentelen.

Opg. 10. Bepaal de vergelijking der omwentelingshyperboloïde, ontstaan door de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ om de z-as te laten wentelen.

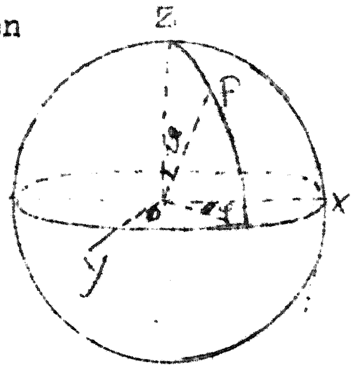
Toon aan dat de rechte $\frac{x}{a} + \frac{ty}{a} - \frac{z}{c} = t$; $\frac{tx}{a} - \frac{y}{a} + \frac{tz}{c} = 1$ (t willekeurig) geheel op dit oppervlak ligt.

Opg. 11. Bepaal de vergelijking van de torus, ontstaan door de cirkel $(x-a)^2 + z^2 = r^2$ (met $r<a$) om de z-as te laten wentelen.

Opg. 12. Wat stelt in scheefhoekige (rechthoekige) coördinaten één vergelijking van de gedaante $f(x,y)= 0$ voor?

Opg. 13. Wat stelt in cylindercoordinaten een vergelijking van elk der gedaanten $f(r,\varphi)= 0$; $f(z,\varphi)= 0$ voor?

Een punt $P(x,y,z)$ is ook vast te leggen door zijn 3 poolcoördinaten (r,φ,ϑ), waarin $r = OP$, φ = de hoek tussen de vlakken POZ en XOZ en $\vartheta = \angle POZ$. Men heeft de volgende transformatieformules



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$

en vindt voor de inverse formules

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = y/x.$$

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Poolcoördinaten worden veel gebruikt in de astronomie.

Opg.14. Bepaal in poolcoördinaten de vergelijking van het platte vlak $\underline{a}\ \underline{x} = b$.

Opg.15. Bepaal de vergelijking in poolcoördinaten van de torus in opg.11.

Opg.16. Bepaal de vergelijking in poolcoördinaten van de cylinder met als as de rechte $x=y=z$ en met straal 1.

Opg.17. De meetkundige plaats der punten P waarvoor de som der afstanden tot twee gegeven punten E en F(brandpunten genaamd) constant (=2a) is, noemt men een omwentelingsellipsoïde. Bepaal de vergelijling van deze ellipsoide in rechthoekige coördinaten (stel EF=2c en kies het midden van EF als oorsprong, de X-as langs EF enz.). Bepaal ook de vergelijking in poolcoördinaten met E als pool en EF als poolas en in cylindercoördinaten met EF als cylinderas.

Opg.18. Bepaal van de analoge meetkundige plaats der punten P met $|PE-PF| = 2a$ eveneens de vergelijking in het analoge rechthoekige coördinatenstelsel. Men vindt een omwentelingshyperboloide (vgl. opg.10).

§15. Uitbreiding van de Euclidische ruimte.

De verzameling der punten (x, y, z), die wij tot dusverre beschouwden, wordt de Euclidische ruimte genoemd. Evenals met het Euclidische platte vlak geschied is, breiden wij deze ruimte op tweeërlei wijze uit.

Allereerst wensen wij ook aan evenwijdige rechten (resp. vlakken) een snijpunt (resp. snijlijn) toe te kennen. Hiertoe voeren wij wederom nieuwe elementen in, die wij oneigenlijke punten noemen. Dit geschiedt op analoge wijze als in de vlakke analytische meetkunde. Een punt P (x, y, z) geven wij 4 homogene coördinaten $(X, Y, Z, W) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda)$, waarin λ een willekeurig getal $\neq 0$ voorstelt. We geven de homogene coördinaten ook wel met (X_1, X_2, X_3, X_4) aan. Elk punt (x, y, z) bezit dus oneindig veel viertallen homogene coördinaten. Is omgekeerd een viertal (X, Y, Z, W) gegeven, dan stelt dit indien $W \neq 0$ is, het punt $(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W})$ voor. De elementen (X, Y, Z, W) echter met $W = 0$ corresponderen niet met (eigenlijke) punten (x, y, z). Deze elementen noemen wij oneigenlijke punten, behalve het element (0, 0, 0, 0), dat wij niet met een punt zullen identificeren. Een oneigenlijk punt is gekarakteriseerd door $W = 0$, dus door een eerste graadsvergelijking. Waar een plat vlak $px + qy + rz = s$ in homogene coördinaten eveneens aan een eerste graadsvergelijking voldoet (n.l. $pX + qY + rZ - sW = 0$), zegt men dan ook, dat alle oneigenlijke punten in een plat vlak (dat men het oneigenlijke vlak noemt) liggen.

<u>Opg. 1.</u> Een vergelijking $pX + qY + rZ - sW = 0$, waarin p, q, r en s niet alle nul zijn, stelt een plat vlak voor.

Wij laten zien, dat de oneigenlijke punten als snijpunten van evenwijdige rechten optreden. Beschouw twee evenwijdige rechten

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ en } \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c}.$$

In homogene coördinaten luiden hun vergelijkingen

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} \text{ en } \frac{X-pW}{a} = \frac{Y-qW}{b} = \frac{Z-rW}{c},$$

dus na eliminatie van X, Y en Z vindt men

$$(pb - qa)W = 0; \ (qc - br)W = 0,$$

waaruit volgt $W = 0$ (tenzij $\left\|\begin{matrix} p & q & r \\ a & b & c \end{matrix}\right\|$ de rang 1 heeft, wat uitgesloten is; (waarom ?) en het snijpunt is dus het oneigenlijke punt (a, b, c, 0). Iedere rechte met richtingsgetallen a, b en c gaat dus door het oneigenlijke punt (a, b, c, 0)

De oneigenlijke punten van het platte vlak $px + qy + rz =$ vindt men door oplossen van het homogene stelsel

$$\begin{cases} pX + qY + rZ - sW = 0 \\ \qquad\qquad\qquad W = 0 \end{cases}$$

zodat zij als snijpunten van twee platte vlakken (waarvan weliswaar één oneigenlijk is) optreden, reden waarom men zegt dat de gezochten punten op een rechte liggen, die de oneigenlijke rechte van het platte vlak genoemd wordt. Deze rechte bevat slechts oneigenlijke punten.

Opg. 2. Door twee verschillende punten (al of niet oneigenlijk) gaat één en slechts één rechte. Zijn de punten $P_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1,)$ en $P_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2)$, dan is de parametervoorstelling van een willekeurig punt $P(X, Y, Z, W)$ dezer rechte

$$X = \lambda X_1 + \mu X_2;\ Y = \lambda Y_1 + \mu Y_2;\ Z = \lambda Z_1 + \mu Z_2;\ W = \lambda W_1 + \mu W_2$$

of korter geschreven $P = \lambda P_1 + \mu P_2$.

Leid deze parametervoorstelling ook af uit de vroeger gevondene voor het geval, dat de punten P, P_1 en P_2 eigenlijk zijn. Als P_1 en P_2 eigenlijk zijn, hoe moeten wij dan de parameter kiezen, opdat P oneigenlijk zij ?

Opg. 3. Door drie verschillende punten (al of niet oneigenlijk), die niet op één rechte liggen, gaat één en slechts één plat vlak. Zijn de punten $P_i(X_i, Y_i, Z_i, W_i,)$ $(i = 1, 2, 3)$, leid dan de parametervoorstelling $P = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$ af voor een willekeurig punt $P(X, Y, Z, W)$ van het gezochte vlak. Toon ook aan, dat de vergelijking van dit vlak luidt

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & W \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & W_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & W_3 \end{vmatrix} = 0$$

Vergelijk de resultaten met de vroeger gevondene voor eigenlijke punten en vlakken.

Opg. 4. Door een punt en een rechte (beide al of niet eigenlijk), die niet door dat punt gaat, gaat één en slechts één plat vlak.

Opg. 5. Een plat vlak en een rechte (beide al of niet oneigenlijk), die niet in dat vlak ligt, hebben één en slechts één snijpunt gemeen (ook in het geval dat de rechte evenwijdig is met het vlak).

Opg. 6. Twee verschillende platte vlakken hebben één en slechts één rechte gemeen. Luiden de vergelijkingen dier vlakken $U = 0$ en $V = 0$, dan is de vergelijking van een willekeurig vlak door die rechte $\lambda U + \mu V = 0$

Opg. 7. Drie verschillende platte vlakken, die niet door eenzelfde rechte gaan, hebben één en slechts één punt gemeen. Zijn de vergelijkingen dier vlakken $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, dan is de vergelijking van een willekeurig plat vlak door dat snijpunt $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$.

Evenals men in de vlakke analytische meetkunde lijncoördinaten invoerde, voeren wij nu vlakcoördinaten in, Onder de homogene vlakcoördinaten van het platte vlak met vergelijking

$$pX + qY + rZ = s$$

verstaat men het viertal $(p,q,r,-s)$ of een ermee evenredig viertal (mits niet alle elementen nul zijn).

Wij vinden dan de volgende duale resultaten geldig in de zojuist uitgebreide Euclidische ruimte (ook wel projectieve ruimte genoemd).

Een punt bezit vier homogene (punt)coördinaten.	Een plat vlak bezit vier homogene vlakcoördinaten.
Door twee verschillende punten gaat precies één rechte.	Twee verschillende platte vlakken snijden elkaar volgens een rechte.
Door drie verschillende, niet op één rechte gelegen punten gaat één en slechts één plat vlak.	Drie verschillende, niet door één rechte gaande platte vlakken hebben één en slechts één punt gemeen.
Door een punt en een rechte, die niet door dat punt gaat, gaat één en slechts één plat vlak.	Een plat vlak en een rechte, die niet in dat vlak ligt, hebben één en slechts één punt gemeen.
Elk punt P der rechte door P_1 en P_2 heeft de gedaante $P = \lambda P_1 + \mu P_2$.	Elk plat vlak V door de snijlijn van twee vlakken V_1 en V_2 heeft de gedaante $V = \lambda V_1 + \mu V_2$.
Elk punt P van het vlak door P_1, P_2 en P_3 heeft de gedaante $P = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$.	Elk vlak V door het snijpunt der vlakken V_1, V_2 en V_3 heeft de gedaante $V = \lambda V_1 + \mu V_2 + \nu V_3$.
Een plat vlak is de verzameling der punten, die voldoen aan een eerste graadsvergelijking in puntcoördinaten.	Een punt is gelegen in ieder vlak der verzameling vlakken, die voldoen aan een eerste graadsvergelijking in vlakcoördinaten.

Opg. 8. Toon dat laatste resultaat aan.

Het vlak door de punten met vergelijking $pX_i + qY_i + rZ_i + sW_i = 0 (i=1,2,3)$ bezit in puntcoördinaten (x,y,z,w) de vergelijking $\begin{vmatrix} X & Y & Z & W \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & W_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & W_3 \end{vmatrix} = 0$	Het snijpunt der vlakken $p_iX + q_iY + r_iZ + s_iW = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ bezit in vlakcoördinaten (p,q,r,s) de vergelijking $\begin{vmatrix} p & q & r & s \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0$

Opg. 9. Toon ook deze resultaten aan.

Onder de dubbelverhouding van 4 collineaire punten A, B, C en D, waarbij voor C en D de parametervoorstellingen $C = \lambda A + \mu B$; $D = \rho A + \sigma B$ gelden, verstaat men de verhouding $\frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu}$. Is deze gelijk aan -1, dan liggen de punten harmonisch.

Onder de dubbelverhouding (UVWT) van 4 door één rechte gaande vlakken U,V,W,T, waarbij voor W en T de parametervoorstellingen $W = \lambda U + \mu V$, $T = \rho U + \sigma V$ gelden, verstaat men de verhouding $\frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu}$.

Beschouw 4 collineaire punten A, B, C en D en een rechte m, die de rechte AB kruist. Dan is de dubbelverhouding der 4 punten A, B, C en D gelijk aan de dubbelverhouding der 4 vlakken $\alpha = Am$, $\beta = Bm$, $\gamma = Cm$ en $\delta = Dm$. Immers zijn de coördinaten van A (a_1, a_2, a_3, a_4), enz. en zijn P (p_1, p_2, p_3, p_4) en $Q(q_1, q_2, q_3, q_4)$ twee willekeurige punten van m, dan heeft het vlak α de vergelijking $(a\ p\ q\ x) = 0$, waarbij $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ een willekeurig punt van dit vlak voorstelt. Evenzo vindt men voor het vlak β de vergelijking $(b\ p\ q\ x) = 0$ en voor γ de vergelijking $(c\ p\ q\ x) = 0$, maar daar C op AB ligt, heeft men $C = \lambda A + \mu B$, dus $(c\ p\ q\ x) = = \lambda (a\ p\ q\ x) + \mu (b\ p\ q\ x) = 0$, dus ook $\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta$ en evenzo $\delta = \rho\alpha + \sigma\beta$, waaruit de bewering volgt.

Vervolgens breiden wij de projectieve ruimte nog uit met niet reële elementen. Wij voegen er n.l. ook alle punten (X, Y, Z,W) aan toe, waarbij X, Y, Z en W niet allen reëel zijn, zonder dat het mogelijk is zo'n punt 4 homogene reeele coördinaten te geven.

Opg. 10. Bestaan er ook reële punten met 4 niet reële homogene coördinaten ?

Twee punten heten toegevoegd complex als men hun homogene coördinaten zo kan kiezen, dat zij twee aan twee toegevoegd complex zijn, dus 2 punten (a,b,c,d) en (a',b',c',d') zijn toegevoegd complex als men heeft $\bar{a} : a' = \bar{b} : b' = \bar{c} : c' = \bar{d} : d'$.

Wij voeren voorts nog niet reeële rechten en vlakken in; een niet reële rechte is een rechte, die ten hoogste één reëel punt bevat (iedere reële rechte bevat oneindig veel niet reële en ook oneindig veel reële punten); een niet reëel vlak bezit 4 homogene coördinaten, die niet zo te kiezen zijn, dat ze allen reëel zijn.

Opg. 11. De verbindingslijn van twee toegevoegd complexe punten is reëel. De snijlijn van twee toegevoegd complexe vlakken is reëel.

Opg. 12. Als een reële rechte (vlak) een complex punt bevat, ligt het toegevoegd complex punt er ook op.

Opg. 13. Een niet reëel vlak bevat geen 3 reële niet collineaire punten.

Opg. 14. Als door een reële rechte een niet reëel vlak gaat, dan gaat ook het toegevoegd complexe vlak door die rechte.
Opg. 15. Ligt een complex punt op een complexe rechte (of vlak), dan ligt het toegevoegd complexe punt op de toegevoegd complexe rechte (resp. vlak).

Evenals in de vlakke meetkunde een rechte $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ isotroop werd genoemd, als haar richtingscoëfficiënt gelijk is aan $\pm$ i, dus als $a^2 + b^2 = 0$ is, noemt men in de ruimte een rechte met richtingsgetallen (a,b,c) isotroop, als $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ is en een vlak $px + qy + rz = s$ isotroop, als $p^2 + q^2 + r^2 = 0$ is.
De oneigenlijke punten van isotrope rechten liggen op de geheel in het oneigenlijke vlak gelegen kegelsnede met vergelijkingen $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; $w = 0$, welke "bolcirkel" wordt genoemd.
Opg. 16. Toon aan dat in elk isotroop vlak juist één isotrope rechte ligt en dat deze voldoet aan de voorwaarde, dat zij loodrecht op dat vlak staat.
Opg. 17. Een raaklijn aan een bol uit zijn middelpunt is isotroop. Dit is ook het geval met een raakvlak aan de bol uit zijn middelpunt.
Opg. 18. Alle bollen gaan door de bolcirkel.

§16. Oppervlakken en krommen.

Om het gedrag van een willekeurig punt O van een algebraisch oppervlak met vergelijking $f(x,y,z) = 0$, (waarin $f(x,y,z)$ en veelterm in x,y en z is van de graad n) te onderzoeken, verschuiven wij het assenstelsel zo, dat de oorsprong in O valt. De bekende term ontbreekt dan in de getransformeerde vergelijking. Laat deze nu de gedaante

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$$

hebben, waarin u_r een homogene uitdrukking $u_r\,(x,y,z)$ van de graad r is in x,y en z. Zij $u_1 = kx + my + nz$. Wij bepalen de snijpunten van een rechte $x = pt$, $y = qt$, $z = rt$ door O met ons oppervlak, dat wij met f aanduiden. Substitutie levert

$$t(kp + mq + nr) + t^2u_2(p,q,r) + t^3u_3(p,q,r) + \dots = 0.$$

Wij vinden derhalve steeds één oplossing $t = 0$, dus de oorsprong, zoals te verwachten was, terwijl verdere snijpunten gevonden worden uit de vergelijking

$$kp + mq + nr + tu_2(p,q,r) + t^2u_3(p,q,r) + \dots = 0$$

Het is mogelijk, dat de oorsprong nog eens als snijpunt optreedt, n.l. als p, q en r zo worden gekozen dat $kp + mq + nr = 0$ is. Alle rechten $x = pt$, $y = qt$, $z = rt$ met $kp + mq + nr = 0$ hebben dus in O twee samenvallende punten met f gemeen en worden raaklijnen in O aan f genoemd. Eliminatie van p, q en r leert ons dat deze rechten alle door O gaande rechten zijn, die in het platte vlak met vergelijking $kx + my + nz = 0$ liggen. Dit vlak V wordt daarom wel het raakvlak in O aan f genoemd. De vergelijking hiervan luidt dus kortweg $u_1(x,y,z) = 0$. Wij merken nog op, dat de snijkromme van f en V in O een dubbelpunt bezit. Dit tonen wij het gemakkelijkst aan door het assenstelsel zo te draaien, dat het xOy vlak samenvalt met V. De vergelijking van V luidt dan $Z = 0$ en die van f is dan

$$Z + u_2(X,Y,Z) + \dots = 0$$

De snijkromme voldoet dus aan

$$u_2(X,Y,0) + u_3(X,Y,0) + \dots = 0$$

en dit is een veelterm in X en Y, waarvan alle termen van de 0^e en 1^e graad in X en Y ontbreken, zodat hiervoor de oorsprong een dubbelpunt is. Al naar gelang daarvan of

$$u_2(X,Y,0) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2$$

reële verschillende, samenvallende, dan wel toegevoegd complexe lineaire factoren bezit, is dit dubbelpunt een gewoon dubbelpunt of knooppunt, een keerpunt, dan wel een geïsoleerd dubbelpunt. In het eerste geval bestaat de doorsnijding van V en f uit twee reële door O gaande rechten, en noemt men O een hyperbolisch punt; in het tweede geval heet O een parabolisch punt; in het derde geval, dat bij elk reëel punt van een reële bol optreedt, heet O een elliptisch punt.

Opg. 1. De doorsnijding van een reële bol met zijn raakvlak in een zijner reële punten bestaat uit twee isotrope rechten.

De gevallen werden onderscheiden naar de aard van de ontbindbaarheid van de vorm $a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2$, dus naar het teken van de determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 ;$$

zij correspondéren met de gevallen $D < 0$, $D = 0$ dan wel $D > 0$.

Opg. 2. Voor een oppervlak met vergelijking $z = g(x,y)$ heeft men $D = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y})^2$, ook wel kortweg geschreven $D = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$, waarbij elk der afgeleiden te nemen is voor de waarde, die zij in de oorsprong aannemen.

Voor een oppervlak $f(x,y,z) = 0$ heeft men $z_x = -f_x/f_z$; $z_y = -f_y/f_z$. Het raakvlak in de oorsprong aan dit oppervlak heeft dus de vergelijking

$$x(\frac{\partial f}{\partial x})_0 + y(\frac{\partial f}{\partial y})_0 + (\frac{\partial f}{\partial z})_0 = 0$$

en het raakvlak in een punt (a,b,c) van f luidt dus

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial a} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial b} + (z-c)\frac{\partial f}{\partial c} = 0 \quad \Big(\text{hierin is } \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},$$

genomen in het punt (a,b,c)).

Wij geven hiervan nog een andere afleiding. Beschouw de doorsnijding van f met het vlak $x = a$. Deze voldoet aan $f(a,y,z) = 0$, en de raaklijn aan deze vlakke kromme in het punt $P(a,b,c)$ luidt dus $z-c = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y-b)$, zodat deze wegens $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ de 3 richtingsgetallen $(0, -\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y})$ bezit. Evenzo heeft de raaklijn in P aan de doorsnijding van f en het vlak $y = b$ de 3 richtingsgetallen $(\frac{\partial f}{\partial z}, 0, -\frac{\partial f}{\partial x})$, zodat het raakvlak in P, dat deze beide raaklijnen bevat, de 3 richtingsgetallen $(f_x f_z, f_y f_z, f_z^2)$ of (f_x, f_y, f_z), te nemen in punt P, bevat, waarmede de gezochte vergelijking is teruggevonden.

Voert men homogene coördinaten (X,Y,Z,W) in, dan gaat bij $x = \frac{X}{W}$ enz. de gegeven vorm $f(x,y,z)$ over in de in X,Y,Z,W homogene vorm

$$f\left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right) = \frac{1}{W^n} F(X,Y,Z,W),$$

waarin F homogeen is in X,Y,Z en W. Voor de homogene vorm $F(X,Y,Z,W)$ geldt volgens Euler $X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} + W\frac{\partial F}{\partial W} = nF$ en verder is $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(\frac{X}{W})} = \frac{W}{W^n}\frac{\partial F}{\partial X}$ enz., dus het raakvlak in het punt (A,B,C,D) van het oppervlak $F(X,Y,Z,W) = 0$ luidt

$$\left(\frac{X}{W} - \frac{A}{D}\right)\frac{\partial F}{\partial A} + \left(\frac{Y}{W} - \frac{B}{D}\right)\frac{\partial F}{\partial B} + \left(\frac{Z}{W} - \frac{C}{D}\right)\frac{\partial F}{\partial C} = 0,$$

dus

$$X\frac{\partial F}{\partial A} + Y\frac{\partial F}{\partial B} + Z\frac{\partial F}{\partial C} = \frac{W}{D}\left(A\frac{\partial F}{\partial A} + B\frac{\partial F}{\partial B} + C\frac{\partial F}{\partial C}\right) = -W\frac{\partial F}{\partial D},$$

zodat men tenslotte vindt

$$X\frac{\partial F}{\partial A} + Y\frac{\partial F}{\partial B} + Z\frac{\partial F}{\partial C} + W\frac{\partial F}{\partial D} = 0.$$

Opg. 3. Voor het oppervlak $f(x,y,z) = 0$ heeft men

$$z_{xx} = -\frac{f_{xx}f_z^2 - 2f_{xz}f_xf_z + f_{zz}f_x^2}{f_z^3}; \quad z_{yy} = -\frac{f_{yy}f_z^2 - 2f_{yz}f_yf_z + f_{zz}f_y^2}{f_z^3};$$

$$z_{xy} = -\frac{f_{xy}f_z^2 - f_{xz}f_yf_z - f_{yz}f_xf_z + f_{zz}f_xf_y}{f_z^3},$$

waarna men voor $D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$ vindt na uitcijferen

$$D = -\frac{1}{f_z^4}\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix}$$

Opg. 4. Pas voor de bol $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de juist gevonden formule van D toe om vast te stellen, dat de oorsprong een elliptisch punt is.

Opg. 5. Laat zien dat bij het oppervlak $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, slechts hyperbolische punten optreden.

Opg. 6. Bepaal meetkundige plaats der parabolische punten (welke meetkundige plaats men de spinodale lijn noemt) van het opp. $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

Het is denkbaar, dat iedere rechte door de oorsprong het oppervlak $f(x,y,z) = 0$ in de oorsprong ten minste twee maal snijdt. Dit treedt op als de bovenbeschouwde uitdrukking $kp + mq + nr = 0$ is voor alle p,q,r, wat slechts kan als $k=m=n=0$, dus als $f_x = f_y = f_z = 0$ in de oorsprong. Men noemt het punt O dan een dubbelpunt van het oppervlak. Die rechten, die in O drie of meer samenvallende punten met f gemeen hebben, noemt men dan de raaklijnen in O aan f. Hun richtingsgetallen (p,q,r) voldoen in het algemeen aan $u_2(p,q,r) = 0$, dus aan een homogene quadratische uitdrukking in p,q en r. Al deze rechten door O vormen een kegel met vergelijking $u_2(x,y,z) = 0$.

Het kan echter gebeuren, dat ook alle coëfficiënten van $u_2(x,y,z)$, d.w.z. alle afgeleiden $f_{xx}, f_{xy}, \dots, f_{zz}$ van de 2e orde in de oorsprong de waarde nul aannemen. Dan is de oorsprong een tenminste drievoudig punt van f. In het algemeen: is een vorm f tesamen met al haar afgeleiden van de 1e, 2e, ..., (n-1)e orde in een punt O gelijk aan nul, maar is ten minste een der afgeleiden van de orde n niet gelijk aan nul, dan is O een n-voudig punt van f en de raaklijnen in O aan f (d.w.z. de rechten, die in O met f tenminste n+1 punten gemeen hebben) liggen op de ne-graadskegel met vergelijking $u_n(x,y,z) = 0$.

<u>Opg. 7.</u> Bepaal de positieve waarde van c waarvoor het oppervlak $x^2+ y^2 + 2cxz + z^2 + 2cx - \frac{4}{3} = 0$ een dubbelpunt heeft. Bepaal ook de vergelijking van de kegel der raaklijnen in dat dubbelpunt.

In het geval van een dubbelpunt is de raaklijnenkegel in dat punt van de tweede graad. Zoals wij later zullen zien, zijn er 4 hoofdtypen van tweedegraadskegels: de reële kegels, de imaginaire kegels, de vlakkenparen en de dubbelvlakken. De optredende dubbelpunten noemt men in deze gevallen resp. conische punten, geïsoleerde punten, biplanaire punten en uniplanaire punten.

<u>Opg. 8.</u> Onderzoek het karakter van het beschouwde dubbelpunt uit opg. 7.

Behalve de laagste-graadstermen van $f(x,y,z) = 0$ leren ons de hoogstegraadstermen ook iets over het oppervlak f. Gaat men n.l. op homogene coördinaten over, dan krijgt f tot vergelijking $F(X,Y,Z,W) = 0$ en de oneigenlijke punten van f voldoen dus aan

$$\begin{cases} F(X,Y,Z,W) = 0 \\ W = 0 \end{cases}, \text{ dus aan } \begin{cases} F(X,Y,Z,0) = 0 \\ W = 0 \end{cases}, \text{dus aan} \begin{cases} u_n(x,y,z) = 0 \\ W = 0 \end{cases}.$$

De vergelijking $u_n(x,y,z) = 0$ is homogeen in x,y en z en stelt een kegel van de ne graad voor, die het oneigenlijke vlak volgens dezelfde kromme als f snijdt.

Twee oppervlakken F en G snijden elkaar volgens een kromme lijn. Zijn de graden der oppervlakken m en n, dan is de snijkromme in het algemeen van de graad m n, d.w.z. een willekeurig vlak snijdt deze in m n punten. Immers zo'n vlak snijdt F volgens een m^egraads-kromme f en G volgens een n^egraads-kromme g en de krommen f en g hebben, zoals in de algebra werd bewezen, m n snijpunten gemeen. Natuurlijk kunnen 2 of meer dier punten samenvallen en dit kan zelfs optreden bij ieder der doorsnijdingen van f en g met ieder snijvlak. In dat geval raken F en G elkaar in het algemeen in zo'n punt.

Een kromme k is dus voor te stellen door twee vergelijkingen $f(x,y,z) = 0$; $g(x,y,z) = 0$ (vgl. b.v. de rechte lijn). De snijlijn der raakvlakken aan F en G in een punt P der kromme noemt men de raaklijn aan k in P. Zij P(a,b,c), dan voldoet die raaklijn aan

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial a} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial b} + (z-c)\frac{\partial f}{\partial c} = 0 \text{ en } (x-a)\frac{\partial g}{\partial a} + (y-b)\frac{\partial g}{\partial b} + (z-c)\frac{\partial g}{\partial c} = 0,$$

en is dus de rechte $\frac{x-a}{f_b g_c - f_c g_b} = \frac{y-b}{f_c g_a - f_a g_c} = \frac{z-c}{f_a g_b - f_b g_a}$.

Een ruimte-kromme kan men in parametervoorstelling geven door de betrekkingen $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. Men kan dan door eliminatie van t de kromme ook door de twee onafhankelijke betrekkingen $f(x,y,z) = 0$; $g(x,y,z) = 0$ geven. Men vindt door differentieeren naar t

$$f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t = 0; \quad g_x x_t + g_y y_t + g_z z_t = 0,$$

dus $$x_t : y_t : z_t \propto \begin{Vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{Vmatrix}.$$

Hieruit volgen voor de raaklijn in het punt P(a,b,c) der ruimtekromme de vergelijkingen $\frac{x-a}{(x_t)_P} = \frac{y-b}{(y_t)_P} = \frac{z-c}{(z_t)_P}$. Is de kromme in homogene coördinaten gegeven door

$$X = X(t); \; Y = Y(t); \; Z = Z(t); \; W = W(t),$$

dan vindt men $x = \frac{X(t)}{W(t)}$ enz., dus in het punt P(A,B,C,D) der kromme luidt de raaklijn

$$\frac{\frac{X}{W} - \frac{A}{D}}{DA'-AD'} = \frac{\frac{Y}{W} - \frac{B}{D}}{DB'-BD'} = \frac{\frac{Z}{W} - \frac{C}{D}}{DC'-CD'},$$

waarin $A' = \frac{dX(t)}{dt}$, genomen in het punt P, enz. Dit houdt juist in, dat de rang van de matrix

$$\begin{Vmatrix} X & Y & Z & W \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{Vmatrix}$$

gelijk is aan 2.

Opg. 9. Bewijs dit.

Een raaklijn in een punt P van een kromme heeft in P ten minste twee snijpunten met de kromme gemeen. Dit is bij de kromme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ en het punt P(a,b,c) ook als volgt in te zien. Zij $a = x(s)$; $b = y(s)$; $c = z(s)$, dus zij s de parameterwaarde, die bij P behoort. Behoort bij een ander punt Q de parameterwaarde u, dan is de vergelijking der rechte PQ

$$\frac{x-a}{x(s)-x(u)} = \frac{y-b}{y(s)-y(u)} = \frac{z-c}{z(s)-z(u)}.$$

Nadert u tot s, dus Q tot P, dan levert een limietovergang ons

$$\frac{x-a}{x_P'} = \frac{y-b}{y_P'} = \frac{z-c}{z_P'}.$$

Ieder plat vlak door de raaklijn is een raakvlak aan de kromme. Een vlak door 3 punten der kromme met parameterwaarden s,u en v heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x(s) & y(s) & z(s) & 1 \\ x(u) & y(u) & z(u) & 1 \\ x(v) & y(v) & z(v) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dus

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x(s) & y(s) & z(s) & 1 \\ x(s)-x(u) & y(s)-y(u) & z(s)-z(u) & 0 \\ x(s)-2x(u)+x(v) & y(s)-2y(u)+y(v) & z(s)-2z(u)+z(v) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dus na limietovergang

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

en in homogene coördinaten

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & W \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{vmatrix} = 0.$$

Dit levert ons dus de vergelijking van het platte vlak, dat in P drie samenvallende punten met de kromme gemeen heeft. Dit vlak noemt men het osculatievlak van de kromme.

<u>Opg. 11.</u> Bepaal het osculatievlak van de cirkel $x^2+ y^2= 1$; $z = 0$. Eveneens dat van de kromme $x = t$; $y = t^2$; $z = t^3$.

De verzameling der raaklijnen van een ruimte-kromme noemt men het tangentenoppervlak der kromme.

<u>Opg. 12.</u> Bepaal het tangentenoppervlak van de kromme

$x = t$, $y = t^2$, $z = (t+1)^2$.

A.M.

§ 17. Oppervlakken van de tweede graad.

Wij vonden reeds eerder dat een bol gegeven wordt door een vergelijking van de gedaante

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

waarvan het middelpunt M ligt in (-a, -b, -c) en de straal R gelijk is aan $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Ook als $a^2 + b^2 + c^2 - d \leqq 0$, zeggen wij dat de beschouwde vergelijking een bol voorstelt. De vergelijking

$$F(x,y,z) = A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

stelt voor $A \neq 0$ een bol voor en voor $A = 0$ zeggen wij, dat dit ook het geval is. De bol is dan ontaard in het platte vlak

$$2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0,$$

en het oneigenlijke vlak.

De bol door de punten P (x_i, y_i, z_i), waarbij i = 1,2,3,4, heeft de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Opg. 1. Bewijs dit. Wat vindt men als de 4 gegeven punten in 1 plat vlak liggen ?

Door 3 punten gaan oneindig veel bollen. Immers aan de 5 homogene coëfficiënten van de vergelijking van een bol door die punten worden 3 lineaire condities opgelegd, zodat er tenminste ∞^1 oplossingen gevonden worden, welke als een lineair compositum van 2 willekeurige verschillende oplossingen (die aanleiding geven tot 2 bollen f = 0 en $f_1 = 0$) te schrijven zijn, zodat men voor een willekeurige bol door die 3 punten de vergelijking $\lambda f + \mu f_1 = 0$ vindt. Men noemt bij twee gegeven bollen f = 0 en $f_1 = 0$ de verzameling der bollen met vergelijking $\lambda f + \mu f_1 = 0$ (λ, μ willekeurig) een bollenbundel. Wij vinden dus dat de bollen door 3 punten tenminste een bollenbundel vormen.

Alle exemplaren van een bollenbundel $\lambda f + \mu f_1 = 0$ gaan door de snijcirkel van de bollen f = 0; $f_1 = 0$ welke men vindt als doorsnijding van b.v. de bol f = 0 en het vlak $f - f_1 = 0$ (mits in beide vergelijkingen $f = 0$ en $f_1 = 0$ de coëfficiënt van $x^2 + y^2 + z^2$ dezelfde is). Dat een bol een plat vlak volgens een cirkel snijdt , is overigens evident. Transformeer het assenstelsel n.l. zo, dat dit vlak de vergelijking $z = 0$ krijgt. De bol

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

snijdt dit vlak dan volgens de kromme

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + d = 0,$$

die inderdaad een cirkel voorstelt.

Opg. 2. Laat zien dat ook de snijfiguur van een bol . +

$$2aXW + 2bYW + 2cZW + dW^2 = 0$$

met een plat vlak een cirkel is.

Het vlak van de snijcirkel van de bollen $f = 0$ en $f_1 = 0$ heet het machtvlak van deze bollen.

Men onderscheidt weer 3 soorten bundels, al naar gelang één (en dus alle) bol(len) dit machtvlak snijde(n) volgens een reële cirkel, een puntcirkel, dan wel een imaginaire cirkel.

Opg. 3. In het tweede geval raken alle bollen aan het machtvlak.

Dat de verzameling der bollen door 3 gegeven punten een bundel vormen, is ook als volgt te zien. Door de 3 punten gaat 1 plat vlak en in dát vlak ligt 1 cirkel door die 3 punten. Kies het assenstelsel zo, dat deze cirkel de vergelijkingen $x^2 + y^2 = r^2$; $z = 0$ heeft. Een willekeurige bol met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

snijdt vlak volgens deze cirkel dan en slechts dan als $a = b = 0$; $d = -r^2$, zodat zijn vergelijking luidt

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2cz = 0,$$

waarin c willekeurig is, hetgeen een bollenbundel $f + \lambda f_1 = 0$ oplevert met

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - r^2; \quad f_1 = z; \quad \lambda = 2c.$$

De figuur $\lambda f + \mu f_1 + \nu f_2 = 0$, waarin $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ drie willekeurige bollen voorstellen, die niet tot één bundel behoren, heet een bollennet.

Opg. 3. De verzameling der bollen door 2 gegeven punten is een bollennet. Omgekeerd gaan alle bollen van een net door 2 vaste punten. Beschouw n.l. de 3 machtvlakken $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ resp. van de bollen $f_2 = 0$, $f_3 = 0$; $f_3 = 0$, $f_1 = 0$; $f_1 = f_2 = 0$. Stemmen de coëfficiënten van $x^2 + y^2 + z^2$ in f_1, f_2 en f_3 weer overeen, dan heeft men b.v.

$$V_1 = f_2 - f_3; \; V_2 = f_3 - f_1; \; V_3 = f_1 - f_2, \text{ dus } V_3 = -V_1 - V_2$$

dus vlak V_3 gaat door de snijlijn s der vlakken V_1 en V_2. Deze lijn, die de machtlijn van het bollennet wordt genoemd, snijdt iedere bol van het net in 2 (al of niet samenvallende, al of niet reële) snijpunten, waardoorheen alle exemplaren van het net gaan.

Opg. 4. Als s aan één der bollen raakt, raakt s aan alle bollen. De 6 machtvlakken van elk tweetal van 4 niet tot 1 net behorende bollen snijden elkaar in 1 punt, waardoorheen ook de 4 machtlijnen van elk drietal dier bollen gaat.

De pooltheorie van de bol, die analoog verloopt aan de pooltheorie van een willekeurig oppervlak van de tweede graad (welke oppervlakken quadrieken worden genoemd), behandelen wij bij het onderzoek van die oppervlakken. Wij volstaan hier met enkele punten aan te stippen, die ook bij de theorie van de cirkel optraden. Allereerst beschouwen wij de macht van een punt $P(x_0,y_0,z_0)$ ten opzichte van de bovengenoemde bol $f(x,y,z) = 0$. Hieronder verstaan wij weer de uitdrukking

$$PM^2 - R^2 = (x_0 + a)^2 + (y_0 + b)^2 + (z_0 + c)^2 - (a^2+b^2+c^2-d) = f(x_0,y_0,z_0).$$

Naast de oorspronkelijke bol $f(x,y,z) = 0$ beschouwen wij ook nog een tweede bol met vergelijking

$$f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0,$$

met straal en met middelpunt $(-a_1, -b_1, -c_1)$. Men heeft dan voor de hoek φ der beide bollen

$$2RR_1\cos\varphi = R^2 + R_1^2 - MM_1^2 = R_1^2 - (MM_1^2 - R^2) =$$

$$= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1) - f(-a_1, -b_1, -c_1) =$$

$$= 2aa_1 + 2bb_1 + 2cc_1 - d - d_1,$$

dus

$$\cos\varphi = \frac{2aa_1 + 2bb_1 + 2cc_1 - d - d_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}\,\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1}}.$$

In het bijzonder vindt men dat die hoek recht is als

$$2aa_1 + 2bb_1 + 2cc_1 - d - d_1 = 0$$

is. Deze voorwaarde, die dus bilineair is in de coëfficiënten van de vergelijkingen der gegeven bollen, drukt uit, dat de bollen elkaar loodrecht snijden. Juist dit bilineaire karakter houdt in, dat de voorwaarde dat een bol een gegeven bol loodrecht snijdt, een lineaire voorwaarde oplegt aan de coëfficiënten van die bol. Hieruit volgt, dat zowel de bollen, die 3 gegeven bollen loodrecht snijden; als de bollen, die 2 gegeven bollen loodrecht snijden en door 1 gegeven punt gaan; als ook de bollen, die 1 gegeven bol loodrecht snijden en door 2 gegeven punten gaan, een bundel vormen. Deze resultaten houden hetzelfde in, als men bedenkt dat de voorwaarde, dat een bol door een punt P gaat, inhoudt, dat deze bol de puntbol met P tot middelpunt loodrecht snijdt.

Opg. 5. Bewijs dit.

Opg. 6. De bollen die 2 gegeven bollen loodrecht snijden, vormen een bollennet. Dit is ook het geval met de bollen, die 1 bol loodrecht snijden en door 1 gegeven punt gaan.

Opg. 7. De machtlijn van het bollennet der bollen B, die twee gegeven bollen A_1 en A_2 loodrecht snijden, staat loodrecht op het machtvlak van de bundel bepaald door A_1 en A_2.

Opg. 8. De puntbollen van het net van opg. 7 hebben hun centra op de snijcirkel van de bollen A_1 en A_2; er zijn 2 puntbollen van de bundel, bepaald door A_1 en A_2, die hun centra in elk der snijpunten van alle bollen van het net B hebben.

Opg. 9. De meetkundige plaats der punten die gelijke machten hebben ten opzichte van 2 gegeven bollen, bestaat uit hun machtvlak. Onderzoek de figuur der punten, die gelijke machten hebben ten opzichte van 3 resp. 4 gegeven bollen.

Een bol,is een oppervlak van de tweede graad, maar niet ieder oppervlak van de tweede graad, welke oppervlakken men quadrieken noemt, en waarvan men de vergelijking in homogene coördinaten kan aangeven door

$$(1)\qquad f(x)= a_{11}x_1^2+ 2a_{12}x_1x_2+ 2a_{13}x_1x_3+ 2a_{14}x_1x_4+ a_{22}x_2^2+ \dots + a_{44}x_4^2= 0,$$

is een bol.

Hiertoe is nodig en voldoende, dat $a_{12}= a_{13}= a_{14}= 0;\ a_{11}= a_{22}= a_{33}$.

Aangezien de vergelijking (1) tien homogene coëfficiënten bevat, is, een willekeurig oppervlak van de tweede graad bepaald, als men aan zijn 10 homogene coëfficiënten 9 lineair onafhankelijke voorwaarden oplegt. Zo bestaat er steeds zo'n oppervlak, dat door 9 willekeurige punten gaat. De vergelijking hiervan kan men weer in determinantvorm schrijven

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 & x_3^2 & x_3x_4 & x_4^2 \\ a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots\dots & & & & & & a_4^2 \\ b_1^2 & \dots\dots & & & & & & & & b_4^2 \\ \cdot & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & \cdot \\ i_1^2 & & & & & & & & & i_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

waarin de punten $A(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $B(b_1,b_2,b_3,b_4),\dots,$ $I(i_1,i_2,i_3,i_4)$ de 9 gegeven punten aangeven. Liggen die 9 punten zo, dat de rang van de matrix $\begin{Vmatrix} a_1^2 & \dots & a_4^2 \\ \vdots & & \\ i_1^2 & \dots & i_4^2 \end{Vmatrix}$ gelijk is aan 9, dan vindt men juist 1 quadriek.

Wij drukken dit zo uit, door te zeggen, dat door 9 punten in het algemeen 1 quadriek gaat. Door 8 punten gaan dus meer quadrieken en men vindt, analoog aan het gevondene bij de theorie van de bol, dat alle quadrieken door 8 gegeven punten een quadriekenbundel vormen, d.w.z. quadrieken zijn waarvan de vergelijkingen de gedaante $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ bezitten, waarbij $f_1 = 0$ en $f_2 = 0$ twee willekeurige verschillende quadrieken zijn en λ en μ twee variabele getallen aangeven.

Voert men verder het begrip quadriekennet in, dit is de verzameling der quadrieken met vergelijking

$$\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0,$$

waarin $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ en $f_3 = 0$ drie niet tot één bundel behorende quadrieken aangeven, dan ziet men voorts eenvoudig in, dat alle quadrieken door 7 gegeven punten tot een quadriekennet behoren.

Aangaande het quadriekennet zij nog opgemerkt, dat dit in het algemeen 8 verschillende basispunten bezit (volgens de stelling van Bezout; de vergelijkingen der quadrieken zijn elk van de graad 2, zodat er 2 x 2 x 2 = 8 snijpunten optreden). Zijn dus 7 punten gegeven, dan vormen alle quadrieken daardoorheen een net, waarvan die 7 punten uiteraard basispunten zijn en waarvan alle exemplaren nog door een achtste vast punt moeten gaan, het 8^e basispunt van het net. Dit punt is dus bepaald door door de 7 andere en wordt wel het ermee geassocieerde punt genoemd.

<u>Opg. 10.</u> Bepaal het geassocieerde punt van de 7 punten

$$(1\ \ 1, \pm 1);\ (1, -1, \pm 1);\ (-1, 1, \pm 1),\ (-1, -1, 1).$$

De verzameling der quadrieken $\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 + \rho f_4 = 0$ (waarbij voor i = 1,2,3,4 de vergelijking $f_i = 0$ een quadriek voorstelt en elk drietal dezer 4 quadrieken niet tot een net behoort) heet een quadriekenkluwen. Gaat men uit van quadrieken, waarvan er géén 4 tot één kluwen behoren, dan vindt men hieruit op analoge wijze een quadriekenlegioen.

Evenals bij de kegelsneden geschied is, kan men zich ten doel stellen om de vergelijking $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$ van een quadriek door een orthogonale transformatie van het assenstelsel in een eenvoudiger gedaante te brengen is en op grond van die eenvoudige gedaante een overzicht (classificatie) van de diverse soorten quadrieken te geven. Wij kennen reeds een aantal quadrieken, daar ons reeds de betekenis van elk der volgende vergelijkingen bekend is:

$$w^2 = 0;\ xw = 0;\ xy = 0;\ x^2 = 0;\ x^2 - 1 = 0;\ x^2 + y^2 - 1 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$$

<u>Opg. 11.</u> Ga de betekenis van elk dier vergelijkingen na.

Wij beschouwen dus de algemene vergelijking

$$f(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$$

en stellen daarin voorlopig $x_4 = 1$, zodat wij weer in niet-homogene coördinaten werken. Stelt men $x_i = x_i' + p_i$ (waarin i = 1,2,3; dus een verschuiving van het assenstelsel oxyz naar een ermee parallel stelsel o'x'y'z'), dan kan men trachten om de grootheden p_1, p_2, p_3 zo te kiezen, dat in onze getransformeerde vergelijking de eerste-graadstermen wegvallen, hetgeen inhoudt, dat daarin $a_{14}' = a_{24}' = a_{34}' = 0$. De substitutie uitvoerende ziet men dat de vergelijking gaat luiden:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}y'^2 + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + a_{44}' = 0,$$

mits geldt

$$f_1(p) = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 + a_{14} = 0$$

$$f_2(p) = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + a_{24} = 0$$

$$f_3(p) = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 + a_{34} = 0.$$

Hieruit zijn de p_1, p_2, p_3 eenduidig oplosbaar mits

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

is. Onderstellen wij voorlopig dat dit het geval is, dan vindt men allereerst de plaats van O' en aangezien in de getransformeerde vergelijking slechts termen van even graad in x', y' en z' optreden, is O' voor de quadriek een middelpunt (d.w.z. ligt een punt (k,m,n) op de quadriek, dan is dat ook met het in O gespiegelde punt (-k,-m,-n) het geval). Men kan de grootheid a_{44}' uitdrukken in de oude coëfficiënten en de p_1, p_2, p_3, en vindt

$$a_{44}' = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}p_i\, p_j = f(p), \text{ (waarin weer } p_4 = 1 \text{ te nemen is).}$$

Men heeft echter

$$a_{44}' = f(p) = p_1f_1(p) + p_2f_2(p) + p_3f_3(p) + a_{14}p_1 + a_{24}p_2 + \\ + a_{34}p_3 + a_{44},$$

dus men krijgt

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 + a_{14} = 0$$

$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + a_{24} = 0$$

$$a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{23}p_3 + a_{24} = 0$$

$$a_{41}p_1 + a_{42}p_2 + a_{43}p_3 + a_{44} = a_{44}'.$$

Deze 4 vergelijkingen in p_1, p_2, p_3 kunnen alleen bestaan als hun determinant nul is, waaruit volgt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-a_{44}' \end{vmatrix} = 0,$$

dus $A - a_{44}'a = 0$, dus $a_{44}' = \frac{A}{a}$, waarin A de 4e orde determinant $|a_{ij}|$ aangeeft. Op het nieuwe stelsel luidt derhalve de vergelijking van onze kegelsnede

$$f(x') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + a_{22}y'^2 + 2a_{23}y'z' +$$
$$+ a_{33}z'^2 + \frac{A}{a} = 0.$$

Nu gaan wij een zodanige orthogonale transformatie om O' uitvoeren, dat in het nieuwe assenstelsel O' ΞHZ de coëfficiënten der gemengde termen $\xi\eta$, $\xi\zeta$ en $\eta\zeta$ ontbreken. Stel dus

$$x' = c_{11}\xi + c_{12}\eta + c_{13}\zeta$$
$$y' = c_{21}\xi + c_{22}\eta + c_{23}\zeta$$
$$z' = c_{31}\xi + c_{32}\eta + c_{33}\zeta\ .$$

Deze transformatie is orthogonaal dus

$$\xi = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z'$$
$$\eta = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z'$$
$$\zeta = c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z'.$$

Zij de nieuwe vergelijking van onze quadriek

$$\varphi(\xi) = s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \frac{A}{a} = 0.$$

<u>Opg. 12.</u> Waarom verandert de bekende term niet bij de laatste transformatie ?

Wij hebben dus $f(x') = \varphi(\xi)$ en wegens
$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$

$$(2) \qquad f(x') - s_1(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (s_2 - s_1)\eta^2 + (s_3 - s_1)\zeta^2.$$

Het rechterlid is ontbindbaar in twee factoren, die lineair zijn in η en ζ , dus in x', y' en z'. Dat is dus met het in x', y' en z' homogene linkerlid ook het geval. Wij weten echter, dat zo'n in 3 veranderlijken homogene quadratische vorm dan en slechts dan ontbindbaar is, als de discriminant nul is, wat in ons geval oplevert

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daar ook $f(x') - s_2(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ en $f(x') - s_3(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ ontbindbaar moeten zijn, vindt men dus dat de getallen s_1, s_2 en s_3 de wortels zijn van de z.g. s-vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0.$$

Wij merken nog op, dat de discriminant van de nieuwe vergelijking

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \frac{A}{a} = 0$$

gelijk is aan $s_1 s_2 s_3 \frac{A}{a} = A$, omdat het product der wortels der s-vergelijking gelijk is aan de determinant a.

Wenst men ook nog de richtingen der nieuwe assen, dus de getallen e_{ij} te weten, dan ontbinde men het linkerlid van (2) en vindt dan twee homogene factoren in x',y' en z', die beide , indien nulgesteld, vlakken opleveren die blijkens het rechterlid van (2) lineaire composita zijn van $\eta = 0$ en $\zeta = 0$, dus gaan door de Ξ - as. De richtingsgetallen van deze as zijn dus te vinden als snijlijn der vlakken, bepaald door het linkerlid van (2).

Voorbeeld. De vergelijking

$$f(x)=x^2+ xy + 3xz + 2y^2+ yz + z^2+ 2x + y + 3z$$

stelt een tweede graadsoppervlak voor, waarvan het middelpunt (a,b,c) voldoet aan

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = -2 \\ a + 4b + c = -1 \\ 3a + b + 2c = -3 \end{cases}$$

Dit is dus het punt (-1,0,0). Stel dus $x' = x + 1$; $y' = y$; $z' = z$. Dan krijgt de vergelijking de gedaante

$$x'^2 + x'y' + 3x'z' + 2y'^2 + y'z' + z'^2 + \frac{A}{a} = 0.$$

Men heeft

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = -a, \text{ dus } \frac{A}{a} = -1.$$

Verder luidt de s-vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-s & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2-s & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1-s \end{vmatrix} = 0,$$

dus $s_1 = -\frac{1}{2}$; $s_2 = \frac{3}{2}$; $s_3 = 3$, zodat onze quadriek te brengen is in de gedaante

$$-\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\eta^2 + 3\zeta^2 = 1.$$

De richtingsgetallen der Ξ - as in het stelsel o'x'y'z' volgen uit de ontbinding van

$$x'^2 + x'y' + 3x'z' + 2y'^2 + y'z' + z'^2 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{(3x' + y' + 3z')^2 + 14y'^2\right\}$$

zodat de Ξ -as gaat door de door de beide lineaire factoren van het laatste lid aangewezen vlakken, dus ook optreedt als snijlijn der vlakken $3x'+y'+3z' = 0$ en $y'= 0$ en bijgevolg tot richtingsgetallen heeft $(-3,0,3)$. Het is dus de rechte

$$\frac{x'}{-1} = \frac{y'}{0} = \frac{z'}{1} \text{ of } \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}, \text{ dus de rechte } y = 0;\ x + z + 1 = 0.$$

Op analoge wijze vindt men voor de H-as richtingsgetallen, die volgen uit de ontbinding van

$$-\tfrac{1}{2}x^2 + x'y' + 3x'z' + \tfrac{1}{2}y'^2 + y'z' - \tfrac{1}{2}z'^2 = -\tfrac{1}{2}(x'-y'-3z')^2 - (y'+2z')^2$$

en dus de richtingsgetallen $(1,-2,1)$ bezit. Het is dus de rechte

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

De derde as van het nieuwe stelsel staat loodrecht op de twee reeds gevondene en heeft dus richtingsgetallen $(1,1,1)$; dit is dus de rechte $x+1 = y = z$.

Letten wij nog even op het algemene gevonden resultaat, dan zien wij, dat de quadratische vorm $f(x) = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = 0$ door verschuivingen en draaiingen in het geval, dat de determinant a van de derde orde niet nul is, te brengen is in de gedaante

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \frac{A}{a} = 0.$$

Later bewijzen wij, dat de wortels der s-vergelijking alle reëel zijn, (indien althans alle coëfficiënten a_{ij} reëel zijn) zodat wij als wij $\frac{A}{a} > 0$ onderstellen de volgende gevallen krijgen.

1^e: $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 > 0$; imaginaire ellipsoide, welke geen enkel reëel punt bevat.

2^e: $s_1 < 0$, $s_2 < 0$, $s_3 < 0$; reële ellipsoide; deze bevat geen reële oneigenlijke punten.

3^e: Twee der wortels der s-vergelijking zijn positief, b.v. $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 < 0$; tweebladige hyperboloide; deze bevat wel reële oneigenlijke punten.

4^e: Een der wortels der s-vergelijking is positief, b.v. $s_1 > 0$, $s_2 < 0$, $s_3 < 0$; eenbladige hyperboloide of halsvlak; ook dit oppervlak bevat reële oneigenlijke punten.

Verder krijgen wij de gevallen dat $A = 0$ is maar nog steeds $a \neq 0$ is. Wij vinden dan

5^e: $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 > 0$; imaginaire kegel; deze bevat slechts één reëel punt, n.l. de oorsprong, en bevat geen reële oneigenlijke punten.

6^e: Eén der wortels der s-vergelijking is negatief, b.v. $s > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 < 0$; reële kegels; deze bevat reële rechten door O', en bevat reële oneigenlijke punten.

De overige gevallen, die kunnen optreden, zijn alle gekarakteriseerd door $a = 0$. Wij onderscheiden de gevallen dat de rang der bij a behorende matrix a gelijk is aan 0, 1 of 2. Als die rang gelijk is aan 3, krijgen wij de bovengenoemde 6 gevallen.
Wij merken nog op, dat door verschuivingen en draaiingen de rang van de matrices A en a niet verandert. Is de rang van a gelijk aan 3, dan heeft onze quadriek één middelpunt; is deze 2, dan heeft hij een lijn van middelpunten; is deze 1, dan heeft hij een vlak van middelpunten en is deze tenslotte nul, dan is ieder punt der ruimte als middelpunt op te vatten. In welk assenstelsel deze middelpunten bepaald worden, is natuurlijk onverschillig; men vindt er steeds "evenveel".

Is de rang van A gelijk aan 4, dan heeft de quadriek geen dubbelpunten; is deze 3, dan is er 1 dubbelpunt; is deze 2, dan is er een lijn van dubbelpunten en is deze 1, dan is er een plat vlak van dubbelpunten en kennelijk is dit aantal dubbelpunten onafhankelijk van de keuze van ons assenstelsel.
Opg. 13. Bewijs deze beweringen aangaande het verband tussen de rang van A en het aantal dubbelpunten.

De overige gevallen, die na de reeds gevonden 6 gevallen kunnen optreden, zijn alle gekarakteriseerd door $a = 0$. De rang van a is dus in die gevallen 0, 1 of 2. (Is die rang 3, dan krijgen wij de bovengenoemde 6 gevallen). Als de rang van a gelijk is aan 2, weten wij, dat het quadratische gedeelte van $f(x)$ te ontbinden is in twee verschillende lineaire in x, y en z homogene factoren U en V, zodat men heeft

$$f(x) = UV + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Kiest men de bisectrixvlakken van $U = 0$ en $V = 0$ tot coördinatenvlakken $x' = 0$, $y' = 0$, dan krijgt men

$$x'^2 + sy'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

Onderstel eerst $a'_{34} \neq 0$. Wegens

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & s & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{vmatrix} = -a'^2_{34}s$$

is dan $A \neq 0$. Omgekeerd volgt bij $s \neq 0$ uit $A = 0$ de relatie $a'_{34} = 0$. In ons geval, dat A en a'_{34} van nul verschillen, passen wij de substitutie

$$\xi = x' + a'_{14}; \quad \eta = y' + \frac{a'_{24}}{s}; \quad \zeta = z' + \frac{c}{2a'_{34}}, \text{ (waarin}$$

$$c = a'_{44} - a'^2_{14} - \frac{a'^2_{24}}{s})$$

toe en krijgen dan

toe en krijgen dan

$$\xi^2 + s\eta^2 + 2a_{34}\zeta = 0.$$

Dit levert ons twee gevallen

7^e: $s > 0$; $A \neq 0$; rang van a is 2; elliptische paraboloide.

8^e: $s < 0$; $A \neq 0$; rang van a is 2; hyperbolische paraboloide of zadelvlak.

Is echter $a'_{34} = 0$ (dus $A = 0$) dan krijgen wij na de substitutie

$$\xi = x' + a'_{14}; \quad \eta = y' + \frac{a'_{24}}{s}; \quad \zeta = z'$$

de vergelijking

$$\xi^2 + s\eta^2 + c = 0.$$

Dit levert ons de volgende gevallen:

9^e: $s > 0$; $A = 0$; rang van a is 2; $c > 0$; imaginaire cylinder.

10^e: $s > 0$; $A = 0$; rang van a is 2; $c < 0$; elliptische cylinder.

11^e: $s < 0$; $A = 0$; rang van a is 2; $c \neq 0$; hyperbolische cylinder.

12^e: $s > 0$; $A = 0$; rang van a is 2; $c = 0$; imaginair niet evenwijdig vlakkenpaar.

13^e: $s < 0$; $A = 0$; rang van a is 2; $c = 0$; reëel niet evenwijdig vlakkenpaar.

Opg. 14. In elk der laatse zeven gevallen 7^e t/m 13^e heeft men voor de wortels der s-vergelijking $s_1 = 0$; $s_2 s_3 = s$.

Opg. 15. Een quadriek raakt dan en slechts dan aan het oneigenlijke vlak als $a = 0$.

Opg. 16. Ga na of de oppervlakken 7^e t/m 13^e middelpunten bezitten.

Opg. 17. In de gevallen 9^e, 10^e en 11^e is de rang van de matrix A gelijk aan 3; in de gevallen 12^e en 13^e is deze rang gelijk aan 2.

Vervolgens beschouwen wij het geval, dat de rang der matrix a gelijk is aan 1. Dan weet men uit de vlakke analytische meetkunde, dat het in x,y en z homogene quadratische gedeelte van f te schrijven is als het quadraat van een in x,y en z homogene en lineaire vorm U, zodat wij dan hebben

$$U^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Transformeren wij ons assenstelsel zo, dat het vlak $U = 0$ tot vergelijking krijgt $z' = 0$, dan vinden wij

$$z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

dus, als men stelt

$$z' + a'_{34} = \zeta; \quad \frac{a'_{14}x' + a'_{24}y'}{\sqrt{a'^2_{14} + a'^2_{24}}} + a'_{44} - a'^2_{34} = \xi;$$

$$\frac{-a'_{24}x' + a'_{14}y'}{\sqrt{a'^2_{14} + a'^2_{24}}} = \eta),$$

dan krijgen wij

$$\zeta^2 + 2a'_{14}\cdot\zeta = 0,$$

Dit kan slechts als a'_{14} en a'_{24} niet beiden nul zijn. Wij krijgen dus de gevallen

<u>14^e</u>: Rang van a is 1; $a'_{14} \neq 0$; het oppervlak is te transformeren tot

$$\zeta^2 + 2a'_{14}\,\zeta = 0;$$ parabolische cylinder.

Rang a is 1; $a'_{14} = 0$; $a'_{24} \neq 0$; het oppervlak is te transformeren tot

$$\zeta^2 = 2a'_{24}\eta$$, wat eveneens een parabolische cylinder oplevert.

Is echter de rang van a gelijk aan 1 en is $a'_{14} = a'_{24} = 0$, dan is ons oppervlak van de gedaante

$$z'^2 + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

Men heeft dan de volgende 3 gevallen.

15^e: Rang a is 1; $a'_{14} = a'_{24} = 0$; $a'^2_{34} - a'_{44} > 0$; twee reële evenwijdige vlakken.

16^e: Rang a is 1; $a'_{14} = a'_{24} = 0$; $a'^2_{34} - a'_{44} = 0$; twee samenvallende vlakken of een z.g. dubbelvlak.

17^e: Rang a is 1; $a'_{14} = a'_{24} = 0$; $a'^2_{34} - a'_{44}$ 0, twee toegevoegd complexe evenwijdige vlakken.

In de gevallen 14^e t/m 17^e heeft men voor de matrix **A**

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{Vmatrix}$$

De rang van **A** is dus ten hoogste 3. In geval 14^e is die rang juist 3. In geval 15^e en 17^e is die rang juist 2 en in geval 16^e is deze 1.

Opg. 18. In de gevallen 14^e t/m 17^e zijn de wortels van de s-vergelijking $s_1 = s_2 = 0$; $s_3 \neq 0$.

Rest ons nu nog het geval te beschouwen, dat a een rang 0 heeft. Ons oppervlak luidt dan

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

18^e: Zijn a_{14}, a_{24}, a_{34} niet alle nul, dan vinden wij dat f ontaard is in twee reële vlakken waarvan er één oneigenlijk is.

19^e: Zijn a_{14}, a_{24}, a_{34} wel alle nul, dan bestaat f uit het dubbelgetelde oneigenlijke vlak.

Opg. 19. In de gevallen 18^e en 19^e heeft de s-vergelijking 3 gelijke wortels s = 0, en verder is de rang der matrix **A** in geval 18^e gelijk aan 2 en in geval 19^e gelijk aan 1.

Wij krijgen zo het volgende staatje:

Geval	Rang A	Rang a	Type	Standaardvergelijking
1^e-4^e	4	3	imaginaire of reële ellipsoide, één-of tweebladige hyperboloide	$s_1X^2+s_2Y^2+s_3Z^2=1$
5^e-6^e	3	3	reële of imaginaire kegel	$s_1X^2+s_2Y^2+s_3Z^2=0$
7^e-8^e	4	2	elliptische en hyperbolische paraboloide	$X^2+sY^2+2tZ=0$
9^e-11^e	3	2	imaginaire, elliptische of hyperbolische cylinder	$X^2+sY^2+t=0$
12^e-13^e	2	2	reël of imaginair niet evenwijdig vlakkenpaar	$X^2+sY^2=0$
14^e	3	1	parabolische cylinder	$X^2+tZ=0$
15^e en 17^e	2	1	reël of imaginair evenwijdig vlakkenpaar	$X^2+t=0$
16^e	1	1	dubbelvlak	$X^2=0$
18^e	2	0	één eigenlijk en één oneigenlijk vlak	$XW=0$
19^e	1	0	oneigenlijk dubbelvlak	$W^2=0$

Wij merken nog op, dat dan en slechts dan als de rang van A kleiner is dan 4, onze quadriek dubbelpunten bezit en dat dan en slechts dan als die rang kleiner is dan 3, onze quadriek ontaard is in een vlakkenpaar, en dat dan en slechts dan als die rang gelijk is aan 1 de quadriek een dubbelvlak is, welke resultaten ook te vinden zijn uit het "aantal" dubbelpunten van f.

Opg. 20. Onderzoek elk der volgende oppervlakken: $xy = zw$; $xy + yz + zx=0$; $xy + xz + yz + x + y + z = 0$; $x^2- 2xy - 2xz + y^2- 2yz + z^2 = 0$; $2x^2+ 3xy - xz - 2y^2-5yz - 3z^2 = 60$.

Wij weten reeds, dat op een quadriek echte lijnen liggen, n.l. de snijlijnen van een quadriek met een willekeurige zijner raakvlakken. Immers zo'n raakvlak snijdt de quadriek volgens een kegelsnede met een dubbelpunt, dus volgens een lijnenpaar. Deze rechten behoeven niet reëel te zijn. De eenbladige hyperboloide en de hyperbolische paraboloide zijn echter de enige twee typen van quadrieken, waarbij A de rang 4 bezit, welke reële rechten bevatten. Beschouw n.l. een eenbladige hyperboloide, welk te schrijven is in de gedaante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wij schrijven deze in de gedaante

$$(\frac{x}{a} + \frac{z}{c})(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = (1 + \frac{y}{b})(1 - \frac{y}{b})$$

en merken op, dat een rechte

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda(1+\frac{y}{b}); \quad \lambda(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = 1 - \frac{y}{b} \qquad (\lambda \text{ willekeurig})$$

geheel op de hyperboloide ligt. De rechten van dit type, behorende bij verschillende waarden van λ, kruisen elkaar.

Opg. 21. Bewijs dat.

Er is echter nog een stelsel elkaar twee aan twee eveneens kruisende rechten, n.l. de rechten

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu(1 - \frac{y}{b}); \quad \mu(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = 1 + \frac{y}{b} \quad (\mu \text{ willekeurig}).$$

Een willekeurige rechte van het eerste stelsel snijdt echter een willekeurige rechte van het tweede stelsel, zodat het platte vlak hierdoor een raakvlak aan de hyperboloide is.

Opg. 22. Bewijs dit.

Opg. 23. Bewijs eenzelfde stel eigenschappen voor de hyperbolische paraboloide.

Beide typen oppervlakken worden regeloppervlakken genoemd, dat zijn oppervlakken , die opgebouwd gedacht kunnen worden uit rechte lijnen.
Door 3 elkaar kruisende rechten is steeds een regelvlak te brengen. Kies n.l. op elk dier rechten 3 punten. Door de zo gevonden 9 punten gaat, zoals wij reeds zagen zeker één quadriek, dat met elk dier rechten 3 punten gemeen heeft en deze dus bevat.

Een willekeurig vlak door één dier rechten snijdt die quadriek volgens een kegelsnede, die ontaard is omdat die rechte ervan deel uitmaakt. De andere rechte waarin die kegelsnede ontaard is, is de verbindingslijn van de snijpunten van het platte vlak en de 2 andere der 3 gegeven kruisende rechten. Die andere rechte behoort dan tot het tweede stelsel rechten van ons regeloppervlak, waarvan het eerste stelsel de 3 gegeven rechten bevat. Daar voorts iedere ontaarde kegelsnede een dubbelpunt bezit, is ieder vlak door een rechte, die op ons regeloppervlak ligt, raakvlak aan het regelvlak. De doorsnijding van raakvlak en regeloppervlak bestaat uit rechten van verschillende stelsels.

Tenslotte vermelden wij nog het begrip ombilicaalpunten. Bij de ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (met } a > b > c)$$

zijn een aantal door de oorsprong gaande vlakken te vinden, die de ellipsoide volgens een cirkel snijden.

Opg. 21. Bepaal die vlakken.

Opg. 22. Ieder vlak evenwijdig met die vlakken snijdt de ellipsoide ook volgens een cirkel.

Het raakpunt van de raakvlakken aan de ellipsoiden evenwijdig met elk der zo juist gevonden vlakken heet een ombilicaalpunt.

Het raakvlak in een ombilicaalpunt snijdt de quadriek volgens

§ 18. De rechte lijn.

Def. Een punt is een getallenpaar (a_1, a_2), waarbij a_1 en a_2 niet beide nul zijn. De getallen a_1 en a_2 heten verhoudingsgetallen van het punt.
Def. Twee getallenparen (a_1, a_2) en (b_1, b_2) stellen hetzelfde punt voor dan en slechts dan als $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, d.w.z. als de matrix van hun verhoudingsgetallen de rang 1 bezit.

Bij 2 verhoudingsgetallen behoort één en slechts één punt; bij een punt echter onbepaald veel stellen verhoudingsgetallen.

Twee punten zijn verschillend als de matrix hunner verhoudingsgetallen de rang 2 bezit.

Beschouw 2 verschillende punten $A(a_1,a_2)$ en $B(b_1,b_2)$. Dan zijn er getallen λ en μ te vinden, zodanig, dat voor een willekeurig punt $C(c_1,c_2)$ geldt

$$c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1; \quad c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \quad (\text{kortweg: } C = \lambda A + \mu B).$$

Immers de getallen λ en μ moeten worden bepaald uit een tweetal lineaire vergelijkingen, waarvan de coëfficiëntenmatrix de rang 2 bezit. Nu worden evenwel de getallen λ en μ bepaald door de 4 verhoudingsgetallen van A en B, maar niet door A en B zelf. Immers A verandert niet, als men de verhoudingsgetallen van A met een factor t vermenigvuldigt, maar daardoor verandert λ wel (wordt n.l. $\frac{1}{t}$ keer zo groot). Ook worden λ en μ wèl bepaald door de verhoudingsgetallen van C, maar niet door C zelf.

Zij nog een vierde punt $X(x_1,x_2)$ gegeven. Dan zijn er getallen ρ en σ te vinden, zodanig, dat

$$x_1 = \rho a_1 + \sigma b_1; \quad x_2 = \rho a_2 + \sigma b_2 \qquad (X = \rho A + \sigma B).$$

De grootheid $\frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu}$ heet de dubbelverhouding (ABCX) der vier punten A,B,X en C. Deze wordt wel bepaald door de punten A,B,X en C zelf, want vermenigvuldigt men de verhoudingsgetallen van A met t, dan wordt zowel λ als ρ door t gedeeld en blijft de dubbelverhouding dus dezelfde. Analoge beschouwingen gelden ten opzichte van B, C en X.

Opg. 1. Ga dat na.

Opg. 2. Bewijs dat de dubbelverhouding (ABCX) van de punten A,B,C en X gegeven wordt door $(ABCX) = \frac{(ac)(bx)}{(bc)(ax)}$ waarin $(ax) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ enz.

Opg. 3. Ga na wanneer een dubbelverhouding (ABXC) nul of oneindig kan zijn.

Opg. 4. Bewijs: (ABCX) = (BAXC) = (XCBA) = (CXAB).

Opg. 5. Bewijs, dat als geen tweetal der 4 punten A,B,C en X samenvalt (ABXC)(ABCX) = 1.

Opg. 6. Bewijs, dat als geen tweetal der 4 punten A,B,C en X samenvalt (ABCX) + (ACBX) = 1.

Uit opgave 4 blijkt, dat de dubbelverhouding van een willekeurige der 24 permutaties van de 4 punten A,B,C en X steeds terug te brengen is tot zo'n permutatie, waarbij A als eerste punt optreedt. Zij verder (ABCX) = d, dan is wegens de opgaven 5 en 6,

$$(ABXC) = \frac{1}{d}; \quad (ACBX) = 1 - d; \quad (ACXB) = \frac{1}{1-d}; \quad (AXBC) = 1 - \frac{1}{d};$$

$$(AXCB) = \frac{d}{d-1}.$$

Opg. 7. Ga na, dat 2 dezer 6 dubbelverhoudingen samenvallen

1e. Als $d = -1$, 2 of $\frac{1}{2}$. Is $d = -1$, dan noemt men de punten A,B,C en X harmonisch; men zegt ook wel, dat A,B en C,X elkaar harmonisch scheiden.

2e. als $d = \rho$ of ρ^2, waarbij ρ een complexe derdemachtswortel uit de eenheid is. In dat geval noemt men de punten A,B,C en X aequianharmonisch.

Opg. 8. Bewijs: (ABCD)(ABDE)=(ABCE).

Mede in verband met het feit, dat d de waarde ∞ zou kunnen aannemen, definiëren wij $(ABCX) = (d_1,d_2)$, waarbij d_1 en d_2 de coördinaten van X t.o.v. A,B en C worden genoemd en in het geval, dat (ABCX) de eindige waarde d bezit, geldt $d = \frac{d_1}{d_2}$. Is echter $d = \infty$ (d.w.z. A = C of B = X), dan definiëren wij $(ABCX) = (d_1,0)$, waarin d_1 willekeurig maar $\neq 0$ is.

Evenals de verhoudingsgetallen zijn dan ook de coördinaten bepaald, afgezien van een constante factor. De coördinaat $d = \frac{d_1}{d_2}$ van A t.o.v. A,B en C is gelijk aan ∞, die van B t.o.v. A,B en C is gelijk aan 0 en die van C is gelijk aan 1. Om deze reden noemt men wel A het oneindigheidspunt, B het nulpunt en C het eenheidspunt van het stelsel A,B,C.

Wij merken verder op, dat de coördinaat van een punt $X(x_1,x_2)$ t.o.v. het stelsel $\Omega(1,0)$, $O(0,1)$, $E(1,1)$ juist gelijk is aan $\frac{x_1}{x_2}$, zodat de verhoudingsgetallen te beschouwen zijn als coördinaten t.o.v. het stelsel Ω, O, E. Het heeft dus verder geen zin om over verhoudingsgetallen te spreken, daar men deze altijd kan beschouwen als coördinaten t.o.v. een passend gekozen stelsel. Het verband der coördinaten (x_1', x_2') van een punt X t.o.v. bovenbeschouwd stelsel A,B en C en (x_1,x_2) t.o.v. het stelsel Ω, O, E wordt wegens opgave 2 gegeven door

$$x_1' : x_2' = (ac)(bx) : (bc)(ax),$$

ofwel

$$\begin{cases} kx_1' = (ac)(bx) \\ kx_2' = (bc)(ax). \end{cases} \qquad (k \text{ willekeurig } \neq 0)$$

Dit is een verband van de gedaante

$$(1) \quad \begin{cases} kx_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ kx_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

waarin de determinant $a = |a_{ij}| = -(bc)(ac)(ab) \neq 0$ is als A,B en C verschillend gekozen worden. Hieruit volgt door oplossen

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{a}{k}\, x_1 = a_{22}x_1' - a_{12}x_2' \\ \frac{a}{k}\, x_2 = -a_{21}x_1' + a_{11}x_2'. \end{cases}$$

De transformatie (1) en haar inverse (2) zijn homogene lineaire transformaties van (x_1, x_2) naar (x_1', x_2') of omgekeerd. Kies nu 3 andere twee aan twee verschillende punten A,B en C, die tot verhoudingsgetallen (of coördinaten t.o.v. Ω, O en E) bezitten $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$, $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$. e coördinaten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ van X t.o.v. het stelsel $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ voldoen dan volgens (1) aan

$$\begin{cases} k\bar{x}_1 = (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}x) \\ k\bar{x}_2 = (\bar{b}\bar{c})(\bar{a}x) \end{cases} \quad \text{ofwel} \quad \begin{cases} k\bar{x}_1 = \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 \\ k\bar{x}_2 = \bar{a}_{21}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 \end{cases}$$

zodat na gebruik maken van (2) blijkt, dat ook de coördinaten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ homogeen en lineair in x_1' en x_2' worden uitgedrukt. De coëfficiëntendeterminant van deze transformatie is, zoals men gemakkelijk inziet, gelijk aan het product

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & +a_{11} \end{vmatrix} = \bar{a}.a\frac{k^2}{a^2} \neq 0 .$$

Het verband der coördinaten van eenzelfde punt t.o.v. twee willekeurige grondstelsels A,B,C en $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ wordt dus gegeven door een homogene lineaire transformatie met van nul verschillende coëfficiëntendeterminant.

Omgekeerd als (x_1, x_2) coördinaten zijn van een punt X t.o.v. een stelsel A,B,C en als men heeft

$$(3) \quad \begin{cases} kx_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2', \\ kx_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' \end{cases}$$

dan zijn x_1' en x_2' coördinaten van hetzelfde punt X t.o.v. een stelsel A',B',C', waarbij de oude coördinaten van A' zijn (a_{11}, a_{21}), die van B' zijn (a_{12}, a_{22}) en die van C' zijn $(a_{11}+ a_{12}, a_{21}+ a_{22})$.

Wij merken thans op, dat de dubbelverhouding van 4 punten P,Q,R en S onafhankelijk is van het grondstelsel, waarop de coördinaten van P,Q, R en S zijn betrokken. Is n.l. $P = (p_1, p_2)$, ..., $S = (s_1, s_2)$ in een of ander stelsel ABC, dan is die dubbelverhouding gelijk aan

$(PQRS) = \frac{(pr)(qs)}{(qr)(ps)}$. Pas nu een transformatie toe van stelsel A'B'C', waarin P de coördinaten (p_1', p_2') bezit enz. Het verband der coördinaten wordt dan gegeven door de formules (3), waaruit volgt

$$k^2(qr') = \begin{vmatrix} a_{11}q_1' + a_{12}q_2' & a_{11}r_1' + a_{12}r_2' \\ a_{21}q_1' + a_{22}q_2' & a_{21}r_1' + a_{22}r_2' \end{vmatrix} = a(q'r');$$

dus vindt men voor de dubbelverhouding in het nieuwe stelsel

$$\frac{(q'r')(p's')}{(p'r')(q's')} = \frac{(qr)(ps)}{(pr)(qs)} .$$

Men kan aan de formules (3) ook een geheel andere interpretatie geven, en wel door op te merken, dat, als men het stelsel ABC vast houdt, hierdoor aan een punt X met coördinaten (x_1, x_2) t.o.v. ABC een punt X' met coördinaten (x_1', x_2') t.o.v. hetzelfde stelsel ABC wordt toegevoegd en omgekeerd.

De formules (3), welke men de meest algemene projectieve transformatie noemt, zijn dan geen coördinatentransformaties, maar punttransformaties. Het is duidelijk dat 4 punten door de transformatie (3) overgaan in 4 punten met dezelfde dubbelverhouding. Omgekeerd, als van 3 punten A,B en C gegeven is dat zij door een transformatie van het type (3) in 3 willekeurige punten A',B' en C' overgaan, is hierdoor die transformatie (3) bepaald. Men mag aannemen dat het coördinatenstelsel zo bepaald is, dat men heeft $A'(1,0)$, $B'(0,1)$, $C'(1,1)$. Zij $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, dan worden de in (3) optredende coëfficiënten, zoals men direct door substitutie inziet, gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} a_1(bc) & b_1(ca) \\ a_2(bc) & b_2(ca) \end{pmatrix}$$

waarvan de determinant $(ab)(bc)(ca) \neq 0$ is, omdat de drie punten A,B en C verschillend zijn. Het is verder duidelijk dat het verband tussen de beide puntendrietallen, ook in het geval dat A',B' en C' niet de grondpunten van het coördinatenstelsel zijn, ook door een stel formules van het type (3) gegeven wordt, want de coördinatentransformatie die A',B',C' tot grondpunten maakt en na afloop degene, die A',B',C' weer hun oorspronkelijke coördinaten geeft (de inverse der vorige dus) veranderen weliswaar de coëfficiënten van de betrekkingen (3), maar behouden het lineair karakter.

Wij kunnen de gevonden resultaten in matrixnotatie iets eenvoudiger schrijven. Schrijven wij de algemene punt- of coördinatentransformatie in de gedaante

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 \\ x_2 &= a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 \end{aligned}$$

en noemen wij

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix},$$

dan hebben wij $X=A\bar{X}$. Gesteld eens dat wij nog eens een transformatie $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ toepassen, waardoor het punt met de coördinaten $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ overgaat in $(\bar{\bar{x}}_1,\bar{\bar{x}}_2)$, dan vinden wij $\bar{X}=B\bar{\bar{X}}$, dus $X = A\bar{X} = AB\bar{\bar{X}}$, zodat wij een transformatie van het type $X = C\bar{\bar{X}}$ vinden, waarbij $C=AB$. Uit de determinantentheorie weten wij tevens dat $|C|=|A||B|$, In het geval dat $X = \bar{\bar{X}}$ is $C = I$, waarin I de eenheidsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ voorstelt. In dat geval is $AB = I$, dus $B = A^{-1}$, zodat uit $X = A\bar{X}$ volgt $\bar{X} = A^{-1}X$, wat men ook kan vinden door beide leden der oorspronkelijke relatie met A^{-1} te vermenigvuldigen.

Is een transformatie A gegeven dan is door volledige inductie voor iedere natuurlijke n elk der transformaties A^n en $A^{-n}=(A^{-1})^n$ te definiëren.

Opg. 9. Bepaal A zo, dat $A^2=I$.

Als in een of ander stelsel een transformatie $X = AY$ wordt en men de coördinaten transformeert met een transformatie B, dus $X = B\overline{X}$, $Y = B\overline{Y}$, heeft men voor het verband tussen $\overline{X}$ en $\overline{Y}$

$$\overline{X} = B^{-1}X = B^{-1}AY = B^{-1}AB\overline{Y},$$

dus als men hiervoor schrijft $\overline{X} = \overline{A}\overline{Y}$, waarbij $\overline{A}$ de transformatie aangeeft die het verband tussen $\overline{X}$ en $\overline{Y}$ vastlegt, $\overline{A} = B^{-1}AB$. Deze laatste formule laat ons zien hoe de transformatie A door de transformatie B wordt getransformeerd. Uit de laatste relatie volgt nog $B\overline{A} = AB$, dus $A = B\overline{A}B^{-1}$, welk resultaat ook direct in te zien is.

Wij vragen ons vervolgens af of er punten zijn die door een transformatie ongewijzigd blijven. Dit treedt op bij de transformatie $X = A\overline{X}$ als X en $\overline{X}$ hetzelfde punt aangeven dus als $x_1 : \overline{x}_1 = x_2 : \overline{x}_2$. Noemt men deze verhouding λ, dan moet het getal λ zo bepaald kunnen worden dat

$$(4)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 = 0 \\ a_{21}\overline{x}_1 + (a_{22}-\lambda)\overline{x}_2 = 0, \end{cases}$$

wat voor $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \neq (0,0)$ slechts kan als $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Heeft men λ bepaald uit deze vergelijking, die men ook in de gedaante $|A - \lambda I| = 0$ kan schrijven (wat men ook inziet uit $X = A\overline{X} = \lambda\overline{X}$, dus $(A - \lambda I)\overline{X} = 0$), dan vindt men de coördinaten van het invariante punt door voor de gevonden het stelsel (4) op te lossen. Bij een bepaalde λ vindt men dan steeds één punt tenzij $a_{12} = a_{21} = 0$, $\lambda = a_{11} = a_{22}$, maar dan is $A = a_{11}I$ zodat ieder punt invariant is. Is A geen veelvoud van I dan bezit de gevonden vergelijking voor λ

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

twee reële verschillende, twee samenvallende of twee toegevoegd complexe wortels alnaar de discriminant

$$(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \gtreqless 0$$

is. In deze gevallen noemt men de transformatie hyperbolisch, parabolisch resp. elliptisch.

Opg. 10. Bepaal het type en de invariante punten der transformatie, bepaald door elk der matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opg. 11. Laat zien dat als men de twee invariante punten tot grondpunten (1,0) en (0,1) van het coördinatenstelsel neemt, de hyperbolische transformatie de gedaante $x = c\overline{x}$ aanneemt waarbij

$$x = \frac{x_1}{x_2}\ ;\quad \overline{x} = \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_2}$$

genomen is.

Opg. 12. Laat zien dat als men bij een parabolische transformatie het punt (1,0) als invariant punt neemt, deze de gedaante $x = \overline{x} + c$ aanneemt.

Opg. 13. Laat zien dat als men bij een elliptische transformatie de punten $(i,1)$ en $(-i,1)$ als invariante punten neemt, deze de gedaante

$$x = \frac{\overline{x} + c}{1 - \overline{x}c}$$

aanneemt.

In de 3 beschouwde gevallen vindt men dus voor de standaardvormen $\log x = \log \overline{x} + \log c$, $x = \overline{x} + c$, resp. $\mathrm{bgtg}\, x = \mathrm{bgtg}\, \overline{x} + \mathrm{bgtg}\, c$.

Definitie. Men noemt een stel punten $P_1, P_2, \ldots$ projectief verwant met een stel punten $P_1', P_2', \ldots$, als er een transformatie van het type (3) bestaat die P_i in P_i' overvoert ($i = 1, 2, \ldots$). Twee projectieve puntenviertallen hebben dezelfde dubbelverhouding, en omgekeerd zijn twee puntenviertallen met dezelfde dubbelverhouding projectief, want als A, B, C, en D overgaan in A',B',C' en D' en als een transformatie van het type (3) de punten A, B, C overvoert resp. in A',B' en C', dan voert deze D over in een punt D" met (ABCD) = (A'B'C'D"), dus wegens (ABCD) = (A'B'C'D') heeft men dan (A'B'C'D') = (A'B'C'D"), waaruit volgt D' = D", zodat de gevonden transformatie D in D' overvoert.

Opg. 14. Wij vonden in opgave 4 o.a. (ABCD) = (BADC), Bepaal de transformatie die A,B,C en D overvoert in B,A,D,C. Men neme $A = (a_1, a_2)$ enz.

Opg. 15. Laat I en J twee gegeven punten zijn en c een gegeven constante. Bewijs, dat de transformatie, die een willekeurig punt A in een punt A' overvoert zodanig dat (IJAA') = c, een projectiviteit is. Bepaal de transformatiematrix in het geval I = (1,0); J = (0,1).

Als bij een projectieve transformatie een puntenpaar A,B verwisseld wordt, is dit met elk paar het geval. Laat n.l. een punt C overgaan in D en D in E, dan heeft men

(ABDC) = (BAED) = (ABDE),

dus C = E, zodat D inderdaad in C overgaat. Elk ander puntenpaar wordt door de transformatie dus ook verwisseld.

Een transformatie als de bovenstaande, die de eigenschap heeft dat zij gelijk is aan haar inverse heet involutorisch. Uit het bovenstaande blijkt dat een projectieve transformatie involutorisch is, zodra zij een paar elementen verwisselt.

Zijn verder I en J de twee verschillende elementen van een involutorische transformatie dan heeft men voor een willekeurig paar A,A' de relatie (IJAA') = (IJA'A), dus in verband met opgave 5 $(IJAA')^2 = 1$, dus $(IJAA') = \pm 1$. De waarde +1 is uitgesloten, want wij mogen onderstellen, dat geen tweetal der 4 punten samenvalt.

Opg. 16. Ga dat na.

Dus (IJAA') = -1, zodat elk puntenpaar harmonisch ligt met de dubbelpunten I en J.

Men noemt de verzameling der verwisselbare paren van een involutorische projectieve transformatie een involutie. Alle paren die tot een involutie behoren liggen dus harmonisch met 2 punten, die de dubbelpunten der involutorische projectiviteit zijn, die de involutie definieert.

Beschouw omgekeerd alle puntenparen A,A' die harmonisch zijn met twee punten I en J, Voor elk paar A,A' heeft men dan (IJAA') = (IJA'A) = -1, zodat in verband met opgave 15 waarin men c = -1 neme, de punten A en A' projectief verwant zijn. Omdat de projectiviteit niet alleen A in A', maar ook A' in A overvoert, is zij involutorisch.

Er bestaan geen involutorische parabolische projectieve transformaties. Zij nl. (1,0) het enige invariante punt van zo'n transformatie, dan wordt deze door een matrix van de gedaante $\begin{pmatrix} a & b \\ o & a \end{pmatrix}$ gegeven. Het quadraat dezer matrix is evenwel $\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ en dit is slechts gelijk aan I als $a = \pm 1$, $b = 0$, maar dan wordt onze transformatie de identische.

Zijn de dubbelpunten van een involutie reëel, dan spreken wij van een hyperbolische involutie; zijn ze toegevoegd complex, dan van een elliptische involutie.

Opg. 17. Bepaal de algemene gedaante der transformatiematrix behorende bij de hyperbolische involutie met dubbelpunten (1,0) en (0,1). (Verg. opg. 9)

Opg. 18. Hetzelfde voor de elliptische involutie met dubbelpunten (1,i) en (1,-i) (Verg. opg. 9).

Opg. 19. Hetzelfde voor de hyperbolische involutie met dubbelpunten (1,1) en (-1,1).

Stellen wij wederom $\frac{x_1}{x_2} = x$ dan bezit een hyperbolische involutie de standaardvorm $xx' = c$, waarbij $c \gtrless 0$ alnaar de involutie hyperbolisch of elliptisch is. De meest algemene gedaante van een involutie vinden wij uit die van de meest algemene perspectiviteit $x = \frac{ax'+b}{cx'+d}$ of $cxx'+dx-ax'-b=0$. Van deze laatste bilineaire betrekking eisen wij nl. dat zij bij verwisseling van x en x' dezelfde blijft, dus symmetrisch is in x en x', hetgeen leidt tot $a = -d$. Wij vinden dan dus

$$x = \frac{ax'+b}{cx'-a} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x_1 = ax_1'+bx_2' \\ x_2 = cx_1'-ax_2' \end{cases}$$

De paren X,X' ener involutie kan men vastleggen door hun coördinaten (x_1,x_2) en (x_1',x_2') of ook door de vierkantsvergelijking waaraan $\frac{x_1}{x_2}$ en $\frac{x_1'}{x_2'}$ voldoen. Beschouwen wij een involutie met dubbelpunten (1,0) en (0,1) dan voldoet het paar X,X' aan $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1'}{x_2'} = c$, of $xx' = c$, zodat de bewuste vierkantsvergelijking de eigenschap heeft dat haar wortels een constant product hebben. Deze luidt dus $mx^2+nx+cm=0$ of $m(x^2+c)+n.x=0$, of niet homogeen $m(x_1^2+cx_2^2)+n.x_1x_2=0$. Daar elk der vierkantsvergelijkingen $x_1^2+cx_2^2=0$ en $x_1x_2=0$ een puntenpaar voorstelt, is een involutie dus op te vatten als een bundel puntenparen. Omgekeerd, als men een willekeurige bundel puntenparen bepaal door

$$m(ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2) + n(dx_1^2+2ex_1x_2+fx_2^2) = 0$$

beschouwt, geldt voor de nulpunten $X(x_1,x_2)$ en $X'(x_1',x_2')$ van dit paar

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{-2mb-2ne}{ma+nd} \; ; \quad \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{mc+nf}{ma+nd} \, ,$$

dus

$$\begin{cases} \rho\,(x_1x_2'+x_2x_1') = -2mb-2ne \\ \rho\; x_1x_1' = mc + nf \\ \rho\; x_2x_2' = ma + nd, \end{cases}$$

dus

$$\begin{vmatrix} x_1x_2'+x_2x_1' & -2b & -2e \\ x_1x_1' & c & f \\ x_2x_2' & a & d \end{vmatrix} = 0\,,$$

hetgeen een bilineair involutorisch verband tussen de punten X en X' aangeeft, dus een involutie.

Aan gezien een projectiviteit bepaald is door 3 paar aan elkaar toegevoegde punten, is dat bij een involutie door 2 paar het geval. Zijn gegeven twee puntenparen A,A' en B,B', dan is de involutie die A en A' en ook B en B' als paren bevat vastgelegd, dus ook de dubbelpunten daarvan, zodat bij twee gegeven puntenparen één en slechts één puntenpaar te vinden is, dat harmonisch is met beide.

Zijn de puntenparen gegeven door de vergelijkingen

(5) $\qquad a_ix_1^2+2b_ix_1x_2+c_ix_2^2=0 \qquad (i = 1,2),$

dan is de hierdoor bepaalde involutie

$$m(a_1x_1^2+2b_1x_1x_2+c_1x_2^2) + n(a_2x_1^2+2b_2x_1x_2+c_2x_2^2) = 0$$

en dubbelpunten hiervan behoren bij die waarden van m en n waarvoor de discriminant dezer vergelijking

(6) $\qquad (mb_1+nb_2)^2 - (ma_1+na_2)(mc_1+nc_2) = 0$

is. Voor dergelijke waarden van m en n geldt voor een dubbelpunt (x_1,x_2) de relatie $\quad x_1:x_2 = -(mb_1+nb_2):(ma_1+na_2)$ waaruit volgt

$$m:n = -(b_2x_2+a_2x_1):(a_1x_1+b_1x_2),$$

waarna men na substitutie in (6) vindt

$$(ab)x_1^2+(ca)x_1x_2+(bc)x_2^2 = 0.$$

Opg. 17. Als de wortels der vierkantsvergelijkingen

$$ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2 = 0 \qquad \text{en} \qquad Ax_1^2+2Bx_1x_2+Cx_2^2 = 0$$

harmonisch liggen, toon dan aan $\quad aC+Ac-2bB = 0.$

Opg. 18. Bepaal met behulp van het resultaat van de vorige opgave opnieuw de vergelijking van het gemeenschappelijk harmonisch puntenpaar van (5).

Opg. 19. Toon aan dat als de dubbelverhouding van de puntenparen (5) negatief is, dit ook het geval is met de uitdrukking $(ac)^2+4(bc)(ba)$, zodat in dit gevan die paren een niet reëel gemeenschappelijk paar bezitten en dus tot een elliptische involutie behoren. Is genoemde dubbelverhouding positief, dan is die involutie hyperbolisch.

Opg. 20. Bij drie punten A,B en C bepaalt men de punten A',B' en C' zodanig dat A'A en BC, B'B en CA, C'C en AB harmonisch zijn. Bewijs dat ook A'A en B'C', B'B en C'A', C'C en A'B' harmonisch zijn.

Bij onze tot dusverre gegeven beschouwingen over de projectieve rechte spelen alle punten eenzelfde rol. Dit wordt anders, indien wij één der punten een uitzonderingsrol laten spelen, en oneigenlijk gaan noemen. Laat dat in zeker coördinatenstelsel het punt (1,0) zijn. Aangezien door een coördinatentransformatie ieder punt de coördinaten (1,0) kan krijgen, is het volmaakt onverschillig welk punt men als oneigenlijk gaat beschouwen. Wij onderstellen echter, dat men een keuze gedaan heeft. De volgende beschouwingen gelden dus slechts met een of ander bij voorbaat uitgekozen punt als oneigenlijk punt en in een of ander coördinatenstelsel, waarin dit punt de coördinaten (1,0) bezit. Voor ieder ander (eigenlijk) punt (x_1, x_2) is dan het getal $x = \frac{x_1}{x_2}$ een eindig getal. Zij Ω het oneigenlijke punt. Dan is $(AB\Omega X)=\frac{x-a}{x-b}$, zoals onmiddellijk uit Opg. 2 volgt. De dubbelverhouding gaat hier over in een enkelvoudige verhouding. Is $(AB\Omega X) = -1$, dan noemt men X het midden van AB. Men heeft dan $x = \frac{a+b}{2}$.

Verder voert men voor reële punten nog in het begrip afstand. De afstand van twee punten X en Y is bij definitie gelijk aan $XY = |x-y|$. Is $(AB\Omega X) = k$ (k reëel), dan is $x = \frac{ak-b}{1-k}$, dus $\frac{AX}{BX} = \frac{|ka-kb|}{|a-b|} = |k|$. De dubbel- of enkelvoudige verhouding geeft in dit geval dus aan de deelverhouding der afstanden waarin het punt X het lijnstuk AB verdeelt. In het byzonder blijkt het midden van een lijnstuk dus evenver van de uiteinden verwijderd te liggen.

Wij beschouwen verder nog projectieve transformaties die het oneigenlijke punt op zijn plaats laten. Deze zijn van de gedaante

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' \\ x_2 = \phantom{a_{11}x_1' + {}} a_{22}x_2' \end{cases} \qquad \text{of} \qquad x = ax'+b,$$

waarin $a = \frac{a_{11}}{a_{22}}$ en $b = \frac{a_{12}}{a_{22}}$ eindige getallen zijn omdat $a_{22} \neq 0$ is. Is $a = 1$ dan heet zo'n transformatie een verschuiving. Deze is op te vatten als een parabolische transformatie met het oneigenlijke punt als invariant punt. Is $b=0$, dan hebben wij te doen met een dilatatie. Alle afstanden worden $|a|$ maal zo groot.

Opg. 21. Bewijs dit.

De transformatie is dan hyperbolisch en bezit als invariante punten het punt O en het oneigenlijke punt (mits $a \neq 1$).

Opg. 22. Bewijs dat ook als $b \neq 0$ de transformatie hyperbolisch is. Bepaal haar eigenlijke invariante punt.

Opg. 23. Laat zien dat de transformatie dan en slechts dan involutorisch is als $a=1$ en bepaal ook in dit geval haar eigenlijke invariante punt.

Opgave 24. Als de eigenlijke puntenparen AB en CD harmonisch liggen en als O het midden is van AB, bewijs dan voor de afstanden dier punten de relatie $OA^2 = OB^2 = OC.OD$.

Opgave 25. Zijn 2 willekeurige puntenparen AB en CD gegeven, bewijs dan dat hun gemeenschappelijk harmonisch paar als volgt te vinden is:

Teken een willekeurige cirkel door A en B en een andere, die de eerste snijdt, door C en D. De gemeenschappelijke koorde dier cirkels snijde de rechte ABCD in O. Dan ligt het gezochte paar ST zo op ABCD dat SO = TO = lengte raaklijn uit O aan eén dier cirkels.

Wij zagen reeds dat een puntenpaar bepaald wordt door een homogene quadratische vergelijking

$$f(x) = f(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

De beide punten vallen samen als de determinant

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

is, waarin $a_{21} = a_{12}$ genomen is.

Men noemt 2 punten P en Q poolverwant t.o.v. $f(x)$ als

$\sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$, dus als

$$f(p;q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + a_{22}p_2q_2 = 0 \tag{7}$$

is. Men ziet dat dan ook geldt

$$\sum_{i=1}^{2} q_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0,$$

dus de poolverwantschap is een symmetrische relatie.

Omdat (7) een homogene bilineaire verwantschap is tussen (p_1,p_2) en (q_1,q_2) is het verband tussen P en Q bij vaste f een projectiviteit. Daar (7) symmetrisch is in (p_1,p_2) en (q_1,q_2) is die projectiviteit een involutie. De dubbelpunten ervan voldoen aan

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

en zijn dus juist de door f bepaalde punten F_1 en F_2. Bij gevolg liggen deze harmonisch met P en Q. Vallen de punten F_1 en F_2 samen en kiest men P willekeurig, dan is $Q = F_1$. Kiest men omgekeerd in dat geval $P = F_1$, dan is Q onbepaald.

Wij formuleren nog het resultaat van pag. 145 over een gemeenschappelijk harmonisch paar van twee gegeven puntenparen, iets anders door te zeggen dat bij twee quadratische vormen een puntenpaar bestaat dat poolverwant is t.o.v. beide vormen.

Tenslotte geven wij de vorm $f(p;q)$ nog aan in matrix notatie. Men vindt hiervoor, als wij weer

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad P = \binom{p_1}{p_2}, \quad Q = \binom{q_1}{q_2}$$

stellen, de waarde $f(p;q) = Q'AP$, waarin Q' de gespiegelde matrix is van Q.

Bij gevolg is $f(x) = X'AX$. Dat uitdrukking $f(p;q)$ onveranderd blijft bij verwisseling van P en Q blijkt uit het feit dat deze quadratische matrix van de orde 1 uitteraard gelijk is aan zijn gespiegelde, dus

$$Q'AP = (Q'AP)' = P'A'(Q')' = P'AQ ,$$

omdat de matrix A symmetrisch en dus $A' = A$ is.

§ 19. Het platte vlak.

Een punt is een stel van 3 verhoudingsgetallen, die niet alle nul zijn. Twee stellen verhoudingsgetallen stellen dan en slechts dan hetzelfde punt voor, als zij evenredig zijn. Men schrijft kortweg $A(a_1,a_2,a_3)$, waarbij het de bedoeling is, dat a_1,a_2,a_3 de verhoudingsgetallen van het punt A zijn.

Met $C = A + B$ bedoelen wij weer, dat deze relatie voor elk der verhoudingsgetallen geldt, dus $c_i = a_i + b_i$ $(i = 1,2,3)$; in dit geval heet C lineair afhankelijk van A en B. De matrix der verhoudingsgetallen van A, B en C heeft dan de rang 2. Een analoge betekenis heeft de schrijfwijze $D = \lambda A + \mu B + \nu C$.

Indien A, B en C drie willekeurige verschillende punten zijn, zodanig dat hun verhoudingsgetallen een matrix van de rang 3 vormen (de punten lineair onafhankelijk zijn), dan is voor een willekeurig punt D de schrijfwijze $D = \lambda A + \mu B + \nu C$ mogelijk. Men neme nl. $\lambda = \frac{(dbc)}{(abc)}$, $\mu = \frac{(adc)}{(abc)}$; $\nu = \frac{(abd)}{(abc)}$. Deze uitdrukkingen bestaan allen omdat $(abc) \neq 0$. Indien voorts D lineair onafhankelijk is, zowel van A en B, als van B en C als ook van C en A, dan is noch λ, noch μ, noch ν gelijk aan nul.

De getallen λ, μ en ν worden niet volledig bepaald door de punten A,B,C en D; zij zijn pas bepaald als gegeven is welke keuze voor de verhoudingsgetallen dier punten is gedaan.

Zij bij bovenstaande keuze van A,B,C en D en van hun verhoudingsgetallen nog een punt $X(x_1,x_2,x_3)$ gegeven. Dan bestaan er, analoog aan het voorafgaande, getallen ρ, σ, τ zodanig dat $X = \rho A + \sigma B + \tau C$. Men noemt de verhoudingen $X_1 = \frac{\rho}{\lambda}$, $X_2 = \frac{\sigma}{\mu}$, $X_3 = \frac{\tau}{\nu}$ de coördinaten van X t.a.v. het coördinatenstelsel ABCD. Men heeft

$$X_1 = \frac{(xbc)}{(dbc)};\ X_2 = \frac{(axc)}{(adc)};\ X_3 = \frac{(abx)}{(abd)}.$$

De verhoudingen der coördinaten zijn onafhankelijk daarvan welke keuze men doet voor de verhoudingsgetallen der punten A,B,C en X.

Het verband tussen de verhoudingsgetallen en de coördinaten is dus gegeven door formules van de gedaante

$$(1)\begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ X_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

of korter geschreven

(1) $\quad X_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,2,3).$

Dit verband (1) is homogeen en lineair in de verhoudingsgetallen en de coëfficiëntenmatrix bezit de rang 3, want de coëfficiëntendeterminant

$$a = |a_{ij}| = \frac{1}{(dbc)(adc)(abd)}\begin{vmatrix}(bc)_{23} & (bc)_{31} & (bc)_{12}\\ (ca)_{23} & (ca)_{31} & (ca)_{12}\\ (ab)_{23} & (ab)_{31} & (ab)_{12}\end{vmatrix} = \frac{(abc)^2}{(dbc)(adc)(abd)}$$

(verg. blz 42 bovenste regel) is niet nul.

Opg. 1. Bepaal de coördinaten van A, van B, van C en van D t.o.v. het coördinatenstelsel ABCD.

Allereerst merken wij nu op, dat de coördinaten van het punt $X(x_1,x_2,x_3)$ t.o.v. het coördinatenstelsel $X_1(1,0,0)$, $X_2(0,1,0)$, $X_3(0,0,1)$, $X_4(1,1,1)$ juist gelijk zijn aan x_1, x_2, x_3, want men heeft in dit geval $\lambda = \mu = \nu = 1$; $\rho = x_1$, $\sigma = x_2$, $\tau = x_3$. Het heeft dus geen zin om verder onderscheid te maken tussen coördinaten en verhoudingsgetallen. De laatste zijn coördinaten t.o.v. een speciaal gekozen coördinatenstelsel.

De betrekkingen (1) geven dus het verband der coördinaten van eenzelfde punt t.o.v. de twee stelsels ABCD en $X_1X_2X_3X_4$.

Indien men uit (1) de grootheden x_1, x_2 en x_3 oplost, wat mogelijk is wegens $a \neq 0$, vindt men de inverse transformatie

(2) $\quad x_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{A_{ji}}{a} X_j \qquad (i = 1,2,3),$

waarin A_{rs} de minor is van a_{rs} in de matrix (a_{ij}).

Indien eenzelfde punt t.o.v. een grondstelsel A'B'C'D' de coördinaten (x_1', x_2', x_3') bezit, is het verband tussen de coördinaten (x_1',x_2',x_3') en de oorspronkelijke coördinaten (x_1,x_2,x_3) wegens (1) gegeven door

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}'x_j \qquad (i = 1,2,3),$$

waarin de coëfficiënten a_{ij}' net zo van A',B',C' en D' afhangen als a_{ij} van A,B,C en D. Bij gevolg heeft men wegens (2)

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ij}' \frac{A_{kj}}{a} X_k \qquad (i = 1,2,3),$$

zodat het verband tussen de coördinaten van eenzelfde punt t.o.v. twee willekeurige coördinatenstelsels ook gegeven wordt door een homogene lineaire transformatie. Omdat zowel de determinant $a = |a_{ij}|$ als de determinant $a' = |a_{ij}'| \neq 0$ is, is dat ook het geval met de determinant $|b_{ik}|$, waarbij $b_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}' \frac{A_{kj}}{a}$, want deze is gelijk aan $a' \frac{a^2}{a^3} = \frac{a'}{a} \neq 0$.

Wij beschouwen de homogene lineaire transformaties eens nader.
Zij

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x'_j; \quad x'_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ij}x''_j \qquad (i = 1,2,3)$$

dan heeft men

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ij}b_{jk}x''_k \text{ of } x_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik}x''_k \qquad (i = 1,2,3)$$

waarin $c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk}$. Derhalve volgens het producttheorema van matrices geldt voor de matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ juist de relatie $C = AB$, welke relatie men direct vindt door nog in te voeren de matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}; \quad X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix},$$

waarna men vindt

$$X = AX'; \; X' = BX''; \text{ dus } X = A(BX'') = ABX'' = CX'',$$

waarbij $C = AB$.

Als $X = AX'$ is $A^{-1}X = X'$, waarbij A^{-1} de inverse matrix is van de matrix A; verg. formule (2). Men heeft verder $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, waarbij I de eenheidsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ is.

Uit het bovenstaande volgt, dat de homogene lineaire transformaties, waarvan de determinant $\neq 0$ is, een groep vormen. Deze groep is niet commutatief, zoals door een eenvoudig voorbeeld aan te tonen is.

Indien de twee grondstelsels ABCD en A'B'C'D' gegeven zijn, was, zoals wij hierboven zagen, de transformatiematrix vastgelegd. Is omgekeerd de transformatiematrix (a_{ij}) met $|a_{ij}| \neq 0$ gegeven, dan geeft de transformatie $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x'_j$ $(i = 1,2,3)$ het verband aan van de coördinaten van eenzelfde punt X t.o.v. twee stelsels A,B,C,D en A',B',C',D', waarbij de punten A',B',C',D' onmiddellijk te bepalen zijn door hun coördinaten t.o.v. A,B,C,D, want de nieuwe coördinaten van A' zijn $(1,0,0)$, dus de oude coördinaten van A' zijn (a_{11}, a_{21}, a_{31}); analoog voor B' en C' terwijl men voor de oude coördinaten van D' vindt $(a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33})$.

Zijn van 4 punten P,Q,R en S, waarvan de coördinatenmatrix de rang 3 bezit, de oude en nieuwe coördinaten bekend, dan is daardoor de transformatiematrix eveneens bepaald.

Wij hebben dus het verband tussen de coördinaten van een punt t.o.v. de twee grondstelsels $X_1X_2X_3X_4$ en $X'_1X'_2X'_3X'_4$ op te sporen. Neem verder PQRS als derde coördinatenstelsel en duidt de coördinaten in dit stelsel aan met (x''_1, x''_2, x''_3). In dit stelsel heeft men $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$

$R(0,0,1)$, $S(1,1,1)$.

Dus

$$(pqr)x_1 = x''_1 p_1(sqr) + x''_2 q_1(psr) + x''_3 r_1(pqs)$$
$$(pqr)x_2 = x''_1 p_2(sqr) + x''_2 q_2(psr) + x''_3 r_2(pqs)$$
$$(pqr)x_3 = x''_1 p_3(sqr) + x''_3 q_3(psr) + x''_3 r_3(pqs)$$

en evenzo

$$(pqr)x'_1 = x''_1 p'_1(s'q'r') + x''_2 q'_1(p's'r') + x''_3 r'_1(p'q's')$$

waaruit het gewenste verband tussen (x_1,x_2,x_3) en (x'_1,x'_2,x'_3) na eliminatie van x''_1, x''_2 en x''_3, d.w.z. na oplossen van deze grootheden b.v. uit het eerste drietal vergelijkingen (wat kan omdat (pqr) enz.$\neq 0$ is) en invullen in het tweede stel gevonden wordt. Daar bij de overgang van coördinaten x_1 enz. naar x''_1 enz. en ook bij die van x'_1 enz. naar x''_1 enz. de coëfficiëntendeterminant niet nul is, is dat ook niet het geval bij de overgang van x_1 enz. naar x'_1 enz., waarmee de bewering bewezen is.

De formules $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x'_j \qquad (i = 1,2,3)$

gaven het verband der coördinaten van eenzelfde punt t.o.v. twee verschillende coördinatenstelsels. Zij laten echter ook een andere interpretatie toe, waarbij zij het verband geven in eenzelfde coördinatenstelsel tussen twee verschillende punten $X(x_1,x_2,x_3)$ en $X'(x'_1,x'_2,x'_3)$. Men zegt in dit geval, dat X door een projectieve transformatie overgaat in een punt X'. Op grond van het bovenstaande is een projectieve transformatie bepaald, hetzij door haar transformatiematrix (mits die de rang 3 bezitte), hetzij door van 4 punten P,Q,R en S (mits elk drietal een coördinatenmatrix van de rang 3 bezit) ook de getransformeerde 4 punten P',Q',R' en S' te geven, waarin zij na de transformatie overgaan.

Indien de coördinatenmatrix van 3 verschillende punten A,B en C de rang 2 bezit, is het niet mogelijk om een willekeurig punt D in de gedaante $D = \lambda A + \mu B + \nu C$ te brengen. Men heeft in dat geval echter wel $C = \rho A + \sigma B$ (nl. $\rho = \frac{(cb)}{(ab)}$; $\sigma = \frac{(ac)}{(ab)}$). Het schrijven van een punt D in bovengenoemde gedaante komt er dus op neer, dat men heeft $D = \lambda A + \mu B + \nu\rho A + \nu\sigma B = (\lambda + \nu\rho)A + (\mu + \nu\sigma)B$.

Def. Indien A en B twee verschillende punten zijn, dan heet de verzameling der punten X met $X = \rho A + \sigma B$ (ρ,σ variabel) een rechte.

Deze rechte AB is dus bepaald door haar twee punten A en B (A en B liggen op deze rechte).

De rechte is ook te bepalen door 2 andere harer punten P en Q want, als P en Q op de rechte liggen, bestaan er getallen κ,λ,μ,ν met $P = \kappa A + \lambda B$; $Q = \mu A + \nu B$, dus voor een willekeurig punt $X = \rho A + \sigma B$

vindt men symbolisch geschreven

$$\begin{vmatrix} P & \kappa & \lambda \\ Q & \mu & \nu \\ X & \rho & \sigma \end{vmatrix} = 0, \text{ ofwel } X = \frac{\mu\sigma - \nu\rho}{\kappa\nu - \mu\lambda} P + \frac{\lambda\rho - \kappa\sigma}{\kappa\nu - \mu\lambda} Q,$$

waarbij opgemerkt zij, dat wegens $P \neq Q$ geldt $\kappa\nu - \mu\lambda \neq 0$.

Heeft men 4 punten A,B,C en D gelegen op eenzelfde rechte, dan bestaan er dus getallen $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ zodanig, dat

$$C = \lambda A + \mu B; \; D = \rho A + \sigma B.$$

Men noemt dan de uitdrukking $\frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu}$ de dubbelverhouding (ABCD) der 4 punten A,B,C en D. Op grond van de overeenkomstige definities van dubbelverhouding van 4 punten op een rechte in het platte vlak (§ 19) en 4 punten op de rechte lijn (§ 18) gelden de beschouwingen over dubbelverhoudingen uit de vorige § evenzeer voor de zojuist gedefinieerde dubbelverhoudingen. In het bijzonder zijn dus ook harmonische en aequiharmaonische puntenviertallen op rechte lijnen in het platte vlak gedefinieerd.

Door de projectieve transformatie $X = A\overline{X}$ gaat de door de 2 punten P en Q bepaalde rechte $X = \lambda P + \mu Q$ over in de rechte door de punten $\overline{P}$ en $\overline{Q}$, waarin P en Q door de transformatie overgaan. Immers men heeft ook $P = A\overline{P}$; $Q = A\overline{Q}$, dus $A\overline{X} = \lambda A\overline{P} + \mu A\overline{Q}$, dus $\overline{X} = \lambda\overline{P} + \mu\overline{Q}$, waarmede deze eigenschap bewezen is. Een willekeurig punt $Y = \rho P + \sigma Q$ op PQ gaat evenzo door deze transformatie over in een punt $\overline{Y}$ met $\overline{Y} = \rho\overline{P} + \sigma\overline{Q}$, zodat tevens blijkt $(PQXY) = (\overline{P}\overline{Q}\overline{X}\overline{Y})$, waaruit volgt, dat bij de transformatie dubbelverhoudingen invariant blijven.

De omgekeerde stelling, dat een transformatie, die dubbelverhoudingen invariant laat (wat tevens inhoudt, dat 4 collineaire punten overgaan in 4 collineaire punten) een projectieve transformatie is, is niet juist: er blijkt nog een ander soort transformatie met deze eigenschappen te bestaan. Wij gaan daarop hier niet verder in.

Een rechte lijn werd hierboven gekarakteriseerd door de betrekking $X = \lambda A + \mu B$ waarbij A en B twee willekeurige harer punten zijn. Door eliminatie van λ en μ uit de drie betrekkingen

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i \quad (i = 1,2,3)$$

vindt men dat ieder punt $X(x_1,x_2,x_3)$ van de rechte lijn AB voldoet aan

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

of kortweg $(xab) = 0$. Omgekeerd als deze betrekking geldt, heeft men $x_i = \lambda a_i + \mu b_i$ $(i = 1,2,3)$ mits de rang der matrix

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$$

twee is.

<u>Opg. 2.</u> Wat vindt men als die rang 1 is ?

<u>Opg. 3.</u> Bepaal bij gegeven X, A en B de bovenbeschouwde factoren λ en μ.

Wij vinden dus dat alle punten van een rechte lijn voldoen aan een betrekking van de gedaante $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ en een betrekking als deze leidt tot $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -u_2 & u_1 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} = 0$ dus tot een rechte door de punten $(-u_2, u_1, 0)$; $(-u_3, 0, u_1)$.

Opg. 4. Laat zien dat ook het punt $(0, u_3, -u_2)$ op deze rechte ligt en dat zeker 2 der 3 gevonden punten verschillend zijn, zodat men inderdaad een rechte lijn vindt. Men noemt $(abx) = 0$ of $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ de vergelijking van de beschouwde rechte lijn.

Opg. 5. Bepaal de vergelijking der rechte door de punten $P(a,b,c)$ en $Q(b,c,a)$. Aan welke relatie moeten de getallen a, b en c voldoen, opdat ook het punt $R(c,a,b)$ op deze rechte gelegen zij ?

Wij vinden verder dat 3 punten A,B en C dan en slechts dan collineair zijn als $(abc) = 0$.

Een rechte lijn is bepaald door haar vergelijking d.w.z. door de 3 daarin optredende coëfficiënten (u_1,u_2,u_3), waarbij de rechte dezelfde blijft als de 3 coëfficiënten met eenzelfde factor $\neq 0$ worden vermenigvuldigd. Men noemt deze getallen wel de (lijn)coördinaten van de rechte lijn in tegenstelling tot de (punt)coördinaten (x_1, x_2, x_3) van een punt X.

Opg. 6. Bepaal de coördinaten der rechte gaande door de twee punten $A(a_1,a_2,a_3)$ en $B(b_1,b_2,b_3)$.

Opg. 7. Twee rechte lijnen zijn dan en slechts dan verschillend als de matrix hunner coördinaten de rang 2 bezit.

Er is 1 punt te vinden, dat op twee verschillende rechten u en v ligt. Immers dit punt moet voldoen aan $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$; $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$, waaruit precies 1 punt met de gewenst eigenschap te vinden is.

Opg. 8. Bepaal de coördinaten van dat punt.

Bij twee verschillende rechten u en v kunnen wij de rechte $\lambda u + \mu v$, dat is de rechte met coördinaten $(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2\ \lambda u_3 + \mu v_3)$. of met vergelijking $\sum_{i=1}^{3} (\lambda u_i + \mu v_i)x_i = \lambda \sum_{i=1}^{3} u_ix_i + \mu \sum_{i=1}^{3} v_ix_i = 0$ beschouwen. Het is duidelijk, als S een punt is, dat op u en v ligt, deze nieuwe rechte door S gaat.

Opg. 9. Bewijs dit.

Ook omgekeerd: Als een rechte w door $S(s_1,s_2,s_3)$ gaat, heeft men

$$\sum_{i=1}^{3} u_is_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{3} v_is_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{3} w_is_i = 0,$$

dus $(uvw) = 0$ dus $w = \lambda u + \mu v$.

De verzameling der rechten $\lambda u + \mu v$ (λ, μ variabel; u en v vast) heet een rechtenbundel. Alle rechten van een bundel gaan door 1 punt en omgekeerd vormen alle rechten door 1 punt een bundel. Evenals een rechte te karakteriseren is door een eigenschap, die de coördinaten van elk erop gelegen punt bezitten, (de vergelijking der rechte), is een punt te karakteriseren door een eigenschap der coördinaten van elke er door gaande rechte (de vergelijking in lijncoördinaten van het punt). Zij $X(x_1,x_2,x_3)$ een gegeven punt. Dan voldoen de coördinaten (u_1,u_2,u_3) van elke door X gaande rechte u aan de betrekking $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, dus een homogene lineaire vergelijking in lijncoördinaten. Omgekeerd stelt zo'n vergelijking in lijncoördinaten al die rechten voor die door het punt X gaan en is dus op te vatten als de vergelijking van het punt X.

Opg. 10. Bepaal de vergelijking van het snijpunt der rechten $v(v_1,v_2,v_3)$ en $w(w_1,w_2,w_3)$.

Evenals 4 op één rechte gelegen punten een dubbelverhouding bezitten, bezitten ook 4 door één punt gaande rechten een dubbelverhouding. Immers zijn u en v twee dier rechten, dan geldt over de overige rechten w en t, dat $w = \lambda u + \mu v$; $t = \rho u + \sigma v$ en men noemt dan $\frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu}$ de dubbelverhouding (uvwt) der 4 rechten. Ook hier gelden voor dubbelverhoudingen eigenschappen als b.v. $(uvwt) = (vutw) = \frac{1}{(uvtw)} = 1 - (uwvt)$, die wij in § 18 vonden.

Hoofdstelling der projectieve meetkunde. Vier door een punt gaande rechten bezitten dezelfde dubbelverhouding als hun vier snijpunten met een willekeurige rechte.

Bewijs: Zij S het punt, waardoor de rechten u, v, w, t gaan. Op grond van het bovenstaande heeft men dan $w = \lambda u + \mu v$; $t = \rho u + \sigma v$. Zij U het snijpunt van een vijfde rechte s met u; V dat van s met v, W dat van s en w, T dat van s en t. Dan vindt men b.v.

$$U((us)_{23},(us)_{31},(us)_{12}); \quad V((vs)_{23},(vs)_{31},(vs)_{12});$$

$$W((ws)_{23},(ws)_{31},(ws)_{12}) =$$

$$= (\lambda(us)_{23} + \mu(vs)_{23}, \lambda(us)_{31} + \mu(vs)_{31}, \lambda(us)_{12} + \mu(vs)_{12}),$$

dus $W = \lambda U + \mu V$. Evenzo $T = \rho U + \sigma V$, dus

$$(UVWT) = \frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu} = (uvwt).$$

Opg. 11. Bewijs deze eigenschap ook in het geval, dat λ of σ nul is.

Wij vinden hier het dualiteitsbeginsel terug, dat zegt, dat een stelling in het platte vlak over punten, lijnen, "liggen op", "gaan door", dubbelverhouding juist blijft als men deze begrippen resp. vervangt door lijnen, punten, "gaan door", "liggen op", dubbelverhouding. Tevens werkt dit dualiteitsbeginsel op het begrip coördinaten en wel verwissele men bij toepassing ervan de begrippen puntcoördinaten en lijncoördinaten.

Opg. 12. **Formuleer (en bewijs, indien dit nog niet geschied is) de duale bewering van elk der volgende stellingen.**

1. Door twee verschillende punten A en B gaat 1 rechte.
2. Elk punt dier rechte heeft de gedaante $\lambda A + \mu B$.
3. De vergelijking dier rechte luidt $(abx) = 0$.
4. Elk homogene eerstegraadsvergelijking in puntcoördinaten stelt een rechte voor.

N.B. Aangezien het dualiteitsbeginsel begrippen invariant laat of verwisselt, levert, twee keer dit beginsel op een eigenschap toegepast, de oorspronkelijke eigenschap weer op.

Wij gaan nu na, wat het effect is van een projectieve transformatie $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{x}_j$ $(i = 1,2,3)$ of $X = A\bar{X}$ op een rechte u $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Na substitutie verkrijgt men $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i a_{ij}\bar{x}_j = 0$, dus een vergelijking van de eerste graad $\sum_{j=1}^{3} \bar{u}_j\bar{x}_j = 0$ in de nieuwe coördinaten, waarbij tevens blijkt

$$\bar{u}_j = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}u_i.$$

Voeren wij nog in de matrices $U = (u_1\ u_2\ u_3)$; $\bar{U} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$, dan vinden wij $\bar{U} = UA$ met als omkering $U = \bar{U}A^{-1}$. Ook de lijncoördinaten worden dus homogeen en lineair getransformeerd. Dit was ook direct als volgt in te zien. Men heeft $UX = \sum_{i=1}^{3} u_ix_i$, dus uit $UX = 0$ gaat over in $UA\bar{X} = 0$, dus in $\bar{U}\bar{X} = 0$ waarbij $\bar{U} = UA$. Omgekeerd als men een homogene lineaire transformatie $U = \bar{U}B$ in coördinaten heeft, gaat hierdoor de uitdrukking $UX = 0$ over in $\bar{U}BX = 0$, dus in $\bar{U}\bar{X} = 0$ waarbij $\bar{X} = BX$, dus $X = B^{-1}\bar{X}$.

Op grond van het dualiteitsbeginsel volgt hieruit, dat door een projectieve transformatie niet alleen rechten in rechten overgaan, maar ook dat de dubbelverhouding van 4 door één punt gaande (concurrente) rechten bij de transformatie dezelfde blijft. Verder leert ons het dualiteitsbeginsel dat een projectieve transformatie vastgelegd is, als men van 4 rechten, waarvan er geen 3 door 1 punt gaan, gegeven is dat zij in 4 andere eveneens aan die eis voldoende rechten moeten overgaan.

Bij de puntcoördinaten trad het coördinatenstelsel $X_1X_2X_3X_4$ op, waarbij $X_1 = (1,0,0)$, $X_2 = (0,1,0)$, $X_3 = (0,0,1)$, $X_4 = (1,1,1) = X_1 + X_2 + X_3$ en waarbij voor een willekeurig punt $X(x_1,x_2,x_3)$ gold $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$.

Evenzo treed bij de lijncoördinaten een stelsel $U_1U_2U_3U_4$ op, waarbij in lijncoördinaten geldt

$U_1 = (1,0,0)$, $U_2 = (0,1,0)$, $U_3 = (0,0,1)$, $U_4 = (1,1,1) = U_1 + U_2 + U_3$

en waarbij voor een willekeurige rechte $U(u_1,u_2,u_3)$ geldt
$U = u_1U_1 + u_2U_2 + u_3U_3$.

<u>Opg. 13.</u> Bewijs dat U_i de verbindingsrechte is van X_j en X_k, waarbij (i,j,k) een permutatie is van de getallen 1,2,3.
<u>Opg. 14.</u> Bewijs, dat X_1 en X_2 harmonisch liggen met het snijpunt van X_1X_2 en X_3X_4 en van X_1X_2 en U_4.
<u>Opg. 15.</u> Bewijs de duale stelling rechtstreeks.

Op grond van de resultaten uit opg. 14 en opg. 15 noemt men wel de rechte U_4 en het punt X_4 harmonicaal verwant t.o.v. driehoek $X_1X_2X_3$ (of driehoek $U_1U_2U_3$).

Er is steeds een projectieve transformatie te vinden, die de punten van een gegeven rechte u overvoert in die van een gegeven rechte $\bar{u}$, zodanig dat elk viertal punten van u dezelfde dubbelverhouding heeft als het puntenviertal op $\bar{u}$, waarin de eerste 4 punten overgaan. Immers kies ABC willekeurig op u; laat deze punten resp. overgaan in $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ op $\bar{u}$. Kies twee willekeurige punten D en E op een willekeuirge rechte $\neq$ u door c en twee willekeurige punten $\bar{D}$ en $\bar{E}$ op een willekeurige rechte $\neq \bar{u}$ door $\bar{c}$. Dan is er juist één projectieve transformatie die A,B,D en E overvoert in $\bar{A},\bar{B},\bar{D}$ en $\bar{E}$ dus DE in $\overline{DE}$, AB in $\overline{AB}$, derhalve C in $\bar{C}$. Deze projectieve transformatie voert, zoals wij al eerder vonden, elk viertal punten van u over in vier punten van $\bar{u}$ met dezelfde dubbelverhouding. Tevens zien wij uit dit bewijs, dat er één projectieve transformatie bestaat, die een gegeven rechte en 2 er niet op gelegen gegeven punten overvoert in een (andere) gegeven rechte en 2 (andere) er niet op gelegen gegeven punten.

Tenslotte vragen wij ons af, of er punten zijn, die bij een projectieve transformatie $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{x}_j$ $(i = 1,2,3)$ op hun plaats blijven. Voor zo'n punt moet gelden $x_i = \lambda\bar{x}_i$ $(i = 1,2,3)$, dus

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{rrrl} (a_{11}-\lambda)\bar{x}_1 & + a_{12}\bar{x}_2 & + a_{13}\bar{x}_3 & = 0 \\ a_{21}\bar{x}_1 & +(a_{22}-\lambda)\bar{x}_2 & + a_{23}\bar{x}_3 & = 0 \\ a_{31}\bar{x}_1 & + a_{32}\bar{x}_2 & +(a_{33}-\lambda)\bar{x}_3 & = 0. \end{array}\right.$$

Dit is slechts mogelijk als

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit in het algemeen 3 waarden van λ volgen. Is eenmaal zo'n waarde van λ gevonden, dan vindt men de coördinaten van het invariante punt door substitutie van deze waarde van λ in het bovenbeschouwde stelsel, waarbij men dan met twee passend gekozen vergelijkingen van dat drietal kan volstaan. Het is niet uitgesloten dat na substitutie van die waarde de rang der coëfficiëntenmatrix der vergelijkingen niet 2, maar 1 is in welk geval bij 1 waarde van λ oneindig veel invariante punten behoren.

Vraagt men naar invariante rechten, dan volgt voor zo'n rechte uit $\bar{u}_i = \lambda u_i$ (1,2,3) en $\bar{u}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\, u_j$ $(i = 1,2,3)$ dat

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 = 0 \\ a_{12}u_2 + (a_{22}-\lambda)u_2 + a_{32}u_3 = 0 \\ a_{13}u_3 + a_{23}u_3 + (a_{33}-\lambda)u_3 = 0 \end{cases}$$

zodat ook in dit geval het getal λ moet voldoen aan de cubische vergelijking (4). Is eenmaal zo'n waarde van λ gevonden, dan vindt men de coördinaten van de invariante lijn door substitutie van deze waarde in het bovenstaande stelsel, waarbij men weer met twee passend gekozen vergelijkingen van dat drietal kan volstaan. Ook hier is het niet uitgesloten, dat de rang der coëfficiëntenmatrix van dit stelsel na substitutie van zo'n waarde van λ niet 2 maar 1 is.

Zij $\lambda \neq \mu$ en X het door λ bepaalde invariante punt en U de door μ bepaalde invariante rechte, dan heeft men

$$\lambda \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{x}_j;\ \mu u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}u_j \qquad (i = 1,2,3)$$

dus

$$(\lambda-\mu) \sum_{i=1}^{3} \bar{x}_i u_i = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (a_{ij}\bar{x}_j u_i - a_{ji}u_j\bar{x}_i) = 0$$

dus wegens $\lambda \neq \mu$ ligt het invariante punt X op de invariante rechte u. Voor $\lambda = \mu$ behoeft dit niet te gelden.

Beschouwen wij eens het geval, dat het stelsel (3) voor zekere wortel λ van (4) de rang 1 bezit. Alle determinanten van de 2e orde, die bevat zijn in het linkerlid van (4) zijn dus nul. Dat houdt in, dat λ ook aan de afgeleide vergelijking van (4)

$$\begin{vmatrix} -1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

voldoet en dus een dubbele wortel van (4) is.

Wij gaan nog even de verschillende gevallen na.

<u>1e.</u> De verg. (4) bezit 3 verschillende wortels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Wegens de voorafgaande stelling behoort bij elk dier wortels één invariant punt, en één invariante lijn, welke tezamen een driehoek vormen. Wij leggen ons coördinatenstelsel zo, dat de punten x_1, x_2, x_3 de hoekpunten van die driehoek zijn. Daar dan het punt (1,0,0) invariant is voor de transformatie heeft men $a_{21} = a_{31} = 0$; evenzo $a_{12} = a_{32} = 0$; $a_{13} = a_{23} = 0$,

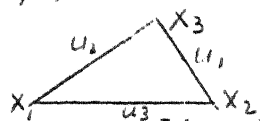
zodat de transformatiematrix A de gedaante $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ bezit met $p \neq q$; $q \neq r$; $r \neq p$; $pqr \neq 0$.

Opg. 17. Bewijs de laatste ongelijkheden.

De transformatie luidt dan

$$x_1 = p\bar{x}_1;\ x_2 = q\bar{x}_2;\ x_3 = r\bar{x}_3 \text{ en } \bar{u}_1 = pu_1;\ \bar{u}_2 = pu_2;\ \bar{u}_3 = pu_3.$$

Op de invariante rechte (0,0,1) of $x_3 = 0$ gaat een punt $(x_1, x_2 0)$ over in het punt $(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{q}, 0)$, zodat op deze rechte door de oorspronkelijke transformatie van het platte vlak een projectieve transformatie wordt geïnduceerd en daarbij zijn de punten (0,1,0) en (1,0,0) invariante punten. De geïnduceerde projectieve transformatie van de rechte is dus niet parabolisch.



Opg. 18. Bewijs een duaal dergelijk resultaat voor de verzameling der rechten door een hoekpunt van de coördinatendriehoek.

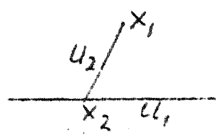
2e. $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. Bij λ_3 behore slechts één invariant punt. Men kieze het door λ_1, resp. λ_2 bepaalde invariante punt als hoekpunt X_1, resp. X_2.

Onze matrix A heeft dan de gedaante $\begin{pmatrix} p & 0 & m \\ 0 & r & n \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ waarin $p \neq r$; $pr \neq 0$; $n \neq 0$.

Opg. 19. Bewijs deze relaties.

De ene invariante rechte blijkt te zijn de rechte X_1X_2 en de andere $(p-r)x_1 + mx_2 = 0$. Kiezen wij het hoekpunt X_3 hierop, dan heeft men nog $m = 0$. De transformatie luidt dan

$$x_1 = p\bar{x}_1;\ x_2 = r\bar{x}_2 + n\bar{x}_3;\ x_3 = r\bar{x}_3.$$

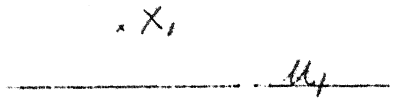


Op de invariante rechte X_1X_2 wordt een niet-parabolische transformatie geïnduceerd, maar op de rechte X_2X_3 nu wel een parabolische.

Opg. 20. Ga na hoe de rechten door X_1 en die door X_2 worden getransformeerd.

3e. $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. Bij λ_1 behoort één, maar bij λ_2 behoren oneindig veel invariante punten.

Kies X_1 als invariant punt bepaald door λ_1. Alle door λ_2 bepaalde punten liggen op een rechte. Laat dat zijn de rechte X_2X_3. Omdat X_1, X_2 en X_3 invariant zijn en $\lambda_2 = \lambda_3$ heeft de transformatiematrix de gedaante $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ met $p \neq r$; $pr \neq 0$.



Opg. 21. Bewijs deze laatste ongelijkheden.

Opg. 22. Voor een willekeurig punt P en het getransformeerde punt $\bar{P}$ geldt dan $(X_1SP\bar{P}) = \frac{p}{r}$.

Indien X_1 op u_1 lag is het coördinatenstelsel niet te kiezen op bovengenoemde wijze. Laat dan het invariante punt zijn (1,0,0) en de invariante rechte $u_3 = 0$. Men vindt dan echter een transformatiematrix met drie gelijke wortels, welk geval straks bekeken wordt.

Op elke rechte door X_1 wordt in het geval 3e. een niet parabolische transformatie geïnduceerd; op de rechte u_1 echter de identieke transformatie.

4e. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Bij deze waarde van λ behoort maar 1 invariant punt. Zij dit het punt X_1. De bijbehorende invariante rechte (die tenminste een punt bevat; waarom?) moet dus door X_1 gaan. Zij dit de rechte u_3. Dan luidt de transformatiematrix

$$\begin{pmatrix} p & a & b \\ 0 & p & c \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \text{ met } apc \neq 0.$$

Opg. 23. Bewijs dit.

In dit geval worden zowel de rechte u_3 als de verzameling der rechten door X_1 parabolisch getransformeerd.

Opg. 24. Bewijs dit.

5e. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Bij deze waarde λ behoren oneindig veel (uiteraard collineaire) punten. Laat deze liggen op de rechte u_3. De transformatiematrix luidt dan, indien wij het punt waarvan elke erdoor gaande lijn invariant is, in X_2 nemen,

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & c \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \text{ met } pc \neq 0.$$

Opg. 25. Bewijs dit.

Wij bewezen op blz. 156 reeds een belangrijke stelling over de volledige vierhoek (d.i. de figuur bestaande uit 4 punten A,B,C en D, waarvan er geen 3 op één rechte liggen en uit hun 6 verbindingslijnen). Zijn S_1, S_2, S_3 de diagonaalpunten (dit zijn de snijpunten van overstaande zijden, waarbij twee overstaande zijden zulke verbindingslijnen van hoekpunten zijn, dat zij tezamen alle 4 hoekpunten bevatten). Dan liggen A en B harmonisch met $S_1 = (AB,CD)$ en het snijpunt T van S_2S_3 en AB.

Een ander bewijs van deze stelling volgt uit de hoofdstelling der projectieve meetkunde, die ons leert

$$(ABTS_1) = (DCUS_1) = (DS_3,\ CS_3,\ US_3,\ S_1S_3) = (BATS_1) = \frac{1}{(ABTS_1)},$$

dus bij niet samenvallen van 2 der 4 punten A,B,T,S_1 (zodat $(ABTS_1) \neq 1$), vindt men $(ABTS_1) = -1$.

Opg. 26. Formuleer en bewijs rechtstreeks de duale stelling.

Tenslotte bewijzen wij, dat bij een transformatie $X = A\overline{X}$ de determinant (xyz) van 3 punten getransformeerd wordt volgens de formule $(xyz) = a(\overline{x}\overline{y}\overline{z})$, waarin a de determinantwaarde der matrix A is. Men vindt dit uit de welbekende transformatieformules $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\overline{x}_j$ $(i = 1,2,3)$, die de determinant (xyz) omzetten in een andere, die volgens de productstelling van Cauchy juist gelijk is aan het product der determinanten a en $(\overline{x}\overline{y}\overline{z})$.

§ 4. De affiene en metrische meetkunde.

Bij onze tot dusverre gegeven beschouwingen over het projectieve vlak spelen alle punten eenzelfde rol evenals alle rechten. Dit wordt anders, indien wij één der rechten en twee der daarop gelegen punten een uitzonderingsrol laten spelen. Die rechte noemen wij oneigenlijk; die punten noemen wij de cirkelpunten. Laat in zeker coördinatenstelsel die rechte de rechte (0,0,1) zijn en die punten de punten (1,i,0) en (1,-i,0). Aangezien door een projectieve transformatie elke rechte en elk tweetal daarop gelegen punten de coördinaten (0,0,1) resp (1,i,0) en (1,-i,0) kan krijgen, is het volmaakt onverschillig, welke rechte en welke 2 daarop gelegen punten men als oneigenlijke rechte resp. cirkelpunten gaat beschouwen. Wij onderstellen echter, dat men een keuze gedaan heeft. De volgende beschouwingen gelden dus slechts met een of andere bij voorbaat uitgekozen rechte als oneigenlijke rechte en twee bij voorbaat daarop gekozen punten als cirkelpunten, waarbij de coördinatenstelsels zo genomen worden, dat daarvan de coördinaten zijn (0,0,1) resp. (1,i,0), (1,-i,0) Voor ieder niet op die rechte gelegen punt (x_1,x_2,x_3) is dan $x_3 \neq 0$, zodat voor zo'n punt (dat men dan eigenlijk noemt) de getallen $x = \frac{x_1}{x_3}$ en $y = \frac{x_2}{x_3}$ eindig zijn. Een rechte heet eigenlijk, als zij niet de coördinaten (0,0,1) bezit.

Beschouwen wij nu eerst de meetkunde, die men in het projectieve vlak krijgt door slechts een keuze te doen voor de oneigenlijke rechte en het coördinatenstelsel zo te kiezen, dat deze de coördinaten (0,0,1) bezit. Deze meetkunde heet de affiene meetkunde. Een affiene transformatie is een projectieve transformatie, die de oneigenlijke rechte (0,0,1) invariant laat.

Onze coördinatendriehoek $X_1X_2X_3$ bestaat nu behalve uit de oneigenlijke rechte nog uit twee eigenlijke rechten X_1X_3 (met verg. $y = 0$) en X_2X_3 (met verg. $x = 0$), welke men de coördinaatassen noemt; hun snijpunt X_3 heet de oorsprong.

Iedere eigenlijke rechte bezit één oneigenlijk punt (haar snijpunt met de oneigenlijke rechte).

Def. Twee rechten, die elkaar op de oneigenlijke rechte snijden heten evenwijdig. Een vierhoek met twee (één) paar evenwijdige zijden heet een parallelogram (trapezium). Het midden van een een lijnstuk AB is het vierde harmonische punt van A,B met het oneigenlijke punt der rechte AB.

Een volledige vierhoek waarvan twee diagonaalpunten (dus ook hun verbindingslijn, die men een diagonaal van de vierhoek noemt) oneigenlijk zijn, is dus een parallelogram. Op grond van de stelling over de volledige vierhoek aan het eind van § 19 delen de diagonalen van een parallelogram elkaar middendoor.

Opg. 1. Trekt men door het snijpunt der diagonalen van een trapezium een rechte evenwijdig met de evenwijdige zijden, dan ligt dat snijpunt even-ver af van de snijpunten dier rechte met de niet-evenwijdige zijden.

Opg. 2. Bewijs met behulp van de hoofdstelling der projectieve meetkunde, dat de rechte, die de middens van de opstaande zijden van een trapezium (of driehoek) verbindt, evenwijdig loopt met de basis van het trapezium (of de driehoek).

Opg. 3. Van een parallelogram ABCD verbindt men het midden M van CD en C met het midden N van AB. Bewijs dat AM // NC en dat de snijpunten van AM resp. NC met BD het lijnstuk BD in drie gelijke delen verdelen.

Beschouw twee punten A en B. Zij C willekeurig op AB. Dan kent men in de affiene meetkunde weliswaar geen lengten toe aan lijnstukken, maar wel verhoudingen van lengten. Men zegt n.l. dat AC : CB = $(ABC\Omega)$, waarin Ω het oneigenlijke punt van AB is (verg. § 18).

Opg. 4. Bewijs AC : BC $\lessgtr$ 0 al naar C tussen A en B ligt (dat is op dat segment AB ligt, waar Ω niet op ligt) of niet.

Opg. 5. Bewijs de stelling: Drie evenwijdige rechten snijden van twee snijlijnen evenredige stukken af. Met behulp hiervan is de gehele gelijkvormigheidstheorie van homothetische figuren op te bouwen.

Een affiene transformatie is een projectieve transformatie, die de oneigenlijke rechte invariant laat en dus de begrippen "evenwijdig" en "verhouding van lengten" ook ongewijzigd laat. Op grond van vroegere beschouwingen wordt de meest algemene affiene transformatie door de matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ met $a_{33} \neq 0$ gegeven.

Opg. 6. Bewijs dat het product van twee matrices van dit type weer een matrix van dit type is.

In x,y-coördinaten luidt een dergelijke transformatie

$$\begin{aligned} x &= b_{11}\bar{x} + b_{12}\bar{y} + b_{13} \\ y &= b_{21}\bar{x} + b_{22}\bar{y} + b_{23} \end{aligned} \qquad \left(\text{waarin } b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{33}}\right).$$

Op grond van de laatste eigenschap der vorige § gaat de determinant $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$ van de coördinaten van de 3 punten (x,y), (x',y'),(x",y" over in $B_{33}\begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x}' & \bar{y}' & 1 \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & 1 \end{vmatrix}$, waarin B_{33} de minor $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$ aangeeft. De verhouding van dergelijke determinanten van twee puntendrietallen blijft dus invariant bij transformatie. Deze verhouding noemt men de verhouding der oppervlakten der driehoeken, gevormd door die twee puntendrietallen.

Opg. 7. Bewijs de welbekende stelling uit de vlakke meetkunde: de oppervlakten van twee driehoeken die een hoek gemeen hebben, verhouden zich als de producten der zijden om die hoek.

Wij kiezen nu nog de cirkelpunten I en J op onze oneigenlijke recht en verkrijgen dan de metrische Euclidische meetkunde. Hierin kunnen lijnstukken zelf en ook hoeken worden gedefinieerd. De hoekdefinitie is eenvoudig. Beschouw een hoek, gevormd door twee elkaar in A snijdende rechten b en c met oneigenlijke punten B resp. C. Dan definiëren wij

$$\angle BAC = \frac{1}{2i} \log (IJBC) \quad \text{(formule van Laguerre).}$$

Aangezien dubbelverhoudingen een projectieve betekenis hebben, die ongewijzigd blijft bij projectieve transformaties, is dat ook met het hoekbegrip het geval. Een hoek is recht, als $A = \frac{\pi}{2}$, dus $\log (IJBC) = \pi i$, dus $IJBC = e^{\pi i} = -1$, dus dan en slechts dan als de oneigenlijke punten van zijn benen harmonisch liggen met de cirkelpunten (verg. § 10, opg. 1 pag. 68).

<u>Opg. 8.</u> Als de hoeken BAC en CAD een been AC gemeen hebben, dan is $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$ (verg. § 18, opg. 8).

<u>Opg. 9.</u> Bewijs $\angle BAC = -\angle CAB$.

<u>Opg. 10.</u> Een gestrekte hoek is twee keer zo groot als een rechte.

<u>Opg. 11.</u> Bij twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde zijn twee overeenkomstige hoeken gelijk.

<u>Opg. 12.</u> Bewijs dat de hoek der rechten $y = mx$ en $y = 0$ gelijk is aan bg tg m.

Ook afstanden zijn te definiëren door middel van dubbelverhoudingen mits van twee willekeurig gegeven punten A en B gegeven is, dat hun afstand gelijk is aan 1. Men definieert n.l. de afstand d_{PQ} van twee punten met de formule

$$d_{PQ}^2 = d_{AB}^2 (IJ,IB,IA,IP)(JI,JB,JA,JP)(IJ,IP,IB,IQ)(JI,JP,JB,JQ).$$

<u>Opg. 13.</u> Bewijs dat hieruit volgt

$$d_{PQ}^2 : d_{AB}^2 = \left\{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2\right\} : \left\{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2\right\}$$

Kiest men nu $d_{AB} = 1$ voor $A = (0,0)$, $B(0,1)$, dan vindt men

$$d_{PQ}^2 = (p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2.$$

<u>Opg. 14.</u> Bewijs rechtstreeks uit de dubbelverhoudingsformule $d_{PQ}^2 = d_{QP}^2$.

<u>Opg. 15.</u> Bewijs dat als R zo op PQ ligt, dat $R = \lambda P + \mu Q$, men heeft

$$PR : QR = -\mu : \lambda .$$

Een projectieve transformatie, die de punten I en J (dus ook hun oneigenlijke verbindingsrechte) invariant laat, laat dus ook hoeken en verhoudingen van afstanden invariant. Wij weten dat de transformatiematrix zeker van affien karakter is, d s luidt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$ Daar $(1,i,0)$ invariant is, heeft men verder $a_{21} = -a_{12}$;

$a_{11} = a_{22}$, zodat de matrix luidt $\begin{pmatrix} c & s & d \\ -s & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

Opg. 16. Bewijs dat het product van twee matrices van dit type weer een matrix van dit type is. In x,y-coördinaten luidt de transformatie

$$\begin{cases} x = \frac{c}{f}\bar{x} + \frac{s}{f}\bar{y} + \frac{d}{f} \\ y = -\frac{s}{f}\bar{x} + \frac{c}{f}\bar{y} + \frac{e}{f} \end{cases}$$

Opg. 17. Afstanden worden door deze transformatie vermenigvuldigd met $\frac{f}{\sqrt{c^2+s^2}}$.

De transformaties van dit type zijn gelijkvormigheidstransformaties. Alle afstanden worden met eenzelfde factor vermenigvuldigd. Is deze gelijk aan 1 dan spreekt men van een congruente transformatie. Men heeft dan $f = \sqrt{c^2+s^2}$.

De congruente transformatie induceert op de oneigenlijke rechte een elliptische transformatie van de punten $(1,m,0)$ in $(1,\bar{m},0)$ met

$$\bar{m} = \frac{cm-s}{c+sm},$$

welke zich ook in de vroeger reeds gevonden standaardgedaante

$$\text{bg tg } \bar{m} = \text{bg tg } m - \text{bg tg } \frac{s}{c}$$

laat schrijven. Door de transformatie draait de richting van een rechte dus over een hoek bg. tg $\frac{s}{c}$. De congruente en de gelijkvormigheidstransformaties die op te vatten zijn, als resultaat van de achter elkaar toegepaste transformaties.

$$\begin{cases} x = \bar{\bar{x}} + \frac{d}{f} \\ y = \bar{\bar{y}} + \frac{e}{f} \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} \bar{\bar{x}} = \frac{c}{f}\bar{x} + \frac{s}{f}\bar{y} \\ \bar{\bar{y}} = -\frac{s}{f}\bar{x} + \frac{c}{f}\bar{y} \end{array}$$

welke resp. een verschuiving of (afgezien van spiegelingen) een draaiïng zijn.

Met behulp der congruente transformaties is het nu mogelijk de congruente gevallen van driehoeken te behandelen, waarna de gehele vlakke meetkunde op de normale wijze op te bouwen is. Als voorbeeld bewijzen wij eens de stelling, dat twee driehoeken congruent zijn, als zij gelijk hebben twee zijden en de ingesloten hoek. Zijn de driehoeken ABC en PQR met $\angle A = \angle P$, dan bepalen wij eerst een verschuiving, die A in P overvoert. Hierdoor gaat $\triangle ABC$ over in een $\triangle PB'C'$, waarvoor $PB' = AB = PQ$; $PC' = AC = PR$.

Beschouw nu de projectieve transformatie die I, J en P invariant laat en B' in Q overvoert. Daar deze I en J invariant laat en $PB' = PQ$ is, is dit een congruente transformatie. Deze voert C' over in C". Dus $\angle C''PC' = \angle QPB' = \angle RPB' - \angle RPQ = \angle RPB' - \angle C'PB' = \angle RPC'$, dus C" ligt op PR. Wegens $PC' = PC = PR$ valt dan C' met R samen. Daar de transformatie een congruente is, is dan ook RQ = C'B' = CB; ∠ PQR = ∠ PB'C' = ∠ ABC; ∠ PRQ = ∠ PC'B' = ∠ ACB.

Opg. 18. Ga ook het niet-beschouwde geval na, dat de driehoeken PQR en PQC" symmetrisch komen te liggen t.o.v. PQ.

§21. Kegelsneden.

Wij beschouwen thans in het projectieve vlak quadratische vormen

(1) $$f(x) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, \text{ kortweg } \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Hierbij wordt $a_{ij} = a_{ji}$ genomen voor $i,j = 1,2,3$. De matrix A der coëfficiënten a_{ij} is dus symmetrisch. De verzameling der punten (x_1,x_2,x_3), die aan (1) voldoen, noemt men een kegelsnede. Voert men in de matrix $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dan luidt de vergelijking (1) in matrixnotatie $X'AX = 0$, waarbij X' de gespiegelde matrix is van de matrix X.

Wenst men de snijpunten van een rechte door 2 punten P en Q met de kegelsnede (1) te bepalen, dan zoekt men punten $\lambda P + \mu Q$ op de rechte, die voldoen aan (1), hetgeen na substitutie leidt tot

(2) $$\lambda^2 \sum_{i,j} a_{ij}p_ip_j + 2\lambda\mu \sum a_{ij}p_iq_j + \mu^2 \sum a_{ij}q_iq_j = 0.$$

Opg. 1. Bewijs dit.

Uit de gevonden vierkantsvergelijking volgen i.h.a. twee waarden van $\lambda : \mu$, waardoor twee punten op PQ bepaald worden, die ook op de kegelsnede liggen. Deze kunnen reëel verschillend, samenvallend of toegevoegd complex zijn. Eerst vragen wij ons af of P en Q harmonisch kunnen liggen met de snijpunten van PQ en de kegelsnede (1). Hiertoe is nodig en voldoende dat de wortels $\lambda : \mu$ van de vierkantsvergelijking (2) een verhouding -1 bezitten, dus samen nul zijn, hetgeen neerkomt op

$$f(p;q) = \sum_{i,j} a_{ij}p_iq_j = 0.$$

Opg. 2. Bewijs $f(p;q) = f(q;p)$; $f(p;p) = f(p)$.

Men noemt twee punten P en Q geconjugeerd of poolverwant t.o.v. een kegelsnede (1) als $f(p;q) = 0$ is. In matrixnotatie heeft men dan $Q'AP = 0$ of $P'AQ = 0$. Snijdt PQ de kegelsnede in twee verschillende punten S_1 en S_2 dan liggen P,Q,S_1 en S_2 dus harmonisch. Houden wij P eens vast, dan heeft de meetkundige plaats der punten X, die poolverwant zijn met P t,o,v, (1) de vergelijking

$$\sum a_{ij}p_ix_j = 0$$

en stelt dus een rechte voor, die men de poolrechte van P t.o.v. (1) noemt; P heet de pool dier rechte t.o.v. (1).

Men heeft: Is P poolverwant met Q en R, dan is P poolverwant met elk punt der rechte QR.

Opg. 3. Bewijs dit.

Opg. 4. Een punt P is dan en slechts dan poolverwant met zichzelf, als het op de kegelsnede ligt.

Opg. 5. Zijn twee rechten q en r poolverwant met een punt P, dan is iedere rechte door hun snijpunt het ook.

Opg. 6. Is P poolverwant met p en ligt Q op p, dan gaat de poollijn q van Q door P.

Beschouw een variabel punt $M = \lambda P + \mu Q$ van de rechte $s = PQ$. De poollijn m van M heeft dan tot verg.

$$\lambda \sum a_{ij}p_ix_j + \mu \sum a_{ij}q_ix_j = 0,$$

zodat die een waaier doorloopt om het snijpunt S van de poollijn van P en Q (het punt S is de pool van s); uit de vergelijking van m blijkt, dat die waaier om S projectief is met de puntenreeks M op s. In het uitzonderingsgeval, dat de poollijnen van P en Q samenvallen, bestaat er een constante k zodanig, dat

$$\sum a_{ij}p_ix_j = k\sum a_{ij}q_ix_j$$

voor alle (x_1,x_2,x_3), dus

$$\sum_i a_{ij}(p_i - kq_i) = 0 \quad \text{voor } j = 1,2,3_k.$$

Omdat P en Q verschillende punten ondersteld waren te zijn, zijn niet alle getallen $p_i - kq_i$ $(i = 1,2,3)$ nul, dus moet de coëfficiëntendeterminant $a = |a_{ij}|$ van de laatste drie betrekkingen nul zijn. Een kegelsnede, waarvoor dat het geval is, heet ontaard.

Beschouwen wij zo'n kegelsnede nader. Omdat $|a_{ij}| = 0$, bestaan er getallen (c_1,c_2,c_3) met $\sum_j a_{ij}c_j = 0$ $(i = 1,2,3)$, zodat dan voor ieder punt $X(x_1,x_2,x_3)$ geldt $\sum a_{ij}c_ix_j = 0$. Het punt $C(c_1c_2c_3)$ is dan poolverwant met elk punt van het platte vlak (zodat omgekeerd een poollijn van elk punt van het platte vlak door C gaat), dus in het bijzonder met zichzelf en ligt dus op de kegelsnede. Zij D een ander punt der kegelsnede en E een willekeurig punt van CD. Dan is D poolverwant met C en D, dus met E. Ook C is poolverwant met E, dus het punt E van CD is poolverwant met E, zodat E (dus ieder punt van CD) op de kegelsnede ligt. Een ontaarde kegelsnede bestaat dus uit ten minste één rechte.

Bezit de ontaarde kegelsnede nog een punt F buiten die rechte, dan ligt ook ieder punt van CF op die kegelsnede. Zij bevat dan twee verschillende rechten en kan er niet meer bevatten, omdat anders haar vergelijking van een hogere dan de tweede graad zou zijn. Bezit de ontaarde kegelsnede geen punten buiten CD, dan heeft haar vergelijking $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$ de eigenschap, dat daarin wel een factor $\sum_i p_ix_i = 0$

(die de vergelijking der rechte CD aangeve) zit, maar geen andere lineaire factoren optreden. Bijgevolg is dan $\sum a_{ij}x_ix_j = c(\sum_i p_ix_i)^2$.

Opg. 7. Laat zien dat dit dan en slechts dan optreedt als de coëfficiëntenmatrix $\|a_{ij}\|$ der kegelsnede de rang 1 bezit.

Wij krijgen dus het volgende schema:

1. $\|a_{ij}\|$ bezit de rang 1; de kegelsnede is een z.g. dubbelrechte;
2. " " " " 2; " " bestaat uit twee verschillende rechten;
3. " " " " 3; " " is niet ontaard.

In het laatste geval bevat zij geen rechten, immers bevatte zij er wel een, dan kieze men hierop twee punten P en Q. Zij R een willekeurig punt $\neq$ P op de poollijn van P; laat die poollijn verschillen van PQ. Dan is P poolverwant met P,Q en R, dus $\sum a_{ij}p_ip_j = 0$; $\sum a_{ij}p_iq_j = 0$; $\sum a_{ij}p_ir_j = 0$. Dus $\sum_i a_{ij}p_i = 0$ voor $j = 1,2,3$, dus $|a_{ij}| = 0$, dus de rang van $\|a_{ij}\|$ was niet 3. Indien de poollijn van P wel samenvalt met PQ kieze men op PQ in plaats van P een ander punt, waarvan de poollijn niet met PQ samenvalt. Valt echter van ieder punt op PQ de poollijn samen met PQ, dan zijn de rechten

$$\sum a_{ij}p_ix_j = 0 \text{ en } \sum a_{ij}q_ix_j = 0$$

dezelfde dus

$$\sum_i a_{ij}p_i = k\sum_i a_{ij}q_i \qquad \text{voor } j = 1,2,3,$$

dus

$$\sum_i a_{ij}(p_i - kq_i) = 0 \qquad \text{voor } j = 1,2,3,$$

dus ook dan is $|a_{ij}| = 0$, want de getallen $p_i - kq_i$ $(i = 1,2,3)$ zijn niet alle nul omdat P $\neq$ q is.

Hoewel het begrip poolverwant gedefinieerd is t.o.v. een eenmaal gekozen coördinatenstelsel, doet het feit, dat het in het algemeen samenhangt met harmonische dubbelverhoudingen, ons vermoeden, dat poolverwante punten door een projectieve transformatie weer overgaan in poolverwante punten. Wij zien dit het gemakkelijkst in met de matrixnotatie. Zij $X'AX = 0$ de vergelijking der kegelsnede. Pas de coördinatentransformatie $X = B\overline{X}$ toe. Dus $X' = \overline{X}'B'$. Hierdoor gaat de kegelsnede over in $\overline{X}'B'AB\overline{X} = 0$, dus in $\overline{X}'\overline{A}\overline{X} = 0$, waarin $\overline{A} = B'AB$. Wij zien hierbij tevens dat de nieuwe determinant is

$$|\overline{a}_{ij}| = |b_{ji}|\,|a_{ij}|\,|b_{ij}| = |a_{ij}|\cdot|b_{ij}|^2$$

is, waarin $|b_{ij}|$ de transformatiedeterminant is van de door B aangegeven transformatie. Laat nu P en Q poolverwant zijn t.o.v. de kegelsnede, dus $Q'AP = 0$. Zij $P = B\overline{P}$; $Q = B\overline{Q}$ dus $Q' = \overline{Q}'B'$. Dan is

$$\overline{Q}'\overline{A}\overline{P} = \overline{Q}'B'AB\overline{P} = Q'AP = 0,$$

zodat inderdaad poolverwantschap behouden blijft bij lineaire transformatie. Niet alleen bij een lineaire coördinatentransformatie, maar ook dus bij een projectieve punttransformatie blijft poolverwantschap behouden. Een pooldriehoek van een kegelsnede is een driehoek, waarvan elk hoekpunt de pool is van de overstaande zijde.

<u>Opg. 8.</u> Laat zien dat er ∞ veel pooldriehoeken bestaan van een niet ontaarde kegelsnede, die één hoekpunt hebben in een voorgeschreven punt.

Als men het coördinatenstelsel zo kiest dat de grondpunten (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) in de hoekpunten van een pooldriehoek liggen, dan neemt de vergelijking der kegelsnede de eenvoudige gedaante

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

aan. Is $a_{33} = 0$, maar $a_{11}a_{22} \neq 0$, dan is de kegelsnede ontaard in twee verschillende door (0,0,1) gaande rechten, die reëel of toegevoegd complex zijn al naar gelang $a_{11}a_{22} < 0$ of > 0 is. Het geval dat $a_{33} = 0$ en $a_{22} = 0$ (of $a_{11} = 0$) is, levert ons een dubbelrechte.

Is $a_{33} \neq 0$ dan kan men er steeds voor zorgen dat $a_{33} > 0$ is. Men heeft dan de volgende gevallen (afgezien van gevallen, die analoog zijn aan de zojuist genoemde):

<u>1.</u> $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$; imaginaire kegelsnede. Deze bevat geen enkel reëel punt.

<u>2.</u> $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$; de kegelsnede snijdt twee zijden der gronddriehoeken in reële, de derde in toegevoegd complexe punten.

Dit zijn de enige twee mogelijke gevallen bij niet ontaarde kegelsneden, zodat, omdat door een reële projectieve transformatie een kegelsnede van het type <u>1.</u> weer overgaat in een kegelsnede van het type <u>1.</u>, ook een kegelsnede van het tweede type moet overgaan in een kegelsnede van het tweede type. Gevolg: Snijden twee der drie zijden van een reële pooldriehoek een reële kegelsnede in reële punten, dan geschiedt dit bij iedere reële pooldriehoek. Bij een reële kegelsnede kan men onderscheid maken tussen het binnen- en het buitengebied. Onder het eerste verstaat men die punten van het platte vlak, waarvan de poollijn de kegelsnede in toegevoegd complexe punten snijdt; in het tweede gebied liggen de punten wier poollijnen de kegelsnede in twee reële punten snijden. Punten die tot geen van beide gebieden behoren, hebben de eigenschap, dat hun poollijn de kegelsnede in twee samenvallende punten snijdt.

Een rechte q door een punt P van het binnengebied van een kegelsnede snijdt die kegelsnede (in reële punten). Immers zij Q de pool van q en R het op q gelegen punt, dat poolverwant is met P, dan is PQR een pooldriehoek, waarvan twee zijden de kegelsnede snijden. Aangezien zo'n pooldriehoek maar één hoekpunt binnen de kegelsnede bezit en P zo'n punt is, zijn PQ en PR de zijden, die de kegelsnede in reële punten snijden.

Wij keren thans terug tot formule (2) en onderstellen eens, dat P op de kegelsnede ligt, maar dat de rechte PQ verder geen snijpunten met de kegelsnede gemeen heeft. Dan heeft dus de verg. (2) twee wortels

$\mu = 0$, dus $\sum a_{ij}p_ip_j = 0$ en $\sum a_{ij}p_iq_j = 0$, d.w.z. elk punt van PQ is poolverwant met P.

Een rechte, die maar 1 snijpunt met een kegelsnede gemeen heeft, noemt men een raaklijn van de kegelsnede; het (en(ig)e) snijpunt heet het raakpunt. Elk punt van een raaklijn is derhalve poolverwant met het raakpunt. De raaklijn is dus de poollijn van het raakpunt.

Wenst men de raaklijn aan een niet ontaarde kegelsnede te vinden, die gaat door een niet op de kegelsnede gelegen punt P, dan snijde men de poollijn van P met de kegelsnede. De gezochte raaklijnen zijn dan de verbindingslijnen van P met die snijpunten Q en R. Immers P is poolverwant met Q en Q is poolverwant met zichzelf, dus Q is poolverwant met de door Q gaande rechte PQ. Derhalve raakt PQ de kegelsnede in Q. Omgekeerd als P gegeven is en men zoekt een raaklijn PQ door P, die de kegelsnede in Q raakt, dan is P poolverwant met Q, omdat P op de raaklijn ligt, dus Q ligt op de poollijn van P.

Het aantal raaklijnen uit een punt aan een kegelsnede is dus gelijk aan het aantal snijpunten van zijn poollijn met de kegelsnede. Ligt het punt buiten de kegelsnede dan gaan er doorheen twee reële raaklijnen; ligt het er binnen, dan geen enkele reële; ligt het op de kegelsnede, dan is er juist een reële raaklijn.

Laat men ook complexe rechten toe en telt men voor op de kegelsnede gelegen punten de raaklijn dubbel (dit heeft zin, daar de snijpunten van de poollijn van zo'n punt met de kegelsnede samenvallend zijn) dan gaat er door ieder punt van het platte vlak twee raaklijnen aan een niet ontaarde kegelsnede.

Het aantal snijpunten van een vlakke kromme met een willekeurige rechte noemt men zijn graad; het aantal raaklijnen uit een willekeurig punt zijn klasse.

Wij zien dus, dat iedere niet ontaarde kromme van de tweede graad van de tweede klasse is.

Opg. 9. Laat zien dat de bewering niet juist is voor een ontaarde kromme van de tweede graad.

De graad van een kromme is tevens de graad van zijn vergelijking in homogene puntcoördinaten.

De klasse van een kromme is de graad van zijn vergelijking in homogene lijncoördinaten. Immers beschouw een kromme van de gedaante $\varphi(u_1,u_2,u_3) = 0$, waarbij φ homogeen van de graad m is in u_1,u_2,u_3. Hierbij is het de bedoeling, dat de rechten (u_1,u_2,u_3), die voldoen aan deze vergelijking, raaklijnen zijn van de kromme. Zij X een willekeurig punt en $v(v_1,v_2,v_3)$ en $w(w_1,w_2,w_3)$ twee verschillende erdoor gaande rechten. Een rechte $\lambda v + \mu w$ door X is dan en slechts dan raaklijn aan de kromme als

$$\varphi(\lambda v_1+\mu w_1, \lambda v_2+\mu w_2, \lambda v_3+\mu w_3) = 0,$$

hetgeen leidt tot een homogene vergelijking in λ en μ van de graad m, die m wortels $\lambda:\mu$ bezit, die ons de m raaklijnen uit X aan de kromme opleveren.

Men kan bewijzen dat een kromme van de graad n, die geen dubbelpunten en keerpunten bezit, de klasse m = m(n-1) bezit (formule van Plücker). In ons geval volgt uit n = 2 inderdaad m = 2 overeenkomstig het hierboven gevondene.

Wij gaan thans de klassevergelijking, dat is de vergelijking in lijncoördinaten van de kegelsnede (1) afleiden, die wij niet ontaard onderstellen.

Een rechte (u_1,u_2,u_3) is dan en slechts dan raaklijn aan de kegelsnede als deze door zijn pool X gaat, dus als er getallen (x_1,x_2,x_3) bestaan met

$$\begin{cases} \lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ 0 = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \end{cases}$$

Eliminatie van λ, x_1,x_2,x_3 uit deze betrekkingen geeft ons de gezochte klassevergelijking

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

of

(3) $$\sum_{i,j} A_{ij}u_iu_j = 0,$$

waarin A_{ij} de minor van a_{ij} in $|a_{ij}|$ aangeeft.

Opg. 10. Bewijs de laatste bewering.

Opg. 11. Hoe luidt (3) als $\|a_{ij}\|$ de rang 2 bezit? (Maak gebruik van het resultaat van blz. 41 voor een determinant die nul is). Verklaar het resultaat meetkundig.

Aangezien de matrix $|A_{ij}|$ in het geval dat $a = |a_{ij}| \neq 0$ is, gelijk is aan aA^{-1}, waarbij weer $A = \|a_{ij}\|$, luidt vergelijking (3) in matrixnotatie

(4) $$UA^{-1}U' = 0.$$

Nu is de poollijn van een punt P t.o.v. kegelsnede (1) de meetkundige plaats der punten X met $P'AX = 0$, dus haar lijncoördinaten (u_1,u_2,u_3) vormen een matrix $U = P'A$. Men heeft dan verder $P' = UA^{-1}$.

Wij noemen twee rechten u en v poolverwant t.o.v. (1) als zij elkaars pool bevatten.

Opg. 12. Als u poolverwant is met twee rechten v en w is zij het met elke rechte door het snijpunt van v en w.

Opg. 13. De snijpunten van een rechte en een kegelsnede zijn de snijpunten van die rechte en de raaklijnen aan de kegelsnede door haar pool.

Twee rechten u en v zijn dan en slechts dan poolverwant t.o.v. de kegelsnede (1) als v door de pool van u gaat. Die pool is, zoals wij zoëven zagen, een punt P met $P' = UA^{-1}$. Nu gaat v door P als $VP = 0$, dus $P'V' = 0$, dus $UA^{-1}V' = 0$ en omgekeerd volgt hieruit dat v door P gaat.

De verzameling der rechten, die poolverwant zijn met zichzelf (dus door hun eigen pool gaan, dus raaklijnen zijn aan (1)) vindt men uit $UA^{-1}V' = 0$ door $u = v$ te nemen; het zijn dus de rechten u met $UA^{-1}U' = 0$, waarmee formule (4) teruggevonden is.

Is gegeven een kromme van de tweede klassse

(5) $$\sum b_{ij}u_iu_j = 0$$

(waaruit $\|b_{ij}\|$ een symmetrische matrix is), dan is dit als $\|b_{ij}\| \neq 0$ is tevens een kromme van de tweede graad. Immers een punt X ligt dan en slechts dan op de kromme als het op zijn poollijn ligt. Nu heeft de pool een rechte v t.o.v. deze kromme de vergelijking $\sum b_{ij}u_iv_j = 0$ en is dus het punt X met coördinaten

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ij}v_j \qquad (i = 1,2,3).$$

Derhalve is een punt X dan en slechts dan op onze kromme gelegen als bovendien geldt $\sum_{i=1}^{3} v_ix_i = 0$.

Elimineert men uit bovenstaande (4) betrekkingen de homogeen erin optredende grootheden λ, v_1, v_2, v_3, dan krijgt men

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & x_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & x_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ofwel

$$\sum_{i,j} B_{ij}x_ix_j = 0,$$

waarin B_{ij} de minor van b_{ij} is in de determinant $|b_{ij}|$.

Past men dit resultaat toe op de kromme (3) dan vindt men

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}x_ix_j = 0,$$

waarin α_{ij} de minor is van A_{ij} in de determinant $|A_{ij}|$. Nu weten wij (zie blz. 42, bovenste gedeelte) dat $\alpha_{ij} = a_{ij}\,|a_{ij}|$, dus als $a_{ij} \neq 0$ is, vindt men uit (3) de oorspronkelijke kegelsnede (1) terug.

Een kromme (5) van de tweede klasse is ontaard als haar determinant $|b_{ij}| = 0$ is. Analoog aan hetgeen bij ontaarde krommen van de tweede graad werd gevonden, bestaat deze dan hetzij uit twee stralenwaaiers met verschillende toppen, hetzij uit twee stralenwaaiers met dezelfde top. In het laatste geval heeft de matrix $\|b_{ij}\|$ de rang 1.

Wij merken thans weder een vorm van dualiteit op en wel dat een projectieve eigenschap over punten, rechten en krommen van de tweede graad of klasse blijft gelden als men hierin niet alleen de begrippen punt en rechte, maar ook de begrippen "kromme van de tweede graad" en "kromme van de tweede klasse" verwisselt. In het bijzonder kunnen die twee krommen hetzelfde zijn (wat optreden kan zodra ze niet ontaard zijn); dan correspondeert met een projectieve eigenschap de duale, waarbij een punt vervangen kan worden door zijn poollijn, een rechte door haar pool t.o.v. die kegelsnede.

Deze verwantschap is, zoals wij boven al zagen, te schrijven in de gedaante

(6) $$u_i = \sum_j a_{ij}\bar{x}_j \text{ dus } x_i = \sum_j A_{ij}\bar{u}_j \qquad (i = 1,2,3).$$

In het algemeen noemt men een verwantschap van de gedaante

$$u_i = \sum_j c_{ij}\bar{x}_j \qquad (i = 1,2,3)$$

een correlatie. Hierbij behoeft de matrix $\|c_{ij}\|$ niet symmetrisch te zijn. Laat nl. verder een punt P liggen op twee rechten u en v met beeldpunten $\bar{X}$ en $\bar{Y}$ in het tweede vlak, dus voor i = 1,2,3 geldt ook nog

$$v_i = \sum_j c_{ij}\bar{y}_j,$$

dus

$$\lambda u_i + \mu v_i = \sum_j c_{ij}(\lambda\bar{x}_j + \mu\bar{y}_j);$$

doorloopt een rechte de waaier om P, dan doorloopt dus het beeldpunt hiermede projectief de rechte $\overline{XY}$. Men heeft verder, dat het punt P met vergelijking $\sum_i p_i u_i = 0$ voldoet aan $\sum_{i,j} c_{ij}p_i\bar{x}_j = 0$, zodat hieraan een rechte $\bar{w}$ in het beeldvlak met lijncoördinaten

$$\bar{w}_j = \sum_i c_{ij}p_i \qquad \text{of} \qquad \bar{w}_i = \sum_j c_{ji}p_j$$

toegevoegd is. Vat men echter P op als punt van het tweede vlak, dan is er een rechte t aan toegevoegd met

$$t_i = \sum_i c_{ij}p_i.$$

Die rechten t en $\bar{w}$ vallen dan en slechts dan samen (d.w.z. de correlatie is dan en slechts dan involutorisch) als $c_{ij} = c_{ji}$, d.w.z. als de matrix $\|c_{ij}\|$ symmetrisch is. Zo'n correlatie, die optreedt bij poolverwantschap t.o.v. de kegelsnede $\sum c_{ij}x_ix_j = 0$ heet een poolcorrelatie. De involutorische correlaties zijn dus poolcorrelaties.

De punten (raaklijnen) van een kegelsnede zijn dus daardoor gekarakteriseerd, dat zij op hun toegevoegde rechte liggen (door hun toegevoegde punt gaan). Hierdoor kan men een kegelsnede ook definiëren en daaruit de gehele kegelsnedetheorie afleiden.

Door de lineaire formules (6) gaat een kromme $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ van de graad n over in een kromme $F(u_1,u_2,u_3) = 0$, die in (u_1,u_2,u_3) eveneens homogeen en van de graad n is. F is dus een kromme van de n^e klasse. Omgekeerd gaat door (6) een kromme F van de n^e klasse over in een kromme van de n^e graad. De krommen F en f noemt men wederkerige poolkrommen t.o.v. de kegelsnede (1).

Opg. 14. Bepaal de wederkerige poolkromme t.o.v. de kegelsnede (1) van

1): een rechte;

2): een punt;

3): van (1) zelf.

Opg. 15. Bepaal de wederkerige poolkromme van de hyperbool $xy = 1$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Ook t.o.v. de parabool $y^2 = 2x$.

Wenst men de poollijn van een punt P t.o.v. een kegelsnede te construeren, dan tekene men een volledige vierhoek, waarvan de 4 hoekpunten op de kegelsnede liggen en waarvan een diagonaalpunt in P ligt. De verbindingslijn der andere diagonaalpunten is dan de gezochte poollijn. Dit volgt nl. onmiddellijk uit de harmonische eigenschappen van de volledige vierhoek. De niet door P gaande diagonaal ervan snijdt nl. op twee koorden door P juist de 4^e harmonische punten uit van P t.o.v. de beide snijpunten van zo'n koorde met de kegelsnede.

Opg. 16. Construeer de pool van een gegeven rechte t.o.v. een gegeven kegelsnede.

Op duale wijze is de pool van een gegeven rechte t.o.v. een kegelsnede te vinden door gebruik te maken van een omschreven vierzijde van die kegelsnede.

Laat ABCD een ingeschreven volledige vierhoek van een kegelsnede zijn. Zij S het diagonaalpunt (AB,CD) ervan. Dan gaat de niet door S gaande diagonaal van die vierhoek als poollijn van S tevens door het snijpunt der raaklijnen in C en D (en ook dat van de raaklijnen in A en B) aan de kegelsnede.

Voor de punten van een rechte vonden wij vroeger een lineaire parametervoorstelling $x_i = \lambda a_i + \mu b_i$ $(i = 1,2,3)$. Wij laten nu zien, dat een quadratische parametervoorstelling

$$x_i = \lambda^2 a_i + \lambda\mu b_i + \mu^2 c_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{7}$$

ons punten van een kegelsnede oplevert. Immers uit deze betrekkingen volgt door oplossen

$$\lambda^2 = \frac{(xbc)}{(abc)}; \quad \lambda\mu = \frac{(axc)}{(abc)}; \quad \mu^2 = \frac{(abx)}{(abc)},$$

dus

$$(xbc)(xab) - (xac)^2 = 0$$

hetgeen een homogene quadratische vorm in x_1, x_2, x_3 dus een kegelsnede voorstelt. Omgekeerd bezit ieder punt van een kegelsnede (1) een quadratische parametervoorstelling.

Dat ziet men het gemakkelijkste in door uit te gaan van de bijzondere gedaante, die (1) aanneemt als men een raakdriehoek (d.i. een driehoek bestaande uit twee raaklijnen en de raakkoorde d.w.z. de verbindingslijn der raakpunten) tot gronddriehoek kiest. Zij nl. $X_1X_2X_3$ zo'n driehoek, waarbij X_2X_3 de beschouwde raakkoorde is, dan bezit (1) op dit stelsel de vergelijking $x_1^2 + ax_2x_3 = 0$.

Opg. 17. Bewijs dat.

Opg. 18. Ga na hoe de raakdriehoek ligt bij de kegelsneden

$$y^2 = 2px \quad \text{en} \quad xy = c.$$

Onze kegelsnede bezit dan de quadratische parametervoorstelling $x_1 = at$; $x_2 = t^2$; $x_3 = -a$ en bezit dus na willekeurige projectieve coördinatentransformatie nog zo'n voorstelling, want zo'n transformatie voert een formule van het type (7) weer over in zo'n formule.

Opg. 19. Bewijs dat.

Opg. 20. Iedere niet ontaarde kegelsnede is in parametervoorstelling $x_1 = \lambda^2, x_2 = \lambda\mu, x_3 = \mu^2$ te brengen.

Een algemenere parametertransformatie

$$x_i = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1}\mu + \dots a_{in}\mu^n \qquad (i\ \ 1,2,3)$$

levert een kromme van de graad n. Dat blijkt b.v. door het aantal snijpunten van deze kromme met een willekeurige rechte u te bepalen, hetgeen leidt tot een vergelijking van de graad n in $\lambda:\mu$, die n wortels bezit, die tot n snijpunten aanleiding geven. Omgekeerd bezit echter niet iedere kromme van de graad n voor $n \geqq 3$ een dergelijke parametervorm.

Wij bewijzen thans de volgende stelling. Zijn A,B,C en D 4 punten van een kegelsnede en is P een willekeurig punt dier kegelsnede, dan is de dubbelverhouding (PA,PB,PC,PD) onafhankelijk van de keuze van P.

Bewijs: Laat de punten A,B,C,D en P door een parametervoorstelling van het type (7) gegeven zijn, waarbij ze resp. door de parameterwaarden $\alpha_1, \alpha_2;\ \beta_1, \beta_2;\ \gamma_1, \gamma_2;\ \delta_1, \delta_2;\ \pi_1, \pi_2$ gegeven worden. Op de rechte AP ligt ook het punt

$$A' = (a_1(\pi_2\alpha_1+\pi_1\alpha_2)+b_1\pi_2\alpha_2,\ a_2(\pi_2\alpha_1+\pi_1\alpha_2)+b_2\pi_2\alpha_2, a_3(\pi_3\alpha_1+\pi_1\alpha_3)+b_3\pi_3\alpha_3) =$$
$$= \alpha_1 Q + \alpha_2 R,$$

waarin de punten

$$Q(a_1\pi_2, a_2\pi_2, a_3\pi_2) \text{ en } R(a_1\pi_1 + b_1\pi_2,\ a_2\pi_1 + b_2\pi_2,\ a_3\pi_1 + b_3\pi_2)$$

onafhankelijk zijn van A. De vergelijking van AP luidt dan

$$\alpha_1(xpq) + \alpha_2(xpr) = 0.$$

Evenzo luidt de vergelijking van BP

$$\beta_1(xpq) + \beta_2(xpr) = 0,$$

enz., zodat de dubbelverhouding (AP,BP,CP,DP) gelijk is aan de dubbelverhouding der getallen $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\frac{\beta_1}{\beta_2}$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ en $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ en dus onafhankelijk is van de keuze van het punt P.

Omgekeerd, als men twee projectieve waaiers beschouwt met toppen P en P', waarbij aan een rechte $u = \lambda v + \mu w$ van P een rechte $u' = \lambda v' + \mu w'$ van P' toegevoegd is (λ, μ variabel) dan voldoet het snijpunt van u en u' aan $\lambda v + \mu w = 0$; $\lambda v' + \mu w' = 0$, waaruit de meetkundige plaats dier snijpunten volgt door eliminatie van λ en μ, hetgeen ons de tweede graadsbetrekking $vw' - wv' = 0$ oplevert, zodat de snijpunten van overeenkomstige rechten uit projectieve waaiers een kegelsnede is.

Opg. 21. Wat gebeurt er als die waaiers perspectief zijn?

Opg. 22. Bepaal de m.p. der verbindingslijnen van overeenkomstige punten van twee projectieve puntenreeksen. Onderzoek ook het geval, dat die reeksen perspectief zijn.

Een gegeven heet enkelvoudig als het leidt tot één betrekking in de coëfficiënten der kegelsnede. Leidt het tot n betrekkingen dan heet het n-voudig.

Een kegelsnede is door 5 enkelvoudige gegevens bepaald, want in zijn vergelijking treden 6 homogene coëfficiënten op, waardoor de kegelsnede wordt vastgelegd. Uit de zoëven gevonden resultaten blijkt eveneens dat een kegelsnede bepaald is door 5 punten. Kies nl. 2 ervan tot top der waaiers, waarvan dan de verbindingslijnen met de drie overige punten drie paar corresponderende rechten dier waaiers zijn, waardoor hun projectieve verwantschap bekend is.

Duaal blijkt: Een kegelsnede is bepaald door 5 zijner raaklijnen.

Men kan in het algemeen 5 onafhankelijke eisen opleggen aan een kegelsnede. Of er 1 of meer kegelsneden voldoen aan die eisen, hangt daarvan af of zij aanleiding geven tot lineaire betrekkingen in de te bepalen coëfficiënten of niet.

Zo bestaat er dus een kegelsnede, die door 4 gegeven punten gaat en waarvoor 2 andere gegeven punten poolverwant zijn en dus ook 1 kegelsnede, die gaat door 4 gegeven punten en raakt aan een gegeven rechte door één dier punten.

Opg. 23. Bewijs dit.

Opg. 24. Het geven van een raaklijn met raakpunt is een tweevoudig gegeven.

Als algemener geval bewijze men dat het geven van een punt met zijn poollijn een tweevoudig gegeven is.

Opg. 25. Het geven van een pooldriehoek is een drievoudig gegeven.

Uit Opg. 25 volgt, dat twee willekeurige driehoeken i.h.a. niet pooldriehoeken kunnen zijn van een kegelsnede. (Dat zou tot $3 + 3 > 5$ gegevens leiden). In bijzondere gevallen kan dat echter wel. Kies nl. de ene pooldriehoek tot gronddriehoek. Dan luidt de vergelijking der gezochte kegelsnede in ieder geval $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$. Zijn de hoekpunten P,Q,R der andere pooldriehoeken $P(p_1,p_2,p_3)$ enz., dan moet gelden:

$$\begin{cases} a_{11}p_1q_1 + a_{22}p_2q_2 + a_{33}p_3q_3 = 0 \\ a_{11}p_1r_1 + a_{22}p_2r_2 + a_{33}p_3r_3 = 0 \\ a_{11}q_1r_1 + a_{22}q_2r_2 + a_{33}q_3r_3 = 0, \end{cases}$$

dus

$$\begin{vmatrix} p_1q_1 & p_2q_2 & p_3q_3 \\ p_1r_1 & p_2r_2 & p_3r_3 \\ q_1r_1 & q_2r_2 & q_3r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen dan en slechts dan optreedt als de hoekpunten van beide pooldriehoeken op een kegelsnede liggen.

Opg. 26. Bewijs dat.

Opg. 27. Hoeveel kegelsneden door 3 gegeven punten raken i.h.a. aan 2 gegeven rechten?

Tenslotte vermelden wij nog enige affiene en metrische eigenschappen der kegelsneden. Wij kiezen weer eerst een rechte als oneigenlijke en daarna twee punten daarop als cirkelpunten.

Definitie. Een reële kegelsnede heet een parabool als zij raakt aan de oneigenlijke rechte. Snijdt zij deze in reële punten dan heet zij een hyperbool, anders een ellips. Het middelpunt van een kegelsnede is de pool der oneigenlijke rechte. Een parabool bezit geen eigenlijk middelpunt. Een middellijn is een rechte door het middelpunt, dus een rechte met een oneigenlijke pool. Toegevoegde middellijnen zijn poolverwante middellijnen. Hun richtingen noemt men toegevoegd.

Opg. 27. Bewijs dat de middens van evenwijdige koorden van een kegelsnede op een rechte lijn liggen, waarvan de richting toegevoegd is aan die der koorden. Die m.p. gaat ook door de raakpunten der raaklijnen, die evenwijdig lopen met die koorden.

Opg. 28. Kiest men twee toegevoegde middellijnen en de oneigenlijke rechte tot zijden van de gronddriehoek van het coördinatenstelsel, dan is de vergelijking van een ellips resp. hyperbool te brengen in de gedaante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

waarin a en b reële getallen zijn en $x = \frac{x_1}{x_3}$; $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Opg. 29. Kiest men bij een parabool een raaklijn, de verbindingslijn van het raakpunt en het oneigenlijke punt en de oneigenlijke rechte tot zijden van de gronddriehoek, dan is de vergelijking der parabool te brengen in de gedaante $y^2 = 2px$, waarin x en y gekozen worden als in opg. 28.

Opg. 30. Kiest men bij een hyperbool de twee asymptoten en de oneigenlijke rechte tot zijden van de gronddriehoek, dan is de vergelijking van die hyperbool te brengen in de gedaante $xy = c$ met x en y als in opg. 28.

Wij vermelden nu nog enige metrische eigenschappen. Loodrechte toegevoegde middellijnen van een kegelsnede noemt men zijn assen. De oneigenlijke punten van toegevoegde middellijnen vormen een involutie. De oneigenlijke punten van loodrechte lijnen vormen de orthogonale involutie, die elliptisch is. Dan bezitten, zoals wij in § 18 zagen beide involuties een reëel gemeenschappelijk paar, dat de asrichtingen der kegelsnede aangeeft en waardoor de assen bepaald zijn.

Bij de parabool is de eerste der beide involuties parabolisch en dus ontaard. Hier verstaat men onder de as die rechte door het oneigenlijke punt, die optreedt als verbindingslijn van de middens van erop loodrecht staande evenwijdige koorden.

<u>Opg. 31.</u> Bij ellips en hyperbool liggen assen en asymptoten harmonisch.

<u>Definitie.</u> Brandpunten van een kegelsnede zijn snijpunten der raaklijnen uit de cirkelpunten aan de kegelsnede. Die 4 raaklijnen vormen een omschreven vierhoek EFE'F' van de kegelsnede waarvoor een eerder gevonden stelling geldt, die ons leert, dat de verbindingslijnen EE' en FF' van overstaande hoekpunten elkaar in een punt O snijden, dat poolverwant is met IJ, dus het middelpunt is der kegelsnede. Verder zijn EE' en FF' loodrecht, omdat zij harmonisch zijn met OI en OJ en tenslotte is OE = OE' want E en E' liggen harmonisch met O en het oneigenlijke punt van EE'. Analoog OF = OF'. Bijgevolg liggen op elk der assen van een kegelsnede twee brandpunten.

Het is duidelijk, dat een kegelsnede geen 4 reële brandpunten heeft, als men I en J imaginair kiest, want anders was de vierhoek EE'FF' reëel en dus ook zijn snijpunten met de reële oneigenlijke rechte.

Omdat I en J toegevoegd zijn, raakt de toegevoegd complexe rechte van de complexe rechte EI ook aan de kegelsnede. Laat dat JE' zijn. Dan is het snijpunt F van IE en JE' reëel. Evenzo is het andere brandpunt F' reëel.

Een reële kegelsnede bezit dus 2 reële en 2 toegevoegd complexe brandpunten.

Zij F een brandpunt van een kegelsnede. Twee poolverwante rechten door F zijn dan harmonisch met de isotrope raaklijnen uit F aan de kegelsnede en dus loodrecht en omgekeerd twee loodrechte rechten door F zijn poolverwant.

<u>Opg. 32.</u> Als PA en PB een kegelsnede zodanig raken, dat AB door een brandpunt F gaat, dan is $FP \perp AB$.

<u>Definitie.</u> De poollijn van een brandpunt van een kegelsnede heet een richtlijn.

<u>Opg. 33.</u> Zij ABC een raakdriehoek van een kegelsnede (C niet op de kegelsnede). Als F een brandpunt dier kegelsnede is, dan is $\angle AFC = \angle BFC$.

<u>Opg. 34.</u> Een parabool heeft één eigenlijk brandpunt, gelegen op de as.

Definitie. Een kegelsnede is een orthogonale hyperbool als haar ymptoten loodrecht op elkaar staan. Een kegelsnede is een cirkel, als zij door de cirkelpunten gaat.

Opg. 35. Bij de cirkel staan toegevoegde middellijnen loodrecht op elkaar. Bij de orthogonale hyperbool maken zij gelijke hoeken met de asymptoten.

Opg. 36. Een hoeveelvoudig gegeven is het voor een kegelsnede om te zijn parabool; cirkel; orthogonale hyperbool?

Opg. 37. Als 3 kegelsneden elk door twee punten P en Q gaan, dan gaan de gemeenschappelijke koorden van steeds twee hunner, die niet door P en Q gaan, door één punt (Stelling van Sturm). Wat vindt men als P en Q cirkelpunten zijn?

Opg. 38. (Stelling van Pascal) Als ABCDEF een in een kegelsnede ingeschreven zeshoek is, dan zijn de snijpunten (AB,DE), (BC,EF), (CD,FA) concurrent (Maak gebruik van opg. 37 met P en Q in A en D, waarbij 2 der 3 kegelsneden ontaard zijn.

Opg. 39. Formuleer de duale stelling van die van Pascal, welke naar Brianchon wordt genoemd.

§ 22. Lineaire verzamelingen van kegelsneden.

Stellen $K_1 = 0$ en $K_2 = 0$ twee verschillende kegelsneden voor, dan noemt men de verzameling

(1) $$\lambda K_1 + \mu K_2 = 0$$

een kegelsnedenbundel of -schaar al naar gelang K_1 en K_2 beide quadratisch zijn in puntcoördinaten of in lijncoördinaten. Wij onderstellen in het vervolg dat het eerste het geval is. Vergelijking (1) stelt oneindig veel kegelsneden voor, die men de exemplaren van de bundel noemt.

Is S een snijpunt van K_1 en K_2, dan ligt S voor elke (λ, μ) op de kegelsnede (1), dus op elk exemplaar van de bundel. In het algemeen bestaan er 4 dergelijke punten S. Men noemt ze de basispunten van de bundel.

Opg. 1. De bundel (1) wordt ook gevonden door uit te gaan van twee willekeurig verschillende exemplaren K' en K" van die bundel en dan de verzameling

$$\lambda K' + \mu K'' = 0$$

te beschouwen.

Opg. 2. De verzameling van de kegelsneden, die gaan door 4 punten, waarvan er geen 3 collineair zijn, is een kegelsnedenbundel. Wat vindt men als 3 der punten collineair zijn, maar het 4^e hiermede niet collineair is?

Opg. 3. Door een willekeurig punt van het platte vlak gaat i.h.a. precies één exemplaar van de bundel. Voor welke punten is dat niet het geval?

Beschouwt men de kegelsneden $K_1 = \sum a_{ij}x_ix_j$ en $K_2 = \sum b_{ij}x_ix_j$; dan luidt (1)

(2) $$\sum(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})x_ix_j = 0.$$

Wenst men te onderzoeken of er exemplaren van de bundel (1) of (2) zijn, die raken aan een gegeven rechte $v(v_1,v_2,v_3)$, dan kan men (2) als lijnenkegelsnede opvatten, waarvan elke coëfficiënt als minor van een element van de determinant $|\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}|$ quadratisch is in λ en μ. Eist men dat de rechte v op die lijnenkegelsnede ligt, dan geeft substitutie van (v_1,v_2,v_3) in haar vergelijking een quadratische vergelijking voor $\lambda:\mu$, zodat er i.h.a. twee exemplaren van een bundel raken aan een gegeven rechte.

Die exemplaren zijn ook op andere wijze te vinden. Daartoe bewijzen wij eerst dat een kegelsnedenbundel een rechte volgens een involutie snijdt. Zonder bezwaar mag men het grondstelsel zo kiezen, dat die rechte tot vergelijking heeft $x_3 = 0$. De snijpunten van (1) en $x_3 = 0$ vindt men dan uit

$$\lambda\,(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + \mu(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0.$$

Deze laatste betrekking is een bundel puntenparen, dus een involutie (zie blz. 144).

Wenst men nu de exemplaren van een bundel te vinden, die een gegeven rechte v raken, dan snijdt zo'n exemplaar v in samengevallen snijpunten, dus in de dubbelpunten der op v door de bundel bepaalde involutie. Zijn deze twee punten gevonden, dan zijn de gezochte kegelsneden door 5 hunner punten bepaald.

Opg. 4. Hoeveel exemplaren van een bundel raken aan een rechte door een basispunt?

Zoëven zagen wij, dat een exemplaar van een bundel kegelsneden, geschreven in lijncoördinaten, een vergelijking bezit, die quadratisch is in λ en μ en dus niet een element is van een schaar, waarin λ en μ slechts lineair mogen optreden. Duaal is evenmin een kegelsnedenschaar op te vatten als kegelsnedenbundel. Er zijn echter bijzondere gevallen, waarin dat wel kan (bundelschaar).

Opg. 5. De kegelsneden, die twee gegeven rechten in twee daarop gegeven punten raken, vormen een bundelschaar.

Wenst men de ontaarde exemplaren van een bundel te vinden, dan moeten λ en μ zo worden gekozen, dat $|\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}| = 0$, hetgeen leidt tot een cubische vergelijking in $\lambda:\mu$, waaruit i.h.a. drie ontaarde bundelexemplaren gevonden worden. Bezit de bundel 4 basispunten A,B,C en D, dan zijn die drie ontaarde exemplaren kennelijk de lijnenparen AB,CD; AC,BD; AD,BC.

Opg. 6. Een volledige vierhoek snijdt een willekeurige rechte in 6 punten, die 3 paren vormen, die tot een involutie behoren.

De middelpunten dier ontaarde exemplaren zijn dus juist diagonaalpunten van de volledige vierhoek der basispunten. Die diagonaaldriehoek is een pooldriehoek voor elk der ontaarde exemplaren en dus (zoals wij straks laten zien) voor alle exemplaren, wat trouwens ook volgt uit de bekende volledige vierhoekconstructie bij een willekeurig exemplaar. Wij worden hier gevoerd naar de pooltheorie bij bundels en gaan thans de bundelpoolverwantschap onderzoeken.

Allereerst merken wij op, dat (1) in matrixnotatie te schrijven is in de gedaante

$$\lambda(X'AX) + \mu(X'BX) = 0 \text{ of } X'(\lambda A + \mu B)X = 0.$$

Zij P een willekeurig punt. De poollijn van P t.o.v. een exemplaar van de bundel luidt dan

$$\lambda P'AX + \mu P'BX = 0.$$

Deze poollijnen vormen dus een stralenwaaier gaande door het snijpunt $\overline{P}$ van de poollijnen $P'AX = 0$ en $P'BX = 0$ van P t.o.v. twee exemplaren van de bundel. Omgekeerd moet het zo aan $\overline{P}$ toegevoegde punt weer in P vallen, omdat de poollijnen van $\overline{P}$ t.o.v. twee exemplaren door P gaan. De verwantschap tussen P en $\overline{P}$ is dus involutorisch, maar het is geen projectieve verwantschap. Dat blijkt trouwens daaruit dat er zodanige uitzonderingspunten bestaan als niet bij een projectieve verwantschap kunnen optreden. Het is nl. mogelijk dat de poollijnen van P t.o.v. twee (en dus van alle) exemplaren samenvallen. De poollijn van P t.o.v. twee ontaarde exemplaren vallen dus ook samen, waaruit blijkt, dat zo'n uitzonderingspunt P een diagonaalpunt is van de volledige vierhoek der basispunten. Kiezen wij de diagonaaldriehoek tot gronddriehoek van het coördinatenstelsel, dan moet een willekeurig exemplaar van de bundel een vergelijking hebben van de gedaante

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0,$$

terwijl de drie ontaardingen gevonden worden door te nemen $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ of $a_3 = 0$. De bundelvergelijking luidt dan

$$(3) \qquad (\lambda a_1+\mu b_1)x_1^2 + (\lambda a_2+\mu b_2)x_2^2 + (\lambda a_3+\mu b_3)x_3^2 = 0.$$

Van een punt $P(p_1,p_2,p_3)$ zijn de poollijnen t.o.v. de exemplaren de rechten

$$(\lambda a_1+\mu b_1)p_1x_1 + (\lambda a_2+\mu b_2)p_2x_2 + (\lambda a_3+\mu b_3)p_3x_3 = 0.$$

De top van deze waaier is het punt $\overline{P}$ met

$$\overline{p}_1 = (ab)_{23}p_2p_3;\ \overline{p}_2 = (ab)_{31}p_3p_1;\ \overline{p}_3 = (ab)_{12}p_1p_2.$$

Hieruit ziet men dat inderdaad de verwantschap tussen P en $\overline{P}$ niet lineair is. De verwantschap is wel omkeerbaar (afgezien van de zijden der diagonaaldriehoek, dus de punten waarvoor p_1, p_2 of $p_3 = 0$ is). Men vindt dan

$$\overline{p}_2\overline{p}_3 = \frac{c}{(ab)_{12}}\,p_1;\ \overline{p}_3\overline{p}_1 = \frac{c}{(ab)_{31}}\,p_2;\ \overline{p}_1\overline{p}_2 = \frac{c}{(ab)_{23}}\,p_3,$$

waarin

$$C = (ab)_{12}(ab)_{23}(ab)_{31}p_1p_2p_3,$$

dus

$$(p_1,p_2,p_3) = ((ab)_{23}\bar{p}_2\bar{p}_3,\ (ab)_{31}\bar{p}_3\bar{p}_1,\ (ab)_{12}\bar{p}_1\bar{p}_2).$$

De transformatie valt dus inderdaad samen met haar omkering.

Aan een rechte $\sum_{i=1}^{3} u_i x_i = 0$ wordt door de transformatie toegevoegd een kegelsnede

(4) $$(ab)_{23}u_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + (ab)_{31}u_2\bar{x}_3\bar{x}_1 + (ab)_{12}u_3\bar{x}_1\bar{x}_2 = 0,$$

gaande door de diagonaalpunten. Omgekeerd worden aan deze kegelsnede toegevoegd de oorspronkelijke rechte èn de drie zijden van de diagonaaldriehoek.

Opg. 7. Verklaar dit laatste.

Deze kegelsnede (de elfpuntskegelsnede dier rechte genoemd) bestaat niet alleen uit de punten, die in onze quadratische bundelpoolverwantschap toegevoegd zijn aan de punten der rechte u, maar ook de polen van u t.o.v. de exemplaren van de bundel. Immers de pool t.o.v. (3) is het punt met coördinaten $\frac{u_i}{\lambda a_i + \mu b_i}$ $(i = 1,2,3)$ en na substitutie in (4) ziet men direct in, dat dit punt op de elfpuntskegelsnede van (4) ligt. De elfpuntskegelsnede draagt haar naam omdat zij gaat:

1): door de 3 diagonaalpunten;

2): door een punt op een zijde van de basispuntenvierhoek dat harmonisch ligt met het snijpunt dier zijde en u t.o.v. de basispunten op die zijde; zulke punten zijn er in het algemeen 6.

3): door de 2 raakpunten op u van de bundelexemplaren, die u raken.

Opg. 8. Bewijs 2) en 3).

Wij geven nu nog enige metrische bijzondere bundels.

Bevat een bundel een cirkel, dan behoren de cirkelpunten I en J tot de involutie, volgens welke de bundel de oneigenlijke rechte snijdt. Zij A_1 en A_2 de dubbelpunten dier involutie, dan zijn de asrichtingen van een willekeurig exemplaar harmonisch met I en J en met de oneigenlijke punten der asymptoten van dat exemplaar; zij zijn dus juist A_1 en A_2, zodat alle exemplaren van de bundel evenwijdige assen hebben.

Opg. 9. Drie der bisectrices van de diagonaaldriehoek van een koordenvierhoek zijn evenwijdig.

Opg. 10. De middens der 6 zijden van een volledige koordenvierhoek en de 3 diagonaalpunten liggen op een orthogonale hyperbool, waarvan de assen evenwijdig lopen met de bisectrices van de diagonaaldriehoek.

Opg. 11. Een kegelsnedenbundel bevat i.h.a. één orthogonale hyperbool.

Bevat een kegelsnedenbundel ten minste twee orthogonale hyperbolen, dan is haar doorsnijding met de oneigenlijke rechte de orthogonale involutie, zodat alle exemplaren van de bundel orthogonale hyperbolen zijn. Wij vinden zo'n bundel door uit te gaan van twee stel loodrechte rechten en zien en passant dat door hun vier snijpunten nog een derde stel loodrechte rechten gaat (zodat blijkt, dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan). De elfpuntskromme van de oneigenlijke rechte blijkt nu een kromme te zijn door de dubbelpunten I en J der bundelinvolutie op de oneigenlijke rechte, dus een cirkel. De overige 9 punten van deze cirkel zijn juist de 9 punten waaraan de negenpuntscirkel van de driehoek van 3 der basispunten zijn naam dankt.

Analoge duale resultaten gelden bij scharen kegelsneden. Hier treden vier basisrechten op waaraan alle exemplaren raken. In het algemeen bezit een schaar drie ontaarde exemplaren (puntenparen), die liggen in overstaande hoekpunten van de volledige vierzijde der basisrechten. Ook hier treedt een diagonaaldriehoek op, die pooldriehoek is voor alle exemplaren.

Aan een rechte is nu in de schaarpoolverwantschap een rechte toegevoegd, aan een punt een elfrechtenkegelsnede, die raakt aan de 3 zijden van de diagonaaldriehoek der basisrechten en aan de twee rechten, die raaklijnen zijn van de twee schaarexemplaren door het beschouwde punt.

Opg. 12. Welke zijn de overige 6 raaklijnen van de elfrechtenkegelsnede, waaraan zij haar naam dankt?

Wij geven nog enkele metrische bijzonderheden.

De polen der oneigenlijke rechte t.o.v. de exemplaren van een schaar zijn collineair. Bijgevolg liggen de middens der diagonalen van een volledige vierzijde op één rechte. Is die vierzijde een raaklijnenvierhoek, dan gaat die rechte ook door het middelpunt van haar ingeschreven cirkel.

Zijn twee overstaande hoekpunten van de basisrechtenvierzijde de cirkelpunten I en J dan krijgen wij een schaar waarvan alle exemplaren dezelfde brandpunten bezitten (confocale schaar). De raaklijnen door een willekeurig punt P aan de schaarexemplaren vormen een involutie; de dubbelstralen ervan zijn de raaklijnen u en v der schaarexemplaren door P. Tot die involutie behoren PF en PF' (waarbij F en F' twee brandpunten zijn) en ook PI en PJ. De rechten u en v zijn dus harmonisch met PI en PJ dus loodrecht en verder harmonisch met PF en PF', zodat de raaklijn in een punt P van een kegelsnede de hoek FPF' of zijn nevenhoek halveert.

De kegelsneden door 4 verschillende punten vormen zoals wij boven zagen een bundel. Ook is dat het geval met de kegelsneden door 3 gegeven punten, die in een dier punten aan een gegeven rechte raken. Zij nl. dit laatste punt het punt (0,0,1) en de andere (1,0,0) en (0,1,0). Kies het coördinatenstelsel nog zo, dat de genoemde rechte tot vergelijking bezit $x_1 + x_2 = 0$. Men ziet gemakkelijk in, dat iedere kegelsnede van de bundel dan een vergelijking van de gedaante $ax_1x_2 + b(x_1+x_2)x_3 = 0$ bezit en dus tot de bundel behoort, die door de exemplaren $x_1x_2 = 0$ en $(x_1+x_2)x_3 = 0$ wordt bepaald.

Opg. 12. Onderzoek de ligging van eventuele gemeenschappelijke pooldriehoeken van alle exemplaren.

De kegelsneden, die twee gegeven rechten in twee gegeven punten raken, vormen zoals wij al opmerkten een bundel (en een schaar).

De kegelsneden, die een gegeven kegelsnede k in 1 punt raken en ermee verder nog slechts een punt gemeen hebben, waar geen raking optreedt, vormen ook een bundel.

Kies het coördinatenstelsel zo, dat k tot vergelijking heeft $x_1^2 - 2x_2x_3 = 0$, waarbij (0,0,1) het raakpunt en (0,1,0) het snijpunt zij. Een kegelsnede met de gezochte eigenschap heeft dan zeker de gedaante $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$. Haar snijpunten met k volgen uit $a_{11}x_2x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 = 0$ en zijn dus, behalve het raakpunt op $x_2 = 0$ en k, de punten op k en $a_{11}x_3 + a_{12}x_1 + a_{23}x_3 = 0$. Het moeten de punten (0,0,1) en (0,1,0) zijn, dus moet $a_{23} = - a_{11}$ zijn, waaruit volgt, dat die gezochte kegelsnede de gedaante

$$a_{11}(x_1^2 - 2x_2x_3) + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

bezit en dus tot een bundel behoort, die bepaald wordt door k en de rechten $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$. Men zegt, dat in dit geval de kegelsneden van de bundel elkaar in het punt (0,0,1) osculeren en spreekt van een osculerende bundel. Het punt (0,0,1) telt 3-voudig als snijpunt van een kegelsnede uit de bundel met k; deze kegelsneden hebben aldaar een raking van de 2^e orde. De cirkel, die een kegelsnede k in een punt P osculeert, noemt men de kromtecirkel van k in P. Snijdt deze k ook nog in Q, dan is de bisectrix van de hoek tussen PQ en de raaklijn in P aan k evenwijdig aan een asrichting van k, waardoor Q bepaald is en de kromtecirkel ook.

Tenslotte bestaat nog een hyperosculerende kegelsnedenbundel, dat is de verzameling der kegelsneden, die met een gegeven kegelsnede één en slechts één punt gemeen heeft (waar"4 puntige snijding" d.w.z. een raking van de 3^e orde plaats vindt).

Opg. 13. Ga dit na.

Zijn 3 kegelsneden $K_1(x) = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ gegeven, dan heet de verzameling der kegelsneden

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i K_i(x) = 0$$

een kegelsnedennet. Hierbij is ondersteld, dat geen der drie kegelsneden lineair afhankelijk is van de beide andere. Duaal hiertegenover staat een weefsel.

Een figuur, die op analoge wijze lineair opgebouwd is uit 4 puntkegelsneden heet een kluwen en een, die uit 5 is opgebouwd een legioen. Hierop gaan wij niet verder in.

Opg. 14. Bewijs dat de meetkundige plaats der dubbelpunten der ontaarde exemplaren van een kegelsnede met een kromme van de derde graad is. Men noemt dit de kernkromme van het net.

§ 23. De ruimte.

Een punt is een stel van 4 verhoudingsgetallen, die niet alle nul zijn. Twee stellen verhoudingsgetallen stellen dan en slechts dan hetzelfde punt voor, als zij evenredig zijn. Men schrijft kortweg $A(a_1,a_2,a_3,a_4)$, waarbij het de bedoeling is, dat a_1,a_2,a_3,a_4 de verhoudingsgetallen van het punt A zijn.

Met $C = \lambda A + \mu B$ bedoelen wij weer, dat deze relatie geldt voor elk der verhoudingsgetallen, dus $c_i = \lambda a_i + \mu b_i$ $(i = 1,2,3)$; in dit geval heet C lineair afhankelijk van A en B. De matrix der verhoudingsgetallen heeft dan de rang 2. Analoge betekenissen hebben de schrijfwijzen

$D = \lambda A + \mu B + \nu C$ en $E = \lambda A + \mu B + \nu C + \kappa D$.

Indien A,B,C en D vier willekeurige punten zijn, zodanig dat de matrix hunner verhoudingsgetallen de rang 4 bezit, dan is voor een willekeurig punt E de schrijfwijze $E = \lambda A + \mu B + \nu C + \kappa D$ mogelijk. Men neme nl.

$$\lambda = \frac{(ebcd)}{(abcd)}, \quad \mu = \frac{(aecd)}{(abcd)}, \quad \nu = \frac{(abed)}{(abcd)}, \quad \kappa = \frac{(abce)}{(abcd)}.$$

Deze uitdrukkingen bestaan allen, omdat $(abcd) \neq 0$. Is voorts E niet lineair afhankelijk van minder dan 4 der gegeven punten A,B,C en D, dan is geen der getallen λ, μ, ν en κ gelijk aan nul.

De getallen λ, μ, ν, κ worden niet volledig bepaald door de punten A.B.C,D en E; zij zijn het pas als gegeven is welke keuze voor de verhoudingsgetallen dier punten is gedaan.

Zij bij bovenstaande keuze van A,B,C,D en E nog een punt $X(x_1,x_2,x_3,x_4)$ gegeven. Dan bestaan er, analoog aan het voorgaande, getallen π, ρ, σ, τ, zodanig dat $X = \pi A + \rho B + \sigma C + \tau D$. Men noemt de verhoudingen

$$X_1 = \frac{\pi}{\lambda}, \quad X_2 = \frac{\rho}{\mu}, \quad X_3 = \frac{\sigma}{\nu}, \quad X_4 = \frac{\tau}{\kappa}$$

de coördinaten van X ten opzichte van het coördinatenstelsel ABCDE. De verhoudingen der coördinaten zijn onafhankelijk daarvan, welke keuze men doet voor de verhoudingsgetallen der punten A,B,C,D,E en X.

Het verband tussen de verhoudingsgetallen en de coördinaten is dus gegeven door formules van de gedaante

$$(1) \qquad X_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \qquad (i = 1,2,3,4).$$

Deze formules zijn homogeen en lineair in de verhoudingsgetallen (x_1,x_2,x_3,x_4) en de coëfficiëntenmatrix (a_{ij}) bezit de rang 4, want

$$a = |a_{ij}| = \frac{1}{(ebcd)(aecd)(abed)(abce)} \begin{vmatrix} (bcd)_{234} & (bcd)_{134} & (abd)_{124} & (abc)_{123} \\ (acd)_{234} & (acd)_{134} & (abd)_{124} & (abc)_{123} \\ (abd)_{234} & (abd)_{134} & (abd)_{124} & (abc)_{123} \\ (abc)_{234} & (abc)_{134} & (abd)_{124} & (abc)_{123} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(abcd)^3}{(ebcd)(aecd)(abed)(abce)}$$ (verg. blz. 42 bovenste regel)

is ongelijk aan nul.

<u>Opg. 1.</u> Bepaal de coördinaten van A,B,C,D,E t.o.v. het stelsel ABCDE.

Kiezen we nu een coördinatenstelsel $X_1X_2X_3X_4X_5$ met

$X_1 = (1,0,0,0)$; $X_2 = (0,1,0,0)$; $X_3 = (0,0,1,0)$; $X_4=(0,0,0,1)$; $X_5=(1,1,1,1)$, dan zijn de coördinaten van het punt $X(x_1,x_2,x_3,x_4)$ t.o.v. dit stelsel juist gelijk aan x_1,x_2,x_3,x_4, want men heeft dan $\lambda = \mu = \nu = \kappa = 1$; $\pi = x_1, \rho = x_2, \sigma = x_3, \tau = x_4$. Het heeft dus geen zin om verder onderscheid te maken tussen coördinaten en verhoudingsgetallen. De laatste zijn coördinaten t.o.v. een speciaal gekozen coördinatenstelsel.

De betrekkingen(1) geven dus het verband der coördinaten van eenzelfde punt t.o.v. de twee stelsels ABCDE en $X_1X_2X_3X_4X_5$. Indien men uit (1) de grootheden x_1,x_2,x_3,x_4 oplost, wat mogelijk is wegens $a \neq 0$, vindt men de inverse transformatie

$$x_i = \sum_{j=1}^{4} \frac{A_{ij}}{a} X_j \qquad (i = 1,2,3,4), \tag{2}$$

waarin weer A_{rs} de minor is van a_{rs} in de matrix (a_{ij}).

Bezit hetzelfde punt X t.o.v. een grondstelsel A'B'C'D'E' coördinaten (x_1',x_2',x_3',x_4'), dan is het verband tussen deze coördinaten en de oorspronkelijke (x_1,x_2,x_3,x_4) wegens (1) gegeven door

$$x_i' = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}' x_j \qquad (i = 1,2,3,4);$$

hierin hangen de coëfficiënten a_{ij}' net zo af van A',B',C',D',E' als a_{ij} van A,B,C,D,E. Bijgevolg heeft men wegens (2)

$$x_i' = \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} a_{ij}' \frac{A_{kj}}{a} X_k = \sum_{k=1}^{4} b_{ik} X_k \qquad (i = 1,2,3,4),$$

zodat het verband tussen de coördinaten van eenzelfde punt t.o.v. twee willekeurige coördinatenstelsels ook gegeven wordt door een homogene lineaire transformatie. Omdat zowel $a = |a_{ij}|$ als $a' = |a_{ij}'|$ van nul verschilt, is dat ook het geval met de determinant $|b_{ik}|$, die volgens het vermenigvuldigingstheorema van determinanten van Cauchy gelijk is aan

$$a' \left| \frac{A_{kj}}{a} \right| = a' \frac{a^2}{a^3} = \frac{a'}{a} \neq 0.$$

De transformatie

$$x_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\bar{x}_j \qquad (i = 1,2,3,4)$$

schrijven wij weer in matrixnotatie $X = A\bar{X}$, waarin A de matrix (a_{ij}) en

A de matrix (a_{ij}) en X de staande matrix $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ aangeeft. Past men nu toe

de transformatie $\bar{X} = B\bar{\bar{X}}$, dan heeft men

$$X = A(B\bar{\bar{X}}) = (AB)\bar{\bar{X}} = C\bar{\bar{X}},$$

waarbij $C = AB$.

Verder, als $X = A\bar{X}$, dan is $\bar{X} = A^{-1}X$, waarbij A^{-1} de inverse matrix is van de matrix A; verg. formule (2). Men heeft verder $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, waarbij I de eenheidsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ is.}$$

Hieruit volgt, dat de homogene lineaire transformaties met determinant $\neq 0$ een groep vormen. Deze groep is niet commutatief, zoals door een eenvoudig voorbeeld aan te tonen is.

Indien twee grondstelsels ABCDE en A'B'C'D'E' gegeven zijn, is zoals wij hierboven zagen, de transformatiematrix vastgelegd. Is omgekeerd deze matrix (a_{ij}) met $|a_{ij}| \neq 0$ gegeven, dan geeft de transformatie $x_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}x'_j$ $(i=1,2,3,4)$ het verband aan van de coördinaten van eenzelfde punt X t.o.v. twee stelsels A,B,C,D,E en A',B',C',D',E'. Hierbij is in nieuwe coördinaten $A'(1,0,0,0)$ dus in oude $A'(a_{11},a_{21},a_{31},a_{41})$; analoog $B'(a_{12},a_{22},a_{32},a_{42})$ enz. en $E'(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}, a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24},\ldots)$

Zijn van 5 punten PQRST waarvan de coördinatenmatrix de rang 4 bezit de oude en nieuwe coördinaten gegeven, dan is daardoor de transformatie eveneens bepaald. Immers beschouw ook nog de coördinaten (X_1,X_2,X_3,X_4) t.o.v. het grondstelsel PQRST. Wij bepalen nu eerst het verband $x_i = \sum b_{ij}X_j$ tussen deze en de coördinaten (x_1,x_2,x_3,x_4). Direct door substitutie van coördinaten van P,Q,R en S ziet men in, dat

$$|b_{ij}| = \begin{vmatrix} f_1p_1 & f_2q_1 & f_3r_1 & f_4s_1 \\ f_1p_2 & f_2q_2 & f_3r_2 & f_4s_2 \\ f_1p_3 & f_2q_3 & f_3r_3 & f_4s_3 \\ f_1p_4 & f_2q_4 & f_3r_4 & f_4s_4 \end{vmatrix},$$

terwijl T ons leert, dat

$$t_i = f_1p_i + f_2q_i + f_3r_i + f_4s_i \qquad (i = 1,2,3,4),$$

waaruit wegens $(pqrs) \neq 0$ de getallen f_1,f_2,f_3,f_4 op ondubbelzinnige wijze kunnen worden bepaald en niet nul zijn, zodat $|b_{ij}| \neq 0$ is, waardoor de matrix (b_{ij}) is vastgelegd. Evenzo is de matrix (b'_{ij}) vastgelegd, die het ondubbelzinnig bepaalde verband tussen de coördinaten x'_i en X_i aangeeft, waarna het gewenste verband tussen x_i en x'_i onmiddellijk op ondubbelzinnige wijze gevonden wordt.

De transformatie $X = A\overline{X}$ laat nog een tweede interpretatie toe, nl. die waarbij in eenzelfde coördinatenstelsel aan een punt X een (ander) punt $\overline{X}$ wordt toegevoegd. Men spreekt dan van een projectieve transformatie, die X in $\overline{X}$ overvoert. Op grond van het bovenstaande is een projectieve transformatie bepaald door de matrix A of door van 5 punten te geven in welke punten zij door de transformatie worden overgevoerd.

De verzameling der punten X met $X = \lambda A + \mu B$, waarbij A en B twee willekeurige verschillende punten voorstellen heet een rechte. Deze gaat door A en B en is door deze twee punten bepaald. Zij is trouwens ook door 2 andere harer punten C en D bepaald, want is $C = \pi A + \rho B$, $D = \sigma A + \tau B$, dan is een punt $P = \lambda C + \mu D$ te schrijven in de gedaante

$$P = (\lambda\pi + \mu\sigma)A + (\lambda\rho + \mu\tau)B,$$

en dus gelegen op de rechte AB.

Opg. 2. Toon aan, dat elk punt van AB tevens op CD ligt.

Een rechte is dus door twee willekeurige harer punten bepaald. Zijn A,B,C en D vier punten van een rechte met $C = \lambda A + \mu B$, $D = \rho A + \sigma B$, dan noemt men (verg. § 18 en 19) $\frac{\rho}{\sigma} : \frac{\lambda}{\mu}$ de dubbelverhouding (ABCD) der 4 punten. Op grond van de overeenkomstige definities van dubbelverhouding van 4 punten op een rechte in de ruimte (§ 23) op een rechte in het platte vlak (§ 19) en op een rechte (§ 18), gelden de beschouwingen over dubbelverhoudingen uit § 18 evenzeer voor de zojuist gedefinieerde dubbelverhoudingen. In het bijzonder zijn dus ook harmonische en aequi-anharmonische puntenviertallen in de ruimte gedefinieerd. Ook gelden alle vlakke eigenschappen betreffende dubbelverhoudingen in ieder plat vlak van de ruimte.

Zij op PQ een punt R gegeven met $R = \lambda P + \mu Q$, dan voert de projectieve transformatie $X = A\overline{X}$ die drie punten over in punten $\overline{P},\overline{Q},\overline{R}$ met $P = A\overline{P}$, $Q = A\overline{Q}$, $R = A\overline{R}$, dus

$$A\overline{R} = \lambda A\overline{P} + \mu A\overline{Q} = A(\lambda \overline{P} + \mu \overline{Q}), \text{ dus } \overline{R} = \lambda\overline{P} + \mu\overline{Q}.$$

Bijgevolg voert een projectieve transformatie een rechte over in een rechte. Zij nog $S = \rho P + \sigma Q$, dan gaat S over in $\overline{S} = \rho\overline{P} + \mu\overline{Q}$, dus $(PQRS) = (\overline{P}\overline{Q}\overline{R}\overline{S})$, zodat blijkt dat een projectieve transformatie dubbelverhoudingen invariant laat.

Zijn A,B en C drie niet collineaire punten, dan noemt men de verzameling der punten P met $P = \lambda A + \mu B + \nu C$ een plat vlak. Dit vlak gaat door A,B,C. Kiest men 3 andere niet collineaire punten A',B' en C' in het platte vlak dan is iedere lineaire combinatie van A,B,C tevens een lineaire combinatie van A',B' en C' en omgekeerd, zodat een plat vlak door 3 willekeurige harer punten bepaald is.

Opg. 3. Bewijs dat.

Als een rechte twee punten met een vlak gemeen heeft, ligt zij er geheel in, d.w.z. al haar punten liggen in het vlak. Immers zijn die twee punten A en B en zij C een derde punt van het vlak, dat niet collineair is met A en B, dan is een punt P van de rechte AB te schrijven in de gedaante $P = \lambda A + \mu B = \lambda A + \mu B + 0 C$ en ligt dus in het vlak.

Een rechte en een vlak hebben tenminste één punt gemeen. Zij nl. AB de rechte en CDE het vlak. Men noet dus punten $S = \lambda A + \mu B$ bepalen met

$$\lambda A + \mu B = \rho C + \sigma D + \tau E.$$

Dit leidt tot een stelsel van 4 homogene vergelijkingen in λ, μ, ρ, σ en τ, die in het algemeen 1 oplossing hebben, die ons 1 snijpunt oplevert. Er zijn meer snijpunten als de rang der coëfficiëntennatrix ≤ 3 is, dus als van A,C,D en E de coördinatendeterminant nul is, dus als A een lineaire combinatie is van C,D en E en bijgevolg in het vlak CDE ligt. Evenzo moet B in CDE liggen. Dan ligt AB dus geheel in het vlak CDE.

Het vlak door de punten $P(p_1,p_2,p_3,p_4)$, $Q(q_1,q_2,q_3,q_4)$ en $R(r_1,r_2,r_3,r_4)$ bestaat uit die en slechts die punten X, waarvoor geldt

$X = \lambda P + \mu Q + \nu R$, hetgeen aequivalent is met $(pqrx) = 0$. Dit is een homogene lineaire vergelijking in puntcoördinaten. Omgekeerd stelt iedere dergelijke vergelijking $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ een plat vlak voor daar een willekeurig punt ervan een lineaire combinatie is van b.v. 3 willekeurige niet collineaire erop gelegen punten.

Opg. 4. Ga dit na.

Vier punten A,B,C en D zijn dus dan en slechts dan coplanair (dit is: gelegen in één vlak) als voor hun coördinaten geldt $(abcd) = 0$.

Een vlak is ook bepaald door de 4 coëfficiënten van haar vergelijking. Deze noemt men de vlakcoördinaten van het vlak. Zij zijn op een constante factor na bepaald. De vlakcoördinaten van het zojuist beschouwde vlak zijn dus de minoren van de derde orde van de matrix

$$\begin{Vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{Vmatrix}.$$

Opg. 5. Bepaal de coördinaten van het vlak door de punten $A(a^3,a^2,a,1)$, $B(b^3,b^2,b,1)$, $C(c^3,c^2,c,1)$ waarin $a \neq b$; $b \neq c$; $c \neq a$.

Opg. 6. Er is één en slechts één vlak dat gaat door een rechte en een punt erbuiten. Twee vlakken zijn dan en slechts dan verschillend als de matrix hunner vlakcoördinaten de rang 2 bezit.

Voeren wij nog in de liggende matrix $U = (u_1u_2u_3u_4)$, dan luidt de vergelijking van het vlak $\sum_{i=1}^{4} u_ix_i = 0$ in matrixnotatie $UX = 0$.

De punten die in twee vlakken U en V gelegen zijn, vormen een rechte. Als nl. A en B beide in beide vlakken liggen, ligt de rechte AB geheel in U en in V en omgekeerd als X in U en V ligt, heeft men $UX = 0$, $VX = 0$. Daar de matrix van dit stelsel de rang 2 bezit, is iedere oplossing een lineair compositum van 2 verschillende oplossingen, dus ieder punt in U en V ligt op de rechte door twee punten, die in U en V liggen. Een rechte lijn is dus te verkrijgen door lineaire combinatie van 2 punten of van twee vlakken. Ieder vlak nl. van de gedaante $\lambda U + \mu V$ is een vlak dat ook door de snijlijn van U en V gaat en op deze laatste wijze wordt de rechte niet gekarakteriseerd door de op haar gelegen punten, maar door de door haar gaande vlakken.

Drie vlakken $UX = 0$, $VX = 0$, $WX = 0$ hebben, als zij niet door één lijn gaan, één punt gemeen waarvan de coördinaten de minoren van de derde orde zijn van de matrix

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}.$$

Een eerste graadsvergelijking $\sum_{i=1}^{4} a_iu_i = 0$ in vlakcoördinaten stelt al die vlakken (u_1,u_2,u_3,u_4) voor, waarvoor het punt $A(a_1,a_2,a_3,a_4)$ voldoet aan de vergelijking $\sum_{i=1}^{4} a_i x_i = 0$, dus alle vlakken door A. Men zegt daarom wel, dat eerstgenoemde vergelijking de vergelijking is van het punt A in vlakcoördinaten. Haar coëfficiënten geven dan juist de puntcoördinaten van A aan.

Opg. 7. De vergelijking van het punt, dat ligt in 3 vlakken V,W en T luidt (uvwt) = 0, waarin (u_i) de lopende vlakcoördinaten zijn.

Hiermede hebben wij het ruimtelijke dualiteitsbeginsel gevonden, dat ons leert, dat in de projectieve ruimte elke eigenschap van punten, rechten en vlakken blijft gelden als men daarin de woorden "punt" en "vlak" verwisselt; tevens moeten dan de woorden (punt)coördinaten en vlakcoördinaten worden verwisseld.

Aan 4 vlakken U,V,W en T, die door één rechte gaan, kennen wij als volgt een dubbelverhouding toe: Zij $W = \lambda U + \mu V$; $T = \rho U + \sigma V$, dan is de dubbelverhouding der 4 vlakken (UVWT) = $\frac{\rho}{\lambda} : \frac{\sigma}{\mu}$.

Snijden wij de 4 vlakken met een rechte, die de snijlijn is van twee vlakken R en S, dan vindt men voor de coördinaten der 4 snijpunten A,B,C,D

$a_i = (urs)_i$; $b_i = (vrs)_i$; $c_i = (wrs)_i = \lambda(urs)_i + \mu(vrs)_i = \lambda a_i + \mu b_i$;

$d_i = (trs)_i = \rho(urs)_i + \sigma(vrs)_i = \rho a_i + \sigma b_i$,

dus $C = \lambda A + \mu B$, $D = \rho A + \sigma B$, dus (ABCD) = (UVWT), waarmede de hoofdstelling der projectieve meetkunde van de ruimte is gevonden.

Opg. 8. Formuleer (en bewijs indien dit nog niet geschied is) de ruimtelijk duale stellingen van die uit opg. 12 (blz 155), 1) en 2) en vervang 3) en 4) door in de ruimte geldende analoge stellingen en formuleer (en bewijs zo nodig) ook daarvan de duale.

Aangezien het dualiteitsbeginsel begrippen invariant laat of verwisselt, levert twee keer dit beginsel op een eigenschap toegepast, die oorspronkelijke eigenschap weer op.

Wij gaan het effect na van een projectieve transformatie $X = A\overline{X}$ op het vlak $UX = 0$. Dit gaat over in een figuur $U(A\overline{X}) = (UA)\overline{X} = 0$, hetgeen weer een vlak $\overline{U}\overline{X} = 0$ is met $\overline{U} = UA$, dus $U = \overline{U}A^{-1}$. Ook de vlakcoördinaten worden dus homogeen en lineair getransformeerd.

Een projectieve transformatie laat dubbelverhoudingen van punten invariant, want is $R = \lambda P + \mu Q$, $S = \rho P + \sigma Q$, dan is

$$\overline{R} = A^{-1}R = A^{-1}(\lambda P + \mu Q) = \lambda(A^{-1}P) + \mu(A^{-1}Q) = \lambda\overline{P} + \mu\overline{Q}$$

en evenzo

$$\overline{S} = \rho\overline{P} + \sigma\overline{Q}, \text{ dus } (PQRS) = (\overline{PQRS}).$$

Opg. 9. Bewijs rechtstreeks de duale eigenschap.

Bij de puntcoördinaten trad het coördinatenstelsel $X_1X_2X_3X_4X_5$ op waarbij

$X_1=(1,0,0,0)$; $X_2=(0,1,0,0)$; $X_3=(0,0,1,0)$; $X_4=(0,0,0,1)$; $X_5=(1,1,1,1)$

en waarbij voor een willekeurig punt $X(x_1,x_2,x_3,x_4)$ gold

$X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4X_4$. Evenzo treedt bij lijncoördinaten een stelsel $U_1U_2U_3U_4U_5$ op, waarin
$U_1=(1,0,0,0)$; $U_2=(0,1,0,0)$; $U_3=(0,0,1,0)$; $U_4=(0,0,0,1)$; $U_5=(1,1,1,1)$ en waarbij voor een willekeurig vlak $U(u_1,u_2,u_3,u_4)$ geldt $U = u_1U_1 + u_2U_2 + u_3U_3 + u_4U_4$.

Opg. 10. Bewijs dat als i,j,k en m een permutatie vormen van de getallen 1,2,3 en 4 het vlak U_i gaat door de punten X_j, X_k en X_m en duaal.

Opg. 11. Bewijs dat de snijlijn van U_5 en U_1 in U_1 de harmonicaalrechte is van het punt van X_1X_5 in U_1 t.o.v. driehoek $X_2X_3X_4$.

Opg. 12. Bewijs hiervan rechtstreeks de duale eigenschap.

Men noemt het punt X_5 en het vlak U_5 harmonicaal toegevoegd t.o.v. het viervlak $X_1X_2X_3X_4$.

Punten X, die bij een projectieve transformatie $X = A\overline{X}$ invariant blijven, moeten voor i = 1,2,3,4 voldoen aan

$$x_i = \lambda \overline{x}_i, \text{ dus } \lambda \overline{x}_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\overline{x}_j.$$

Dit is slechts mogelijk als

$$(3) \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit in het algemeen 4 waarden van λ volgen. Is eenmaal zo'n waarde van λ gevonden, dan volgen daaruit de invariante punten. Hun coördinaten zijn dan de minoren van de elementen van een rij van $A - \lambda I$. Geheel als op blz 157 geschied is, ziet men in, dat als een wortel λ aanleiding geeft tot verdere rangverlaging (d.w.z. als de rang van de matrix $A - \lambda I$ gelijk is aan 2 of 1) en dus tot meer dan één invariant punt, deze wortel λ tenminste een dubbele wortel is (3).

Opg. 13. Laat zien, dat een invariant vlak van de beschouwde projectieve transformatie, een vlak is waarvoor geldt $\overline{u}_i = \lambda u_i$, waarbij λ een wortel is van dezelfde vergelijking (3). De coördinaten daarvan zijn de minoren van de elementen van een kolom van $A - \lambda I$.

Als λ en μ verschillende wortels zijn van (3) en $X = \lambda \overline{X}$ en $\overline{U} = \mu U$ dan ligt X in U want men heeft

$\lambda U\overline{X} = UX = UA\overline{X} = \overline{U}\overline{X} = \mu U\overline{X}$,

dus $(\lambda - \mu)U\overline{X} = 0$, dus $U\overline{X} = 0$ wegens $\lambda \neq \mu$.

Als $\lambda = \mu$ behoeft X niet in U te liggen.

Wij gaan de diverse typen van projectieve transformaties van de ruimte thans niet verder na.

Opg. 14. Beschouw 4 punten P,Q,R en S. Als deze door een transformatie A overgaan in 4 punten $\overline{P},\overline{Q},\overline{R}$ en $\overline{S}$, dan geldt voor hun coördinaten

$$(pqrs) = a(\overline{p}\overline{q}\overline{r}\overline{s}).$$

De projectieve ruimte wordt affien door één harer vlakken oneigenlijk te noemen. Wij kiezen weer het coördinatenstelsel zo, dat dit tot vergelijking heeft $x_4 = 0$ en stellen voor eigenlijke (d.i. niet in

$x_4 = 0$ gelegen) punten $x = \frac{x_1}{x_4}$; $y = \frac{x_2}{x_4}$; $z = \frac{x_3}{x_4}$.

Vlakken heten evenwijdig als zij een oneigenlijke snijlijn hebben.

Rechten en ook een rechte en een vlak heten evenwijdig als zij een oneigenlijk snijpunt hebben.

Tal van elementaire eigenschappen uit de stereometrie over evenwijdigheid zijn nu onmiddellijk duidelijk.

Opg. 15. Als twee elkaar snijdende rechten van een vlak evenwijdig zijn met twee elkaar snijdende rechten van een ander vlak, zijn die vlakken evenwijdig.

Opg. 16. Bij twee evenwijdige vlakken gesneden door een derde zijn de snijlijnen evenwijdig.

De affiene ruimte wordt metrisch door het invoeren van een absolute kegelsnede k in het oneigenlijke vlak. Men neemt hiervoor bij voorkeur een imaginaire niet ontaarde kegelsnede en kan dan het affiene coördinatenstelsel op reële wijze zo transformeren, dat het affien blijft en deze kegelsnede de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ krijgt.

Men noemt nu twee vlakken loodrecht als hun oneigenlijke rechten poolverwant zijn t.o.v. k; twee rechten loodrecht als dit het geval is met hun oneigenlijke punten; een vlak en een rechte loodrecht als hun oneigenlijke rechte resp. punt, poollijn en pool zijn t.o.v. k.

Hiermede zijn tal van elementaire stereometrische eigenschappen over loodrechte stand direct duidelijk.

Opg. 17. Als een rechte loodrecht staat op twee elkaar snijdende rechten van een vlak, staat zij loodrecht op (alle rechten van) dat vlak.

Opg. 18. Er is één rechte, die twee gegeven kruisende rechten loodrecht snijdt.

Definitie. De hoek van twee rechten a en b is $\frac{1}{2i}\log(ABSS')$, waarbij A en B de oneigenlijke punten van A en B zijn en S en S' de snijpunten van AB met k. De hoek van twee vlakken U en V is $\frac{1}{2i}\log(uvtt')$, waarbij u en v hun oneigenlijke rechten zijn en t en t' de raaklijnen uit het snijpunt van u en v aan k.

Opg. 19. De hoek van twee vlakken is gelijk aan de hoek (standhoek) der snijlijnen van die vlakken met een vlak loodrecht op hun snijlijn.

Opg. 20. De grootte van een rechte hoek is $\frac{\pi}{2}$.

In de projectieve ruimte voerden wij wel punt- en vlakcoördinaten in, maar geen lijncoördinaten. Men kan dat als volgt doen.

Zijn $A(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $B(b_1,b_2,b_3,b_4)$ twee punten van een rechte AB, dan noemt men de zes grootheden

$$p_{ij} = (ab)_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3,4;\ i \neq j)$$

de lijncoördinaten van de rechte AB. Vermenigvuldigt men deze alle 6 met een bepaalde factor, dan geven zij dezelfde lijn aan.

Opg. 21. Kiest men twee willekeurige andere punten C en D op AB en definieert men $p'_{ij} = (cd)_{ij}$, dan hebben de 6 nieuwe lijncoördinaten dezelfde verhouding als de oude. De lijncoördinaten zijn bijgevolg onafhankelijk van de keuze der 2 punten A en B, waaruit zij werden bepaald.

Zes willekeurige getallen zijn niet steeds lijncoördinaten van een rechte, want de 6 gevonden getallen voldoen aan (abab) = 0, dus wegens Laplace aan

$$p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{23}p_{14} = 0.$$

Voldoen ze echter aan deze relatie, dan stellen zij inderdaad lijncoördinaten van een rechte voor.

Opg. 22. Bewijs dit.

Twee rechten p en q snijden elkaar dan en slechts dan, als er een punt C op beide ligt, zodat als A verder op p en B op q ligt, geldt (acbc) = 0, dus wegens Laplace

$$\sum p_{ij}q_{km} = 0,$$

waarin (i,j,k,m) een even permutatie is der getallen 1,2,3,4. Voor kruisende rechten is de laatstgenoemde som dus $\neq 0$.

Opg. 23. Als C ligt op een rechte AB, welke betrekkingen gelden dan tussen de coördinaten van C en van AB?

§ 24. Quadrieken.

Een quadriek is de m.p. der punten $X(x_1,x_2,x_3,x_4)$, die voldoen aan

(1) $$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = 0 \quad \text{(waarbij weer } a_{ij} = a_{ji}\text{)}.$$

In matrixnotatie luidt deze vergelijking X'AX = 0, waar weer evenals in § 21 een accent wijst op spiegeling van een matrix in zijn hooddiagonaal.

Twee punten X en Y heten poolverwant t.o.v. de quadriek (1) als Y'AX = 0. Dan is ook (Y'AX)' = 0, dus X'A'Y = 0, dus X'AY = 0. Poolverwantschap van punten is dus een symmetrische relatie.

De m.p. der punten, die poolverwant zijn met een punt Y is de verzameling der punten, die voldoet aan Y'AX = 0 en dus ligt in een vlak v met vergelijking VX = 0, waarbij V = Y'A. Dit vlak heet het poolvlak van Y.

Opg. 1. Is Y poolverwant met P en Q, dan met elk punt van de rechte PQ.

Opg. 2. Is Y poolverwant met P,Q en R (waarbij P,Q en R niet collineair zijn), dan is Y het ook met elk punt van het vlak PQR.

Opg. 3. Een punt is dan en slechts dan poolverwant met zichzelf, als het op de quadriek (1) ligt.

Opg. 4. Een punt ligt dan en slechts dan in zijn poolvlak als het op de quadriek (1) ligt.

Wij onderstellen in het vervolg, dat $a = |a_{ij}| \neq 0$ is.

Doorloopt een punt Y de rechte PQ (dus $Y = \lambda P + \mu Q$) dan luidt het poolvlak v van Y

$$V = Y'A = (\lambda P + \mu Q)'A = \lambda(P'A) + \mu(Q'A) = \lambda S + \mu T,$$

waarin s en t de poolvlakken zijn van P en Q. Bijgevolg draait dan v om de snijlijn (s,t) van s en t en vier punten van PQ hebben dezelfde dubbelverhouding als hun vier poolvlakken door (s,t).

Men noemt de rechten PQ en (s,t) poolverwant t.o.v. (1).

Men noemt twee vlakken v en w poolverwant t.o.v. (1) als w gaat door de pool van v (dus ook v door de pool van w). Dit treedt dan en slechts dan op als voor de pool Y van v geldt $WY = 0$, dus $Y'W' = 0$, wegens $V = Y'A$, als $VA^{-1}W' = 0$.

<u>Opg. 5.</u> Een vlak is dan en slechts dan poolverwant met zichzelf als de pool ervan op de quadriek ligt.

Voor dergelijke vlakken (die men raakvlakken aan de quadriek noemt) geldt $VA^{-1}V' = 0$. Zij voldoen dus aan de tweedegraadsvergelijking in lijncoördinaten

(2) $$\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij}u_iu_j = 0,$$

waarin A_{ij} de minoren zijn van de elementen a_{ij} van A, welke immers afgezien van waarin A_{ij} een factor $a = |a_{ij}|$ juist gelijk zijn aan de elementen van A^{-1}.

Door projectieve transformatie blijft poolverwantschap behouden want als $X = M\bar{X}$ dan is $X' = \bar{X}'M'$, dus de quadriek (1) gaat over in een quadriek met vergelijking $\bar{X}'M'AM\bar{X} = 0$ of

(3) $$\bar{X}'\bar{A}\bar{X} = 0,$$

waarin $\bar{A} = M'AM$. Twee punten $\bar{X}$ en $\bar{Y}$ met $X = M\bar{X}$ en $Y = M\bar{Y}$ zijn dan en slechts dan poolverwant t.o.v. (3) als

$$\bar{Y}'\bar{A}\bar{X} = Y'(M')^{-1}M'AMM^{-1}X = Y'AX = 0,$$

dus als X en Y poolverwant zijn t.o.v. (1). Poolverwantschap blijft dus behouden bij projectieve transformatie. Zij S een snijpunt van een rechte YZ met de quadriek (1), dan is $S = \lambda Y + \mu Z$ met

$$(\lambda Y+\mu Z)'A(\lambda Y+\mu Z) = \lambda^2 Y'AY + 2\lambda\mu\, Y'AZ + \mu^2 Z'AZ = 0.$$

De beide hierdoor bepaalde snijpunten S liggen dan en slechts dan harmonisch met Y en Z als het quotiënt der wortels $\lambda:\mu$ van de laatste vierkantsvergelijking gelijk is aan -1, hun som dus gelijk is aan nul, dus als $Y'AZ = 0$ is, wat dan en slechts dan optreedt als Y en Z poolverwant zijn t.o.v. (1).

Wij beschouwen thans de raakvlakken u van de quadriek (1) nader. Zij R het raakpunt van u met (1). Laat S een willekeurig punt zijn van de doorsnijding van u en (1). Dan is R poolverwant met S, R poolverwant met R en S met S, dus een willekeurig punt T van de rechte RS is poolverwant met zichzelf, dus T ligt ook op (1). De quadriek (1) snijdt dus u volgens een aantal door R gaande rechten. Nu snijdt een quadriek een willekeurig vlak volgens een kegelsnede.

<u>Opg. 6.</u> Bewijs dat.

Een raakvlak snijdt de quadriek dus volgens een ontaarde kegelsnede.

Omgekeerd, snijdt u een quadriek volgens een ontaarde kegelsnede en zij R het snijpunt der ontaardingsrechten dier kegelsnede. Was u niet poolverwant met R, dan sneed het poolvlak van R die ontaardingsrechten resp. in punten P en Q $\neq$ R en dan was R poolverwant met zichzelf , met P en met Q, dus u was toch poolvlak van R.

Vergelijking (2) geeft ons de vergelijking in vlakcoördinaten van de quadriek (nl. van alle vlakken van de quadriek, dat is van al zijn raakvlakken).

Twee vlakken zijn geconjugeerd t.o.v. (2) als hun polen het zijn t.o.v. (1). Gaat men uit van een quadriek $UBU' = 0$ en wenst men de vergelijking in puntcoördinaten terug te vinden, dan zoeke men die punten X, die in hun poolvlak liggen t.o.v. $UBU' = 0$. Nu is de pool X van een vlak V t.o.v. UBU' het punt X waardoor alle vlakken W gaan, die poolverwant zijn met V t.o.v. $UBU' = 0$, dus voldoen aan $WBV' = 0$, dus $X = BV'$. Derhalve $V' = B^{-1}X$ en $V = X'B^{-1}$, zodat X wegens $VBV' = 0$ voldoet aan $X'B^{-1}BB^{-1}X = 0$, dus aan $X'B^{-1}X = 0$; deze volgt geheel op duale wijze uit $UBU' = 0$ als $UA^{-1}U' = 0$ uit $X'AX = 0$. Gaat men uit van de vergelijking $X'AX = 0$, dan behoort hierbij de vergelijking $UA^{-1}U' = 0$ en daarbij weer $X'(A^{-1})^{-1}X = X'AX = 0$, zodat men de oorspronkelijke vergelijking terugvindt. In determinantvorm is de vergelijking $UA^{-1}U' = 0$ als volgt te schrijven

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Opg. 7. Leid deze vergelijking rechtstreeks af op analoge wijze als bij de kegelsneden geschied is.

Een poolvierhoek van een quadriek is een viervlak, waarvan elke zijvlak poolverwant is met het overstaande hoekpunt.

Opg. 8. Op een poolviervlak als grondviervlak van het coördinatenstelsel luidt de vergelijking van een quadriek

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i^2 = 0, \text{ dus } \sum_{i=1}^{4} \frac{u_i^2}{a_i} = 0.$$

Daar een raakvlak een quadriek volgens rechte lijnen snijdt, bevat een quadriek dus rechte lijnen en wel in elk raakvlak twee, die elkaar snijden in het raakpunt. Beschouwt men een willekeurige rechte m op een quadriek, dan snijdt ieder vlak erdoor de quadriek volgens een kegelsnede, waarvan m deel uitmaakt en die dus ontaard is in m en nog een rechte n, die omdat zij met m in eenzelfde vlak ligt, m snijdt. Er liggen bijgevolg oneindig veel rechten n op de quadriek, die allen m snijden. Als twee zulke rechten n en n' elkaar sneden, had de quadriek met het vlak nn' drie rechten m,n,n' gemeen, wat onmogelijk is, zolang de quadriek niet ontaard is. Bijgevolg hoort m niet tot de verzameling N der rechten n, die m snijden. Evenzo behoort n niet tot de verzameling M der elkaar twee aan twee kruisende op de quadriek gelegen rechten, die n snijden. Zij m' een rechte $\neq$ m, die n snijdt. Daar n' de rechte n niet snijdt, moet n' het vlak m'n in een punt van de quadriek, dat op m' ligt, snijden. Wij zien dus, dat twee willekeurige rechten van verschillende stelsels elkaar snijden, maar van eenzelfde stelsel elkaar kruisen.

Beschouw nog een rechte a niet op de quadriek gelegen, die de quadriek in S en S' snijdt. Om de poolrechte van a te vinden, tekene men de raakvlakken in S en S' aan de quadriek en bepale hun snijlijn. Die raakvlakken snijden de quadriek volgens rechten m en n resp. m' en n'. Hun snijlijn b is dan de verbindingslijn der snijpunten mn', m'n. Het viervlak met ribben a b m m' n n' is het ruimtelijke analogon van een raakdriehoek van een kegelsnede. Neemt men zo'n viervlak tot gronddriehoek van een coördinatenstelsel, dan krijgt de quadriek een vergelijking van de gedaante $c_1x_1x_2 + c_2x_3x_4 = 0$, welke door passende keuze van het eenheidspunt luiden kan $x_1x_2 = x_3x_4$.

Opg. 9. Bewijs dit.

Wij geven nog enige affiene en metrische bijzondere gevallen. Allereerst kiezen wij een oneigenlijk vlak ω. De pool hiervan t.o.v. een quadriek heet het middelpunt O. In een poolviervlak, dat daardoor gaat, neemt men een ribbe a door O en een vlak V, V door O, dat die ribbe niet bevat, toegevoegd. Een vlak W evenwijdig met V snijdt de quadriek volgens een kegelsnede waarvan het middelpunt als pool van de rechte $W\omega = V\omega$ ligt op de poollijn a van $V\omega$ t.o.v. de quadriek. Bijgevolg is de m.p. der middelpunten van de doorsnijdingskegelsneden van een quadriek met evenwijdige vlakken een rechte.

Een quadriek heet een paraboloïde als deze aan ω raakt. Bestaat de doorsnijding uit reële rechten, dan noemt men de quadriek een hyperbolische paraboloïde; bestaat deze uit toegevoegd complexe rechten, dan een elliptische paraboloïde. Raakt een quadriek de oneigenlijke rechte niet, dan is het ellipsoïde als de doorsnijding met ω een imaginaire kegelsnede is en een hyperboloïde als die een reële kegelsnede is. De ellipsoïde kan geen reële rechten bevatten.

Opg. 10. Bewijs dat.

Bevat zij geen enkel resp. ten minste één reëel punt, dan spreekt men van imaginaire resp. (reële) ellipsoïde. Op een hyperboloïde kunnen reële rechte lijnen liggen, in welk geval men spreekt van eenbladige hyperboloïde, anders van tweebladige hyperboloïde.

Wij voeren verder weer een in ω gelegen imaginaire kegelsnede in, die wij een bolcirkel noemen. De hoofdassen van een hyperboloïde of ellipsoïde zijn drie loodrechte rechten door het middelpunt, die ribben zijn van een poolviervlak. De oneigenlijke punten der hoofdassen vormen dus een pooldriehoek t.o.v. de bolcirkel en t.o.v. de doorsnijding van de quadriek met ω. Snijden die beide kegelsneden in 4 verschillende punten, dan vormen de diagonaalpunten van de door die 4 punten bepaalde volledige vierhoek de gezochte oneigenlijke punten. Deze blijken zowel voor ellipsoïden als voor hyperboloïden reëel te zijn.

Er is een uitzonderingsgeval waarin beide oneigenlijke kegelsneden oneindig veel gemeenschappelijke punten bezitten, nl. als ze elkaar dubbel raken.

Opg. 11. Bewijs dit.

Een quadriek, die deze eigenschap bezit, noemt men een omwentelingsquadriek. Hiervan ligt één asrichting vast (nl. die waarvan het oneigenlijke punt de pool is van de verbindingslijn der raakpunten van de beide oneigenlijke kegelsneden), terwijl de andere willekeurig gekozen kunnen worden.

Opg. 12. Bewijs, dat als men het coördinatenstelsel zo kiest, dat die vaste asrichting de rechte $z = 0$ is, een omwentelingsquadriek een vergelijking van de gedaante $ax^2 + ay^2 + bz^2 = 1$ bezit (de bolcirkel heeft hierbij de verg. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; $x_4 = 0$). Wat gebeurt bij $a = b$?

Opg. 13. Bepaal de oneigenlijke rechten der i.h.a. 6 stellen vlakken, die een willekeurige quadriek volgens cirkels snijden.

Opg. 14. De m.p. der middelpunten van de doorsnijdingskegelsneden van evenwijdige vlakken met een paraboloïde is een rechte, welke gaat door het raakpunt van de paraboloïde met ω.

Men noemt de as van een paraboloïde díe der in opg. 14 gevonden rechten, die loodrecht staan op de in die opgave genoemde evenwijdige vlakken.

Wij gaan thans nog na, wat gebeurt met een quadriek $X'AX = 0$ als de determinant $a = |a_{ij}|$ nul is.

Een punt P is dan en slechts dan poolverwant met alle punten der ruimte t.o.v. een quadriek $X'AX = 0$, als $a = 0$ is. Immers, kies 4 willekeurige punten Q,R,S,T, die niet coplanair zijn. Dan geldt voor elk punt X der ruimte, omdat het als lineaire combinatie van Q,R,S,T te schrijven is, $P'AX = 0$; dus geldt $\sum_{i=1}^{4} a_{ij}p_i = 0$ $(j = 1,2,3,4)$, waaruit volgt $a = 0$ en omgekeerd.

Zij allereerst de rang van de matrix A gelijk aan 3. Dan bestaat er één zo'n punt P. Ligt Q willekeurig op de quadriek dan is P poolverwant met P en met Q en Q met zichzelf, dus elk punt van PQ is poolverwant met zichzelf en ligt dan op de quadriek, die derhalve bestaat uit rechten door P. Een vlak v niet door P snijdt de quadriek volgens een niet ontaarde kegelsnede, want was dat wel zo, dan was het dubbelpunt dier kegelsnede toegevoegd met alle punten van v en met P dus met alle punten der ruimte in tegenstelling met het feit, dat slechts het punt P die eigenschap bezit.

In dit geval heet de quadriek een kegel. Is zijn doorsnede met v een imaginaire kegelsnede, dan is die doorsnijding met elk vlak v niet door P een imaginaire kegelsnede. Men spreekt van een imaginaire kegel. Is die doorsnijding reëel, dan van een reële kegel.

Opg. 15. Laat zien, dat het coördinatenstelsel zo te kiezen is, dat een kegel de vergelijking $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$ bezit.

Affien bijzondere gevallen zijn:

1) Kegels, waarvoor P oneigenlijk is. Deze noemt men cylinders. Is de doorsnijding met het oneigenlijke vlak een imaginair lijnenpaar, dan heeft men een imaginaire of elliptische cylinder; is die een reëel lijnenpaar, dan een hyperbolische cylinder en is die een dubbelrechte, dan een parabolische cylinder. In dit laatste geval raakt de quadriek aan het oneigenlijke vlak in alle punten van een rechte. Men zegt dat de quadriek aan vlakken met die eigenschap raccordeert.

2) Kegels, waarbij P eigenlijk is. Snijdt het oneigenlijke vlak de quadriek volgens een reële resp. imaginaire kegelsnede, dan spreekt men van reële resp. imaginaire kegels.

Zij nu de rang der matrix A gelijk aan 2. Er bestaan dan 2 punten P en Q, die poolverwant zijn met alle punten van de ruimte. Dat geldt dan voor elk punt der rechte PQ.

Opg. 16. Bewijs dat.

Zij nu R een willekeurig punt niet op PQ van de quadriek. Dan is ieder punt van vlak RPQ poolverwant met zichzelf.

Opg. 17. Bewijs dit.

De quadriek bestaat dus uit tenminste één vlak door PQ en is dus ontaard. Kennelijk is de quadriek ontaard in twee verschillende vlakken door PQ, want bestond de quadriek uit twee samenvallende vlakken, dan was juist de rang van A gelijk aan 1.

Opg. 18. Bewijs dit.

Ook in deze beide gevallen treden diverse mogelijkheden op al naar de keuze van het oneigenlijk vlak.

Hiermede zijn de 19 typen quadrieken, die wij in de Euclidische ruimte ontmoetten in de projectieve ruimte teruggevonden.

Duaal tegenover de quadrieken $X'AX = 0$ met $a = 0$ staan quadrieken $UBU' = 0$ met $b = |b_{ij}| = 0$, die i.h.a. niet op te vatten zijn als puntquadrieken.

Opg. 19. De verzameling der raaklijnen door een punt P aan een quadriek $X'AX = 0$ is een kegel.

Zij R een raakpunt van zo'n raaklijn en X op PR, dan is $X = \lambda P + \mu R$; $P'AR = 0$; $R'AR = 0$. Dus $X'AX = \lambda^2 P'AP$; $X'AP = \lambda P'AP$. Derhalve $(X'AX).(P'AP) = (X'AP)^2$. Dit is de vergelijking der gezochte kegel.

Tenslotte melden wij nog iets over de theorie der quadriekenbundels. Zijn $K_1 = 0$ en $K_2 = 0$ twee quadrieken, dan is iedere quadriek van de gedaante $K = \lambda K_1 + \mu K_2 = 0$ een exemplaar van de door K_1 en K_2 bepaalde bundel. Volgens de stelling van Bezout liggen de gemeenschappelijke punten van K_1 en K_2 (en van alle exemplaren van de bundel) op een vierdegraadskromme.

Zij $K_1 = X'AX$ en $K_2 = X'BX$. Zij P een willekeurig punt en U en V de poolvlakken van P t.o.v. K_1 resp. K_2. Dan is $U = R'A$; $V = P'B$. Het poolvlak W van P t.o.v. het exemplaar K is dan $W = P'(\lambda A + \mu B) = \lambda(P'A) + \mu(P'B) = \lambda U + \mu V$ en gaat dus door de snijlijn van U en V. Hier treedt dus een verwantschap op tussen de punten P en rechten (U,V) der ruimte. Wij vragen ons af welke figuur verwant is aan een rechte. Zij $P = \lambda Q + \mu R$. Een punt X der aan P toegevoegde rechte voldoet dan aan $P'AX = 0$, $P'BX = 0$ dus aan $\lambda Q'AX + \mu R'AX = 0$; $\lambda Q'BX + \mu R'BX = 0$, waaruit na eliminatie van λ en μ de quadratische betrekking

$$(Q'AX)(R'BX) - (Q'BX)(R'AX) = 0$$

volgt. De bewuste m.p. is dus een quadriek H_{PQ}.

Opg. 20. Deze quadriek bevat de rechte PQ geheel.

De bundel bevat kegels, welke men vindt door de determinant behorende bij K gelijk nul te stellen. Die worden dus bepaald door $|\lambda A + \mu B| = |\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}| = 0$ te stellen, hetgeen een vierdegraadsvergelijking is in $\lambda : \mu$. Er zijn dus i.h.a. 4 kegels C_1, C_2, C_3, C_4 resp. met middelpunten M_1, M_2, M_3, M_4. M_1 is poolverwant met M_2, M_3 en M_4 t.o.v. C_1 en C_2 dus t.o.v. alle exemplaren van de bundel, zodat M_1 een uitzonderingspunt is in bovengevonden verwantschap, want de poolvlakken van M_1 t.o.v. alle exemplaren gaan niet alleen door een rechte, maar vallen zelfs samen. Het viervlak $M_1M_2M_3M_4$ is een gemeenschappelijk viervlak voor alle exemplaren van de bundel. Neemt men dit als grondviervlak van een coördinatenstelsel, dan bezit de bundel de eenvoudige vergelijking

$$\sum_{i=1}^{4} (\lambda a_i + \mu b_i)x_i^2 = 0.$$

Opg. 21. Bewijs dat de quadriek H_{PQ} door de punten M_1, M_2, M_3, M_4 gaat.

Wij vragen ons nu nog af welke punten toegevoegd zijn in bovengenoemde bundelpoolverwantschap aan een vlak V. Aan een rechte n in V is een hyperboloïde H_n toegevoegd; aan een n in S snijdende rechte m een hyperboloïde H_m, die met H_n de rechte s gemeen heeft, die aan het punt S is toegevoegd. De verdere snijpunten van H_m en H_n zijn dan de punten, die poolverwant zijn met V t.o.v. alle exemplaren. Daar de doorsnijding van H_m en H_n een kromme van de 4^e graad is en s daarvan deel uitmaakt, is die vierdegraadskromme ontaard in s en een derdegraadskromme K_V. Inderdaad snijdt K_V een willekeurig vlak W in 3 punten. Immers die moeten poolverwant zijn met de snijlijn van V en W t.o.v. alle exemplaren van de kegelsnederbundel volgens welke W de quadriekenbundel snijdt. Dat kan slechts als zo'n punt diagonaalpunt is van de volledige vierhoek der snijpunten der kegelsneden van die bundel.

Een cubische kromme als bovenstaande is ook te krijgen door twee

speciale rechten m en n te kiezen zodanig, dat H_m en H_n kegels zijn.
Opg. 22. Laat zien, dat het daartoe nodig en voldoende is, dat m en n liggen in zijvlakken van het viervlak $M_1M_2M_3M_4$.

Kiezen wij dus m en n als snijlijnen van V met twee dier zijvlakken, dan vinden wij de kromme K_v als restdoorsnijding van twee kegels met een gemeenschappelijke rechte.

Voor de theorie der cubische ruimtekromme verwijzen wij naar de syllabus projectieve meetkunde. Wij volstaan hier met te vermelden, dat als men het coördinatenstelsel zo kiest, dat de kegels H_m en H_n tot vergelijking hebben $x_2^2 = x_1x_3$; $x_3^2 = x_2x_4$, de cubische kromme de parametervoorstelling

$$x_1 = \lambda^3,\ x_2 = \lambda^2\mu,\ x_3 = \lambda\mu^2,\ x_4 = \mu^3.$$

Opg. 23. Bewijs dat in een bundel quadrieken i.h.a. één exemplaar door een punt gaat en twee aan een gegeven rechte raken en drie aan een gegeven vlak raken.