STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 28c

Avondcursus wiskunde 1954-1956;

Analytische meetkunde 1.

H.J.A.Duparc.

1955

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.
TELEF. 51660-56643

AVONDCURSUS 1954-1955

Analytische Meetkunde

door

Dr H.J.A. Duparc

§ 1. De rechte lijn.

In de analytische meetkunde worden eigenschappen van meetkundige figuren bestudeerd met algebraïsche hulpmiddelen.

Als eenvoudigste voorbeeld kan men beginnen met de studie van de eigenschappen van de nuldimensionale figuur, het punt. Wegens de eentonigheid van dit onderwerp laten wij dit achterwege.

De volgende figuur die wij bekijken is de eenvoudigste eendimensionale figuur, de rechte lijn. Nu is in de analyse uiteengezet hoe men de reële getallen kan afbeelden op een rechte, de getallenrechte genaamd. Omgekeerd kunnen wij hier niet aantonen (van de "gewone" meetkunde die wij hier bekend onderstellen, durven wij n.l. niet aan te nemen, dat haar strenge axiomatische opbouw ook bekend is), dat iedere rechte uit de gewone meetkunde als een getallenrechte te beschouwen is. Wij zullen dit daarom hier als axioma poneren en gaan thans nog enige eigenschappen van (punten op) rechten beschouwen.

Op grond van wat in de analyse is uiteengezet correspondeert dan ieder punt A van een rechte met een reëel getal a, dat ondubbelzinnig bepaald is zodra het punt O aangegeven is dat met het getal O correspondeert. Dit reële getal noemen wij de coördinaat van het punt A; wij schrijven wel A(a). De coördinaat van de oorsprong O is dus O. Punten met positieve coördinaat liggen aan de ene zijde van O, die met negatieve coördinaat aan de andere.

Beschouw thans twee willekeurige punten P(p) en Q(q). Er is dan zeker een positief getal c te vinden zodanig dat P'(p+c) en Q'(q+c) beide positieve coördinaten bezitten. De afstand P'Q' is dan uiteraard gelijk aan

$$|(q+c)-(p+c)| = |q-p| = \frac{1}{1!}\left|\begin{vmatrix} p & 1 \\ q & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Dit is dan ook het geval met de afstand PQ. Wij vinden dus voor de afstand van twee punten P(p) en Q(q) de waarde |q-p| ongeacht hoe deze ten opzichte van O gelegen zijn. Dit feit (dergelijke feiten ontmoet men steeds in de analytische meetkunde) is te danken aan de wijze waarop de negatieve getallen op de getallenrechte zijn geplaatst.

Wij geven nog een formule die geldig blijkt voor alle standen van de punten P en Q. Wij vragen n.l. naar de coördinaat m van het midden M van het lijnstuk PQ. Voeren wij weer als boven de punten P'en Q' in, dan

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

is de coördinaat van het midden M' van P'Q' kennelijk gelijk aan m+c. Uit meetkundige overwegingen ziet men direct in dat deze coördinaat ook gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}\big((p+c)+(q+c)\big)=\tfrac{1}{2}(p+q)+c.$$

Bijgevolg, hoe P en Q ook gelegen zijn, steeds geldt $m=\frac{1}{2}(p+q)$.

Wij vragen ons thans af wat de coördinaat s van een punt S is dat een lijnstuk PQ (inwendig) verdeelt in de verhouding $\lambda:\mu$, d.w.z. dat zo tussen P en Q gelegen is dat $PS:SQ=\lambda:\mu$. Weer voeren wij als boven de punten P' en Q' in, terwijl wij dan voor het punt S'(s+c) vinden dat $P'S':S'Q'=\lambda:\mu$. Hieruit volgt

$$\big((s+c)-(p+c)\big):\big((q+c)-(s+c)\big)=\lambda:\mu,$$

dus

$$s=\frac{\lambda q+\mu p}{\lambda+\mu}.$$

Opg.1 Ga de gevallen $\lambda=0$ en $\mu=0$ apart na.

Tenslotte bepalen wij de coördinaat t van een punt T dat het lijnstuk PQ uitwendig in de verhouding $\lambda:\mu$ verdeelt, d.w.z. dat op het verlengde van PQ ligt en waarvoor geldt

$$PT:QT=\lambda:\mu.$$

Is $\frac{\lambda}{\mu}>1$ dan ligt het punt Q tussen P en T; is $\frac{\lambda}{\mu}<1$ dan ligt P tussen T en Q; is $\frac{\lambda}{\mu}=1$ dan is het punt T niet aan te geven.

In het eerste geval is, wanneer weer als boven op de punten P',Q' en T' (t+c) wordt overgegaan

$$\big((t+c)-(p+c)\big):\big((t+c)-(q+c)\big)=\lambda:\mu,$$

waaruit volgt
$$t=\frac{\lambda q-\mu p}{\lambda-\mu}.$$

Opg.2 Ga na dat dit resultaat ook in het tweede geval wordt verkregen.

Wij merken op dat als men zegt dat het hier beschouwde punt T het lijnstuk PQ verdeelt in de verhouding $-\frac{\lambda}{\mu}$ de formules voor t en s dezelfde zijn. Onder deze conventie kan men algemeen zeggen, dat de coördinaat s van een punt S, dat een lijnstuk PQ met P(p) en Q(q) verdeelt in een willekeurige reële verhouding $\lambda:\mu\neq 1$, gelijk is aan

$$s=\frac{\lambda q+\mu p}{\lambda+\mu}.$$

Punten met positieve deelverhouding $\lambda:\mu$ liggen tussen P en Q, de andere buiten het interval PQ.

Wij merken nog op dat

$$\lim_{\frac{\lambda}{\mu}\to\infty} s=q \quad\text{en}\quad \lim_{\frac{\lambda}{\mu}\to-\infty} s=q$$

zodat de punten met voldoende grote $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$ willekeurig dicht bij Q liggen. Dit geldt dus zowel voor de punten met zeer grote $\frac{\lambda}{\mu}$ als voor die met zeer grote $-\frac{\lambda}{\mu}$.

§ 2. Het platte vlak; inleiding.

Thans gaan wij de punten van het platte vlak van coördinaten voorzien. Hiertoe tekenen wij twee loodrecht op elkaar staande rechten (de coördinaatassen genaamd), welke elkaar in een punt O snijden (de oorsprong genoemd). De punten op de ene as, die wij de X-as noemen, bezitten op grond der aanname in de vorige paragraaf een ondubbelzinnig bepaalde coördinaat; hetzelfde geldt voor de punten op de andere as, de Y-as.

Zijn P_1 met coördinaat x en P_2 met coördinaat y de projecties van een willekeurig punt P van het platte vlak op de X-as resp. Y-as, dan geven wij het punt P de twee coördinaten x en y. Men schrijft vaak kortweg $P(x,y)$. Het getal x heet de x-coördinaat of abscis van het punt P, het getal y de y-coördinaat of ordinaat.

Op deze wijze krijgt elk punt P twee ondubbelzinnig bepaalde coördinaten en omgekeerd behoort bij elk tweetal reële getallen één en slechts één punt P.

De punten op de X-as zijn gekarakteriseerd door $y=o$; die op de Y-as door $x=o$; men heeft voor de oorsprong: $O(o,o)$.

De beide (coördinaat)assen verdelen het platte vlak in vier gedeelten (quadranten). Het eerste quadrant is de verzameling der punten (x,y) met $x>o, y>o$, het tweede die met $x<o$, $y>o$, het derde die met $x<o$, $y<o$ en het vierde die met $x>o$, $y<o$.

Wij leiden thans weer enige eigenschappen af, die evenals in de vorige paragraaf geldig zijn, hoe ook de betreffende punten gelegen zijn.

Zijn $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ twee willekeurige punten van het platte vlak en P_1,Q_1 en P_2,Q_2 hun projecties op de X-as resp. Y-as, dan geldt voor de afstand PQ volgens de stelling van Pythagoras

$$PQ^2 = P_1Q_1^{\,2} + P_2Q_2^{\,2}.$$

Nu weten wij uit de vorige paragraaf dat de afstand van $P_1(x_1,o)$ en $Q_1(x_2,o)$ gelijk is aan $|x_1-x_2|$; evenzo $P_2Q_2 = |y_1-y_2|$. Dus

$$PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Verder bepalen wij de coördinaten van een punt $R(x,y)$ op PQ dat het lijnstuk PQ verdeelt in de verhouding $\lambda:\mu$, waarbij voor $\lambda:\mu$, zoals in de vorige paragraaf werd uiteengezet, elke waarde $\neq 1$ is toegelaten. Voor de projecties $R_1(x,o)$, $P_1(x_1,o)$ en $Q_1(x_2,o)$ van R,P en Q op de X-as geldt volgens de elementaire meetkunde ook dat $P_1R_1:Q_1R_1 = \lambda:\mu$. Dus op grond van het resultaat uit de vorige paragraaf vinden wij

$$x = \frac{\lambda x_2+\mu x_1}{\lambda+\mu}.$$

Een analoog resultaat geldt voor y, zodat wij vinden

$$R\left(\frac{\lambda x_2+\mu x_1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda y_2+\mu y_1}{\lambda+\mu}\right).$$

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

In het bijzonder vindt men voor het midden M van PQ

$$M\left(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\right).$$

Opg.1 Bewijs dat de verbindingslijnen van de middens van twee overstaande zijden van een vierhoek elkaar halveren.
Opg.2 Bepaal van de driehoek met hoekpunten $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ en $R(x_3,y_3)$ het zwaartepunt.

Thans bepalen wij het oppervlakte van een $\triangle OAB$ met $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$. Wij weten dat deze oppervlakte gelijk is aan

$$\vartheta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{-(a^2+b^2-c^2)^2+4a^2b^2}$$

waarin

$$OA=b=\sqrt{a_1^2+a_2^2};\quad OB=a=\sqrt{b_1^2+b_2^2},\quad AB=c=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

Men heeft dan

$$4\vartheta = \sqrt{-4(a_1b_1+a_2b_2)^2+4(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)} = 2\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

Dus

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|.$$

Ligt nu een $\triangle PQR$ willekeurig dan is door een verschuiving deze steeds in een stand te brengen waarbij een hoekpunt in O valt. Zonder de algemeenheid te schaden mogen wij aannemen dat het punt dat in de oorsprong komt te liggen $R(r_1,r_2)$ is, zodat de nieuwe plaats van $P(p_1,p_2)$ en $Q(q_1,q_2)$ wordt $P'(p_1-r_1,p_2-r_2)$ resp. $Q'(q_1-r_1,q_2-r_2)$.
Men heeft dan

$$\text{opp}\ \triangle PQR = \text{opp}\ \triangle P'Q'O = \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} p_1-r_1 & p_2-r_2 \\ q_1-r_1 & q_2-r_2 \end{vmatrix}\right|.$$

Na randen met een bovenrij $r_1 r_2\ 1$ vindt men gemakkelijk

$$\text{opp}\ \triangle PQR = \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Opg.3 Verifieer dat uit deze formule in het geval R=0 het reeds eerder afgeleide resultaat direct volgt.
Opg.4 In $\triangle ABC$ verdeelt het punt D de zijde AB in de verhouding $\lambda:\mu$. Bewijs met behulp van het gevondene de bekende stelling dat de oppervlakten der driehoeken ADC en BDC zich ook verhouden als $\lambda:\mu$.
Opg.5 Bereken de oppervlakte van de driehoek ABC met $A(2,3)$ $B(3,4)$, $C(7,11)$.
Opg.6 Van $\triangle ABC$ met $A(a_1,a_2)$ en $B(b_1,b_2)$ ligt het zwaartepunt in de oorsprong.

Bewijs dat

$$\text{opp } \triangle ABC = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

is.

<u>Opg.7</u> Bewijs dat de oppervlakte van een vierhoek PQRS met $P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$, $R(r_1,r_2)$ en $S(s_2,s_2)$ gelijk is aan

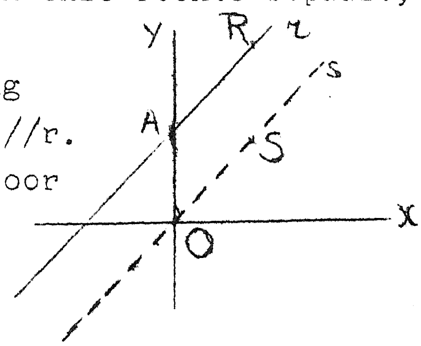
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 & 0 \\ q_1 & q_2 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

§3. De rechte lijn in het platte vlak.

In de vorige paragraaf legden wij een eeneenduidige verwantschap tussen punten en getallenparen, d.w.z. bij elk punt waren ondubbelzinnig twee getallen vastgelegd (zijn coördinaten genaamd) en bij elk getallenpaar behoorde ondubbelzinnig één punt. Naast punten treden in de elementaire meetkunde als hoofdbegrip de rechte(lijne)n op. Wij vragen ons af of er ook iets algebraïsch bestaat, dat eeneenduidig correspondeert met het begrip rechte. Het antwoord zal hier zijn: met de rechten uit de meetkunde corresponderen de vergelijkingen in twee veranderlijken, welke precies van de eerste graad zijn.

Laten wij om dit te bewijzen uitgaan van de meetkunde en allereerst vaststellen, dat een rechte evenwijdig aan de Y-as de eigenschap bezit dat al haar punten (x,y) voldoen aan een relatie $x=a$, waarbij a een constante is. Beschouw verder een rechte door de oorsprong welke met de positieve X-as een hoek α maakt. Kennelijk voldoet ieder punt (x,y) van deze rechte aan de relatie $y=mx$ (waarin gemakshalve $\operatorname{tg}\alpha=m$ is gesteld). Omgekeerd, als een punt (x,y) aan deze relatie voldoet dan ligt het - zoals de meetkunde direct leert - op onze rechte. Dat dit geldt voor rechten door welk quadrant ze ook mogen lopen, ligt aan het feit, dat onze conventie over het plaatsen van punten met negatieve coördina(a)t(en) in overeenstemming is met de definitie van $\operatorname{tg}\alpha$ voor $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Het hier genoemde getal m dat de richting van onze rechte bepaalt, noemt men haar <u>richtingscoëfficient.</u>



Bij een willekeurige rechte r, die niet evenwijdig loopt met de Y-as, trekke men door O een rechte $s//r$. Zij $R(x,y)$ een punt van r. Dan snijdt de rechte door R evenwijdig aan OY de rechte s in een punt $S(x,y-q)$, aangenomen, dat r de Y-as snijdt in een punt $(0,q)$.

Voor het punt S gold het verband $y-q = mx$, waarmede de relatie $y=mx+q$ tussen x en y van punten (x,y) van R gevonden is. Omgekeerd levert een relatie van dit type steeds ~~puntenparen (x,y) op die op één~~ . rechte liggen.

Opg.1 Bewijs dit.

In het bovenstaande bepaalden wij steeds relaties tussen de coördinaten (x,y) van punten van een rechte. Wij zullen dit korter formuleren en zeggen: Een figuur bezit de vergelijking $f(x,y)=0$ indien de coördinaten x en y van al haar punten voldoen aan de relatie $f(x,y)=0$, terwijl omgekeerd alle punten met coördinaten, die aan deze relatie voldoen, op de figuur gelegen zijn.

In deze terminologie vonden wij reeds bij elke rechte een vergelijking van de eerste graad (hetzij het type $x=a$, hetzij het type $y=mx+q$). Thans laten wij zien dat omgekeerd iedere vergelijking in x en y die precies van de eerste graad is, voert tot een rechte. Laat n.l. die vergelijking zijn $ax+by=c$ (waarbij niet a en b beide nul zijn)(dit is de meest algemene vergelijking, die precies van de eerste graad is).

Onderstel eerst dat $b=0$ is. Dan is $a\neq 0$, dus $x=\frac{c}{a}$ en wij vinden een rechte evenwijdig met de Y-as.

Zij voorts $b\neq 0$. Dan vindt men $y= -\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$, dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$, welke de Y-as snijdt in een punt $(0,\frac{c}{b})$.

In elk van beide gevallen voert onze vergelijking dus tot een rechte. Omgekeerd voerden reeds de rechten tot eerstegraads vergelijkingen. Bijgevolg is er inderdaad een omkeerbaar verband tussen de rechten van het platte vlak en de vergelijkingen die precies van de eerste graad zijn in twee veranderlijken.

Opg.2 Ga na of bij één rechte twee (of meer) verschillende vergelijkingen kunnen behoren.

Het vervolg van deze syllabus is geschreven door Dr W. Peremans.

Op blz. am I 3 is beschouwd een punt $R(x,y)$ dat het lijnstuk $PQ\big(P=(x_1,y_1),\ Q=(x_2,y_2)\big)$ verdeelt in de verhouding $\lambda:\mu$. Er geldt dan

$$x=\frac{\lambda x_2+\mu x_1}{\lambda+\mu}\quad,\qquad y=\frac{\lambda y_2+\mu y_1}{\lambda+\mu}\;.$$

Als we nu λ en μ alle reële waarden laten doorlopen waarvoor $\lambda+\mu\neq 0$, doorloopt R alle punten van de rechte lijn PQ. Stellen we nu $t=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, dan is $1-t=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Als een willekeurig reëel getal t gegeven is, zijn er reële getallen λ en μ te vinden, waarvoor geldt $\lambda+\mu\neq 0$, zodat $t=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$; kies b.v. $\lambda=1-t$, $\mu=t$. Hieruit volgt, dat

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-t)x_1+tx_2 \\ y &= (1-t)y_1+ty_2 \end{aligned}\right\}$$

een parametervoorstelling van de rechte PQ is: bij iedere waarde van de parameter t geeft de parametervoorstelling een punt van de rechte en omgekeerd krijgt men door t alle reële waarden te laten doorlopen zo ook alle punten van die rechte. Ten slotte behoren, als $P \neq Q$ is, bij twee verschillende waarden van de parameter verschillende punten van de rechte. Immers, als $P \neq Q$ is minstens één van de twee ongelijkheden $x_1 \neq x_2$ en $y_1 \neq y_2$ geldig. Als $x_1 \neq x_2$ en $(1-t)x_1+tx_2=(1-u)x_1+ux_2$, dan volgt hieruit $(u-t)(x_1-x_2)=0$, dus $u=t$. Als $y_1 \neq y_2$ concludeert men met behulp van de y-coördinaat op analoge wijze tot $u=t$. De punten tussen P en Q corresponderen met waarden van $\lambda:\mu$ die positief zijn. Hiermee corresponderen klaarblijkelijk waarden van t waarvoor geldt $0<t<1$.

De vergelijking van de lijn PQ kunnen we vinden door uit de parametervoorstelling de parameter te elimineren. Rangschikken we de twee betrekkingen van de parametervoorstelling naar t, dan vinden we

$$\left.\begin{array}{l}(x_2-x_1)t=x-x_1\\(y_2-y_1)t=y-y_1\end{array}\right\}.$$

Daar we weten, dat minstens één van beide van de ongelijkheden $x_1 \neq x_2$ en $y_1 \neq y_2$ geldig is, is de voorwaarde dat er een t bestaat die aan beide gelijkheden voldoet:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x-x_1 \\ y_2-y_1 & y-y_1 \end{vmatrix}=0,$$

of uitgeschreven $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$. Als $x_1=x_2$, is de vergelijking dus $x=x_1$; als $x_1 \neq x_2$, wordt deze

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

De richtingscoëfficiënt van de lijn is dus $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

De vergelijking van de lijn PQ is ook nog wel op andere wijze te verkrijgen. Het geval $x_1=x_2$ weer uitsluitende (het is duidelijk dat de vergelijking dan $x=x_1$ wordt), weten we dat de vergelijking van de lijn de gedaante $y=mx+q$ heeft. Het gaat er dus om, de getallen m en q te bepalen. De lijn gaat echter door P; hieruit volgt dat $y_1=mx_1+q$, dus $q=y_1-mx_1$. De vergelijking is dus $y-y_1=m(x-x_1)$. De lijn gaat echter ook door Q, dus $y_2-y_1=m(x_2-x_1)$, dus $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Substitueert men deze m in de vergelijking, dan vindt men de eerder gevonden vergelijking weer terug. Als nevenresultaat hebben we gevonden, dat de lijn door $P(x_1,y_1)$ met richtingscoëfficiënt m tot vergelijking heeft

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Een derde methode om de vergelijking van de lijn PQ te bepalen is de volgende. Iedere rechte lijn heeft een vergelijking $ax+by+c=0$, waarin a en b niet beide nul zijn. Als nu $R(x,y)$ een willekeurig punt van de lijn PQ is, krijgen we de voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{array}\right\} .$$

We kunnen dit opvatten als een stelsel van drie homogene lineaire vergelijkingen voor de drie onbekenden a,b,c. De voorwaarde, dat dit stelsel een van de nuloplossing verschillende oplossing bezit, is

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nu hadden we eigenlijk geeist, dat a en b niet beide nul zijn; maar $a=b=0$, $c\neq 0$ voldoet kennelijk niet, zodat de gevonden voorwaarde juist de vergelijking van de lijn voorstelt.

Een speciaal geval van een lijn door twee punten is een lijn die van de coördinaatassen gegeven stukken $a\neq 0$ en $b\neq 0$ afsnijdt. Klaarblijkelijk houdt dit in, dat de lijn door de punten $(a,0)$ en $(0,b)$ gaat; zijn vergelijking is dus

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of uitgeschreven $bx+ay-ab=0$. Deelt men door ab dan vindt men de vergelijking op assegmenten van de lijn:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Opg.3 Bepaal de vergelijking van de rechte door (3,1) en (-2,2), door (1,2) en (2,4) en door (1,2) en (1,3).

We bepalen nu het snijpunt van twee lijnen. Laat de lijnen gegeven zijn door $a_1x+b_1y+c_1=0$ en $a_2x+b_2y+c_2=0$. Een gemeenschappelijk punt voldoet aan beide vergelijkingen, is dus een oplossing van het stelsel

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\} .$$

Als $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, hebben deze vergelijkingen één en slechts één oplossing, die met de regel van Cramer gevonden wordt. In dat geval zijn de lijnen dus snijdend.

Stel nu het geval dat $D=0$. Daar in ieder geval a_1 en b_1 niet beide nul zijn is de rang van het stelsel vergelijkingen één. Laat b.v. $a_1\neq 0$ zijn. Als dan $D_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$ is, zijn de vergelijkingen strijdig; de lijnen hebben geen snijpunt en zijn dus evenwijdig. Is echter $D_1=0$, dan is de tweede vergelijking afhankelijk van de eerste; de lijnen zijn

samenvallend. Als $a_1=0$, volgt uit $D=0$ en $b_1\neq 0$, dat $a_2=0$, dus $D_1=0$.
We krijgen nu dat, als $D_2=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$, de lijnen evenwijdig zijn, en als $D_2=0$ samenvallend.

Opg.4 Toon aan dat uit $a_1\neq 0$, $D_1=0$ en $D=0$ volgt $D_2=0$.

Rekening houdend met het resultaat van opgave 4 krijgen we de volgende samenvatting:

1°. $D\neq 0$: snijdende lijnen.
2°. $D=0$ en $D_1\neq 0$, of $D=0$ en $D_2\neq 0$: evenwijdige lijnen.
3°. $D=0$, $D_1=0$, $D_2=0$: samenvallende lijnen.

Opg.5. Toon aan dat uit $D=0$, $D_1\neq 0$, $D_2=0$ volgt $b_1=b_2=0$ (evenzo geldt natuurlijk, dat uit $D=0$, $D_1=0$, $D_2\neq 0$ volgt $a_1=a_2=0$).

We kunnen de voorwaarden ook met evenredigheden schrijven als volgt:
1°. $a_1:a_2\neq b_1:b_2$: snijdende lijnen.
2°. $a_1:a_2=b_1:b_2\neq c_1:c_2$: evenwijdige lijnen.
3°. $a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$: samenvallende lijnen.

Dat samenvallende lijnen evenredige coëfficiënten hebben, wisten we al (zie opgave 2). Verder zijn, als de lijnen niet evenwijdig of samenvallend zijn met de Y-as, hun richtingscoëfficiënten $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ en $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$, zodat de lijnen niet snijdend zijn als $m_1=m_2$.
Als één lijn evenwijdig of samenvallend met de Y-as is en de lijnen niet snijdend zijn, is de andere lijn ook evenwijdig of samenvallend met de Y-as.

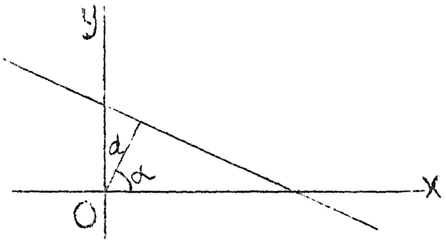
We willen nu de hoek tussen twee lijnen bepalen en bepalen daartoe eerst de hoek α, die een lijn $ax+by+c=0$ met de positieve X-as maakt. Als $b\neq 0$ geldt $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a}{b}$, dus $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{a^2+b^2}{b^2}$, dus $\cos\alpha=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en $\sin\alpha=\pm\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, waarbij bij een bepaalde keuze van α beide malen in $\pm$ het plusteken of beide malen het minteken moet worden genomen. De formules voor $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$ gelden nu ook voor $b=0$, omdat de lijn dan evenwijdig of samenvallend is met de Y-as.

Nemen we nu twee lijnen $a_1x+b_1y+c_1=0$ en $a_2x+b_2y+c_2=0$, die resp. hoeken α_1 en α_2 met de positieve X-as maken, dan is de hoek φ tussen die lijnen gelijk aan $\alpha_2-\alpha_1$, zodat $\cos\varphi=\cos(\alpha_2-\alpha_1)=$
$=\pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cdot\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\pm\frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cdot\frac{-a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, dus

$$\cos\varphi=\pm\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

De lijnen staan dus loodrecht op elkaar als $a_1a_2+b_1b_2=0$.

Opg.6. Druk de voorwaarde voor loodrechte stand uit in de richtingscoëfficiënten.



Van een lijn $ax+by+c=0$ bepalen we nu de afstand d tot de oorsprong en de hoek α die de loodlijn door de oorsprong op de gegeven lijn met de positieve X-as maakt. Deze loodlijn heeft klaarblijkelijk als vergelijking $x \sin\alpha - y \cos\alpha=0$. De feiten, dat het punt $(d \cos\alpha, d \sin\alpha)$ op de gegeven lijn ligt en dat de gegeven lijn loodrecht op de lijn met vergelijking $x \sin\alpha - y \cos\alpha=0$ ligt, geven de volgende voorwaarden

$$\left.\begin{array}{l} a\, d \cos\alpha + bd \sin\alpha + c = 0 \\ a \sin\alpha - b \cos\alpha \qquad = 0 \end{array}\right\} .$$

Hieruit volgt, dat $a= \lambda\cos\alpha$, $b= \lambda\sin\alpha$, $c= \lambda d$ met $\lambda\neq 0$. Hieruit volgt $\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2}$, waarbij de keuze van het plus- of minteken overeenkomt met het teken van c. Er geldt dus

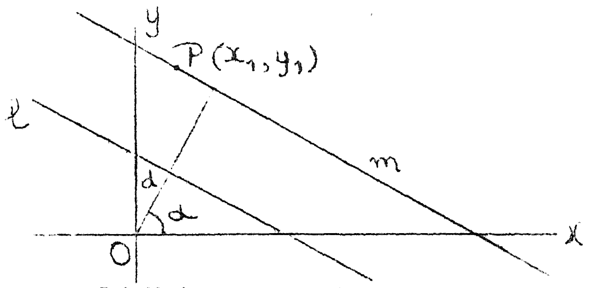
$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ , \quad \sin\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ , \quad d = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

De vergelijking van de lijn is te schrijven in de vorm

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - d=0,$$

welke de <u>normaalvergelijking van Hesse</u> wordt genoemd. Om een willekeurige vergelijking $ax+by+c=0$ in de normaalvorm van Hesse te brengen, moet men hem met $\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ vermenigvuldigen.

De normaalvergelijking van Hesse leent zich bijzonder goed om de afstand van een punt tot een lijn te berekenen. Laat de lijn l tot vergelijking hebben $x \cos\alpha + y \sin\alpha - d=0$ met $d \geqslant 0$ en het punt $P(x_1,y_1)$ zijn.



Een lijn evenwijdig met l heeft tot vergelijking $x \cos\alpha + y \sin\alpha - c=0$ en de lijn m evenwijdig met l door P dus $x \cos\alpha + y \sin\alpha - (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)=0$. Als $x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha \geqslant 0$ is dit de normaalvergelijking van Hesse van m en is $x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha$ de afstand d_1 van O tot m. De afstand van l en m is dan $|d_1-d|=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-d|$. Als $x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha<0$ is de normaalvergelijking van Hesse van m:
$x\cos(\alpha+\pi)+y \sin(\alpha+\pi)-(-x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)=0$.
Nu is $d_1= -x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha$. De lijn m snijdt de loodlijn op l nu aan de andere zijde van de oorsprong, zodat de afstand van l en m nu gelijk is aan $|d_1+d|=|-d_1-d|=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-d|$. In alle gevallen is de afstand van P tot l (die dezelfde is als de afstand van m en l) gelijk

aan $|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-d|$. Men behoeft om de afstand van P tot l te vinden dus niets anders te doen dan de coördinaten van P in het linkerlid van de normaalvergelijking van Hesse van l te substitueren en van het resultaat de absolute waarde te nemen. Het teken van $v=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-d$ bepaalt bovendien de halfvlakken, waarin l het platte vlak verdeelt. Gaat men n.l. de hierboven onderscheiden gevallen na, dan ziet men direct, dat $v>0$ of <0 naar gelang (x_1,y_1) aan de ene of aan de andere zijde van l ligt. Deze laatste eigenschap geldt trouwens ook nog als de vergelijking van l niet de normaalvorm van Hesse heeft, omdat deze eigenschap klaarblijkelijk niet verloren gaat bij vermenigvuldiging van het linkerlid van de vergelijking met een willekeurige constante $\neq 0$. Wel kan het daarbij natuurlijk gebeuren dat de tekens die de twee halfvlakken aangeven worden verwisseld.

Opgave 7. Bepaal de afstanden van de punten (2,1) en (-1,3) tot de lijn $3x-4y+1=0$. Liggen deze punten aan dezelfde of aan verschillende zijden van de lijn?

Als we twee snijdende lijnen l_1 en l_2 hebben, waarvan we de vergelijkingen kortheidshalve met $L_1=0$ en $L_2=0$ zullen aanduiden (hierin zijn L_1 en L_2 dus uitdrukkingen van de gedaante $ax + by + c$), vormen wij een vergelijking $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ met constante λ en μ die niet beide nul zijn. Deze vergelijking is van de eerste graad, want er kan geen graadverlaging optreden omdat de gegeven lijnen snijdend zijn; dus stelt de vergelijking een rechte lijn voor. Deze lijn gaat door het snijpunt van l_1 en l_2, want substitutie van het snijpunt levert $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$, dus ook $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$. Neem nu omgekeerd een lijn l door het snijpunt van l_1 en l_2, dan zijn daarbij getallen λ en μ te vinden, zodat $\lambda L_1+\mu L_2=0$ de vergelijking van l is. Om dit in te zien kiezen wij een punt P op l buiten het snijpunt van l_1 en l_2. Substitutie van de coördinaten van P in $\lambda L_1+\mu L_2 = 0$ geeft een vergelijking voor λ en μ die zeker een oplossing in λ en μ bezit, die van de nuloplossing verschilt. Kiest men een dergelijk stel λ, μ dan heeft de lijn met vergelijking $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ met de lijn l het punt P en het snijpunt van l_1 en l_2 gemeen en valt dus met l samen. De vergelijkingen $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ met λ en μ willekeurig maar niet beide $= 0$ stellen juist alle lijnen voor van de lijnenwaaier met top in het snijpunt van l_1 en l_2. Een lijnenwaaier met top A is n.l de verzameling van alle lijnen in het platte vlak die door A gaan.

Als de lijnen l_1 en l_2 evenwijdig zijn dan is klaarblijkelijk iedere lijn met vergelijking $\lambda L_1+\mu L_2=0$ ook evenwijdig met l_1 en l_2. Dat omgekeerd iedere lijn evenwijdig met l_1 een vergelijking $\lambda L_1+\mu L_2=0$ heeft, wordt op analoge wijze als boven aangetoond. Er is nu een bepaalde verhouding van λ en μ te vinden waarvoor er helemaal geen lijn komt omdat uit $\lambda L_1+\mu L_2$ het eerstegraadsstuk wegvalt.

Lijnenwaaiers kunnen vaak met vrucht worden gebruikt om vraagstukken op te lossen, waarin een punt gegeven is als het snijpunt van twee lijnen. Laat b.v. gevraagd zijn de vergelijking van de rechte lijn gaande door $P(2,1)$ en door het snijpunt Q van de lijnen $3x+7y=6$ en $2x+3y=1$. Men kan dit natuurlijk doen door de coördinaten van het punt Q op te lossen uit de twee vergelijkingen en vervolgens de vergelijking van de lijn door P en Q te bepalen. Het is echter eenvoudiger om op te merken, dat de gezochte lijn behoort tot de lijnenwaaier met vergelijking $\lambda(3x+7y-6) + \mu(2x+3y-1)=0$. Omdat P op de lijn moet liggen substitueren we $(2,1)$ in deze vergelijking; dit levert $7\lambda +6\mu=0$. Hieraan voldoet $\lambda=6$, $\mu=-7$; de vergelijking van de lijn wordt $4x+21y-29=0$.

We stellen nu de voorwaarde op waaronder drie lijnen een punt gemeen hebben (<u>concurrent</u> zijn). Laat de drie lijnen gegeven zijn door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0\\ a_3x+b_3y+c_3&=0. \end{aligned}$$

Als er nu onder de drie lijnen een tweetal snijdende is, is de voorwaarde, zoals de algebra leert:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Als er geen twee snijdende zijn, vormen de drie lijnen een stelsel van drie evenwijdige of samenvallende lijnen.

Geheel analoog is de voorwaarde dat drie punten op een lijn liggen (<u>collineair</u> zijn). Als er in het drietal twee verschillende punten zijn, moet het derde punt op de lijn door deze twee liggen. Als we de punten (x_1,y_1), (x_2,y_2) en (x_3,y_3) noemen, geeft dit de voorwaarde (zie blz.8):

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Als de punten alle drie samenvallen liggen ze natuurlijk op een rechte en is bovendien bovenstaande voorwaarde vervuld.

We zien dat de voorwaarde voor collineariteit mooier is dan die voor concurrentie, omdat bij de laatste de uitzondering van het stelsel evenwijdige lijnen optreedt. Men kan deze moeilijkheid opheffen, door het platte vlak uit te breiden en zodoende aan een stelsel evenwijdige lijnen een snijpunt toe te kennen. We gaan daarop echter niet in.

Opgave 8. Bepaal het zwaartepunt en het hoogtepunt van de driehoek met hoekpunten $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3})$ en $(1,1)$.
Opgave 9. Bewijs analytisch dat de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek concurrent zijn.

§4. De Cirkel.

De cirkel met middelpunt A en straal r is de meetkundige plaats van de punten van het platte vlak die tot A een afstand r hebben. Als A coördinaten (a_1,a_2) heeft is de voorwaarde, dat (x,y) op deze cirkel ligt

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2.$$

Dit is dus de vergelijking van deze cirkel. De vergelijking van een cirkel heeft dus de gedaante $x^2+y^2+ax+by+c=0$. In hoeverre stelt nu een dusdanige vergelijking ook weer een cirkel voor? Men kan deze vergelijking brengen in de gedaante $(x+\frac{1}{2}a)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-4c)$. Als $a^2+b^2-4c<0$ is er geen enkel punt dat aan deze vergelijking voldoet, want voor iedere keuze van x en y is het linkerlid $\geqq 0$. Als $a^2+b^2-4c=0$ voldoet alleen het punt $(-\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}b)$; we zouden dit de cirkel met middelpunt $(-\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}b)$ en straal nul kunnen noemen. Als $a^2+b^2-4c>0$ stelt de vergelijking de cirkel voor met middelpunt $(-\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}b)$ en straal $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$. We hebben dus gevonden, dat een vergelijking $x^2+y^2+ax+by+c=$ dan en slechts dan een cirkel voorstelt als $a^2+b^2-4c\geqq 0$.

Men kan deze uitzonderingen opheffen door met complexe getallen te werken en ook punten met complexe coördinaten toe te laten. Doet men dit, dan zal men $x^2+y^2+ax+by+c=0$ met reële a,b en c en $a^2+b^2-4c<0$ ook de vergelijking van een cirkel noemen met zuiver imaginaire straal. De methode om in de analytische meetkunde met complexe coördinaten te werken is zeer belangrijk en is onontbeerlijk voor vele problemen om deze op een elegante wijze te kunnen oplossen. Met het oog op de beknoptheid van de hier gegeven behandeling gaan we er echter niet op in. In het vervolg beperken we ons dus weer tot reële getallen.

We bepalen nu de vergelijking van de cirkel door drie niet-collineaire punten (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3). Laat de cirkel de vergelijking $x^2+y^2+ax+by+c=0$ hebben. Het gaat er nu om a,b en c te bepalen. Als (x,y) een punt van de cirkel is krijgen we de volgende voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0 \\ x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0 \\ x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0 \end{array}\right\} .$$

We vatten dit op als vier lineaire vergelijkingen voor de drie onbekenden a, b en c. De laatste drie hiervan hebben echter een ondubbelzinnig bepaalde oplossing; immers de voorwaarde hiervoor is

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

en deze voorwaarde is vervuld omdat de drie punten niet collineair zijn. Dat de vier vergelijkingen een oplossing gemeen hebben levert de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =0,$$

hetgeen dus juist de vergelijking van de gezochte cirkel is.

We willen nu de snijpunten van een cirkel en een lijn bepalen. Laat de cirkel gegeven zijn door $x^2+y^2+ax+by+c=0$ en de lijn door $y=mx+q$. We moeten de gemeenschappelijke oplossingen van deze twee vergelijkingen bepalen. We substitueren $y=mx+q$ in de cirkelvergelijking en vinden een vierkantsvergelijking voor x (er kan geen graadverlaging optreden omdat de coëfficiënt van x^2 gelijk is aan m^2+1). Een oplossing van deze vergelijking levert een x-coördinaat, waarbij met $y=mx+q$ een y-coördinaat wordt gevonden. Er zijn nu drie gevallen mogelijk.

1°. De vergelijking heeft twee reële verschillende wortels. Er zijn dan twee snijpunten: de rechte snijdt de cirkel.

2°. De vergelijking heeft een reële dubbele wortel. Er is dan één snijpunt: de rechte raakt aan de cirkel.

3°. De vergelijking heeft twee complexe wortels. Er is dan geen snijpunt: de rechte ligt buiten de cirkel.

We nemen nu voor het gemak aan dat het middelpunt van de cirkel in de oorsprong ligt; zijn vergelijking is dan $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$. We nemen een punt (x_0,y_0) op de cirkel; er geldt dus $x_0^2+y_0^2=r^2$. We kunnen de vergelijking van de cirkel dus ook schrijven in de vorm $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$. We vragen naar de vergelijking van de raaklijn in het punt (x_0,y_0). We proberen eens $y=m(x-x_0)+y_0$ met voorlopig onbepaalde m. Vullen we dit in, dan komt er $x^2+m^2(x-x_0)^2+2my_0(x-x_0)+y_0^2=x_0^2+y_0^2$. Hieraan voldoet natuurlijk $x=x_0$. Delen we er een keer $x-x_0$ uit dan komt er $x+x_0+m^2(x-x_0)+2my_0=0$ Hieraan moet $x=x_0$ nogmaals voldoen. Dit levert $x_0+my_0=0$. Als $y_0=0$, is $x_0=\pm$ r en is hieraan niet te voldoen. Dat komt omdat we niet de algemeenste lijn door (x_0,y_0) genomen hebben: de lijnen evenwijdig met de Y-as vielen er niet onder. We proberen daarom in dit geval te snijden met de lijn met vergelijking $x=x_0$. Substitutie levert direct $y=0$; deze lijn is dus de raaklijn. Als $y_0 \neq 0$, voldoet $m=-\frac{x_0}{y_0}$; de raaklijn heeft dan tot vergelijking $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, of $x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$, of $x_0x+y_0y=r^2$. Deze laatste vorm voldoet ook als $y_0=0$, $x_0=\pm r$.

Laten we nu m weer even willekeurig, dan vinden we de x-coördinaat van het tweede snijpunt (x_1,y_1) van de lijn met richtingscoëfficiënt m en gaande door (x_0,y_0) en de cirkel uit $x_1+x_0+m^2(x_1-x_0)+2my_0=0$. Dus $x_1=\frac{(m^2-1)x_0-2my_0}{m^2+1}$. Laten we nu m naderen tot $-\frac{x_0}{y_0}$ dan nadert x_1 tot

$$\frac{\left(\frac{x_0^2}{y_0^2}-1\right)x_0+2x_0}{\frac{x_0^2}{y_0^2}+1}=x_0;$$ daar verder $y_1=m(x_1-x_0)+y_0$ nadert dan y_1 tot y_0.

We krijgen zo de raaklijn ook als limietstand waartoe een koorde door een vast punt van de cirkel nadert, als het tweede snijpunt tot het vaste punt nadert.

Opgave 1. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen met richtingscoëfficiënt m aan de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=r^2$. Bepaal vervolgens de coördinaten van het raakpunt op zo'n raaklijn. Leid hieruit nogmaals de hierboven gevonden vergelijking van de raaklijn in een punt (x_0,y_0) af.

Opgave 2. Bewijs dat de raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt.

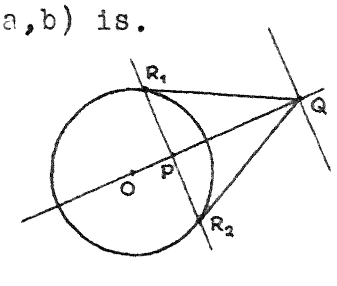
Als het punt $P(x_0,y_0)$ niet op de cirkel ligt kunnen we toch wel de vergelijking $x_0x+y_0y=r^2$ beschouwen. Deze stelt een lijn voor die de poollijn van P t.o.v. de cirkel wordt genoemd. Het punt P heet de pool van zijn poollijn. Neem eens aan dat P buiten de cirkel ligt dan gaan er door P twee raaklijnen aan de cirkel. Laat een raakpunt op zo'n raaklijn coördinaten (x_1,y_1) hebben, dan heeft de raaklijn in (x_1,y_1) de vergelijking $x_1x+y_1y=r^2$. Deze gaat door P dus geldt $x_1x_0+y_1y_0=r^2$; deze betrekking drukt echter uit dat (x_1,y_1) op de poollijn van P ligt. De poollijn van P gaat dus door de twee raakpunten gelegen op de raaklijnen uit P aan de cirkel; anders uitgedrukt: de poollijn van P is de raakkoorde van P. Als P op de cirkel ligt is zijn poollijn natuurlijk de raaklijn in P. Om de betekenis van de poollijn van P te verkrijgen als P binnen de cirkel ligt, bewijzen we eerst de volgende stelling:

Als $Q(x_1,y_1)$ op de poollijn van $P(x_0,y_0)$ ligt, ligt P op de poollijn van Q.

Dit is duidelijk want beide betrekkingen worden door de gelijkheid $x_0x_1+y_0y_1=r^2$ weergegeven.

De symmetrie die in deze bewering opgesloten ligt, rechtvaardigt de definitie: de punten P en Q heten poolverwant t.o.v. de cirkel als Q op de poollijn van P ligt(of, hetgeen op hetzelfde neerkomt als P op de poollijn van Q ligt).

Het spreekt verder vanzelf, dat iedere lijn die niet door de oorsprong gaat poollijn van een of ander punt is; de vergelijking van zo'n lijn is n.l. altijd door vermenigvuldiging met een passende constante $\neq 0$ in de vorm $ax+by=r^2$ te brengen, waaruit volgt, dat de lijn poollijn van (a,b) is.



Neem nu een punt P binnen de cirkel en trek een lijn door P, die niet door het middelpunt O gaat, b.v. loodrecht op OP. Laat deze lijn de cirkel snijden in R_1 en R_2 en de raaklijnen in R_1 en R_2 elkaar in Q. Dan is R_1R_2 de poollijn van Q. Hierop ligt P, dus ligt Q op de poollijn van P. Een tweede punt van de poollijn van P zou men kunnen vinden door de constructie met een andere lijn door P te herhalen. We kunnen echter ook opmerken, dat de poollijn van P loodrecht staat op OP; we behoeven dus alleen de loodlijn in Q op OP te trekken om de poollijn van P te vinden.

We hebben de vergelijking van de poollijn van een punt $P(x_0,y_0)$ alleen afgeleid voor een cirkel met middelpunt in de oorsprong. Voor een cirkel met willekeurig middelpunt is dit op analoge wijze mogelijk. Voor een cirkel met vergelijking $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=r^2$ wordt de vergelijking van de poollijn $(x_0-a_1)(x-a_1)+(y_0-a_2)(y-a_2)=r^2$. We komen hierop later nog terug.

We nemen nu weer een willekeurige cirkel met vergelijking : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ en een willekeurig punt $P(x_0,y_0)$. We beweren dat $x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c$ juist de macht van P t.o.v. de cirkel voorstelt. In de meetkunde wordt de macht van een punt P t.o.v. een cirkel verkregen door een lijn door P te trekken die de cirkel in R_1 en R_2 snijdt en het product $\overline{PR_1}.\overline{PR_2}$ te nemen; dit getal is voor alle lijnen door P hetzelfde. Laat M het middelpunt en r de straal van de cirkel zijn. Nemen we voor de lijn door P de lijn PM dan is de macht van P t.o.v. de cirkel blijkbaar $(\overline{PM}+r)(\overline{PM}-r)=\overline{PM}^2-r^2$. Van de cirkel met bovengenoemde vergelijking is $M(-\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}b)$ en $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$. Dus is $\overline{PM}^2-r^2=(x_0+\frac{1}{2}a)^2+(y_0+\frac{1}{2}b)^2+ - \frac{1}{4}(a^2+b^2-4c)=x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c$, zoals we beweerd hadden. Uit de definitie van macht volgt direct dat deze positief is als P buiten en negatief als P binnen de cirkel ligt. Dus ligt P buiten (resp.binnen) de cirkel als $x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c>0$ (resp. <0) is.

Opgave 3. Neem een cirkel met middelpunt in de oorsprong en een punt P op de X-as. Bewijs analytisch de hierboven vermelde meetkundige stelling dat voor iedere lijn door P (die de cirkel in R_1 en R_2 snijdt) het product $\overline{PR_1}.\overline{PR_2}$ hetzelfde is, bereken de waarde van dit product en verifieer dat dit met de hierboven gevonden uitdrukking van de macht overeenstemt.

Laat nu twee cirkels gegeven zijn, die niet concentrisch zijn. Laat hun vergelijkingen $C_1=0$ en $C_2=0$ zijn (hierin stellen C_1 en C_2 kwadratische uitdrukkingen van het type $x^2+y^2+ax+by+c$ voor). Om de snijpunten van de cirkels te vinden moeten we de gemeenschappelijke oplossingen van $C_1=0$ en $C_2=0$ bepalen. Deze zijn echter dezelfde als die van $C_1=0$ en $C_1-C_2=0$. Nu is $C_1-C_2=0$ echter de vergelijking van een rechte lijn omdat de kwadratische stukken tegen elkaar wegvallen (de eerstegraadsstukken vallen niet weg omdat de cirkels niet concentrisch zijn). Voor deze lijn geldt $C_1=C_2$, d.w.z. de lijn is de meetkundige plaats van de punten van het vlak die dezelfde macht t.o.v. beide cirkels hebben. Deze lijn heet daarom de machtlijn van de twee cirkels. De machtlijn gaat door de snijpunten van de cirkels. Als de cirkels elkaar raken is de machtlijn de raaklijn aan beide cirkels in het raakpunt der cirkels.

Opgave 4. Bewijs dat de machtlijn van twee cirkels loodrecht staat op de verbindingslijn van de middelpunten.

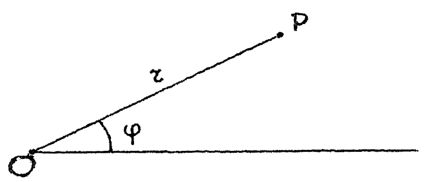
Opgave 5. Van drie cirkels met verschillende middelpunten zijn de drie bij elk tweetal der cirkels behorende machtlijnen concurrent. Bewijs dit.

Het volgens opgave 5 bestaande punt dat t.o.v. drie cirkels met verschillend middelpunt dezelfde macht heeft, heet het machtpunt van de drie cirkels.

Opgave 6. Ontwerp een constructie voor de machtlijn van twee elkaar niet snijdende cirkels (Aanwijzing: gebruik er een derde cirkel bij).

§5. Coördinatenstelsels en coördinatentransformaties.

Naast het behandelde rechthoekige coördinatenstelsel zijn in de analytische meetkunde nog andere coördinatenstelsels in gebruik. Het belangrijkste wordt gevormd door de poolcoördinaten. Deze worden als volgt verkregen. Kies een halve lijn in het platte vlak en noem het



beginpunt O. Deze halve lijn heet de poolas. Een willekeurig punt P verbinden we met O. Noemen we de lengte van het lijnstuk OP r en de hoek in radialen gemeten die het lijnstuk OP met de poolas maakt φ, dan heten (r,φ) de poolcoördinaten van P t.o.v. de gekozen poolas. We noemen r de voerstraal en φ het argument van P. De voerstraal is ≥ 0 en is volledig door P bepaald; het argument is slechts op veelvouden van 2π na bepaald, behalve als P=O (d.w.z. r=0), in welk geval φ volledig onbepaald is. Kiezen we een bij de poolas behorend rechthoekig coördinatenstelsel (d.w.z. één waarvan de positieve X-as met de poolas samenvalt en O dus de oorsprong is), dan geldt voor de rechthoekige coördinaten (x,y) en de poolcoördinaten (r,φ) van hetzelfde punt blijkbaar

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}.$$

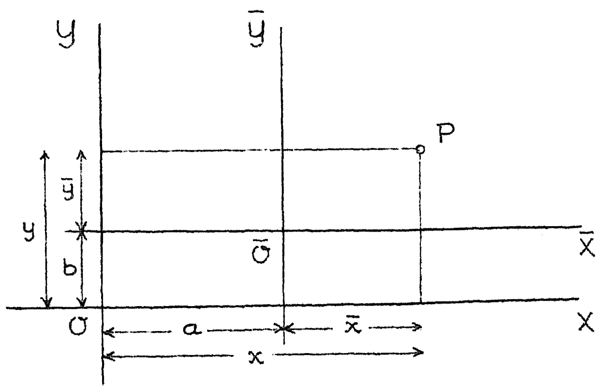
Een rechthoekig coördinatenstelsel noemen we ook wel een Cartesisch coördinatenstelsel.

Uit bovenstaande transformatieformules voor bij elkaar passende poolcoördinatenstelsels en Cartesische coördinatenstelsels volgt nog

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\}.$$

Sommige krommen zijn in poolcoördinaten eenvoudiger voor te stellen dan in Cartesische coördinaten. Zo heeft de vergelijking van de cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal a in poolcoördinaten de vergelijking r=a.

Behalve transformatie van Cartesische coördinaten in poolcoördinaten kan men ook transformaties beschouwen tussen twee verschillende Cartesische coördinatenstelsels onderling. Er is n.l. in de keuze van een Cartesisch coördinatenstelsel nog vrijheid: men kan de oorsprong nog willekeurig in het vlak kiezen en als de oorsprong gekozen is kan men de richting van de positieve X-as nog willekeurig kiezen. De vrijheid die er dan nog bestaat in de keuze van de lengte-eenheid van meting, laten we verder buiten beschouwing. Vergelijken we eerst eens twee stelsels met verschillende oorsprong, maar met dezelfde richting van de assen. Laat de oorsprong van het eerste stelsel O en die van het tweede stelsel $\bar{O}$ heten en laat $\bar{O}$ in het eerste stelsel de coördinaten (a,b) hebben.

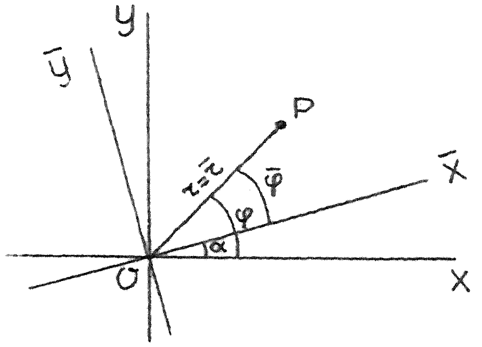


Laat een punt P in het eerste stelsel coördinaten (x,y) en in het tweede stelsel coördinaten ($\bar{x},\bar{y}$) hebben. Het is duidelijk dat dan geldt

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + a \\ y &= \bar{y} + b \end{aligned}\right\}.$$

Dit zijn dus de transformatieformules voor translatie van een Cartesisch coördinatenstelsel.

Nemen we nu een ander bijzonder geval, n.l. dat de oorsprong van de twee stelsels samenvallen en dat de positieve X-as van het tweede stelsel een hoek α maakt met de positieve X-as van het eerste stelsel. We beschouwen eerst de bijbehorende poolcoördinatenstelsels. Als P in het bij het eerste stelsel behorende poolcoördinatenstelsel coördinaten (r,φ) en in het bij het tweede stelsel behorende poolcoördinatenstelsel coördinaten $(\bar{r},\bar{\varphi})$ heeft, geldt blijkbaar



$$\left.\begin{aligned} r &= \bar{r} \\ \varphi &= \bar{\varphi} + \alpha \end{aligned}\right\}.$$

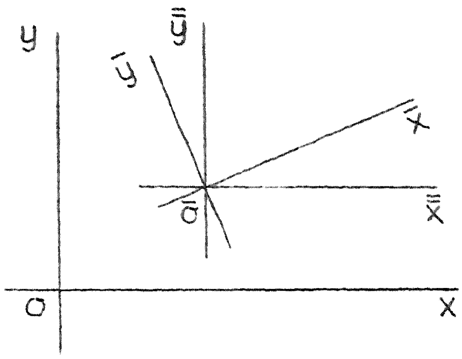
Hieruit volgt, als de Cartesische coördinaten van P in het eerste stelsel (x,y) en in het tweede stelsel $(\bar{x},\bar{y})$ zijn $x = r\cos\varphi = \bar{r}\cos(\bar{\varphi}+\alpha) = \bar{r}\cos\bar{\varphi}\cos\alpha - \bar{r}\sin\bar{\varphi}\sin\alpha = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha$ en $y = r\sin\varphi = \bar{r}\sin(\bar{\varphi}+\alpha) = \bar{r}\sin\bar{\varphi}\cos\alpha + \bar{r}\cos\bar{\varphi}\sin\alpha = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha$.

Dus

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ y &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Dit zijn de transformatieformules voor rotatie van een Cartesisch coördinatenstelsel.

Nemen we nu het algemene geval dat het tweede coördinatenstelsel een oorsprong $\bar{O}$ heeft die coördinaten (a,b) in het eerste stelsel heeft en dat de positieve X-as van het tweede stelsel een hoek α maakt met de positieve X-as van het eerste stelsel. We lassen een derde coördinatenstelsel in met oorsprong in $\bar{O}$ en met assen evenwijdig met de assen van het eerste stelsel. Als een punt P in het eerste, tweede en derde stelsel respectievelijk coördinaten (x,y), $(\bar{x},\bar{y})$ en $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})$ heeft, dan geldt



$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{\bar{x}} + a \\ y &= \bar{\bar{y}} + b \\ \bar{\bar{x}} &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha \\ \bar{\bar{y}} &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Hieruit vinden we onmiddellijk:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha + a \\ y &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + b \end{aligned}\right\},$$

hetgeen dus de transformatieformules zijn voor de overgang van een Cartesisch coördinatenstelsel op een willekeurig ander Cartesisch coördinatenstelsel met dezelfde eenheid van lengte.

De transformatie van het tweede stelsel naar het eerste is een soortgelijke transformatie, waarin α vervangen is door $-\alpha$. Er komt dus

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha + c \\ \bar{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + d\end{array}\right\},$$

waarin c en d de coördinaten in het tweede stelsel zijn van de oorsprong van het eerste stelsel. Ze worden dus gevonden uit

$$\left.\begin{array}{l}0 = c\cos\alpha - d\sin\alpha + a \\ 0 = c\sin\alpha + d\cos\alpha + b\end{array}\right\};$$

dit levert bij oplossing $c = -a\cos\alpha - b\sin\alpha$, $d = a\sin\alpha - b\cos\alpha$
We vinden dus

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\cos\alpha - b\sin\alpha \\ \bar{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha + a\sin\alpha - b\cos\alpha\end{array}\right\}$$

als de transformatieformules van het tweede naar het eerste stelsel.

Opgave 1. Leid de hier gevonden transformatieformules op een andere wijze af door het bovengenoemde derde stelsel te gebruiken, de $\bar{\bar{x}}$ en $\bar{\bar{y}}$ in de $\bar{x}$ en $\bar{y}$ uit te drukken en vervolgens de $\bar{\bar{x}}$ en $\bar{\bar{y}}$ te elimineren

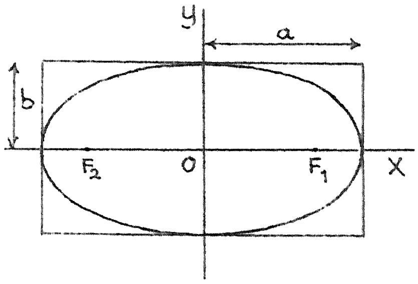
Coördinatentransformaties kunnen worden gebruikt om bij een probleem een passend coördinatenstelsel te kiezen. Laat b.v. gevraagd zijn de poollijn van een punt $P(x_0,y_0)$ t.o.v. een cirkel met vergelijking $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2$ te bepalen. Dit probleem is in § 4 opgelost voor het geval dat het middelpunt van de cirkel in de oorsprong is gelegen. Verschuiven we nu het coördinatenstelsel, zodat de oorsprong in het middelpunt van de cirkel komt, dat is in het punt (a_1,a_2). Daar de transformatieformules $x = \bar{x} + a_1$ en $y = \bar{y} + a_2$ zijn, heeft P in het nieuwe stelsel coördinaten $(x_0-a_1,\ y_0-a_2)$ en de cirkel de vergelijking $\bar{x}^2+\bar{y}^2 = r^2$. De poollijn heeft in het nieuwe stelsel dus de vergelijking $(x_0-a_1)\bar{x} + (y_0-a_2)\bar{y} = r^2$ en in het oorspronkelijke stelsel dus $(x_0-a_1)(x-a_1)+(y_0-a_2)(y-a_2)=r^2$. Daarmee is de vergelijking van de poollijn van een punt t.o.v. een willekeurig gelegen cirkel afgeleid.

§ 6. Enkele eigenschappen van krommen.

Een ellips is de meetkundige plaats van de punten in het platte vlak, waarvoor geldt dat de som van de afstanden van zo'n punt tot twee vaste verschillende punten F_1 en F_2 in dat vlak constant is. F_1 en F_2 heten de brandpunten van de ellips. We kiezen een speciaal coördinatenstelsel en wel één met de oorsprong in het midden van het lijnstuk F_1F_2 en met als X-as de lijn F_1F_2. Als F_1 op de positieve X-as ligt heeft F_1 coördinaten $(c,0)$ en F_2 $(-c,0)$ met $c > 0$. De helft van de voorgeschreven som der afstanden noemen we a. We mogen veronderstellen dat $a > c$ is, omdat voor $a < c$ geen enkel punt aan de voorwaarde voldoet en voor $a = c$ alleen de punten van het lijnstuk F_1F_2 aan de voorwaarde voldoen. De voorwaarde dat een punt (x,y) op de ellips ligt is $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$, of $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Aequivalent hiermee is $(x-c)^2+y^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$ omdat $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} -2a$ klaarblijkelijk geen enkele reële oplossing bezit (een dergelijke oplossing zou een punt opleveren waarvoor geldt dat het verschil van de afstanden tot F_1 en F_2 gelijk aan 2a is, in strijd met $a > c$). We vinden dus $(x-c)^2+y^2 = 4a^2 + (x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ of $a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+cx$. Dit is aequivalent met $a^2(x+c)^2+a^2y^2 = (a^2+cx)^2$ omdat $-a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$ zou leiden tot $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm(2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2})$, hetgeen weer geen reële oplossingen bezit. We vinden nu $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$. Voeren we nu in $b = \sqrt{a^2-c^2}$, hetgeen kan omdat $a > c$ is, dan wordt de vergelijking van de ellips $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$, of

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

De brandpunten $(c,0)$ en $(-c,0)$ van deze ellips worden gevonden uit $c^2 = a^2-b^2$. Er moet dus gelden $a > b > 0$; overigens mogen a en b willekeurig zijn. Een punt (x,y) met $|x| > a$ kan niet op de ellips liggen, omdat voor zo'n punt geldt $\frac{x^2}{a^2} > 1$. Evenmin ligt een punt (x,y) met $|y| > b$ op de ellips. De ellips ligt dus geheel binnen of op de rechthoek bepaald door de vier lijnen $x = \pm a$ en $y = \pm b$. De snijpunten met de X-as worden gevonden door in de vergelijking $y = 0$ te substitueren, dit levert $x = \pm a$; deze snijpunten zijn dus $(a,0)$ en $(-a,0)$. Evenzo zijn de snijpunten met de Y-as $(0,b)$ en $(0,-b)$. Deze zelfde punten vindt men ook als snijpunten met de lijnen $x = \pm a$ en $y = \pm b$. Verder is de ellips symmetrisch t.o.v. de X-as en t.o.v. de Y-as. als voor ieder punt (x,y) dat tot de figuur behoort ook geldt dat $(x,-y)$ tot de figuur behoort. Dat dit voor de ellips vervuld is, is evident; het komt, omdat in de vergelijking alleen even machten van y optreden. Analoog voor de Y-as. Zouden we in de vergelijking $a = b$ nemen, dan ontstaat een cirkel; een cirkel is dus op te vatten als een grensgeval van de ellips, als de brandpunten samenvallen.

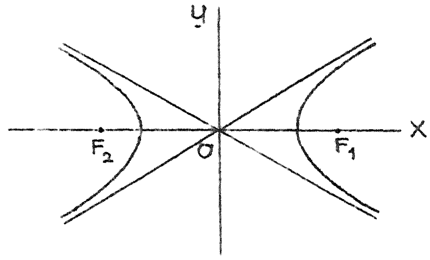


Een hyperbool krijgen we door in de definitie van ellips het woord "som" te vervangen door "absolute waarde van het verschil". Maken we de brandpunten weer tot $(c,0)$ en $(-c,0)$ met $c > 0$ en noemen we de absolute waarde van het verschil der afstanden 2a dan kan nu $a < c$ verondersteld worden. We vinden nu op analoge wijze als hier-

Een figuur is n.l. klaarblijkelijk symmetrisch t.o.v. de X-as boven als vergelijking van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

waarin $b = \sqrt{c^2-a^2}$. Een punt (x,y) met $|x| < a$ kan niet op de hyperbool liggen, omdat voor zo'n punt geldt $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$. De hyperbool bestaat dus uit minstens twee los van elkaar liggende stukken, één waarvoor $x \geqq a$ en één waarvoor $x \leqq -a$ geldt. Verder ziet men makkelijk in, dat bij iedere waarde van y twee waarden van x behoren (één $\geqq a$ en één $\leqq -a$). De snijpunten met de X-as zijn $(a,0)$ en $(-a,0)$; dit zijn tevens de snijpunten met $x = \pm a$.

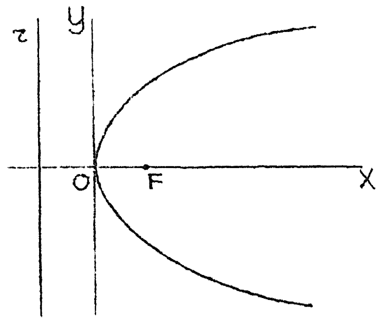


De hyperbool is symmetrisch t.o.v. de X-as en de Y-as. Een lijn $x = d$ snijdt de hyperbool in twee of nul punten, al naar gelang $|d| > a$ of $|d| < a$ is. Snijden we de hyperbool nu met een lijn $y = mx+q$, dan vinden we $b^2x^2-a^2(mx+q)^2 = a^2b^2$ of $(b^2-a^2m^2)x^2 - 2a^2mqx+a^2q^2-a^2b^2 = 0$. Deze vergelijking levert in het algemeen twee al dan niet reële wortels. Als echter $b^2-a^2m^2 = 0$, d.w.z. $m = \pm \frac{b}{a}$, dan blijft er voor $q \neq 0$ slechts een lineaire vergelijking over en voor $q = 0$ zelfs een strijdige vergelijking. Een lijn $y = \pm \frac{b}{a} x+q$ met $q \neq 0$ snijdt de hyperbool dus in één punt. De twee lijnen $y = \pm \frac{b}{a} x$ snijden de hyperbool niet. Deze laatste twee lijnen heten asymptoten van de hyperbool. Snijden we een lijn $x = d$ met de hyperbool en met een asymptoot b.v. $y= \frac{b}{a} x$ dan vinden we voor het eerste snijpunt (en wel datgene boven de X-as gelegen) $y = \frac{b\sqrt{(d^2-a^2)}}{a}$ en voor het tweede snijpunt $\frac{bd}{a}$. Het verschil is $\frac{bd}{a} - \frac{b\sqrt{d^2-a^2}}{a} = \frac{b}{a}(d-\sqrt{d^2-a^2}) = \frac{ab}{d+\sqrt{d^2-a^2}}$. Uit de analyse volgt nu dat $\lim_{d\to\infty} \frac{ab}{d+\sqrt{d^2-a^2}} = 0$. Een asymptoot heeft dus de eigenschap dat naarmate men hem verder doorloopt in een tot nul inkrimpende omgeving punten van de kromme komen te liggen.

Een parabool is de meetkundige plaats van de punten in het platte vlak, waarvoor geldt dat de afstand van zo'n punt tot een vast punt F in dat vlak gelijk is aan de afstand van dat punt tot een vaste niet door F gaande rechte r in dat vlak. F heet het brandpunt en r de richtlijn van de parabool. We kiezen de loodlijn door F op r als X-as, de oorsprong in het midden van het lijnstuk met F en het snijpunt van r en de X-as als eindpunten, en de positieve X-as zo dat F er op komt te liggen. Als we de afstand van F tot r nu p noemen, dan is $F(\frac{1}{2}p,0)$ en de vergelijking van r is $x = -\frac{1}{2}p$. De voorwaarde dat een punt (x,y) op de parabool ligt is $|x+\frac{1}{2}p| = \sqrt{(x-\frac{1}{2}p)^2+y^2}$. Dit is aequivalent met $(x+\frac{1}{2}p)^2 = (x-\frac{1}{2}p)^2 + y^2$ of met

$$y^2 = 2px,$$

hetgeen dus de vergelijking voor de parabool is. Punten (x,y) met $x < 0$ voldoen niet aan deze vergelijking. De X-as en de Y-as snijden



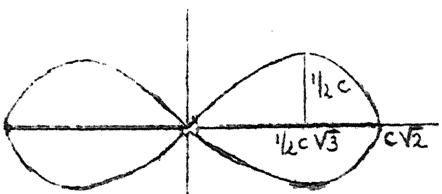
de parabool in de oorsprong. De parabool is symmetrisch t.o.v. de X-as. Een lijn $x = d$ snijdt de parabool in twee of nul punten, al naar gelang $d > 0$ of $d < 0$ is. Snijden we de parabool met een lijn $y = mx+q$, dan vinden we $m^2x^2+2(mq-p)x+q^2 = 0$. Deze vergelijking levert in het algemeen twee al dan niet reële wortels. Als echter $m = 0$, wordt de vergelijking lineair, onafhankelijk van de keuze van q. Iedere lijn evenwijdig met de X-as snijdt de parabool in één punt. Dit komt overeen met het feit dat de parabool geen asymtoten bezit. De X-as heet de <u>as</u> van de parabool.

Aan de voorbeelden van de ellips, hyperbool en parabool hebben wij enige eigenschappen van krommen bestudeerd. Deze krommen zijn verkregen als meetkundige plaatsen. In de beschouwde gevallen was het eenvoudig om uit de definitie van de meetkundige plaats de vergelijking ervan af te leiden; het analytisch neerschrijven van deze definitie leverde direct deze vergelijking en de verdere herleiding geschiedde alleen om deze in een mooiere vorm te brengen. Vaak echter is de zaak minder eenvoudig en heeft men hulpparameters nodig, die nog geëlimineerd moeten worden. Hiervan een voorbeeld. Laat $P\ (p,q)$ een vast punt zijn verschillend van de oorsprong. Men neme een cirkel door O en P; deze snijde de X-as in A en de Y-as in B ($A \neq 0$, $B \neq 0$). Gevraagd is de meetkundige plaats van het midden M van het lijnstuk AB als men alle mogelijke cirkels door O en P neemt. Laat zo'n cirkel de vergelijking $x^2+y^2+ax+by = 0$ hebben; er is dan al voor gezorgd dat hij door O gaat. De voorwaarde dat de cirkel door P gaat is $p^2+q^2+ap+bq = 0$. Het punt A heeft coördinaten $(-a,0)$ en het punt $B(0,-b)$ en het punt $M(-\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2}b)$. Voor de meetkundige plaats geldt dus $x = -\frac{1}{2}a$, $y = -\frac{1}{2}b$, $p^2+ q^2 + ap + bq = 0$ met veranderlijke a en b. Elimineren van a en b levert direct $p^2+q^2- 2xp - 2yq = 0$ of $2px + 2qy = p^2+q^2$ hetgeen de vergelijking van een rechte lijn is.
<u>Opgave 1</u>. Bepaal de meetkundige plaats van de middens van de koorden gaande door het brandpunt van de parabool $y^2 = 2px$.

Als $f(x,y)$ een veelterm in x en y is, waarvan niet alle coëfficiënten nul zijn dan heet de meetkundige plaats van de punten waarvan de coördinaten voldoen aan $f(x,y) = 0$ een <u>algebraïsche kromme</u>. De graad van $f(x,y)$ heet de graad van de kromme. $f(x,y) = 0$ heet de vergelijking van de kromme.

Laat de vergelijking van een algebraïsche kromme $0 = a+bx+cy+\ldots$ zijn. De stippeltjes staan voor termen van de tweede graad en hoger. Stel dat de kromme door de oorsprong gaat, dan is $a = 0$. Wil men de kromme snijden met een lijn door 0 (vergelijking $y=mx$), dan substitueert men $y=mx$ in de vergelijking van de kromme, hetgeen $0 = (b+cm)x+\ldots$ oplevert. Dit is een algebraïsche vergelijking voor x, die in het algemeen één wortel 0 heeft, zoals te verwachten was. Stel nu $c \neq 0$, dan heeft voor $m = -\frac{b}{c}$ de vergelijking een meervoudige wortel in de oorsprong. Men zegt, dat $y = -\frac{b}{c}x$ of $bx+cy = 0$ een <u>raaklijn</u> in 0 aan de kromme voorstelt. Dat dit begrip raaklijn overeenkomt met het in de differentiaalrekening ingevoerde begrip gaan wij hier niet na. Als $c = 0$, $b \neq 0$ levert geen derrechten $y = mx$ een raaklijn; in dat geval echter levert substitutie van $x = 0$ een meervoudige wortel in y. In dat geval levert $x = 0$ een raaklijn. Geldt ten slotte $b = c = 0$ dan geeft snijding met iedere rechte door 0 een meervoudige wortel $x = 0$; 0 heet dan een <u>meervoudig punt</u> van de kromme. Hiervan behandelen we een voorbeeld.

Laat gevraagd zijn de meetkundige plaats van de punten in het platte vlak, zodat het product van de afstanden van zo'n punt tot de twee punten $(c,0)$ en $(-c,0)$ $(c>0)$ een constante k^2 is. De voorwaarde dat een punt (x,y) tot de meetkundige plaats behoort is
$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,\sqrt{(x+c)^2+y^2} = k^2$. Aequivalent hiermee is
$((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2) = k^4$ of $(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2 = k^4$. of
$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2) = k^4-c^4$. Als nu $k = c$, gaat de kromme door 0 en is zijn vergelijking $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2) = 0$. Deze kromme heet een <u>lemniscaat van Bernoulli</u>. Deze heeft een meervoudig punt in 0. Snijdt men deze met $y = mx$ dan komt er $x^4(1+m^2)^2-2c^2x^2(1-m^2) = 0$. Deze vergelijking heeft in het algemeen een dubbele wortel $x = 0$; voor $m = \pm 1$ heeft hij echter een viervoudige wortel $x = 0$. Het punt 0 is een <u>knooppunt</u> met twee <u>takraaklijnen</u> $y = x$ en $y = -x$. We beschouwen de snijpunten met de lijnen $x = d$. Dit geeft $y^4+2(d^2+c^2)y^2+d^2(d^2-2c^2) = 0$. Dit heeft reële oplossingen voor y^2 als $(d^2+c^2)^2-d^2(d^2-2c^2) \geq 0$. Dit is klaarblijkelijk steeds het geval. Opdat er reële oplossingen voor y zijn moet er een niet-negatieve oplossing voor y^2 zijn. Nu is de som van de oplossingen in y^2 gelijk aan $-2(d^2+c^2) < 0$; er is dan een positieve oplossing als het product $d^2(d^2-2c^2) \leq 0$; dit geeft $|d| \leq 2\sqrt{c}$. De kromme ligt dus geheel tussen de lijnen $x=c\sqrt{2}$ en $x= -c\sqrt{2}$. Voor $x = \pm c\sqrt{2}$ is $y = 0$. Snijdt men nu met $y=d$ dan komt er $x^2+2(d^2-c^2)x^2+$



$+ d^2 (d^2+2c^2)=0$. De discriminant van deze vierkantsvergelijking in x^2 is $(d^2-c^2)^2 - d^2(d^2+2c^2)= c^2(c^2-4d^2)$. Er zijn dus reële oplossingen voor x^2 als $|d| \leq \frac{1}{2}c$. Nemen we aan dat dit geldt, dan is de som van de wortels in x^2 gelijk aan $2(c^2-d^2) \geqq 2(c^2-\frac{1}{4}c^2) > 0$ en is er dus zeker een positieve wortel voor x^2, dus reële wortels voor x. Voor $y = \pm \frac{1}{2}c$ vinden we $x^2 = \frac{3}{4} c^2$, dus $x = \pm \frac{1}{2}c\sqrt{3}$. De kromme ligt geheel tussen de rechten $y = -\frac{1}{2}c$ en $y = \frac{1}{2}c$.

Een knooppunt is in genen dele het enige soort meervoudig punt, dat optreedt. Enkele andere typen van meervoudige punten levert de conchoïde van Nicomedes. Deze wordt als volgt verkregen. Neem een punt P en een rechte r die niet door P gaat. Op iedere rechte door P zet men van zijn snijpunt met r naar beide zijden een lijnstuk van vaste lengte q af. De meetkundige plaats van de eindpunten van deze lijnstukken, als de rechte om P draait, noemt men een conchoïde van Nicomedes.

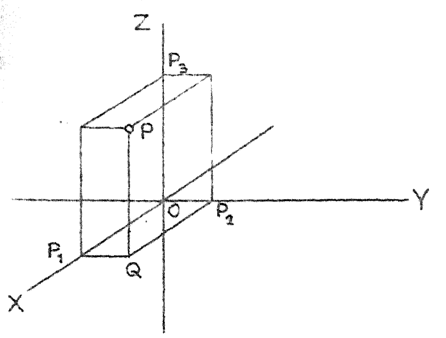
Opgave 2. Bewijs dat als men het coördinatenstelsel zo kiest, dat P de oorsprong is en r de rechte met vergelijking $x=a$ met $a>0$, de vergelijking van de conchoïde van Nicomedes, eventueel met uitzondering van het punt P, $x^2(x^2+y^2) - 2ax(x^2+y^2) + a^2y^2-(q^2-a^2)x^2=0$ is. Maak een tekening van de kromme voor de gevallen $q>a$, $q=a$ en $q<a$.

De in opgave 2 gevonden algebraïsche kromme heeft voor $q>a$ in de oorsprong een knooppunt. Voor $q<a$ echter heeft een lijn $x=d$ alleen een reëel snijpunt met de kromme als $a-q \leqq d \leqq a+q$ en $d \neq a$ of als $d=0$ (ga dat na). Daar $a-q>0$, liggen er in een omgeving van de oorsprong geen verdere reële punten van de kromme meer: de oorsprong is een geïsoleerd punt van de kromme. Als $q=a$, hebben alle punten van de kromme een x-coördinaat $\geqq 0$. In de oorsprong is er één raaklijn: de X-as. De oorsprong is een keerpunt van de kromme met als keerpuntsraaklijn de X-as.

Ook hiermee is de opsomming van de mogelijke typen meervoudige punten niet uitgeput. We gaan er niet verder op in.

§ 7. De ruimte

In de ruimte kiezen we een coördinatenstelsel door een punt O als oorsprong te kiezen en door ~~door~~ O drie onderling loodrechte lijnen te trekken die de assen van het coördinatenstelsel worden genoemd (X-as, Y-as en Z-as). De drie assen maken we tot een getallenrechte met O als nulpunt. Een willekeurig punt P projecteren we loodrecht op de assen, hetgeen P_1, P_2 en P_3 oplevert. De getallen x,y en z die aan P_1, P_2 en P_3 zijn toegevoegd noemen we de coördinaten van P. Zo is aan ieder punt P een drietal reële getallen (x,y,z) toegevoegd. Omgekeerd behoort bij



ieder drietal reële getallen een punt met die getallen als coördinaten. Een eenvoudige figuur, waaruit we de coördinaten kunnen aflezen krijgen we als volgt. Projecteer P eerst loodrecht op het vlak door de X-as en de Y-as; dit geeft een punt Q, dat we vervolgens op de X-as projecteren, hetgeen P_1 oplevert. De lengten der lijnstukken OP_1, P_1Q en QP met passend teken voorzien geven dan de x-,y- en z-coördinaten van P. De afstand $\overline{OP}$ van P tot de oorsprong krijgen we uit $\overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QP}^2=\overline{OP_1}^2+\overline{P_1Q}^2+\overline{QP}^2=x^2+y^2+z^2$. De afstand van P(x,y,z) tot de oorsprong is $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Op geheel analoge wijze krijgen we voor de afstand van het punt $P(x_1,y_1,z_1)$ tot $R(x_2,y_2,z_2)$:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

We beschouwen nu een halve lijn door de oorsprong, die met de positieve assen hoeken α_1, α_2, α_3 maakt. Laat P(x,y,z) een punt op die halve lijn zijn, dan is $x=\overline{OP}\cos\alpha_1$, $y=\overline{OP}\cos\alpha_2$, $z=\overline{OP}\cos\alpha_3$. Uit $x^2+y^2+z^2=\overline{OP}^2$ volgt $(\cos\alpha_1)^2+(\cos\alpha_2)^2+(\cos\alpha_3)^2=1$. Verder geldt $x:y:z=\cos\alpha_1:\cos\alpha_2:\cos\alpha_3$. De halve lijn door O, die in het verlengde van de gegeven halve lijn ligt, maakt met de positieve assen hoeken $\pi+\alpha_1$, $\pi+\alpha_2$, $\pi+\alpha_3$; voor een punt P op deze halve lijn geldt $x=-\overline{OP}\cos\alpha_1$, $y=-\overline{OP}\cos\alpha_2$, $z=-\overline{OP}\cos\alpha_3$, dus eveneens $x:y:z=\cos\alpha_1:\cos\alpha_2:\cos\alpha_3$. Daar $\overline{OP}$ iedere reële waarde kan hebben is

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos\alpha_1 \\ y &= t\cos\alpha_2 \\ z &= t\cos\alpha_3 \end{aligned}\right\}$$

een parametervoorstelling van een rechte lijn door O met parameter t. Men noemt $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ richtingscosinussen van de rechte lijn. Men kan in de parametervoorstelling de cosinussen klaarblijkelijk ook vervangen door een ermee evenredig drietal getallen a_1,a_2,a_3. Zulke getallen heten richtingsgetallen van de lijn; ze zijn op een willekeurige evenredigheidsfactor $\neq 0$ na bepaald en niet alle drie nul. Om uit richtingsgetallen richtingscosinussen te krijgen moet men ze met een dusdanige factor vermenigvuldigen, dat de som van hun kwadraten 1 wordt; deze factor is slechts op het teken na bepaald.

Bij een lijn l, die niet door O gaat, beschouwen we de ermee evenwijdige lijn m door O. Als (p_1,p_2,p_3) een punt van l is, dan ligt klaarblijkelijk (x,y,z) dan en slechts dan op l als $(x-p_1,y-p_2,z-p_3)$ op m ligt. Hieruit volgt dat een parametervoorstelling van l als volgt luidt

$$\left.\begin{aligned} x &= p_1 + t\cos\alpha_1 \\ y &= p_2 + t\cos\alpha_2 \\ z &= p_3 + t\cos\alpha_3 \end{aligned}\right\} .$$

Ook nu zijn α_1, α_2 en α_3 de hoeken die 1 met de assen maakt; $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ en $\cos\alpha_3$ noemt men weer richtingscosinussen van 1; analoog als boven definieert men de richtingsgetallen.

Voor de richtingsgetallen van een lijn door 0 kunnen we de coördinaten van een punt Q op die lijn nemen, dat van 0 verschilt. Zodoende vinden we voor de lijn door (p_1,p_2,p_3) en (q_1,q_2,q_3) de parametervoorstelling $x=p_1+t(q_1-p_1)$, $y=p_2+t(q_2-p_2)$, $z=p_3+t(q_3-p_3)$ of

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-t)\,p_1 + tq_1 \\ y &= (1-t)\,p_2 + tq_2 \\ z &= (1-t)\,p_3 + tq_3 \end{aligned}\right\} .$$

Deze parametervoorstelling is geheel analoog met de in het platte vlak gevondene (zie blz.6).

Laat nu twee lijnen door de oorsprong gegeven zijn met richtingscosinussen $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ resp. $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, en $\cos\beta_3$. We zoeken een uitdrukking voor de hoek φ tussen die lijnen. Neem op de eerste lijn een punt P op afstand 1 van 0 en op de tweede lijn een punt Q op afstand 1 van de oorsprong. Dan is OP $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ en $OQ=(\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$ mits de punten aan de passende zijde van 0 gekozen zijn hetgeen we veronderstellen. Nu is $\overline{PQ}^2=(\cos\beta_1-\cos\alpha_1)^2 + +(\cos\beta_2-\cos\alpha_2)^2+(\cos\beta_3-\cos\alpha_3)^2=$
$= 2-2(\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3)$. Anderzijds vinden we door toepassing van de cosinusregel in driehoek OPQ, dat $\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cos\varphi = 2-2\cos\varphi$. Hieruit volgt

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 .$$

Daar hierin alleen richtingscosinussen van de lijnen voorkomen en deze bij evenwijdige verschuiving bewaard blijven, geldt deze formule ook voor lijnen in willekeurige ligging.

De voorwaarde voor loodrechte stand van twee lijnen is dus

$$\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3=0.$$

Hierin mogen de richtingscosinussen ook door richtingsgetallen worden vervangen; laat deze (a_1,a_2,a_3) resp. (b_1,b_2,b_3) zijn, dan wordt de voorwaarde:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Nemen we nu een plat vlak, laat een rechte lijn r loodrecht op dat vlak richtingsgetallen (a_1,a_2,a_3) hebben en laat $P(p_1,p_2,p_3)$ een punt van dat vlak zijn. Een punt $Q(x,y,z)$ ligt dan en slechts dan in het vlak als PQ loodrecht op r staat. Dit geeft de voorwaarde:

$$a_1(x-p_1) + a_2(y-p_2) + a_3(z-p_3) = 0,$$

hetgeen dus de vergelijking van het platte vlak voorstelt. Deze vergelijking is van de eerste graad in x,y en z.

We vragen ons nu af in hoeverre een willekeurige vergelijking van de eerste graad een plat vlak voorstelt. We gaan dus uit van zulk een vergelijking $a_1x+a_2y+a_3z=c$, waarin a_1,a_2 en a_3 niet alle drie nul zijn. We proberen eerst eens de lijn r door O met richtingsgetallen (a_1,a_2,a_3) met de door de vergelijking voorgestelde meetkundige plaats te snijden. Een willekeurig punt van die lijn is (ta_1, ta_2, ta_3); substitutie hiervan in de vergelijking levert $t(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=c$. Nu is zeker $a_1^2+a_2^2+a_3^2 \neq 0$, dus $t = \dfrac{c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, dus het snijpunt

$$R\left(\frac{a_1c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \frac{a_2c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \frac{a_3c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right).$$

We kunnen de vergelijking nu in de volgende gedaante brengen

$$a_1\left(x-\frac{a_1c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right) + a_2\left(y-\frac{a_2c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right) + a_3\left(z-\frac{a_3c}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right) = 0$$

en dit is op grond van hetgeen hierboven is afgeleid de vergelijking van het vlak loodrecht op r en gaande door R.

Vermenigvuldigt men de vergelijking van een vlak met een dusdanige factor dat de coëfficiënten van x,y en z richtingscosinussen van de normaal op het vlak worden dan vinden we in

$x \cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3 - c_1 = 0$ de <u>normaalvorm van Hesse</u> van de vergelijking van het vlak. Evenals voor een lijn in het platte vlak bewijst men dat voor een willekeurig punt (x,y,z) de uitdrukking $x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 - c_1$ eventueel op het teken na de afstand van het punt tot het vlak voorstelt; de uitdrukking is positief of negatief naar gelang men zich in de ene of in de andere helft bevindt, waarin het platte vlak de ruimte verdeelt.

Neemt men twee platte vlakken bepaald door de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{array}\right\},$$

dan zal dit stelsel van twee lineaire vergelijkingen rang 2 of rang 1 hebben. Als het rang 1 heeft zijn de vergelijkingen of strijdig of afkelijk. In het eerste geval hebben de vlakken geen punt gemeen en n dus evenwijdig, in het tweede geval hebben ze al hun punten gen en vallen dus samen. In het laatste geval zijn hun coëfficiënten nredig. Als de rang 2 is snijden de twee vlakken elkaar volgens een hte lijn. Een rechte lijn kan men dus ook verkrijgen als snijlijn twee vlakken. Deze lijn staat loodrecht op de normalen van beide kken; voor zijn richtingsgetallen (v_1, v_2, v_3) geldt dus:

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

kunnen voor de richtingsgetallen dus nemen

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Op grond van de vroeger gevonden formule voor de afstand van e punten, zien we direct dat de vergelijking van de bol met middelt (a_1,a_2,a_3) en straal r als volgt luidt:

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2.$$

Einde van de analytische meetkunde van het eerste jaar.