STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Zc 26

Colloquim theorie der partities.

S.C.van Veen.

1954

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

ZC 26

Colloquium

THEORIE DER PARTITIES.

o.l.v.

Prof. Dr. S.C. van Veen.

1e Voordracht, Woensdag 24 Feb. 1954.

Mathematisch Centrum.

§ 1. Algemeen probleem.

A is de verzameling $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ van gehele positieve getallen.
n is een gegeven positief geheel getal.
Het aantal oplossingen $r(n)$ van:

$$n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + \ldots\ldots + a_{i_s}$$

(s vast of onbeperkt; a al of niet verschillend)
is het aantal partities van n in elementen van A.
Gevraagd wordt $r(n)$ bij gegeven n en A.

§ 2. Speciaal probleem.

Wij nemen het speciale geval, dat
A is het stelsel natuurlijke getallen 1,2,3,.....
s onbeperkt.
Dit is het probleem der "onbeperkte partities".
Voorbeeld: de partities van 5 zijn:
5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.
Wij zullen het aantal onbeperkte partities van n door $p(n)$ voorstellen.
Dus $p(5) = 7$.

Grafische voorstelling:

```
. . . . . . .
. . . .
. . .
. . .
.
```

= voorstelling van de partitie
$7 + 4 + 3 + 3 + 1$ van 18

In kolommen gelezen : $5 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1$

Zulke partities heten toegevoegd.
Hieruit volgt
Stelling 1: Aantal partities van n in m delen = aantal partities van n in delen, waarvan het grootste = m.

§ 3. De voortbrengende functie voor p(n) (Euler).

Wanneer

$$F(x) = \sum f(n)\, x^n$$

dan heet F(x) de <u>voortbrengende functie</u> van f(n).
Euler heeft gevonden, dat de voortbrengende functie van p(n) is

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n \qquad (1)$$

omdat
$$(1-x)^{-1} = 1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} \ldots$$
$$(1-x^2)^{-1} = 1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} \ldots$$
$$(1-x^3)^{-1} = 1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} \ldots$$

Bij vermenigvuldiging van deze reeksen ontstaat iedere partitie van n als de exponent van x^n, en iedere partitie treedt precies 1 maal op.

Voor de partities gelden tal van eigenschappen, die met meerdere of mindere moeite door elementaire algebraïsche beschouwingen uit de voortbrengende ontwikkeling (1) kunnen worden afgeleid.(zie Hardy & Wright Introduction to the theory of numbers.Chap.XIX.)
Een van de belangrijkste is:

$$\frac{1}{F(x)} = \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n\, x^{\frac{n}{2}(3n+1)} = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12} \ldots (2).$$

Deze betrekking(door Euler gevonden), waarvan hieronder een zeer elementair bewijs zal worden gegeven, kan worden gebruikt om het getal p(n) recursief te bepalen als volgt:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n\, x^{\frac{n}{2}(3n+1)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p(m)\, x^m = 1$$

waaruit volgt:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + \ldots + (-1)^k\, p\left\{n - \tfrac{k}{2}(3k-1)\right\} +$$
$$+(-1)^k\, p\left\{n - \tfrac{k}{2}(3k+1)\right\} + \ldots = 0$$

Mac Mahon bepaalde hiermede p(n) tot en met n=200

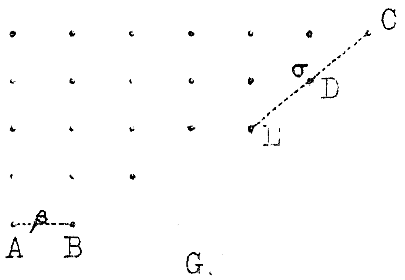
$$p(200) = 3972999029388.$$

§ 4. <u>Elementair bewijs van (2).</u> (Franklin.C.R,92(1881), p.448-450)

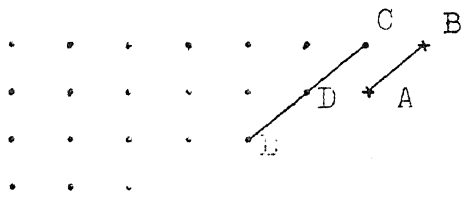
De coëfficiënt van x^n in
$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$$
is gelijk aan
$$\sum (-1)^{\nu} \qquad (3)$$
waarin de sommatie wordt uitgestrekt over alle partities van n in <u>ongelijke</u> elementen, en ν is het aantal elementen van zulk een partitie
De som (3) is gelijk aan
$$E(n) - U(n) \qquad (4)$$
waarin E(n) = het aantal partities van n in een <u>even</u> aantal <u>ongelijke</u> elementen,

U(n) = het aantal partities van n in een oneven aantal ongelijke elementen.

Maak een grafiek G van een partitie van n in een aantal ongelijke elementen afnemend van grootte.



G.



H.

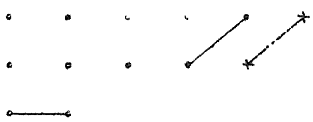
De onderste lijn AB, die desnoods uit één punt kan bestaan , heet de basis β van de grafiek.
Uit C,de noordoosthoek, trekken wij de zolang mogelijke rechte in zuidwestelijke richting.Deze bevat ook minstens 1 punt.
Deze lijn CDE zullen wij de helling σ van de grafiek noemen.
Wanneer het aantal punten op de helling $\gtreqless$ is dan dat op de basis, dan zeggen wij $\sigma \gtreqless \beta$.
Wij zullen deze 3 gevallen afzonderlijk beschouwen:

(a) $\beta < \sigma$.

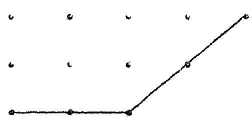
Verplaats β naar een positie evenwijdig buiten σ, als is aangegeven in figuur H. Dit geeft een nieuwe partitie in ongelijke afnemende elementen. Het aantal van deze elementen is van tegengestelde pariteit als in G. Deze operatie heet de operatie O. De omgekeerde bewerking heet Ω.
Ω is niet mogelijk als $\beta < \sigma$.

(b) $\beta = \sigma$.

O is mogelijk (zie grafiek I) behalve als β en σ elkaar ontmoeten (zoals in J)



I

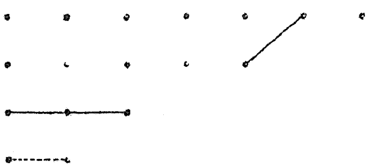


J

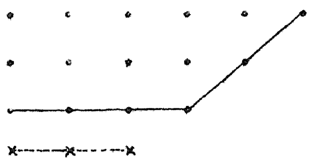
Ω is in beide gevallen onmogelijk.

(c) $\beta > \sigma$.

De transformatie O is steeds onmogelijk.
Ω is mogelijk(zie K) , behalve als β en σ elkaar ontmoeten en $\beta = \sigma + 1$ (zie L)



K.



L.

In het geval L zou er een partitie met 2 gelijke elementen worden gevormd.

Eindresultaat: Wij vinden een (1,1) correspondentie tussen de partities met oneven aantal ongelijke elementen, en die met een even aantal, behalve in de gevallen J en L.

In het 1e geval J is het getal n van de gedaante:

$$k + (k+1) + \dots (2k-1) = \frac{k}{2}(3k-1).$$

In dit geval is $E(n) - U(n) = \pm 1$ als $k = \begin{matrix}\text{even}\\ \text{oneven}\end{matrix}$

In het 2e geval L is n van de gedaante

$$(k+1) + (k+2) + \dots (2k) = \frac{k}{2}(3k+1).$$

en ook hier is $E(n) - U(n) = \pm 1$ als $k = \begin{matrix}\text{even}\\ \text{oneven}\end{matrix}$

Dus algemeen:

$$\text{Coëff. van } x^n \text{ in } \prod (1-x^k) = \sum (-1)^\nu \quad (\nu = \text{aantal delen})$$

$$= E(n) - U(n) = 0, \text{ behalve als}$$

$$n = \frac{k}{2}(3k \pm 1). \text{ Dan is } \quad E(n) - U(n) = (-1)^k.$$

Dit is het theorema van Euler.(2)

§ 5. De Farey-reeks.

Onder de Farey-reeks F_n van de orde n verstaat men de opklimmende reeks van onvereenvoudigbare breuken tussen 0 en 1, waarvan de noemers $\leq$ n zijn.(de grenzen 0 en 1 ingesloten).

Dus $\frac{h}{k}$ behoort tot F_n als

$$0 \leq h \leq k \leq n \ , \ (h,k)=1.$$

De grenzen van 0 en 1 zijn hierbij ingesloten in de vorm $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{1}$.

B.v. $\quad F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$

De karakteristieke eigenschappen van Farey-reeks worden uitgedrukt door:

Stelling I. Als $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$ twee opeenvolgende termen van F_n zijn, dan is $kh' - hk' = 1$.

Stelling II. Wanneer $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$ en $\frac{h'}{k'}$ drie opeenvolgende termen van F_n zijn, dan is

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}.$$

Definitie: Men noemt

$$\frac{h+h'}{k+k'} \quad \text{(of de vereenvoudigde breuk hiervan)}$$

de mediant tussen

$$\frac{h}{k} \quad \text{en} \quad \frac{h'}{k'}.$$

Wegens $\frac{h}{k} < \frac{h'}{k'}$ is $hk' < h'k$

dus $(h+h')k' < h'(k+k')$ of $\frac{h+h'}{k+k'} < \frac{h'}{k'}$.

en $(h+h')k > h(k+k')$ of $\frac{h+h'}{k+k'} > \frac{h}{k}$.

De mediant is dus gelegen in het interval $(\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'})$.

Alvorens tot het bewijs van de stellingen I en II over te gaan (zie § 9), zullen we eerst een paar eenvoudige eigenschappen der Farey-reeks bewijzen, en daarna eerst laten zien, dat stelling I en II equivalent zijn.

Stelling III. Als $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$ twee opeenvolgende termen van F_n zijn, dan is

$$k + k' > n.$$

Bewijs. De mediant $\frac{h+h'}{k+k'}$ is gelegen tussen $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$.

Als $k+k' \leqq n$ is, behoort de mediant ook tot de Farey-reeks F_n, in strijd met de aanname dat $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$ twee opeenvolgende termen zijn.

Stelling IV. Voor $n > 1$ hebben geen tweetal opeenvolgende termen van F_n dezelfde noemer.

Bewijs. Als $k > 1$ is, en $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k}$ twee opeenvolgende breuken van F_n met dezelfde noemer k zouden zijn, dan is $h+1 \leqq h' < k$.

Maar dan is:

$$\frac{h}{k} < \frac{h}{k-1} < \frac{h+1}{k} \leqq \frac{h'}{k}$$

zodat ook $\frac{h}{k-1}$ (of haar vereenvoudiging) in het interval $(\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'})$ zou zijn gelegen, in strijd met de aanname.

§ 6. Bewijs van de equivalentie van I en II.

a) I $\rightarrow$ II

Als I waar is , dan volgt door oplossing van beide vergelijkingen

$$kh'' - hk'' = 1$$
$$k''h' - h''k' = 1$$

naar de onbekenden h'' en k'', dat

$$h''(kh'-hk') = h'' = h+h'$$
$$k''(kh'-hk') = k'' = k+k' \quad \text{dus} \quad \frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'} \text{ . w.t.b.w.}$$

b) II $\rightarrow$ I

Wanneer wij aannemen dat II algemeen geldt, en dat I geldt voor F_{n-1}, dan zullen wij hieruit bewijzen, dat I geldt voor F_n.

Het is daartoe voldoende te bewijzen, dat:

$$kh'' - hk'' = 1 \quad \text{en} \quad k''h' - h''k' = 1$$

als $\frac{h''}{k''}$ behoort tot F_n maar niet tot F_{n-1}, zodat $k''=n$.

Dan zijn k en $k' < k''$, en $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$ zijn opeenvolgende termen van F_{n-1}

Volgens veronderstelling is

$$\frac{h+h'}{k+k'} = \frac{h''}{k''}$$, waarin de laatste breuk onvereenvoudigbaar is.

Dus: $h+h' = \lambda h''$, $k+k' = \lambda k''$ (λ geheel).
k en $k' < k''$, dus $\lambda = 1$

of: $h'' = h + h'$; $k'' = k + k'$

$kh'' - hk'' = kh' - hk' = 1$, en analoog $k''h' - h''k' = 1$ w.t.b.w.

§ 7. Meetkundige beschouwingen.

Veronderstel in het platte vlak 2 punten P en Q, die niet met de oorsprong collineair zijn gelegen. Voltooi het parallelogram OPRQ.
Verleng de zijden hiervan onbepaald en trek de twee stelsels equidistante rechten // OP en OQ, waarvan OP,QR en OQ,PR opeenvolgende paren zijn.
Het platte vlak wordt daardoor verdeeld in een oneindig aantal gelijke parallelograms.
De constante figuur heet een rooster.
Wij noemen dit rooster een rooster met de basis OP,OQ.
Twee roosters met verschillende basis kunnen dezelfde roosterpunten bepalen.
In ons geval bevatten de roosters OP,OQ en OP,OR dezelfde roosterpunten.
Twee roosters, die dezelfde roosterpunten bepalen, heten equivalent.

Een speciaal rooster van bijzonder belang is het rooster gevormd door parallellen met de X en Y-as op de eenheid van afstand.(rechthoekig assenstelsel). De roosterpunten zijn hier de punten, waarvan beide coördinaten geheel zijn. Wij zullen dit rooster het grondrooster L noemen.

§ 8. Eenvoudige eigenschappen van het grondrooster.

Beschouw de transformatie

$$x' = ax + by \qquad (a,b,c,d \text{ geheel}).$$
$$y' = cx + dy$$

Ieder punt (x,y) wordt getransformeerd in een ander punt (x',y').
Door oplossing vindt men:

$$x = \frac{dx'-by'}{ad-bc} \quad , \quad y = - \frac{cx'-ay'}{ad-bc} .$$

Wanneer de transformatiedeterminant $\Delta = ad-bc$ gelijk is aan ± 1, dan levert ieder paar gehele getallen (x',y') een paar gehele getallen (x,y), terwijl vanzelfsprekend (x',y') een geheel paar is bij gehele (x,y).
Ieder roosterpunt (x',y') correspondeert met een roosterpunt (x,y) en omgekeerd. Het roosterpuntsysteem van het grondrooster L wordt in zichzelf getransformeerd. Omgekeerd, wanneer het stelsel van grondroosterpunten in zichzelf wordt getransformeerd, moet ieder geheel paar (x',y') een geheel paar (x,y) leveren. Neem nu speciaal de paren: (x',y') =(1,0) en (x',y') = (o,1).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bij } (1,0) \text{ hoort } \quad x = \frac{d}{\Delta} \;,\; y = -\frac{c}{\Delta} \\ \text{Bij } (0,1) \text{ hoort } \quad x = -\frac{b}{\Delta} \;,\; y = \frac{a}{\Delta} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \Delta/d,\ \Delta/b,\ \Delta/c,\ \Delta/a \\ \text{dus} \end{array}$$

$\Delta^2 / ad-bc$; Δ^2/Δ , $\Delta = \pm 1$

Hiermede is bewezen:

Stelling V. Noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor transformatie van het grondrooster in zichzelf is

$$\Delta = \pm 1$$

Zulk een transformatie

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad \text{met } \Delta = \pm 1 \ (a,b,c,d \text{ geheel})$$

heet unimodulair.

Stel $P = (a,c), Q = (b,d)$

Oppervlakte parallelogram op OP en OQ is $\delta = \pm (ad-bc) = |ad-bc|$ (het teken wordt zo gekozen, dat δ positief is).

OP en OQ bepalen een nieuw rooster, waarvan de roosterpunten(x',y') bepaald zijn door

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}\right\} \ x \text{ en } y \text{ zijn willekeurige gehele getallen.}$$

Volgens stelling V is noodzakelijk en voldoende voor het samenvallen van dit rooster met het basis-rooster L, dat $\delta = 1$, dus

Stelling VI: Noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de equivalentie van het rooster, opgebouwd door OP en OQ, en het basisrooster L is, dat de oppervlakte van het parallelogram op OP en OQ = 1.

Definitie: Een punt P voor L heet zichtbaar (vanuit de oorsprong) als er geen enkel roosterpunt van L op de rechte OP tussen O en P is gelegen. Noodzakelijk en voldoende voor de zichtbaarheid van (x,y) is $\frac{x}{y}$ is onvereenvoudigbaar, of $(x,y) = 1$.

Stelling VII. Aangenomen: P en Q zijn zichtbare punten van L.
δ = oppervlakte van het parallelogram J op OP en OQ.

Dan gelden de volgende eigenschappen:

a) Als $\delta = 1 \longrightarrow$ geen roosterpunt binnen J.

b) Als $\delta > 1 \longrightarrow$ ten minste één roosterpunt binnen J.

Nauwkeuriger: dit punt is óf het snijpunt der diagonalen, óf er zijn twee van zulke punten; één in ieder der beide driehoeken, waarin J is verdeeld door de diagonaal PQ.

Bewijs: Er is geen punt van L binnen J als, en alleen als het rooster L' op OP en OQ equivalent is met L, d.i. als en alleen als $\delta = 1$.
Als $\delta > 1$, dan is er tenminste 1 roosterpunt S binnen dit parallelogram. Als R het 4e hoekpunt van het parallelogram op OP en OQ is, en RT $\#$ OS maar tegengesteld gericht, dan is ook T een punt van L, zodat er minstens 2 punten van L binnen J liggen, behalve wanneer T en S samenvallen (in het snijpunt der diagonalen).

§ 9. Bewijs van de hoofdstellingen I en II.

De breuken $\frac{h}{k}$ met $0 \leq h \leq k \leq n$, (h,k)
zijn de breuken van de Farey-reeks F_n. Zij corresponderen met de zichtbare punten (k,h) van L, binnen, of op de grens van de driehoek, begrensd door
$y = 0$, $y = x$, $x = n$.
Een voerstraal uit O zal bij de draaiing om O tegen de wijzers van een klok uitgaande van de +x-as achtereenvolgens ieder beeldpunt (k,h) van een Farey-breuk bereiken.
Als P en P' de punten (k,h) en (k',h') zijn, welke de beeldpunten zijn van opeenvolgende Farey-breuken van de orde n, dan is er geen beeldpunt binnen driehoek OPP' op de rechte PP'. Dus volgens stelling VII is
$kh' - hk' = 1$, w.t.b.w.

§ 10. De Farey-verdeling van het continuum.

Het is dikwijls gemakkelijk om de reële getallen op de omtrek van een cirkel af te beelden, in plaats van op een rechte lijn, zoals gewoonlijk.
Neem de omtrek van cirkel C = eenheid, en een willekeurig punt C = O = het beeldpunt van het getal o. Het getal x wordt voorgesteld door P_x, waarvoor de afstand tot O, gemeten langs de cirkelomtrek tegengesteld aan de draaiing van de wijzers van een klok = x.
Alle gehele getallen worden in O afgebeeld. Alle getallen welke een geheel getal verschillen, worden in hetzelfde punt afgebeeld.
Vorm nu de Farey-reeks van de n^e orde F_n en vorm de medianten

$$\mu = \frac{h+h'}{k+k'}$$

van de opeenvolgende paren $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$. De eerste en laatste medianten zijn $\frac{0+1}{1+n} = \frac{1}{n+1}$, $\frac{n-1+1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Nu wordt iedere mediant μ afgebeeld in het punt P_μ, waardoor de cirkel wordt verdeeld in een aantal bogen, die Farey-bogen worden genoemd, ieder begrensd door twee punten P_μ, en ieder bevattende één enkel Farey-punt, de afbeelding van een term van F_n.
Zo is $(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ een Farey-boog, die het enkele Farey-punt O bevat.

Het aggregaat van alle Farey-bogen levert de Farey-verdeling van de cirkel. Neem $n > 1$. $P_{\frac{h}{k}}$ is een Farey-punt. $\frac{h_1}{k_1}$ en $\frac{h_2}{k_2}$ zijn de termen van F_n, voorafgaande aan en volgende op $\frac{h}{k}$. De Farey-boog om $P_{\frac{h}{k}}$ is dan samengesteld uit twee delen met de lengte

$$\frac{h}{k} - \frac{h+h_1}{k+k_1} = \frac{1}{k(k+k_1)} \; ; \; \frac{h+h_2}{k+k_2} - \frac{h}{k} = \frac{1}{k(k+k_2)} .$$

Nu is $k+k_1 < 2n$ ($k \neq k_1$, st. IV); $k+k_1 > n$ (st. III) dus

Stelling VIII: In de Farey-verdeling van de orde n ($n > 1$) is de lengte van elk boogdeel, welke het beeld van $\frac{h}{k}$ bevat, gelegen tussen $\frac{1}{k(2n-1)}$ en $\frac{1}{k(n+1)}$.

Het belang van de Farey-verdeling schuilt in de tot op zekere hoogte uniformiteit (grenzen onafhankelijk van h), zoals wij later zullen zien.

Wij geven tot slot het bewijs van een eenvoudige ongelijkheid van Dirichlet, over de benadering van willekeurige reële getallen door middel van rationele getallen:

Stelling IX: ξ is een willekeurig reëel getal, n is een positief geheel getal. Dan is er steeds een onvereenvoudigbare breuk $\frac{h}{k}$ met

$$0 < k \leqq n; \quad \left|\xi - \frac{h}{k}\right| \leqq \frac{1}{k(n+1)} .$$

Bewijs: Zonder beperking $0 < \xi < 1$. ξ valt in een interval, begrensd door twee opeenvolgende F_n-breuken, b.v. $\frac{h}{k}$ en $\frac{h'}{k'}$, dus in één van de beide intervallen

$\left(\frac{h}{k}, \frac{h+h'}{k+k'}\right)$, $\left(\frac{h+h'}{k+k'}, \frac{h'}{k'}\right)$. Dus volgens stelling VIII voldoet òf $\frac{h}{k}$ òf $\frac{h'}{k'}$ aan de vraag.

$\frac{h}{k}$ voldoet, als ξ valt in het 1e interval, $\frac{h'}{k'}$ als ξ valt in het 2e interval.

Colloquium
THEORIE DER PARTITIES.
o.l.v.
Prof.Dr S.C.van Veen.
2e Voordracht, Woensdag 31 Maart 1954.
Mathematisch Centrum.

§11. De methode van Hardy-Ramanujan-Rademacher ter bepaling van p(n).

Uit de voorstelling door middel van de voortbrengende functie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \qquad (p(0)=1)$$
$$= \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{-1}$$

volgt:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)\,du}{u^{n+1}} \tag{5}$$

waarin C een contour is, die om de oorsprong loopt en verder geen enkele singulariteit van f(u) insluit. Alle singulariteiten van f(u) liggen op de eenheidscirkel.
Wij kiezen voor C een cirkel met straal

$$|u| = e^{-\frac{2\pi}{N^2}} \tag{6}$$

waarin N een nader te bepalen positief geheel getal voorstelt.
Wij verdelen C op de in § 10 aangegeven wijze door een Farey-verdeling F_N. De Farey-bogen worden door $\xi_{h,k}$ aangeduid.
Dan is dus:

$$p(n) = \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\leq h<k\leq N}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{h,k}} \frac{f(u)}{u^{n+1}}\,du\,. \tag{7}$$

§ 12. Invoering van de transformatieformule voor de modulaire functie.

Om de waarde van de uitkomst (7) te bepalen, maken wij gebruik van een uitkomst voor de lineaire transformatie van de modulaire functie:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}).$$

Wanneer:

$$q = e^{\pi i \tau} \qquad (\mathrm{Im}\,\tau > 0)$$

$$q' = e^{\pi i \frac{a\tau + b}{c\tau + d}}$$

(a,b,c,d geheel, ad-bc = 1 (unimodulair))
dan volgt op vrij eenvoudige wijze uit de theorie der thèta-functies:

$$q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^{24} = \frac{1}{(c\tau+d)^{12}} (q')^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1-(q')^{2n} \right\}^{24} \qquad (8)$$

(zie o.a. Hurwitz-Courant:Funktionentheorie II,7.§2).
Neem hierin: $c = k, d = -h$.
Kies h' zo, dat $hh' \equiv -1 \pmod k$
en kies daarna $a = h'$, $b = -\frac{1+hh'}{k}$ (dus geheel)
dan is voldaan aan de voorwaarde $ad-bc = 1$.
Neem verder:

$$\left.\begin{aligned} q &= e^{\pi i (\frac{h+iz}{k})} \qquad (\text{dus } \tau = \tfrac{h+iz}{k}) \quad \text{met } \mathrm{Re}(z) > 0. \\ \text{Dan is:} \quad q' &= e^{\pi i \frac{h' + \frac{i}{z}}{k}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Substitutie van (9) in (8) geeft voor $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$e^{2\pi i (\frac{h+iz}{k})} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - e^{\frac{2\pi i n}{k}(h+iz)} \right\}^{24} =$$

$$= \frac{1}{(iz)^{12}} \; e^{2\pi i (\frac{h' + \frac{i}{z}}{k})} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - e^{\frac{2\pi i n}{k}(h' + \frac{i}{z})} \right\}^{24}$$

of:

$$\left\{ f\left(e^{\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k}} \right) \right\}^{24} = e^{\frac{2\pi i(h-h')}{k}} \cdot e^{2\pi(\frac{1}{kz} - \frac{z}{k})} \left\{ f\left(e^{\frac{2\pi i h'}{k} - \frac{2\pi}{kz}} \right) \right\}^{24} z^{\frac{1}{2}}.$$

Dus: $$f\left(e^{\frac{2\pi i h}{k} - \frac{2\pi z}{k}} \right) = e^{\frac{\pi i (h-h')}{k}} \varepsilon_{h,k} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{12k}(\frac{1}{z} - z)} f\left(e^{\frac{2\pi i h'}{k} - \frac{2\pi}{kz}} \right) , \qquad (10)$$

waarin:

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$$

terwijl $\varepsilon_{h,k}$ een nader te bepalen 24e machtswortel uit de eenheid voorstelt.
De moeilijkheid schuilt nu juist in de bepaling van deze 24e machtswortel uit 1. Met dit gecompliceerde probleem hebben zich o.m. Jacobi, Dedekind, Hermite, Tannery & Molk, Rademacher beziggehouden (zie litteratuuropgave aan het slot van deze paragraaf).

Om deze getallentheoretische beschouwing niet te onderbreken, zullen wij de afleiding van de gewenste uitkomst uitstellen tot aan het slot van deze behandeling. Daar hopen wij een nieuwe, naar verhouding zeer eenvoudige afleiding te geven met behulp van de residuenrekening.
Oorspronkelijk werd door verschillende auteurs een zeer gecompliceerde uitdrukking voor $\varepsilon_{h,k}$ gevonden, waarin het symbool van Jacobi uit de theorie der kwadraatresten een hoofdrol vervulde. Er werden verschillende uitkomsten gevonden naar gelang h en/of k oneven is.
Reeds Dedekind heeft (t.a.p.) een meer eenvoudige uitkomst gevonden voor

$$e^{\frac{\pi i(h-h')}{12k}} \cdot \varepsilon_{h,k} = \omega_{h,k} \tag{11}$$

die voor alle gevallen geldt. Van deze uitkomst wordt door Rademacher terecht bij voorkeur gebruik gemaakt, waardoor deze uitkomst ten onrechte vaak aan Rademacher wordt toegeschreven.
De bedoelde, later af te leiden uitkomst is:

$$\omega_{h,k} = e^{\frac{\pi i(h-h')}{12k}} \quad \varepsilon_{h,k} = \exp\left\{\pi i \sum_{m=1}^{k-1} \frac{m}{k}\left(\frac{hm}{k} - \left[\frac{hm}{k}\right] - \tfrac{1}{2}\right)\right\} \tag{12}$$

waarin $[x]$ het grootste gehele getal $\leq x$ voorstelt.

De transformatieformule, waarvan wij zullen gebruik maken, wordt dus:

$$f\left(e^{\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k}}\right) = \omega_{h,k}\, z^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z} - z\right)} \quad f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{kz}}\right) \tag{13}$$

$\mathrm{Re}(z) > 0.$

($z^{\frac{1}{2}}$ is hoofdwaarde $\exp \frac{1}{2} \log z$, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$.).
Het nut van deze uitkomst schuilt in het feit, dat er voor kan worden gezorgd, dat $|z|$ zeer klein is, van de orde $\frac{1}{N}$., zodat $\left|\frac{1}{z}\right|$ zeer groot wordt. De som van de reeks uit het eerste lid wordt dan met grote benadering bepaald door

$$\omega_{h,k}\, e^{\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z} - z\right)} \,. \tag{14}$$

<u>Litteratuur:</u>

C.G.J.Jacobi. Crelle's Journal 36, p.97-112. Werke II, p.21-36.
R.Dedekind. In Riemanns Werke. Erste Auflage p.438-447
Ch.Hermite. Zie Tannery & Molk. Fonctions elliptiques T.IV.p.282-303.
J.Tannery et J.Molk. Fonctions elliptiques T.II.p.89-114.
H.Rademacher. Journal of the London Math.Soc., 7(1932).p.14-19.

§ 13. Verdere herleiding van de uitdrukking voor p(n).

Wij keren terug naar formule (7) en stellen hierin:

$$u = e^{\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k}} \tag{15}$$

met

$$z = k\left(\frac{1}{N^2} - i\varphi\right) \tag{16}$$

Op de Farey-boog $\xi_{h,k}$ (tussen de medianten $\frac{h'+h}{k'+k}$ en $\frac{h+h''}{k+k''}$)

is dan:

$$u = e^{\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi}{N^2} + 2\pi i\varphi} . \tag{17}$$

(in overeenstemming met (6))

De hoek φ is bepaald door:

$$-2\pi\,\theta'_{h,k} = 2\pi\left\{\frac{h'+h}{k'+k} - \frac{h}{k}\right\} \leqq 2\pi\varphi \leqq 2\pi\left\{\frac{h+h''}{k+k''} - \frac{h}{k}\right\} = +2\pi\,\theta''_{h,k} .$$

Wegens §10 is

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2kN} < \frac{1}{k(2N-1)} \leqq \theta'_{h,k} = \frac{h}{k} - \frac{h+h'}{k+k'} \leqq \frac{1}{k(N+1)} < \frac{1}{kN} \\ &\text{analoog :} \quad \frac{1}{2kN} < \theta''_{h,k} = \frac{h+h''}{k+k''} - \frac{h}{k} < \frac{1}{kN} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

<u>onafhankelijk van h</u>.

Uit (7),(13),(15),(17) en (18) volgt:

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\leqq h<k\leqq N}} e^{\frac{2\pi n}{N^2}} e^{-\frac{2\pi ihn}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} f\left(e^{\frac{2\pi ih}{k} - 2\pi\left(\frac{1}{N^2} - i\varphi\right)}\right) e^{-2\pi in\varphi} d\varphi \\ &= e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\leqq h<k\leqq N}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi ihn}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{+\theta''_{h,k}} \psi\left(k\left(\frac{1}{N^2} - i\varphi\right)\right) f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{k^2\left(\frac{1}{N^2} - i\varphi\right)}}\right) \times \\ &\qquad \times e^{-2\pi in\varphi} d\varphi \end{aligned} \tag{19}$$

waarin

$$\psi(z) = z^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z} - z\right)\right\} .$$

§ 14. <u>Benadering van de integrand</u>.

Wij zagen reeds in §12 (slot) dat voor grote waarden van N (en niet te grote waarden van k)

$$f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{k^2\left(\frac{1}{N^2} - i\varphi\right)}}\right) \backsim 1 .$$

In verband hiermede is het voordelig in plaats van (19) te schrijven:

$$p(n) = e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\leqq h<k\leqq N}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi inh}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{+\theta''_{h,k}} \psi\left(\frac{k}{N^2} - ki\varphi\right) e^{-2\pi in\varphi}\, d\varphi \; +$$

$$+ e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\leq h<k\leq N}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi inh}{k}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{+\theta''_{h,k}} \psi\left(\frac{k}{N^2} - ki\varphi\right)\left\{f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{k^2(\frac{1}{N^2} - i\varphi)}}\right) - 1\right\} \times e^{-2\pi in\varphi}\, d\varphi =$$

$$= e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \sum_{h,k} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi inh}{k}} J_{h,k} + e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \sum_{h,k} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi inh}{k}} J'_{h,k}\,. \quad (20)$$

A: Schatting van $J'_{h,k}$.

$$\psi(z)\left\{f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{kz}}\right) - 1\right\} = z^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi}{12k}(\frac{1}{z} - z)} \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\, e^{(\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{kz})m}$$

met $z = \frac{k}{N^2} - ki\varphi$.

dus:

$$\left|\psi(z)\left\{f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{kz}}\right) - 1\right\}\right| \leq |z^{\frac{1}{2}}|\, e^{-\frac{\pi}{12N^2}} \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\, e^{-\frac{2\pi}{k}(m - \frac{1}{24})\mathrm{Re}(\frac{1}{z})} \quad (21)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{k(\frac{1}{N^2} - i\varphi)} = \frac{\frac{1}{N^2} + i\varphi}{k(\frac{1}{N^4} + \varphi^2)}$$

dus wegens (18)

$$\frac{1}{k}\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{N^{-2}}{k^2N^{-4} + k^2\varphi^2} > \frac{N^{-2}}{k^2N^{-4} + N^{-2}} = \frac{1}{k^2N^{-2} + 1} \geq \frac{1}{2} \quad (22).$$

$$|z^{\frac{1}{2}}| = |\sqrt{\{k(N^{-2} - i\varphi)\}}| = \left\{k^2(N^{-4} + \varphi^2)\right\}^{\frac{1}{4}} < (k^2N^{-4} + N^{-2})^{\frac{1}{4}} < 2^{\frac{1}{4}} N^{-\frac{1}{2}} \quad (23).$$

Uit (21),(22),(23) volgt:

$$\left|\psi(z)\left\{f\left(e^{\frac{2\pi ih'}{k} - \frac{2\pi}{kz}}\right) - 1\right\}\right| < 2^{\frac{1}{4}} N^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\, e^{-\pi(m - \frac{1}{24})} = B_1 N^{-\frac{1}{2}} \quad (24).$$

Hierin is:

$$B_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{24}} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) e^{-\pi m} = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{-\pi m})^{-1} < \frac{2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{24}}}{1 - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{24}} (e^{\pi} - 1)}{e^{\pi} - 2} < \underline{1{,}5} \quad (24')$$

Dus volgens (20), omdat de som der integratieintervallen = 1:

$$\left| e^{2\pi nN^{-2}} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0\leq h<k\leq N}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi ihn}{k}} J'_{h,k} \right| < B_1\, e^{2\pi nN^{-2}} N^{-\frac{1}{2}}$$

dus

$$p(n) = e^{2\pi n N^{-2}} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0 \leq h < k \leq N}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi i h n}{k}}\, J_{h,k} + \mu$$

$$\text{met} \quad |\mu| < B_1\, e^{2\pi n N^{-2}}\, N^{-\frac{1}{2}} \qquad (25).$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM-O.

Colloquium

THEORIE DER PARTITIES.

o.l.v.

Prof.Dr S.C.van Veen.

3e Voordracht, Woensdag 12 Mei 1954.

Mathematisch Centrum.

§ 15. Omzetting van $J_{h,k}$ in een lus-integraal.

Wegens (20) is

$$e^{\frac{2\pi n}{N^2}} J_{h,k} = e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \int_{-\theta'_{h,k}}^{+\theta''_{h,k}} \sqrt{k(N^{-2}-i\varphi)}\,.\, e^{\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{k(N^{-2}-i\varphi)} - k(N^{-2}-i\varphi)\right)} .\, e^{-2\pi i n\varphi}\, d\varphi \qquad (26)$$

Stel $N^{-2}-i\varphi = w$

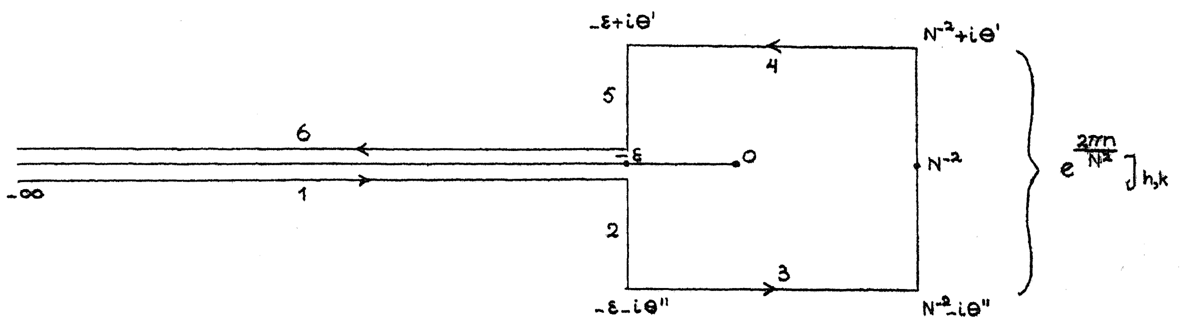
$$e^{\frac{2\pi n}{N^2}} J_{h,k} = e^{\frac{2\pi n}{N^2}} \int_{N^{-2}+i\theta'_{h,k}}^{N^{-2}-i\theta''_{h,k}} \sqrt{kw}\,.\, e^{\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{kw} - kw\right)} .\, e^{2\pi n(w-N^{-2})}\, i dw$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{i} \int_{N^{-2}-i\theta''_{h,k}}^{N^{-2}+i\theta'_{h,k}} \sqrt{w}\,.\, e^{\frac{\pi}{12k^2 w}} .\, e^{2\pi(n-\frac{1}{24})w}\, dw \qquad (27)$$

$\sqrt{w}\,.\, e^{\frac{\pi}{12k^2 w}}\, e^{2\pi(n-\frac{1}{24})w}$ is eenwaardig in het complexe w-vlak, met een coupure van 0 naar $-\infty$.

We beschouwen nu de integraal langs de aangegeven contour (zie figuur), welke de oorsprong in positieve richting omgeeft. Noem deze lus-integraal

$$L_k = \int_{-\infty}^{(0^+)} \sqrt{w}\,.\, e^{\frac{\pi}{12k^2 w}} .\, e^{2\pi(n-\frac{1}{24})w}\, dw \qquad (28)$$



Kies hierin ε willekeurig klein met de voorwaarde:

$$0 < \varepsilon < N^{-2} \tag{29}$$

Wij zien dat

$$e^{2\pi nN^{-2}} J_{h,k} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i} L_k - \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i}\left\{ I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6 \right\}. \tag{30}$$

Wij zullen hierin I_1 en I_6 exact berekenen voor $\varepsilon \to 0$.

$$I_1+I_6 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \sqrt{|u|}\,.e^{-\frac{\pi}{2}i}\, e^{\frac{\pi}{12k^2u}}\, e^{2\pi(n-\frac{1}{24})u}\,du +$$

$$+\int_{-\varepsilon}^{-\infty} \sqrt{|u|}\; e^{\frac{\pi i}{2}}\, e^{\frac{\pi}{12k^2u}}\, e^{2\pi(n-\frac{1}{24})u}\,du =$$

$$= -2i\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-2\pi(n-\frac{1}{24})t}\, e^{\frac{-\pi}{12k^2t}}\, t^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

dus:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ I_1+I_6 \right\} = -2i\int_0^{\infty} e^{-2\pi(n-\frac{1}{24})t}\, e^{-\frac{\pi}{12k^2t}}\, t^{\frac{1}{2}}\,dt = -2iH_k \tag{31}$$

$$|I_2| \leq \int_0^{-\theta''_{h,k}} (\varepsilon^2+v^2)^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{\pi}{12k^2}\mathrm{Re}(\frac{1}{-\varepsilon+iv})}\, e^{-2\pi(n-\frac{1}{24})\varepsilon}\,|dv|$$

$$\mathrm{Re}\ \frac{1}{-\varepsilon+iv} = \frac{-\varepsilon}{\varepsilon^2+v^2} < 0 \quad \text{dus}$$

$$|I_2| < (\varepsilon^2+\theta''^{\,2}_{h,k})^{\frac{1}{4}}\ \theta''_{h,k} < (\varepsilon^2+\frac{1}{k^2N^2})^{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{kN} \tag{32}$$

Analoog: $|I_5| < (\varepsilon^2+\theta'^{\,2}_{h,k})\ \theta'_{h,k} < (\varepsilon^2+\frac{1}{k^2N^2})^{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{kN}$ (32')

$$|I_3| \leq \int_{-\varepsilon}^{N^{-2}} (u^2+\theta''^{\,2}_{h,k})^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{\pi}{12k^2}\mathrm{Re}\frac{1}{u-i\theta''_{h,k}}}\, e^{2\pi(n-\frac{1}{24})u}\,du$$

Hierin is: $\frac{1}{k^2}\mathrm{Re}(\frac{1}{u-i\theta''_{h,k}}) = \frac{u}{k^2(u^2+\theta''^{\,2}_{h,k})} \leq \frac{N^{-2}}{k^2\ \theta''^{\,2}_{h,k}} \leq 4$

dus

$$|I_3| < (\varepsilon+N^{-2})(N^{-4}+\theta''^{\,2}_{h,k})^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{\pi}{3}}\, e^{2\pi nN^{-2}}$$

$$< (\varepsilon+N^{-2})(N^{-4}+\frac{1}{k^2N^2})^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{\pi}{3}}\, e^{2\pi nN^{-2}} < (\varepsilon+N^{-2})2^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi}{3}}.e^{2\pi nN^{-2}} \tag{33}$$

Analoog:

$$|I_4| \leq (\varepsilon+N^{-2})\ 2^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi}{3}}\, e^{2\pi nN^{-2}} \tag{33'}$$

Dus voor $\varepsilon \to 0$:

$$e^{2\pi nN^{-2}} J_{h,k} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i} L_k + 2k^{\frac{1}{2}}H_k + U_{h,k} + V_{h,k} \tag{34}$$

waarin H_k bepaald is door (31), terwijl wegens (32),(33) voor $\varepsilon \to 0$:

$$|U_{h,k}| \leq \frac{2}{kN^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad |V_{h,k}| \leq 2^{\frac{5}{4}}.N^{-\frac{5}{2}}.e^{\frac{\pi}{3}}.e^{2\pi nN^{-2}} \tag{35}$$

Stellen wij:

$$\psi_k(n) = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{i} L_k + 2k^{\frac{1}{2}} H_k,$$

dan volgt uit (25)

$$p(n) = \sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0\leq h<k\leq N}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi ihn}{k}} \psi_k(n) + \mu + \sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0\leq h<k\leq N}} U_{h,k} + \sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0\leq h<k\leq N}} V_{h,k} \tag{36}$$

Wegens (35) is:

$$\left|\sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0\leq h<k\leq N}} U_{h,k}\right| \leq \frac{2}{N^{\frac{3}{2}}} \sum_{0<k\leq N} 1 = \frac{2}{N^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left|\sum_{\substack{(h,k)=1\\ 0\leq h<k\leq N}} V_{h,k}\right| \leq 2^{\frac{5}{4}} e^{\frac{\pi}{3}} e^{2\pi nN^{-2}} N^{-\frac{5}{2}} \sum_{0<k\leq N} k < 2^{\frac{5}{4}} e^{\frac{\pi}{3}} e^{2\pi nN^{-2}}.N^{-\frac{1}{2}}$$

zodat ~~tan~~slotte wegens (36)

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k(n)\,\psi_k(n) + R(n,N). \tag{37}$$

met

$$|R(n,N)| < N^{-\frac{1}{2}}\left\{B_1 e^{2\pi nN^{-2}} + 2 + 2^{\frac{5}{4}}.e^{\frac{\pi}{3}}.e^{2\pi nN^{-2}}\right\} < N^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi nN^{-2}}\left\{B_1+2+2^{\frac{5}{4}}e^{\frac{\pi}{3}}\right\}$$

$$= B_2\, e^{2\pi nN^{-2}}\, N^{-\frac{1}{2}} \quad \text{met} \quad B_2 < 10{,}3 \tag{37'}$$

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h\leq k\\ (h,k)=1}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi ihn}{k}} \tag{37''}$$

Hieruit volgt, dat bij vaste n voor $N \to \infty$ $R(n,N) \to 0$.
De reeks uitgedrukt over alle k convergeert:

$$\left.\begin{aligned} p(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\,\psi_k(n) \\ \text{met} \quad \psi_k(n) &= k^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{L_k}{i} + 2H_k\right\}\end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

§ 16. Bepaling van de lus-integraal L_k.

De lus-integraal:

$$\frac{1}{i} L_k = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{(0^+)} w^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi}{12k^2w}}\,.\,e^{2\pi(n-\frac{1}{24})w}\, dw \tag{28}$$

kan vrij eenvoudig door Bessel-functies worden uitgedrukt. Wij geven echter de voorkeur aan een directe berekening door reeksontwikkeling van de factor $e^{\frac{\pi}{12k^2w}}$

Dit levert:

$$\frac{1}{i} L_k = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{(0^+)} w^{\frac{1}{2}} e^{2\pi(n-\frac{1}{24})w} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{12k^2 w}\right)^l}{l!} dw$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{12k^2}\right)^l}{l!} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^{2\pi(n-\frac{1}{24})w} w^{\frac{1}{2}-l} dw$$

$$= 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{12k^2}\right)^l}{l!} \left\{ 2\pi(n-\frac{1}{24})\right\}^{l-\frac{3}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^z z^{-l+\frac{1}{2}} dz.$$

Toepassing van de formule van Hankel:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^z z^{-s} dz = \frac{1}{\Gamma(s)}$$

geeft:

$$\frac{1}{i} L_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (n-\frac{1}{24})^{-\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left\{\frac{\pi^2(n-\frac{1}{24})}{6k^2}\right\}^l}{l!\ \Gamma(l-\frac{1}{2})} \tag{39}$$

Stellen wij

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n-\frac{1}{24}} = \frac{C}{k} \lambda_n \\ \text{met } C &= \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ ;\quad \lambda_n = \sqrt{n-\frac{1}{24}} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

dan gaat (39) over in:

$$\frac{1}{i} L_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda_n^{-3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{Y^2}{4})^l}{l!\ \Gamma(l-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda_n^{-3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ -1 + Y^2(\frac{1}{2!} + \frac{3Y^2}{4!} + \frac{5Y^4}{6!} + \dots)\right\}$$

$$= \frac{\lambda_n^{-3}}{2\pi\sqrt{2}} \left\{ -1 + Y^2 \frac{d}{dY} (\frac{Y}{2!} + \frac{Y^3}{4!} + \frac{Y^5}{5!} + \dots)\right\}$$

$$= \frac{\lambda_n^{-3}}{2\pi\sqrt{2}} \left\{ -1 + Y^2 \frac{d}{dY} (\frac{\cosh Y - 1}{Y})\right\} = \frac{\lambda_n^{-3}}{2\pi\sqrt{2}} Y^2 \frac{d}{dY} (\frac{\cosh Y}{Y})$$

Wegens

$$\frac{d}{dn}(\frac{\cosh Y}{Y}) = \frac{d}{dY}(\frac{\cosh Y}{Y}) \frac{dY}{dn} = \frac{C}{2k\lambda_n} \frac{d}{dY}(\frac{\cosh Y}{Y})$$

gaat (41) over in:

$$\frac{1}{i} L_k = \frac{\lambda_n^{-2} k}{\pi\sqrt{2}.C} \frac{C^2 \lambda_n^2}{k^2} \frac{d}{dn} (\frac{\cosh Y}{Y}) = \frac{C}{k\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} (\frac{\cosh Y}{Y})$$

of tenslotte

$$\frac{1}{i} L_k = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{\cosh \frac{C\lambda_n}{k}}{\lambda_n} \right) \tag{42}$$

§ 17. Bepaling van de integraal H_k (31). Eindresultaat.

Volgens (31) is $H_k = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{12k^2 t} - 2\pi(n-\frac{1}{24})t} dt.$

Volgens een bekend resultaat is:

$$\int_0^\infty e^{-c^2 t - \frac{a^2}{t}} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\int_0^\infty e^{-c^2u^2 - \frac{a^2}{u^2}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{c} \cdot e^{-2ac}$$

dus

$$\int_0^\infty e^{-c^2 t - \frac{a^2}{t}} t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2c} \frac{d}{dc} \left(\frac{e^{-2ac}}{c}\right).$$

Hieruit volgt voor $c = \sqrt{2\pi}\,\lambda_n$, $a = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{12}}$

$$H_k = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,\lambda_n} \frac{d}{d\lambda_n} \left(\frac{e^{-\frac{C\lambda_n}{k}}}{\sqrt{2\pi}\,\lambda_n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-\frac{C\lambda_n}{k}}}{\lambda_n}\right) \tag{43}$$

Tenslotte volgt uit (38),(42) en (43)

$$\psi_k(n) = k^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{L_k}{i} + 2H_k \right\} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\cosh\frac{C\lambda_n}{k} - e^{-\frac{C\lambda_n}{k}}}{\lambda_n} \right\}$$

$$= \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{C\lambda_n}{k}\right)}{\lambda_n} \right\} \tag{44}$$

Uit (38) volgt dus het eindresultaat:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\, k^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{C\lambda_n}{k}\right)}{\lambda_n} \right\} \tag{45}$$

met

$$C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\ ; \quad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}\ ,$$

$$A_k = \sum_{\substack{h \leq k \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k}\, e^{-\frac{2\pi i h n}{k}}\ ,$$

$$\omega_{h,k} = \exp\left(\pi i \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k} \left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\right).$$

AMSTERDAM-O.

TELEF. 51660-56643

Colloquium

THEORIE DER PARTITIES.

o.l.v.

Prof.Dr.S.C.van Veen.

4e Voordracht, Woensdag 26 Mei 1954.

Mathematisch Centrum.

§ 18. Lineaire transformatie van de modulaire functie. Inleiding.

Wij komen terug op de in § 12 zonder bewijs vermelde transformatie-formule voor de modulaire functie $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1}$, nl.:

$$f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih-z)}\right) = \omega_{h,k}\ z^{\frac{1}{2}} \exp \frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z}-z\right) f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih'-\frac{1}{z})}\right)_{(Re(z)>0)} \qquad (13).$$

Het gaat hier in de eerste plaats om de afleiding van de uitkomst voor de $24k^e$ machtswortel uit de eenheid:

$$\omega_{h,k} = \exp\left\{\pi i \sum_{m=1}^{k-1} \frac{m}{k}\left(\frac{hm}{k} - \left[\frac{hm}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Wij herinneren eraan, dat h,k en h' gehele positieve getallen zijn, met $(h,k)=1$, terwijl h' een oplossing is van de congruentie:

$$hh' \equiv -1 \pmod k.$$

Beschouw

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1}$$

met

$$x = e^{\frac{2\pi}{k}(hi-z)}.$$

Wegens $Re(z) > 0$ is $|x| < 1$.

Stel

$$z = \rho e^{i\beta}, \text{ dus } |\beta| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\beta}, \text{ dus } R\left(\frac{1}{z}\right) > 0.$$

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1-x^n)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{mn}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} x^{mn} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m(1-x^m)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(x^{-m}-1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\left\{e^{\frac{2\pi m}{k}(z-ih)}-1\right\}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mk+l} \frac{1}{e^{(mk+l)\frac{2\pi}{k}(z-ih)}-1} =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mk+l} \quad \frac{1}{e^{2\pi(zm+\frac{lz}{k} - \frac{ihl}{k})}-1} \quad . \tag{46}$$

In verband met de laatste som voeren wij in de integraal:

$$I_l = \int_C \frac{d\,u}{(ku+l)(e^{2\pi iu}-1)(e^{2\pi(zu+\frac{lz}{k} - \frac{ihl}{k})}-1)} \tag{47}$$

genomen langs een geschikte nader te bepalen contour C.
Stel in (47):

$$ku+l=v \ , \ \text{dus} \quad u = \frac{v-l}{k} \ ,$$

$$I_l = \frac{1}{k} \int_{C'} \frac{d\,v}{v(e^{\frac{2\pi i}{k}(v-l)}-1)(e^{\frac{2\pi}{k}(zv-ihl)}-1)} \tag{47'}$$

De polen van de integrand zijn van drieërlei soort
1) de waarden van v, die voldoen aan

$$e^{\frac{2\pi i}{k}(v-l)} = 1 \quad \longrightarrow \quad v=l+mk.$$

2) de waarden van v, die voldoen aan

$$e^{\frac{2\pi}{k}(zv-ihl)} = 1 \quad \longrightarrow \quad v = \frac{i}{z}(hl+m'k)$$

$$\left.\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{48}$$

Deze beide soorten polen zijn <u>enkelvoudig</u> (voor $l \neq k$).
3) de oorsprong v=0. Deze is ook enkelvoudig voor $l \neq k$.

Voor l=k is de pool in de oorsprong <u>drievoudig</u>, n.l. voor m=-1, m'=-k.
Stel:

$$\arg \frac{i}{z} = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha, \qquad \text{dus} \quad \underline{0 < \alpha < \pi}. \tag{49}$$

§ 19. Over de ligging der polen.

De polen van de 1e soort v=l+mk liggen op de reële as, met een onderlinge afstand 1. Laten wij l de verzameling 1,2,...,k doorlopen, dan doorloopt de verzameling v=l+mk voor m=0,±1,±2,... <u>alle</u> roosterpunten van de reële as, en ieder precies éénmaal.
Evenzo liggen de polen van de 2e soort op een rechte door O, met arg = α, op onderlinge afstand $\frac{1}{\rho}$.
<u>Stelling</u>: Voor iedere gehele waarde van l (l=1,2,...,q) kan een verzameling cirkels om O worden gekozen met willekeurig grote straal, zodat geen enkele van deze cirkels door de polen van de 1e en 2e soort gaat.
<u>Bewijs</u>: a) $|z| \geq 1$ dus $\frac{1}{\rho} \leq 1$
Ieder geheel positief roosterpunt n is in ruime zin gelegen in een

interval tussen twee opeenvolgende veelvouden van $\frac{1}{\rho}$ (n willekeurig groot).

$$\frac{n'}{\rho} \leq n \leq \frac{n'+1}{\rho} \qquad \text{(n en n' positief geheel)}$$

Voor $\frac{n'+1}{\rho} \geqq n \geqq \frac{n'+\frac{1}{2}}{\rho}$ kieze men voor de straal $R = \frac{n'+\frac{1}{4}}{\rho}$

Voor $\frac{n'+\frac{1}{2}}{\rho} \geqq n \geqq \frac{n'}{\rho}$ kieze men voor de straal $R = \frac{n'+\frac{3}{4}}{\rho}$.

In beide gevallen is de kleinste afstand van de polen van de 1e en 2e soort tot de cirkel met straal R $= \frac{1}{4\rho}$.

b) $|z| \leq 1$; $\frac{1}{\rho} \geqq 1$.

Ieder punt $\frac{n'}{\rho}$ is in ruime zin gelegen in een interval tussen twee opeenvolgende roosterpunten.

$$n \leq \frac{n'}{\rho} \leq n+1 \qquad \text{(n' willekeurig groot positief)}$$

Voor $n+1 \geqq \frac{n'}{\rho} \geqq n+\frac{1}{2}$ kieze men $R = n+\frac{1}{4}$.

Voor $n+\frac{1}{2} \geqq \frac{n'}{\rho} \geqq n$ kieze men $R = n+\frac{3}{4}$.

In beide gevallen is de kleinste afstand van de polen tot de cirkel met straal $R = \frac{1}{4}$.

In alle omstandigheden is de minimum afstand dus

$$\min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\rho}\right).$$

§ 20. Bepaling van I_1 met behulp van residuen.

Uit (47) volgt:

$$I_1 = \frac{2\pi i}{k} \sum_{res} \frac{1}{v\left(e^{\frac{2\pi i}{k}(v-l)} - 1\right)\left(e^{\frac{2\pi}{k}(zv-ihl)} - 1\right)} \tag{50}$$

uitgestrekt over alle polen binnen C. Voor C kiezen wij nu een cirkel met straal R van de in § 19 besproken serie.

a) polen van de 1e soort

residu in $v=l+mk$:
$$\frac{1}{(l+mk)\left(e^{\frac{2\pi}{k}(zl+zmk-ihl)} - 1\right)} \lim_{v \to l+mk} \frac{v-l-mk}{e^{\frac{2\pi i}{k}(v-l-mk)} - 1}$$

$$= \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{(l+mk)\left\{e^{\frac{2\pi}{k}(z-ih)(mk+l)} - 1\right\}} \tag{51}$$

Deze uitkomst geldt voor: $l=1,2,3,\ldots,k-1$; $m=0,\pm1,\pm2,\pm3$

en bovendien voor $l=k$; $m \neq -1$.

Bij gegeven l is: $|l+mk| < R$

dus

$$\frac{-R-l}{k} < m < \frac{R-l}{k}.$$

Uit (50) en (51) volgt voor het 1e gedeelte van ΣI_1, behorende bij de polen van de 1e soort:

$$\Sigma(I_1)_1 = \sum_{l=1}^{k}{}' \sum_m \frac{1}{(l+mk)(e^{\frac{2\pi}{k}(z-ih)(l+mk)}-1)}$$

(waarin Σ' betekent: met uitzondering van $l=k$, $m=-1$)

$$= \sum_{n=[1-R]}^{n=[R]}{}' \frac{1}{n(e^{\frac{2\pi n}{k}(z-ih)}-1)} \qquad (n \neq 0).$$

De laatste som wordt nog verder herleid als volgt:

$$\Sigma(I_1)_1 = \sum_{n=1}^{[R]} + \sum_{n=-1}^{[1-R]} = \sum_{n=1}^{[R]} \frac{1}{n(e^{nw}-1)} - \sum_{n=1}^{[R-1]} \frac{1}{n(e^{-nw}-1)} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{[R]} \frac{1}{n(e^{nw}-1)} - \frac{e^{w[R]}}{[R](e^{w[R]}-1)} + \sum_{1}^{[R]} \frac{1}{n} \qquad (52).$$

waarin $w = \frac{2\pi}{k}(z-ih)$ $\qquad (Re(w) > 0)$.

b) polen van 2e soort: $v = \frac{i}{z}(hl+m'k)$.

Residu is: $$\frac{z}{i(hl+m'k)(e^{-\frac{2\pi}{zk}(hl+m'k)-\frac{2\pi il}{k}}-1)} \lim_{v\to\frac{i}{z}(hl+m'k)} \frac{v-\frac{i}{z}(hl+m'k)}{e^{\frac{2\pi}{k}(vz-ihl)}-1}$$

$$= \frac{k}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(hl+m'k)(e^{-\frac{2\pi}{zk}(hl+m'k)-\frac{2\pi il}{k}}-1)} \qquad (53)$$

Wij voeren nu een geheel getal h' in, bepaald door

$$hh' \equiv -1 \pmod h.$$

$$e^{-\frac{2\pi}{zk}(hl+m'k)-\frac{2\pi il}{k}} = e^{-\frac{2\pi}{zk}(hl+m'k)+\frac{2\pi ihh'l}{k}}$$

$$= e^{(hl+m'k)(-\frac{2\pi}{zk}+\frac{2\pi ih'}{k})} = e^{(hl+m'k)w'} \qquad (w' = -\frac{2\pi}{k}(\frac{1}{z}-ih')).$$

Het residu voor $v = \frac{i}{z}(hl+m'k)$ is dan

$$\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{(hl+m'k)e^{(hl+m'k)w'}-1} \qquad (54)$$

Uit (50) en (54) volgt voor het 2e gedeelte van ΣI_1, behorende bij de polen van de 2e soort:

$$\Sigma(I_1)_2 = \sum_{[1-R\rho]}^{[R\rho]}{}' \frac{1}{n(e^{nw'}-1)} \qquad (\text{met } Re(w')=R(\tfrac{-2\pi}{zk}) < 0.)$$

$$= \sum_{n=1}^{[R\rho]} + \sum_{n=-1}^{[1-R\rho]} = -2\sum_{n=1}^{[R\rho]} \frac{1}{n(e^{-nw'}-1)} - \sum_{n=1}^{[R\rho]} \frac{1}{n} + \frac{1}{[R\rho]\left\{e^{-w[R\rho]}-1\right\}} \tag{55}$$

Dus:

$$\sum\left\{(I_1)_1 + (I_1)_2\right\} = 2\sum_{n=1}^{[R]} \frac{1}{n(e^{nw}-1)} - 2\sum_{n=1}^{[R\rho]} \frac{1}{n(e^{-nw'}-1)}$$

$$+ \sum_{[R\rho]+1}^{[R]} \frac{1}{n} + \frac{1}{[R\rho]\left\{e^{-w'[R\rho]}-1\right\}} + \frac{1}{[R]\left\{e^{-w[R]}-1\right\}} \tag{56}$$

In de laatste uitkomst is aangenomen

$$\rho = |z| \leqq 1.$$

Voor $|z| \geqq 1$ zijn de wijzigingen eenvoudig aan te brengen.

§ 21. De residuen in de oorsprong $v=0$.

Deze residuen zijn van tweeërlei soort.

1e. $v=0$, $l \neq k$. Dan is de oorsprong een pool van de 1e orde met residu

$$\frac{1}{\left(e^{-\frac{2\pi i l}{k}}-1\right)\left(e^{-\frac{2\pi i h l}{k}}-1\right)} \qquad \text{(zie (50))}$$

zodat dit gedeelte in $\sum$res. levert:

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\left(e^{-\frac{2\pi i l}{k}}-1\right)\left(e^{-\frac{2\pi i h l}{k}}-1\right)} \tag{57}$$

Met de zuiver arithmetische bepaling van deze som (één van de grootste moeilijkheden) zullen wij ons in §23 bezighouden.

2e. Tenslotte $v=0$, $l=k$. In dat geval is de oorsprong een pool van de 3e orde. Het residu voor $v=0$, $l=k$ wordt gevonden als coëfficient van $\frac{1}{v}$ in de ontwikkeling

$$\frac{1}{v\left(e^{\frac{2\pi i v}{k}}-1\right)\left(e^{\frac{2\pi z v}{k}}-1\right)} = \frac{1}{v}\left\{\frac{k}{2\pi i v} - \frac{1}{2} + \frac{\pi i v}{6k} + O(v^3)\right\} \cdot \left\{\frac{k}{2\pi z v} - \frac{1}{2} + \frac{\pi z v}{6k} + O(v^3)\right\}.$$

Dus het residu $= \frac{z}{12i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{12z} = \frac{1}{12i}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{4}$ (58)

Tenslotte volgt uit (50), (56), (57) en (58)

$$\int_C = 2\pi i \sum_{\text{res}} = 2\sum_{n=1}^{[R]} \frac{1}{n(e^{nw}-1)} - 2\sum_{n=1}^{[R\rho]} \frac{1}{n(e^{-nw'}-1)}$$

$$+\sum_{[R\rho]+1}^{[R]}\frac{1}{n}+\frac{1}{[R\rho]\left\{e^{-w'[R\rho]}-1\right\}}+\frac{1}{[R]\left\{e^{-w[R]}-1\right\}}$$

$$+\frac{2\pi i}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{\left(e^{\frac{-2\pi il}{k}}-1\right)\left(e^{\frac{-2\pi ihl}{k}}-1\right)}+\frac{2\pi i}{k}\left\{\frac{1}{12i}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{4}\right\} \tag{59}$$

met $\quad w=\frac{2\pi}{k}(z-ih)$

$$-w'=+\frac{2\pi}{k}\left(\frac{1}{z}-ih'\right).$$

TELEF. 51660-56643

Colloquium

THEORIE DER PARTITIES.

o.l.v.

Prof.Dr S.C.van Veen.

5e Voordracht, Woensdag 9 Juni 1954.

Mathematisch Centrum.

§ 22. De som van alle residuen voor $R \to \infty$.

De (verbeterde) uitkomst (59) gaf als $2\pi i$ X de som van de residuen van I_1 (47) $= \int_C$:

$$2\sum_{n=1}^{[R]} \frac{1}{n(e^{nw}-1)} - 2\sum_{n=1}^{[R\rho]} \frac{1}{n(e^{-nw'}-1)} + \sum_{[R\rho]+1}^{[R]} \frac{1}{n}$$

$$+ \frac{2\pi i}{k}\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\left(1-e^{\frac{2\pi i l}{k}}\right)\left(1-e^{\frac{2\pi i h l}{k}}\right)} + \frac{2\pi i}{k}\left\{\frac{1}{12i}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{4}\right\} \qquad (59')$$

met

$$w = \frac{2\pi}{k}(z-ih) \; ; \; -w' = \frac{2\pi}{k}\left(\frac{1}{z} - ih'\right).$$

Bekend is: $\displaystyle\int_{[R\rho]+1}^{[R]+1} \frac{dx}{x} < \sum_{[R\rho]+1}^{[R]} \frac{1}{n} < \int_{[R\rho]}^{[R]} \frac{dx}{x}$ of

$$\log \frac{[R+1]}{[R\rho+1]} < \sum_{[R\rho]+1}^{[R]} \frac{1}{n} < \log \frac{[R]}{[R\rho]} .$$

Stel $\left.\begin{array}{l}[R] = R - \delta_1 \\ [R\rho] = R\rho - \delta_2\end{array}\right\} \quad 0 < \delta_{1;2} < 1$

$$\log \frac{1}{\rho} + \log \frac{1+\frac{1-\delta_1}{R}}{1+\frac{1-\delta_2}{R\rho}} < \sum_{[R\rho]+1}^{[R]} \frac{1}{n} < \log\frac{1}{\rho} + \log \frac{1-\frac{\delta_1}{R}}{1-\frac{\delta_2}{R\rho}} .$$

Dus voor $R \to \infty$ is $\lim \displaystyle\sum_{[R\rho]+1}^{[R]} \frac{1}{n} = \log \frac{1}{\rho}$ en

(59') gaat over in

$$\lim_{R\to\infty}\int_c = \frac{\pi}{6k}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{\pi i}{2k}+\frac{2\pi i}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{\left(1-e^{\frac{2\pi i l}{k}}\right)\left(1-e^{\frac{2\pi i h l}{k}}\right)}$$

$$+\,2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{nw}-1)}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{-nw'}-1)}+\log\frac{1}{\rho}\quad\text{, of wegens (46)}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_c = \frac{\pi}{6k}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{\pi i}{2k}+\frac{2\pi i}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{\left(1-e^{\frac{-2\pi i l}{k}}\right)\left(1-e^{\frac{-2\pi i h l}{k}}\right)}$$

$$+\,2\log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih-z)}\right)-2\log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}\left(ih'-\frac{1}{z}\right)}\right)+\log\frac{1}{\rho}\,. \tag{60}$$

§ 23. Bepaling van de enig overgebleven som in (60).

Wij moeten nu in (60) alleen nog de som $\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{\left(1-e^{\frac{-2\pi i l}{k}}\right)\left(1-e^{\frac{-2\pi i h l}{k}}\right)} = S$

bepalen, wat op arithmetische wijze mogelijk zal blijken.

Daartoe maken wij gebruik van de

Hulpstelling: Voor $(h,k) = 1$ is:

$$\sum_{m=1}^{k-1} m\, e^{\frac{-2\pi i\, hlm}{k}} = \frac{-k}{1-e^{\frac{-2\pi i h l}{k}}} \tag{61}$$

Bewijs: $g(x) = \sum_{m=0}^{k-1} e^{imx} = \frac{1-e^{ikx}}{1-e^{ix}}$, dus

$$g'(x) = -ik\frac{e^{ikx}}{1-e^{ix}}+i\frac{e^{ix}(1-e^{ikx})}{(1-e^{ix})^2} = i\sum_{m=1}^{k-1} m\, e^{imx} \tag{62}$$

Stellen wij in (62): $x = -\frac{2\pi hl}{k}$, dan volgt hieruit (61).

Uit (61) volgt, dat we voor de gevraagde som kunnen schrijven:

$$S = -\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi i l}{k}}}\cdot\sum_{m=1}^{k-1} m.e^{\frac{-2\pi i h l m}{k}} =$$

$$= -\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1} m\sum_{l=1}^{k-1}\frac{e^{\frac{-2\pi i h l m}{k}}}{1-e^{\frac{-2\pi i l}{k}}} = -\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1} m\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi i l}{k}}}+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1} m\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1-e^{\frac{-2\pi i h l m}{k}}}{1-e^{\frac{-2\pi i l}{k}}} \tag{63}$$

Hierin is de eerste som:

$$S_1 = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi il}{k}}} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi i(k-l)}{k}}} = -\sum_{l=1}^{k-1} \frac{e^{\frac{-2\pi il}{k}}}{1-e^{\frac{-2\pi il}{k}}},$$

of

$$2S_1 = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1-e^{\frac{-2\pi il}{k}}}{1-e^{\frac{-2\pi il}{k}}} = k-1, \text{ dus}$$

$$S_1 = \frac{k-1}{2} \tag{64}$$

$$S_2 = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1-e^{\frac{-2\pi ihlm}{k}}}{1-e^{\frac{-2\pi il}{k}}} = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{n=0}^{hm-1} e^{\frac{-2\pi iln}{k}} = \sum_{n=0}^{hm-1} \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} e^{\frac{-2\pi iln}{k}} -1 \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{hm-1} \sum_{l=0}^{k-1} e^{\frac{-2\pi iln}{k}} - hm. \tag{65}$$

Hierin is: $\displaystyle \sum_{l=0}^{k-1} e^{\frac{-2\pi iln}{k}} \begin{cases} = \dfrac{1-e^{-2\pi in}}{1-e^{\frac{-2\pi in}{k}}} = 0 & \text{voor } k \nmid n \\ = k & \text{voor } k \mid n \end{cases}$

m.a.w.

$$\sum_{n=0}^{hm-1} \sum_{l=0}^{k-1} e^{\frac{-2\pi iln}{k}} = k\left\{\left[\frac{hm}{k}\right] + 1\right\}. \tag{66}$$

Uit (65) en (66) volgt:

$$S_2 = k\left\{\left[\frac{hm}{k}\right] - \frac{hm}{k}\right\} + k. \tag{67}$$

Uit (63), (64) en (67) volgt:

$$S = -\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1} \frac{m(k-1)}{2} + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1} mk\left\{\left[\frac{hm}{k}\right] - \frac{hm}{k}\right\} + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1} mk =$$

$$= k\sum_{m=1}^{k-1} \frac{m}{k}\left\{\left[\frac{hm}{k}\right] - \frac{hm}{k} + \tfrac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{k-1} m$$

$$= k\sum_{m=1}^{k-1} \frac{m}{k}\left\{\left[\frac{hm}{k}\right] - \frac{hm}{k} + \tfrac{1}{2}\right\} + \frac{k-1}{4}. \tag{68}$$

Dit is de belangrijkste uitkomst van Dedekind-Rademacher (l.c).
Uit (68) en (60) volgt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_C = \frac{\pi}{6k}\left(z-\frac{1}{z}\right) + \frac{\pi i}{2k} + \log\frac{1}{\rho} + 2\pi i\sum_{m=1}^{k-1} \frac{m}{k}\left\{\left[\frac{hm}{k}\right] - \frac{hm}{k} + \tfrac{1}{2}\right\}$$

$$+ \frac{\pi i(k-1)}{2k} + 2\log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih-z)}\right) - 2\log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih'-\frac{1}{z})}\right) \tag{69}.$$

§ 24. Directe berekening van de contourintegraal voor $R \to \infty$.

Op de omtrek van de cirkel C' met straal R (uit de in § 20 bepaalde serie) stellen wij $v = Re^{i\varphi}$ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$, waardoor (47') overgaat in

$$I_l = \frac{i}{k}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left\{e^{\frac{2\pi}{k}(-R\sin\varphi + iR\cos\varphi - il)}-1\right\}\left\{e^{\frac{2\pi}{k}\left(\rho R\cos(\varphi+\beta)+i\rho R\sin(\varphi+\beta)-ihl\right)}-1\right\}} \tag{70}$$

De contouren zijn zo gekozen, dat op de omtrekken de integrand steeds begrensd is (uniform in R).

Uit (70) volgt, dat de integrand

$$\left.\begin{aligned} &\to 0 \text{ als } \sin\varphi < 0 \text{ of (en) } \cos(\varphi+\beta) > 0. \\ &\to 1 \text{ als } \sin\varphi > 0 \text{ en } \cos(\varphi+\beta) < 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Wij behoeven dus alleen het gebied te onderzoeken waar tegelijkertijd $\sin\varphi > 0$ en $\cos(\varphi+\beta) = \sin(\alpha-\varphi) < 0$ is, of ook, waar tegelijk $\sin\varphi$ en $\sin(\varphi-\alpha) > 0$ zijn $(0 < \alpha < \pi)$

Dit is alleen het geval voor $\alpha < \varphi < \pi$

$$\text{Dus } \lim_{R\to\infty} I_l = \frac{i}{k}\int_\alpha^\pi d\varphi = \frac{i}{k}(\pi-\alpha) \tag{72}$$

$$= \frac{i}{k}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) \tag{72'}$$

en

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{l=1}^{k-1} I_l = i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right). \tag{73}$$

§ 25. Eindresultaat.

Uit (73) en (69) volgt

$$\log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih-z)}\right) = \log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih'-\frac{1}{z})}\right) + \frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z}-z\right) - \frac{\pi i}{4k} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}$$

$$+\pi i\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m}{k}\left\{\frac{hm}{k}-\left[\frac{hm}{k}\right]-\tfrac{1}{2}\right\} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{4k} + \frac{\pi i}{4} + \frac{i\beta}{2}, \text{ dus wegens } z = \rho e^{i\beta}$$

$$\log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih-z)}\right) = \log f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih'-\frac{1}{z})}\right) + \frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z}-z\right) + \tfrac{1}{2}\log z +$$

$$+\pi i\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m}{k}\left\{\frac{hm}{k}-\left[\frac{hm}{k}\right]-\tfrac{1}{2}\right\} \tag{74}$$

of

$$f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih-z)}\right) = \exp\left[\frac{\pi}{12k}\left(\frac{1}{z}-z\right)+\pi i\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m}{k}\left\{\frac{hm}{k}-\left[\frac{hm}{k}\right]-\tfrac{1}{2}\right\}\right] z^{\frac{1}{2}} f\left(e^{\frac{2\pi}{k}(ih'-\frac{1}{z})}\right)$$

$$\operatorname{Re}(z) > 0,$$

waarmede de fundamentele relatie voor de lineaire transformatie volledig is bewezen.