M535NL ZC 44

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Capita Selecta uit de Differentiaalmeetkunde

Serie voordrachten door

Prof.Dr N.H. Kuiper

ZC 44

1958

STICHTING
ATISCH CENTRUM
RHAAVESTRAAT 49
STERDAM-O.

DM 1

Capita Selecta uit de Differentiaalmeetkunde

Serie voordrachten door

Prof.Dr N.H. Kuiper

1958

C^{α}- functies.

n reële functie van een reële variabele heet in een punt P, spectievelijk een inverval I, van de klasse van differentieer-arheid α (is een C^{α}-functie) indien

) voor $\alpha=0,1,\ldots<\infty$: de α-de afgeleide functie bestaat en continu is in P resp. I

) voor $\alpha=\infty$: alle afgeleiden bestaan in P resp. I

) voor $\alpha=\omega$: indien de functie analytisch is in een omgeving van P resp. I.

emen we $i<\infty<\omega$, i natuurlijk getal, dan is indien $\alpha<\beta$ elke $^{\beta}$-functie tevens C^{α}.

functie $x \to |x-r|$ is C^0 en niet C^1 voor $x=r$.
jn $r_1, r_2, \ldots$ de afgetelde rationale getallen tussen 0 en 1, dan

$$\varphi_0(x) = 2x + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x-r_k| \quad , \qquad 0 \leq x \leq 1$$

n functie die C^0 en niet C^1 is in die rationale getallen. $\varphi_0(x)$ toenemend.

finiëren we $\varphi_k(x)$ inductief door

$$\varphi_{m+1}(x) = \int_0^x \varphi_m(x)dx, \qquad m \geq 0 \text{ geheel},$$

n is $\varphi_k(x)$ C^k en niet C^{k+1} in de rationale getallen r_i.

functie f: $\begin{cases} x \to 0 & \text{voor } x \leq 0 \\ x \to e^{-\frac{1}{x}} & \text{voor } x > 0 \end{cases}$

C^{∞} en niet C^{ω} voor x=0.

$$\varphi_{\infty}(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(x-r_k) \quad , \qquad 0 \leq x \leq 1 \; ,$$

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

is C^∞ (de som convergeert gelijkmatig) en nergens C^ω.
Stel $\varphi_\infty(x)$ was C^ω in een punt, dus in een omgeving die dan ook een rationaal punt r bevat. Dan had $\varphi_\infty(x)$ in r alle afgeleiden gemeen met

$$x + \sum_{r_k < r} 2^{-k} f(x-r_k)$$

en was dus in een omgeving van r hieraan gelijk. Voor geen $s > r$ wordt $\varphi_\infty(x)$ echter door deze formule gegeven.

Wenst men analoge functies voor $-\infty < x < \infty$, dan neme men

$$\psi_\alpha(x) = \varphi_\alpha\left(\tfrac{1}{\pi}\,\mathrm{bgtg}\,x + \tfrac{1}{2}\right) \text{ in plaats van } \varphi_\alpha(x).$$

2. C^α-n-varieteit X.

Een locale reële functie op een topologische (Hausdorf) ruimte X is een paar bestaande uit een omgeving $U \subset X$ en een afbeelding $f : U \xrightarrow{\text{in}} R$. Een C^α-n-varieteit, d.i. een n-dimensionale varieteit van de klasse van differentieerbaarheid α, is een topologische ruimte X met een aftelbare dekkende deelverzameling in elke dekkende verzameling omgevingen ("aftelbare basis"), met een verzameling K van lokale reële functies, de C^α-functies op X geheten, en met de volgende eigenschappen.

1. Is $V \subset U$ (omgevingen), $(U,f) \in K$, dan $(V,f|V) \in K$.
2. Is $(U,f_i) \in K$ $i=1,\ldots r$, $g(x_1,\ldots x_r) \in C^\alpha$ voor $x_i \in f_i(U)$, dan $\{U,g(f_1,\ldots f_r)\} \in K$.
3. Is $p \in X$, dan bestaan $U \ni p$, $(U,x_i) \in K$, $i=1,\ldots n$, zó dat $(x_1,\ldots x_n) : U \longrightarrow R^n$ een homeomorfie-in is en
4. $(U,f) \in K$ dan en alleen dan wanneer

$$f=g(x_1,\ldots x_n) \quad g \in C^\alpha.$$

Het stel functies $(x_1,\ldots x_n): U \to R^n$ heet een stelsel coördinaten.

Stelling: Zijn $(U;x_1,\ldots x_n)$ en $(U;y_1,\ldots y_n)$ coordinatenstelsels voor een C^α-varieteit $\alpha > 0$, dan is

$$\frac{\partial(y_1,\ldots y_n)}{\partial(x_1,\ldots x_n)} \neq 0 .$$

Bewijs: Volgens de definities is y_i een C^α-functie in $x_1,\dots x_n$ en x_i idem in $y_1,\dots y_n$. Dus is (en bestaan)

$$1 = \frac{\partial(y_1,\dots y_n)}{\partial(y_1,\dots y_n)} = \frac{\partial(y_1,\dots y_n)}{\partial(x_1,\dots x_n)} \frac{\partial(x_1,\dots x_n)}{\partial(y_1,\dots y_n)} \neq 0$$

en het gestelde volgt.

Men geeft een C^α-n-varieteit meestal door een stel locale C^α-functies (voortbrengenden van de C^α-structuur) of stelsels coordinaten, . waaruit alle C^α-functies en coordinatenstelsels kunnen worden afgeleid.

Voorbeelden.

1. C^ω-varieteit op R^n: Voortbrengende functies $x_1,\dots x_n$!
2. C^β-1-varieteit. Punten: $-\infty < x < \infty$. Voortbrengende functie: x

   andere C^β-1-varieteit. Idem . " " " : $\psi_\alpha(x)$.
   Zie §1, $\alpha < \beta$.

   N.B. De twee C^β-1-varieteiten op dezelfde puntverzameling zijn niet identiek, wel "equivalent"; ze kunnen niet door "inwendige" eigenschappen worden onderscheiden.
3. C^ω-2-sfeer $x^2+y^2+z^2=1$. Voortbrengende functies x,y en z. Coördinatenstelsels: (x,y) voor $z>0$ en voor $z<0$; cyclisch x,y,z.
4. Torus $(x,y,z) = \{(a+b\cos\varphi)\cos\psi,\ (a+b\cos\varphi)\sin\psi,\ b\sin\varphi\}$.
   Voortbrengende functies x,y,z.
   Coordinatenstelsels met functies φ,ψ: $\begin{cases} k\pi-\varepsilon<\varphi<k\pi+\pi+\varepsilon & 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2} \\ l\pi-\varepsilon<\psi<l\pi+\pi+\varepsilon \end{cases}$

   $(k,l) = (0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$.

3. C^α-afbeelding $f:X\to Y$. Vectoren.

Zijn X en Y verzamelingen, dan is een afbeelding van X in Y een verzameling paren (x,y) met $x\in X$ en $y \in Y$, zó dat elke $x\in X$ precies één keer als eerste in een paar voorkomt. y heet het beeld van x. Is V een deelverzameling van X dan is fV de verzameling van alle fx met $x\in V$. fV heet het beeld van V; $fX\subset Y$ heet beeld van f.

Een afbeelding $f:X \to Y$ geeft op natuurlijke wijze een afbeelding van de deelverzamelingen van X op deelverzamelingen in Y.

Is voorts φ een globale reële functie op Y, $\varphi: Y \to R$, dan is $\varphi f: X \to R$ een globale reële functie op X. Is (W, φ) een reële functie gedefinieerd op een deelverzameling $W \subset Y$, dan is $(f^{-1}W, \varphi f)$ een reële functie gedefinieerd op de deelverzameling $f^{-1}W$.

Een afbeelding $f:X \to Y$ geeft op natuurlijke wijze een afbeelding f^* van de functies op Y (globaal resp. op deelverzameling) op functies op X (globaal resp. op deelverzameling)

$$f^*: \ \varphi \longrightarrow \varphi f \quad .$$

f^* beeldt ook stelsels functies op Y af op stelsels functies op X. Aan sommige stelsels functies kent men daarom het bijvoegelijke naamwoord covariant toe (daarmee aangevend een gedrag analoog aan dat van functies).

Sommige stelsels deelverzamelingen heten om dezelfde reden contravariant (gedrag bij afbeeldingen net tegengesteld aan het gedrag der functies).

Zijn X en Y C^α-varieteiten, dan heet een afbeelding $f:X \to Y$ een C^α-afbeelding, indien f^* de locale C^α-functies op Y, afbeeldt in de verzameling der locale C^α-functies op X. Zijn b.v. $y_1, \ldots y_n$ locale coordinaten op Y, dan moeten $f^*(y_1), \ldots f^*(y_n)$, waarvoor we kort schrijven $y_1, \ldots y_n$ functies op X zijn die in locale coordinaten $x_1, \ldots x_m$ uitgedrukt (gewone) C^α-functies zijn

$$y_i = y_i(x_1, \ldots x_m).$$

Daarmee sluiten we aan bij de elementaire locale definitie van een C^α-afbeelding.

Beschouw de puntverzameling R met de C^ω-structuur bepaald door de reële functie: de identieke afbeelding t=t. Een C^α-afbeelding k van $0 \leq t \leq 1$ in de C^α-m-varieteit X heet een geparametriseerde C^α-kromme. Hij wordt in locale coordinaten locaal gegeven door $x_i = x_i(t)$, $i=1, \ldots m$, $x_i(t)$ een C^α-functie. Kort $x=x(t) \in R^m$.

Het beeld van t=0 heet beginpunt; $x(0) = \{x_1(0), \ldots x_m(0)\}$.

Twee C^{α}-functies φ en ψ op $U \subset X$ heten in het punt $p \in U$ C^{β}-equivalent, $\beta \leq \alpha$, indien voor elke C^{β}-kromme $k: 0 \leq t \leq 1 \longrightarrow X$ met beginpunt p geldt $\frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}}(\varphi k) = \frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}}(\psi k)$

of korter genoteerd $\frac{d^{\beta}\varphi}{dt^{\beta}} = \frac{d^{\beta}\psi}{dt^{\beta}}$.

Deze relatie is inderdaad een equivalentie ($\varphi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi$ èn $\psi \sim \chi \Rightarrow \varphi \sim \chi$). Een equivalentie klasse heet een <u>β-de orde omgeving</u> in p van een functie. De equivalentieklasse van φ wordt aangegeven met $d^{\beta}\varphi$ en heet ook β-de differentiaal van φ.
Voor $\beta = 1$ heet het ook een <u>differentiaal</u> of ook een <u>covariante vector</u>. $\frac{d^{\beta}(\varphi k)}{dt^{\beta}}$ heet de waarde van $d^{\beta}\varphi$ op de geparametriseerde kromme k.
<u>Stelling</u>: $d^{\beta}\varphi = d^{\beta}\psi \iff$ alle partiële γ-de afgeleiden naar de coordinaten gelijk voor $0 < \gamma \leq \beta$.

Voor het eendimensionale geval is b.v. x een coordinaat. Is nu $d^2\varphi = d^2\psi$, dan is voor de kromme $x = \alpha t + \beta t^2$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{d\varphi}{dx}(\alpha + 2\beta t)\right\} =$$
$$= \frac{d^2\varphi}{dx^2}(\alpha + 2\beta t)^2 + \frac{d\varphi}{dx} \cdot 2\beta$$

en voor t=0 $\qquad \alpha \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dx}$.

Dus $\alpha \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dx} = \alpha \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\beta \frac{d\psi}{dx}$ voor elke α, β

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Vormen $x_1, \ldots x_m$ een coordinatenstelsel in een omgeving van p, dan is in p(t=0)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} .$$

Kiest men $\alpha_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t=0)$ $\alpha_i \in R$, dan blijkt

$$d\varphi = d\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right)$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{dx_i}{dt}$ voor elke kromme met beginpunt p.

De differentialen $d\varphi$ in het punt p vormen een m-dimensionale vectorruimte met basis de differentialen van de functies van een coordinatenstelsel. De naam covariante vector is dus passend.

Stelling. De geparametriseerde krommen zijn contravariant. De differentialen zijn covariant. De β-de differentialen zijn covariant.

Het gestelde is een korte formulering van de volgende beweringen. Het beeld onder een C^α-afbeelding f van een C^α-kromme is een C^α-kromme. Het beeld onder f^* van een β-de differentiaal geeft een β-de differentiaal.

De differentialen in het punt $p \in U$ van een C^α-m-variëteit X (voortaan steeds $\alpha \geq 1$) vormen een m-dimensionale vectorruimte T^*. Een basis van T^* wordt gevormd door de differentialen van de functies van een coordinatenstelsel $(U;x_1,\ldots x_m)$ dat zijn $dx_1,\ldots dx_m$. De getallen $\alpha_1,\ldots\alpha_m$ in $d\varphi=\Sigma_{i=1}^m \alpha_i dx_i$ heten de coordinaten van $d\varphi$ ten opzichte van $(U;x_1,\ldots x_m)$. Is $(U;y_1,\ldots y_m)$ een tweede coordinatenstelsel en

$$d\varphi=\Sigma_{i=1}^m \alpha_i dx_i = \Sigma_{j=1}^m \beta_j dy_j = \Sigma_{i,j=1}^m \beta_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i \quad ,$$

dan is dus

$$\alpha_i = \Sigma_{j=1}^m \beta_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \ . \tag{3.1}$$

Twee geparametriseerde C^α-krommen k en k': $t \longrightarrow X$ met beginpunt $p \in U$, in de C^α-m-variëteit X heten C^β-equivalent in p, $\beta \leq \alpha$, indien voor elke C^β-functie op $U \subset X$ geldt

$$\frac{d^\beta(\varphi k)}{dt^\beta} = \frac{d^\beta(\varphi k')}{dt^\beta} \ .$$

Een equivalentieklasse van een kromme in het punt p heet een β-de orde kiem van de kromme. Voor $\beta=1$ heet het ook een contravariante vector. Elke kromme die "hoort tot" een gegeven contravariante vector in p, bepaalt een en dezelfde lineaire functie op T^* en op deze wijze kan elke lineaire functie op T^* uit precies één contravariante vector verkregen worden. De contravariante vectoren in p vormen dus de duale vectorruimte van T^*, die we aanduiden met T. De coordinaten van de contravariante vector die gegeven wordt door een kromme $k{:}t \rightarrow X$, t.o.v. $(U;x_1,\ldots x_m)$ worden gedefinieerd als

$$\frac{d(x_1 k)}{dt}, \ldots \frac{d(x_m k)}{dt}$$

of kort geschreven $\left\{ \frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dx_m}{dt} \right\} = (\alpha^1, \ldots \alpha^m)$.

Bij gebruik van coordinaten is de waarde van de differentiaal met coordinaten $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ op de contravector met coordinaten $\beta^1, \ldots \beta^m$ gelijk aan $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta^i$, kort geschreven volgens Einstein-conventie $\alpha_i \beta^i$.

Een C^α-afbeelding $f:X \to Y$ beeldt een C^β-equivalentieklasse van krommen in een punt $p \in X$ af in één C^β-equivalentieklasse van krommen in $f(p)$, en een C^β-equivalentieklasse van C^β-functies in $f(p)$ in één C^β-equivalentieklasse van C^β-functies in p. <u>De C^α-afbeelding</u> $f:X \to Y$ <u>induceert dus op natuurlijke wijze een covariante afbeelding van de β-de orde differentialen, en een contravariante afbeelding van de β-de orde kiemen van krommen</u>. In de punten $p \in X$ en $f(p) \in Y$ zijn deze afbeeldingen <u>homomorfismen</u> van $T(p)$ in $T(f(p))$, en van $T^*(f(p))$ in $T^*(p)$, duaal t.o.v. elkaar, zodat ze dezelfde rang (= dimensie beeldruimte) hebben. Is deze rang gelijk aan dim $T(p)$=dim $T^*(p)$, dan is het eerste homomorfisme een isomorfisme-in en het tweede een homomorfisme-op. Geldt dit voor elk punt $p \in X$, dan heet de afbeelding f een <u>immersie</u>. Hij is dan lokaal topologisch.

Is $f:X \to Y$ een topologische C^α-immersie van X in Y, dan heet f(X) een C^α-<u>deelvariëteit</u> van Y. f heet nu een C^α-<u>inbedding</u>. De identieke afbeelding van f(X) in Y is ook een C^α-inbedding.

Een <u>tensor</u> in p is een multilineaire functie op een gedurig direct product van vectorruimten T^* en T, bijv. op $T^* \times T^* \times T$. Contravariante ($\in T$) en covariante vectoren ($\in T^*$) zijn voorbeelden. Zijn $\alpha_i, \beta_j, \gamma^k$ $i,j,k=1,\ldots m$ coordinaten van vectoren t.o.v. $(U;x_1,\ldots x_m)$ en is

$$\sum \eta^{ij}{}_k \alpha_i \beta_j \gamma^k$$

een lineaire functie in α_i, β_j en γ^k, dus een tensor, dan heten de getallen $\eta^{ij}{}_k$ de coordinaten van die tensor t.o.v. $(U;x_1,\ldots x_m)$.

<u>Stelling</u>. <u>De covariante vectoren op een C^α-ruimte X vormen een $C^{\alpha-1}$-ruimte</u> ($\infty-1=\infty$; $\omega-1=\omega$).

Dit volgt direct uit de transformatieformules voor coordinaten $(x_1,\dots x_m;\alpha_1,\dots\alpha_m)$ en $(y_1,\dots y_m;\beta_1,\dots\beta_m)$:

$$y_j = y_j(x_1,\dots x_m) \quad C^{\alpha}\text{-functies voor } j=1,\dots m$$

en formule (3.1) met

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad C^{\alpha-1}\text{-functies voor } i,j=1,\dots m .$$

De ruimte der covariante-vectoren op X is een vezelruimte met basis X en met vezels $T^*(p), p \in X$ en de lineaire groep als groep. Een dwarsснee daarin die een C^{β}-deelvarieteit is en geen contravector met enige vezel gemeen heeft, heet een C^{β}-differentiaalvorm of covectorveld. Uiteraard is $\beta \leq \alpha - 1$.

Het analoge kan men doen voor andere soorten tensoren. Een veld van tensoren die in elk punt antisymmetrische multilineaire functies op $T\times T\times\dots\times T$ (r factoren) zijn heet een r-differentiaal-vorm of r-vorm. Zijn in een punt van de C^{α}-m-variëteit X, $\omega_1,\dots\omega_r$ 1-differentialen dan is het uitproduct $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_r$ per definitie de antisymmetrische multilineaire functie in $t_1,\dots t_r \in T$ gegeven door

$$\frac{1}{r!}\det\{\omega_i(t_j)\}.$$

Merk op dat $\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_r$ antisymmetrisch is in zijn uitfactoren bijv. $\omega_1\wedge\omega_2=-\omega_2\wedge\omega_1$ en $\omega_1\wedge\omega_1=-\omega_1\wedge\omega_1=0$. De m-vormen in een punt van X vormen een 1-dimensionale vectorruimte. Twee m-vormen $\phi\neq 0$ en $\psi\neq 0$ heten orientatie-equivalent in een omgeving van X indien $\phi=\lambda\psi$, $\lambda>0$. Een equivalentieklasse heet (ook globaal eventueel) een <u>orientatie</u> op X. Zijn $x_1,\dots x_m$ lokale coordinaten dan hebben $dx_1\wedge\dots\wedge dx_m$ en $dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3\dots dx_m$ tegengestelde orientatie.

Wij zullen in het bizonder ook te maken krijgen met tensoren die in elk punt van X symmetrische bilineaire functies op $T\times T$ zijn.

<u>Probleem.</u> Elke C^{α}-variëteit bepaalt op natuurlijke wijze een C^{β}-variëteit voor $\beta\leq\alpha$. Kan een C^{β}-variëteit altijd zo uit een C^{α}-variëteit verkregen worden?

4. <u>Differentiaalmeetkunde in euclidische ruimten.</u>

Een euclidische vectorruimte E is een reële vectorruimte, waarvan we de vectoren door p,q,... voorstellen, met een positief definiete kwadratische functie, voorgesteld door $pp, p \in E$, welke eenduidig een symmetrische bilineaire functie $pq=qp$, genaamd inproduct, bepaalt. De vectoren in E corresponderen 1-1 met punten van een euclidische ruimte met afstand tussen p en q gelijk aan $\sqrt{(p-q)^2}$, of in uitverkoren coordinaten $y_1, \ldots y_N$

$$\sqrt{\Sigma_{i=1}^{N} \{ y_i(p) - y_i(q) \}^2}.$$

De coordinaten $y_1, \ldots y_N$ bepalen een C^{ω}-N-structuur in E.

De definitie van β-de orde differentiaal van een C^{β}-functie op X kan ook toegepast worden indien men als functiewaarden elementen van een reële vectorruimte zoals E neemt. Zo een functie zal daarbij C^{β} heten indien de samenstelling van deze functie $X \to E$ en elke C^{β}-functie $E \to R$ een reële C^{β}-functie $X \to R$ is.

Schrijven we p voor de identieke afbeelding van E op E of van een C^{α}-deelvarieteit van E in E, dan is dp zo een differentiaal, die voor de contravariante vector gegeven door de kromme $t \to E$ in het betreffende punt als waarde de vector $\frac{dp}{dt}$ aanneemt. Zijn $x_1, \ldots x_m$ coordinaten op een C^{α}-deelvarieteit X in E dan is

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial p}{\partial x_m} dx_m .$$

Een basis voor de waarden van dp op X wordt dus gevormd door de m vectoren $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots m$.

Het inproduct $dp\, dp = (dp)^2$ is in elk punt een <u>kwadratische positief definiete functie op de vectorruimte der contravariante vectoren</u> aldaar. Uitgeschreven in de coordinaten $x_1, \ldots x_m$ voor X is hij

$$(dp)^2 = \left(\Sigma \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i\right)^2 = \Sigma \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} dx_i\, dx_j .$$

$(dp)^2$ heet het boogelement in E. De lengte van een C^1-kromme $t \to E$ wordt hiermee gedefinieerd door de formule

$$s = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \sqrt{(dp)^2} .$$

Opgevat als functie van t_1 heet het een booglengte langs de kromme. Men schrijft ook $ds = \sqrt{(dp)^2}$, $ds^2 = (dp)^2$.

De definitie van lengte is zó dat de afstand van twee punten in E gelijk is aan de lengte van het rechte verbindingslijnstuk.

Definitie: Een C^α-varieteit met een $C^{\alpha-1}$-tensorveld, in elk punt symmetrische functie op $T \times T$, die een positief definiete kwadratische functie ds^2 op de contravariante vectoren (T) bepaalt, heet een C^α-Riemannse ruimte ($\alpha \geq 1$). De lengte van een C^α-kromme is $\int ds$.

Probleem: Op welke C^α-varieteiten bestaat een C^α-Riemannse ruimte (men zegt ook metriek) zie § 5.

Uit het bovenstaande volgt direct dat elke C^α-deelvarieteit van E een C^α-Riemannse ruimte is met $ds^2 = dp\,dp$. Zijn X en Y C^α-Riemannse ruimten met metriek ${ds_x}^2$ en ${ds_y}^2$ en bestaat een C^α-inbedding-op, $f: X \to Y$, zó dat het covariante beeld van ${ds_y}^2$ juist ${ds_x}^2$ is, dan heet f een C^α-isometrische inbedding en X en Y heten isometrisch.

Probleem: Wanneer bestaat een C^α-isometrische inbedding van een C^α-Riemannse m-ruimte in E^N? Wij zullen later misschien dit probleem aanroeren.

De formules van Frenet in E^4.

Stel $s \to p(s) \in E$ is een C^∞-kromme met de booglengte s als parameter. Stel de vectoren $\frac{d^\beta p}{ds}$ $\beta = 1,2,3$ zijn onafhankelijk. Kies (voor elk punt p(s)) een basis van onderling loodrechte eenheidsvectoren, $b_1, \ldots b_4$ zó dat $b_i, i \leq k$, dezelfde ruimte opspannen als $\frac{d^i p}{ds^p}$, $i \leq k$, voor $k=1,2,3$ en zó dat b_i continue functie van s is. Wegens $b_i b_j$ = constant volgt

$$\frac{d}{ds}(b_i b_j) = \frac{db_i}{ds} b_j + b_i \frac{db_j}{ds} = 0$$

en daarmee volgt het bestaan van ρ_1, ρ_2, ρ_3 met

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{ds} = b_1 \qquad \frac{db_1}{ds} &= \qquad\;\; \rho_1 b_2 \\
\frac{db_2}{ds} &= -\rho_1 b_1 \qquad + \rho_2 b_3 \\
\frac{db_3}{ds} &= \qquad\quad -\rho_2 b_2 \qquad + \rho_3 b_4 \\
\frac{db_4}{ds} &= \qquad\qquad\qquad -\rho_3 b_4
\end{aligned}$$

ρ_i heet i-de kromming van de kromme.

Men kan bewijzen dat wanneer de C^{∞}-functies $\rho_1(s)\,\rho_2(s)\,\rho_3(s)$ gegeven zijn dat dan een kromme in E^4 bestaat waarvoor de krommingen juist deze functies van de booglengte zijn. Is $\rho_3(s)=0$ dan ligt de kromme in een E^3.

<u>Stelling [4.1]</u> $p(s)$ zij een kromme in E^4 met krommingen $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ en ρ_3. De 3-varieteit met parametervoorstelling

$$q(s,u,v) = p+ub_1+vb_2 \ , \ v>0$$

is lokaal isometrisch met E^3. ("Ontwikkelbaar"; Analoog in andere dimensies).

<u>Bewijs</u>: $dq=dp+b_1du+u\,db_1+b_2dv+v\,d\,b_2=b_1(ds-v\rho_1ds+du)+$

$$+b_2(u\,\rho_1ds+dv)+b_3(v\rho_2ds).$$

Merk op, dat de waarden van dq voor een constante waarde van s, een driedimensionale deelruimte opspannen ("constant raak-E^3").

$$(dq)^2 = \{(1-v\,\rho_1)ds + du\}^2 + (u\,\rho_1ds+dv)^2+(v\,\rho_2ds)^2.$$

Deze uitdrukking is voor $v\neq 0$ een positief definiete kwadratische functie in ds, du en dv met coëfficienten die alleen van ρ_1 en ρ_2 en niet van ρ_3 afhangen. Men zou dus hetzelfde gevonden hebben voor een kromme met krommingen $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ en 0. In dit geval ligt de kromme in E^3 en s, u en v zijn lokale coordinaten voor een deel van E^3. Hieruit volgt het gestelde.

N.B. door $\rho_3(s)$ continu over te laten gaan in de functie 0 kan men zelfs de gegeven variëteit continu verbuigen tot hij vlak is.

Het beeld van een cirkel onder een C^{α}-inbedding heet een <u>gesloten C^{α}-kromme.</u>

$p=p(s)$ zij een vlakke gesloten C^2-kromme met booglengte s. Dan is

$$0 = \oint \frac{d}{ds}\left[p\,\frac{dp}{ds}\right]ds = \oint \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 ds + \oint p\,\frac{d^2p}{ds^2}\,ds$$

$$= \oint ds + \oint \rho\,p\,b_1\,ds \ .$$

Dus

<u>Stelling</u> [4.2] $\oint \rho(-p\,b_1)ds$ = omtrek vlakke gesloten C^2-kromme.

Hierin is $|pb_1|$ de afstand van (vector) 0 tot de raaklijn in het punt s, en ρ de kromming in s.

N.B. Is 0 een punt waardoor geen enkele of hoogstens één raaklijn aan de gesloten C^2-kromme gaat, dan is $\oint |\rho|\,.\,|pb_1|ds$ = omtrek.

Is O een punt niet op de kromme, waardoor wel raaklijnen gaan, dan is

$$\oint |\rho| \cdot |pb_1|\, ds > \text{omtrek}$$

(verg. Hsiung, C.C. Some integral formulas for closed hypersurfaces. Math.Scandinavica 2 (1954), 286-294).

Krommen op een C^α-(N-1)-deelvariëteit van E^N.

Stel p variabel in de C^α-(N-1)-variëteit $X \subset E^N$. De differentiaal dp neemt dan waarden in een punt van X aan die vectoren van een N-1-dimensionale vectorruimte zijn. Stel n is een eenheidsvector (normaal) in E^N loodrecht daarop, en continu variërend met p. Dan is het in-product dp.n=0, en nu volgt de belangrijke formule van Meusnier

[4.3] $\boxed{d(dp.n) = d^2p.n + dp.dn = 0}$ (d is gewone differentiatie).

Wij concentreren de aandacht op een vast punt p van $X \subset E$ met de raakruimte T t.o.v. X.

dp dp, die de metriek bepaalt, is een kwadratische functie op T en heet de eerste fundamentaalvorm in $p \in X \subset E$.

dp dn is ook een kwadratische functie op T en heet de tweede fundamentaalvorm.

Is p(s) een kromme met booglengte s in X dan is

$$\frac{d^2p}{ds^2} = \rho b_1 \text{ de krommingsvector, } \frac{d^2p}{ds^2} \cdot n = \rho b_1 n$$

$= \rho \cos(\text{hoek } b_1 \text{ en } n)$ de normale kromming ρ_n en

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2p}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2p}{ds^2} \cdot n\right)^2\right\}} = \sqrt{\rho^2 - \rho_n^2} = \rho_g \text{ de geodetische kromming}$$

van de kromme in X.

Voor een kromme op een C^α-m-deelvariëteit X is ρ_g (algemener) de lengte van de orthogonale component van $\frac{d^2p}{ds^2}$ op de euclidische m-deelruimte van E die door het betreffende punt van X gaat en daar dezelfde contravariante raakruimte heeft. Voor m=1 is steeds $\rho_g=0$.

Uit [4.3] volgt dat de normale kromming

$$\frac{d^2p}{ds^2} .n = - \frac{dp\ dn}{dp\ dp}$$

uitsluitend door de raakvector $\frac{dp}{ds}$ reeds is bepaald.

De eigenwaarden van dp dn t.o.v. dp dp heten de <u>hoofdkrommingen</u> k_i $i=1,\dots N-1$ van $X \subset E$; de eigenvectoren geven de <u>hoofdrichtingen</u>. Kiest men als coordinaten in T de vectoren in T^* die een cobasis vormen van N-1 eenheidseigenvectoren in T, zeg ω_i $i=1,\dots N-1$, dan is

$$\rho_n = -\frac{\Sigma\, k_i \omega_i^2}{\Sigma\, \omega_i^2} \quad \text{vergelijking van Euler.}$$

<u>Stelling</u> [4.4] <u>Fenchel</u>: Voor een gesloten C^2-kromme p(s) in E^3 is $\oint |\rho|\, ds \geq 2\pi$; $\oint |\rho| ds = 2\pi$ houdt in dat de kromme vlak en convex is. <u>Fary-Milnor</u>: $\oint |\rho|\, ds \leq 4\pi$ houdt in dat de kromme in E^3 een triviale knoop is (men zegt: "geen knoop heeft").
(Veralgemeend door <u>Chern-Lashof</u>. Am. Journal of Math.LXXIX 306-318 (1957).
<u>Bewijs</u>: De loodrechte contravariante eenheidsvectoren in de punten van p(s) vormen een C^1-2-variëteit (abstract; ligt niet in E^3) N, die een C^1-2-torus is met C^1-coordinaten s en χ waarbij χ een hoekmaat voor elke keuze s=constant zij.

De eenheidsvectoren $\in N$ worden nu in E^3 alle evenwijdig verplaatst naar het punt O in de euclidische vectorruimte E^3 en de beelden worden op natuurlijke wijze voorgesteld door punten van de 2-sfeer S met vergelijking $p^2=1$. Zo ontstaat de C^1-afbeelding

$$h : N \longrightarrow S \quad .$$

Zijn u,v lokale coordinaten op S, dan is de oppervlakte van een open stuk G in S een integraal van de soort

$$\int_G |\alpha(u,v)\, du \wedge dv| \quad .$$

Is H een open deel van N dan beslaat f(H) een stuk oppervlak van S gelijk aan (meervoudige bedekking ook meervoudig gerekend)

$$\int_H |\gamma(s,\chi) ds \wedge d\chi|$$

indien $\gamma(s,\chi)$ gedefiniëerd is door de eis dat $\gamma(s,\chi) ds \wedge d\chi$ het beeld van $\alpha(u,v) du \wedge dv$ is onder de afbeelding $h: N \rightarrow S$.
Voor een stuk cirkelboog $s_1 < s < s_2$ op p(s), beschrijft $h(b_1(s))$ een stuk grote cirkel op S met lengte $\int_{s_1}^{s_2} |\rho|\, ds = \varphi$, en dus is

$$\int_{s_1}^{s_2} |\gamma(s,\chi)\,ds \wedge d\chi| = \frac{\varphi}{\pi} \cdot 4\pi = 4\varphi = \int_{s_1}^{s_2} 4|\rho|\,ds.$$

In dit geval is $\int_{\chi=0}^{2\pi} |\gamma(s,\chi)\,d\chi = 4|\rho|$.

Maar dan geldt het algemeen want linker en rechterlid zijn bepaald door p, $\frac{dp}{ds}$ en $\frac{d^2p}{ds^2}$ en door elk punt van p(s) kan men een cirkel of rechte bepalen die dit met p(s) gemeen heeft.

Wij concluderen dat h(N) op S een oppervlakte

$$4\oint |\rho|\,ds$$

beslaat.

Beschouwen wij thans een willekeurig punt q op S. De functie op de kromme p(s) die de afstand is van het punt p(s) tot een vlak dat loodrecht staat op q en de kromme niet snijdt is een C^2-functie z(s) die minstens één maximum en minstens één minimum heeft. In de bijbehorende punten op de kromme heeft q de richting van een normaal. Elk punt q op S wordt dus door h(N) minstens tweemaal bedekt en

$$4\oint|\rho|\,ds \geq 2.4\pi = 8\pi$$
$$\oint|\rho|\,ds \geq 2\pi.$$

Liggen de drie vectoren $h(b_1(s_1))$, $h(b_1(s_2))$ en $h(b_1(s_3))$ niet op een grote cirkel op S en zou men in elk van de 8 open delen waarin S verdeeld wordt door de grote cirkels loodrecht op die vectoren, een omgeving kiezen en aannemen dat geen van deze meer dan één keer door h(N) bedekt zou worden, dan kreeg men een contradictie uit continuïteitsoverwegingen. In het genoemde geval is dus

$$\oint|\rho|\,ds > 2\pi.$$

$\oint |\rho|\,ds = 2\pi$ kan dus alleen voorkomen indien de kromme vlak is. In dit geval kiezen we in het vlak van de kromme twee loodrechte eenheidsvectoren e_1 en e_2 en stellen

$$\frac{dp}{ds} = \cos\varphi \,.e_1 + \sin\varphi \,.e_2 .$$

Dan is $\rho = \frac{d\varphi}{ds}$ en $\oint \rho\,ds = \oint \frac{d\varphi}{ds}\,ds = \oint d\varphi = 2\pi$ of -2π.
We kiezen de oriëntatie van e_1 en e_2 achteraf nog zo dat

$$\oint \rho\,ds = 2\pi.$$

Nu is $\oint |\rho|\, ds = \oint \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| ds = 2\pi = \oint \frac{d\varphi}{ds}\, ds$
dan en slechts dan, indien in elk punt van de kromme

$$\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \frac{d\varphi}{ds} \text{ dus } \frac{d\varphi}{ds} \geq 0$$

hetgeen convexiteit inhoudt.

Is $\oint |\rho|\, ds < 4\pi$, dan bestaat een vector $q \in S$ met een omgeving van q in S, waarvan elk punt door $h(N)$ minder dan 4 keer getroffen wordt. Noem q <u>vertikaal</u> en de eerder genoemde functie z <u>hoogte</u>. De hoogte heeft één (relatief) maximum zeg in $p(s_2)$ en één (relatief) minimum zeg in $p(s_1)$, $0 < s_2 - s_1 <$ omtrek. De volgende homeomorfe afbeelding van E^3 op zich beeldt de gegeven kromme op een gesloten vlakke kromme af. De existentie van die afbeelding is per definitie het triviaal zijn van de knoop.
Het homeomorfisme:

voor $z \geq z\, p(s_2)$ de identiteit;
voor $z\, p(s_1) < z = z\, p(s) < z\, p(s_2)$, $s_1 < s < s_2$

de beweging in dit vlak die het midden van <u>de</u> koorde in dit vlak vertikaal onder $p(s_2)$ brengt, en de richting van de koorde vanuit $p(s)$ beginnend, gelijk maakt aan de richting van $\frac{dp}{ds}$ in $p(s_2)$;

voor $z = z\, p(s_1)$ continu aansluitend bij het vorige;
voor $z < z\, p(s_1)$ dezelfde beweging als in $z = z\, p(s_1)$.

Wij geven het bewijs voor geval $\oint |\rho|\, ds = 4\pi$ niet.

<u>Correctie</u>. p.14 regel 14-9 v.o. moet zijn:

Is de kromme niet vlak dan is max $z >$ min z, hoe de eenheidsvector q ook gekozen is. Wij kiezen $q=b_3(s_0)$, waarbij s_0 een punt zij met torsie ongelijk nul. Stel max z en min z worden respectievelijk bereikt voor $s=s_1$ en $s=s_2$. Er zijn dan disjuncte omgevingen $I(s_1)$ en $I(s_2)$ op de kromme met langs de kromme gemeten afstand $r > 0$, en een omgeving $U(q)$ van q op S, zó dat $h\{N \cap [s \in I(s_1)]\}$ zowel als $h\{N \cap [s \in I(s_2)]\}$ elk punt van $U(q)$ minstens éénmaal dekken. Voor voldoend kleine positieve $k < \frac{1}{3} r$ zijn $h\ b_1(s_0-k)$, $h\ b_1(s_0)$ en $h\ b_1(s_0+k)$ niet lineair afhankelijk, en dus vormen de drie grote cirkels van S loodrecht op deze richtingen onder meer een klein boldriehoekje, dat voor $k \to 0$ het punt $q = b_3(s_0)$ tot limiet heeft en dus voor k voldoende klein bevat is in $U(q) = U(b_3(s_0))$. Dit open driehoekje wordt door $h\{N \cap [s_0-k \leq s \leq s_0+k]\}$ reeds twee keer bedekt en aangezien $s_0-k \leq s \leq s_0+k$ geen punten gemeen heeft met $I(s_1)$, èn tevens met $I(s_2)$ omdat $k < \frac{1}{3} r$, wordt dit driehoekje in totaal minstens drie keer bedekt door $h(N)$. Dan beslaat $h(N)$ op S een oppervlakte $> 8\pi$ en

$$\oint |\rho| ds > 2\pi .$$

5. De existentie van een C^{α}-Riemannse metriek op een C^{α}-variëteit $\alpha \geq 1$.

Stelling: Op een C^{α}-n-variëteit bestaat voor $1 \leq \alpha \leq \infty$ een C^{α}-Riemannse metriek.

[N.B. Volgens C.B. Morrey Jr bestaat ook op een compacte C^{ω}-n-variëteit een C^{ω}-Riemannse metriek, maar zijn bewijs is nog niet in detail gepubliceerd. (Notices Am.Math.Soc.5 no 1 februari 1958, p.73)] .

We zullen drie wezenlijk verschillende bewijzen van de stelling geven.

Eerste bewijs (Bochner S. (?))

In de topologie wordt bewezen dat bij X,een C^{α}-n-variëteit ($\alpha \geq 1$) volgens onze definitie, een stelsel (open) C^{α}-coördinatenstelsels $(U_{\beta}\ ;\ x_{\beta 1},\ldots x_{\beta n})$ met begrensde beelden in R^n en open omgevingen V_{β} met $\overline{V}_{\beta} \subset U_{\beta}$ bestaan $\beta \in I$, zó dat X de vereniging van alle V_{β} is, en zó dat elk punt in X een omgeving heeft die hoogstens eindig vele der U_{β} ontmoet.

Wij beschouwen een $\beta \in I$ en het homeomorfe beeld van U_{β} en V_{β} in R^n. Stel de afstand van het beeld van de rand van U_{β} tot het beeld van de rand van V_{β} is r. Kies een verdeling van R^n in hyperkubi met zijden gelijk aan $r/(5\sqrt{n})$. Bij zo een kubus

$$p_i < x_i < q_i = p + r/5\sqrt{n} \qquad i=1,\ldots,n$$

beschouwen we de C^{∞}-functie op R^n:

$$(5.1) \qquad \prod_{i=1}^{n} f(x_i - p_i) \,.\, f(q_i - x_i)$$

met f gedefinieerd als op pagina 1.

De som van alle aldus verkregen C^{∞}-functies bij al die hyperkubi welke met hun rand geheel bevat zijn in het beeld van U_{β} in R^n, geeft een C^{∞}-functie op R^n en door middel van het coordinatenstelsel een C^{α}-functie op U_{β} . Deze kan C^{α}-voortgezet worden over de gehele ruimte X, namelijk door de functiewaarde elders nul te kiezen. Zo ontstaat de functie ψ_{β} die positief is op V_{β} en niet-negatief op X.

Het product van ψ_{β} met de kwadratische vorm $\sum_{i=1}^{n}(dx_{\beta i})^2$ op U_{β} en met de kwadratische vorm 0 elders, is een globale (op X) overal niet-negatieve kwadratische vorm, die we kort voorstellen door

$$\psi_\beta \cdot \sum_{i=1}^n (dx_{\beta i})^2 \qquad \psi_\beta \in C^\alpha$$

en die positief definiet is op V_β.

Een C^α-metriek op X wordt nu gegeven door

$$ds^2 = \sum_{\beta \in I} \cdot \left\{ \psi_\beta \cdot \sum_{i=1}^n (dx_{\beta i})^2 \right\} . \tag{5.2}$$

(Opm.: Het symbool $x_{\beta i}$ is gebruikt voor (a) het i-de getal in een rij getallen in R^n,(b) een lokale functie op X n.l. in de omgeving U_β).

N.B. De C^α-functies $\qquad \chi_\beta = \dfrac{\psi_\beta}{\sum_{\beta \in I} \psi_\beta}$

op X die niet-negatief zijn, hebben de volgende eigenschappen

$$\chi_\beta = 0 \text{ buiten } U_\alpha \; ; \quad \chi_\beta > 0 \text{ in } V_\beta \; ; \sum_\beta \chi_\beta = 1 .$$

Het stelsel functies heet een <u>C^α-partitie van de functie 1 op X.</u>

<u>Tweede Bewijs.</u> <u>Whitney H.</u> (Geometric integration theory, Princeton 1957). Wij geven dit bewijs alleen voor compacte X.

Een bewijs is geleverd indien we een C^α-inbedding f van de gegeven C^α-n-variëteit in enige euclidische ruimte kunnen aangeven. Want dan neme men het duale beeld van de euclidische metriek $ds^2 = f^* \circ (ds_E)^2$.

Stel χ_β, U_β, V_β, $x_{\beta i}$ zijn als boven met $\beta = 1,\ldots \nu$ (ν eindig wegens de compactheid van X). Een C^α-inbedding f van X in $R^{\nu(n+1)} = E^{\nu(n+1)}$ wordt gegeven door de $\nu(n+1)$ functies in $p \in X$:

$$f_{o\beta}(p) = \chi_\beta(p), \quad f_{i\beta}(p) = \chi_\beta(p) \cdot x_i(p) . \tag{5.3}$$

Dat f C^α is, is duidelijk.

De punten van $f(V_\beta)$ worden C^α-afgebeeld op V_β door

$$x_i = f_{i\beta}/f_{o\beta}$$

waaruit volgt dat f lokaal een inverse heeft en een immersie is.

Stel $W_\beta = \{p \mid \chi_\beta(p) \neq 0\}$. Nu is $V_\beta \subset W_\beta \subset U_\beta$.

Zijn $p,q \in W_\beta$, $q \neq p$, dan is $f_{i\beta}(p)/f_{o\beta}(p) \neq f_{i\beta}(q)/f_{o\beta}(q)$, dus $f(p) \neq f(q)$.

Is $p \in W_\beta$, $q \notin W_\beta$, dan is $f_{o\beta}(p) \neq 0 = f_{o\beta}(q)$, dus $f(p) \neq f(q)$.

Dan is de immersie topologisch, dus een inbedding.

<u>Derde bewijs.</u> <u>Steenrod N.</u> The topology of fibre bundles, Princeton 1951.

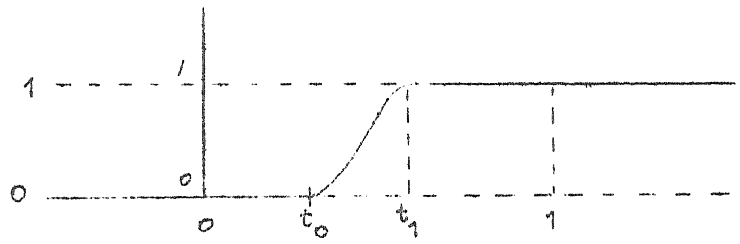
Beschouw een C^α-triangulatie K van de C^α-n-variëteit X met simplices in coordinaten-omgevingen. Stel een Riemannse metriek is reeds gegeven op $U(K^r)$, een omgeving van het r-dimensionale skelet (dat bestaat uit alle simplices van dimensie $\leq r$). Wij moeten (nodig en voldoende) laten zien dat er onder die omstandigheden steeds <u>geen</u> <u>hindernis</u> is tegen de constructie van een C^α-metriek op een omgeving $U(K^{r+1})$ van K^{r+1}. De constructie verloopt simplex-gewijs.

Voor $r=-1$ kiezen we disjuncte coordinaten omgevingen van de punten in K^0 en nemen daarop C^α-metrieken naar willekeur.

Voor $r > -1$ beschouwen we een voorstelling van een "op te vullen" r+1-dimensionaal simplex als simplex met zwaartepunt O in een euclidische vectorruimte en met op de rand vectoren die we door r voorstellen. tr doorloopt voor $0 \leq t \leq 1$ het gehele beeld van het simplex. Wij kiezen $0 < t_0 < t_1 < 1$ zó dat in het simplex de metriek gedefiniëerd is in alle punten tr met $t_0 \leq t \leq 1$. Voor $t_1 < t \leq 1$ blijft hij ongewijzigd.

Stel $$\gamma(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} f(t-t_0).f(t_1-t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0).f(t_1-t)dt}\,,$$ f als op pag.1.

$\gamma(t)$:



Stel ds_1^2 is de reeds bekende metriek voor $t_0 \leq t \leq 1$, en 0 voor $0 \leq t < t_0$.

Stel ds_2^2 is een willekeurig te kiezen metriek voor $0 \leq t \leq 1$.

Dan is

$$ds^2 = \gamma(t) \, . \, ds_1^{\,2} + \left\{1 - \gamma(t)\right\} . \, ds_2^{\,2}$$

een C^α-metriek op het gehele simplex die voor $t_1 < t \leqslant 1$ identiek is met die in het vorige stadium.

6. Differentiaalvormen en de totale kromming op een oppervlak.

Op pag.8 definieerden we de r-differentiaalvormen en het uit-product van 1-vormen op een C^α-m-variëteit X.

Lemma. Zijn $x_1, \dots x_m$ en $y_1, \dots y_m$ locale coordinaten voor een omgeving van X, en is $\omega = \sum a_i dx_i = \sum b_j dy_j$ een 1-vorm met coëfficiënten in R of in een reële vectorruimte, dan is

$$\sum da_i \wedge dx_i = \sum db_j \wedge dy_j \; .$$

Deze 2-vorm (die van de keuze der coördinaten onafhankelijk is) heet de uit-afgeleide van ω, en wordt aangeduid met $d\omega$.

Bewijs:

$$\sum da_i \wedge dx_i = \sum d\Big(b_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) \wedge dx_i = \sum db_j \wedge \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i = \sum db_j \wedge dy_j ,$$

aangezien $\sum_i d \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \wedge dx_i = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} dx_k \wedge dx_i = 0$.

Opmerking:

$$d\omega = d\Big(\sum a_i dx_i\Big) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\Big) dx_i \wedge dx_j .$$

Lemma (bekend) $d\omega = 0$ dan en alleen dan wanneer (locaal) een functie f bestaat, zó dat $\omega = df$. Er geldt dus identiek

$$d(df) = 0 \qquad\qquad d = \text{uit-afgeleide.}$$

Stelling van Stokes (bekend). Is ω een 1-vorm op een georiënteerde C^2-2-variëteit W met stukgewijs C^2-rand ∂W, dan is

$$\int_{\partial W} \omega = \int_W d\omega$$

De krommingsvorm Ω , verkregen op intrinsieke wijze.

X zij nu een georiënteerd C^{∞}-oppervlak met Riemannse metriek ds^2. Wij beschouwen de driedimensionale ruimte V van paren onderling loodrechte contravariante eenheidsvectoren e_1, e_2, met de eigenschap dat in elk punt p van X de volgorde e_1, e_2 past bij de oriëntatie aldaar. Dat wil zeggen dat locale coordinaten x_1, x_2 bestaan met de gegeven oriëntatie en met $dx_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ voor } i=j \\ 0 \text{ voor } i\neq j \end{cases}$.

Als locale coördinaten in V kan men nemen: twee coördinaten x_1, x_2 om p aan te duiden, alsmede een hoek φ (modulo 2π bepaald) bijvoorbeeld de hoek die de vector e_1 maakt met $\overset{\circ}{e}_1$ de raakvector in p met

$$dx_2(\overset{\circ}{e}_1) = 0 \text{ en } dx_1(\overset{\circ}{e}_1) > 0 .$$

De C^{∞}-afbeelding $p: V \rightarrow X$ van elk tweebeen op zijn oorsprong heet projectie. De tweebenen met eenzelfde projectie vormen een vezel van de zgn. vezelruimte V met basis X.

De differentialen in V zijn alle van de gedaante

$$\beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2 + \beta_3 d\varphi \ .$$

Wij definiëren nu een 1-differentiaalvorm in V namelijk door dit te doen voor elk punt $(p, e_1, e_2) \in V$. Bij zo een punt beschouwen we de projectie $p \in X$ en de vectoren e_1, e_2 aldaar. In X bestaat één covariante vector ω_1 met de waarden

$$\omega_1(e_1) = 1 \quad , \quad \omega_1(e_2) = 0.$$

Het duale beeld in V van deze covariante vector ω_1 in X, is de gewenste covariante vector in V, die we ook aanduiden met ω_1. De verzameling van al dergelijke vormen de 1-differentiaalvorm ω_1 op V, die uitsluitend en geheel bepaald is door de gegeven metriek ds^2 in X.

Op analoge wijze wordt ω_2 op V bepaald, zó dat op X

$$\omega_2(e_1) = 0 \qquad \omega_2(e_2) = 1 .$$

Zijn $\overset{\circ}{\omega}_1$ en $\overset{\circ}{\omega}_2$ zó dat $\overset{\circ}{\omega}_i(\overset{\circ}{e}_j) = \delta_{ij}$, en stellen we de duale beelden onder projectie van $\overset{\circ}{\omega}_1$ en $\overset{\circ}{\omega}_2$ door dezelfde symbolen voor, dan is in V:

$$(6.1)\qquad \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \cos\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_1 + \sin\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_2 \\ \omega_2 &= -\sin\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_1 + \cos\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_2 \end{aligned}}$$

Merk op dat $\omega_1 \wedge \omega_2 = \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2$.

Omdat $\overset{\circ}{\omega}_1$ en $\overset{\circ}{\omega}_2$ 1-vormen op X zijn, geldt hetzelfde voor de 2-vormen $d\overset{\circ}{\omega}_1$ en $d\overset{\circ}{\omega}_2$ en we mogen stellen

$$d\overset{\circ}{\omega}_1 = \lambda\, \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 \;,\quad d\overset{\circ}{\omega}_2 = \mu\, \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2$$

en in deze uitdrukkingen komt φ of $d\varphi$ niet voor.

Nu geldt

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\cos\varphi \wedge \overset{\circ}{\omega}_1 + d\sin\varphi \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 + \cos\varphi \,.\, \lambda\, \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 + \\ &\qquad + \sin\varphi \,.\, \mu\, \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 \\ &= d\varphi \wedge (-\sin\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_1 + \cos\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_2) + \cos\varphi \,.\, \lambda\, \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 + \\ &\qquad + \sin\varphi \,.\, \mu\, \overset{\circ}{\omega}_1 \wedge \overset{\circ}{\omega}_2 \end{aligned}$$

$$d\omega_1 = (-\sin\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_1 + \cos\varphi \,.\, \overset{\circ}{\omega}_2) \wedge (-d\varphi - \mu\, \overset{\circ}{\omega}_2 - \lambda\, \overset{\circ}{\omega}_1)$$

en analoog voor $d\omega_2$. Samengevat:

$$(6.2)\qquad \boxed{\begin{aligned} &d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21} \;,\quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ &-\omega_{12} = \omega_{21} = -d\varphi - \mu\, \overset{\circ}{\omega}_2 - \lambda\, \overset{\circ}{\omega}_1 \end{aligned}}$$

De differentiaalvorm ω_{12} is hierdoor in V eenduidig bepaald, zoals men eenvoudig kan bewijzen. ω_{12} is dus ook geheel bepaald door de gegeven metriek ds^2, en hetzelfde geldt voor

$$\begin{aligned} d\,\omega_{12} &= \Omega \\ &= d(-\mu\, \overset{\circ}{\omega}_2 - \lambda\, \overset{\circ}{\omega}_1) \;. \end{aligned}$$

In deze laatste uitdrukking en 2-vorm komt φ niet voor, en deze 2-vorm is dus een 2-vorm op X. Het is een veelvoud van

$\omega_1 \wedge \omega_2 = \bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2$, het "oppervlakte-element",

(6.3) $\boxed{d\,\omega_{12} = \Omega = -K\,\omega_1 \wedge \omega_2}$ 2-vorm op X

Ω heet de krommingsvorm op X. De reële functie K op X is een invariant van de metriek. Het is de totale kromming van Gauss, zoals we in de volgende paragraaf zullen zien.

De krommingsvorm Ω voor geval X ingebed is in E^3.

Wij beschouwen de ruimte D der georiënteerde driebenen (p,e_1,e_2,e_3) in een euclidische driedimensionale ruimte. p,e_1,e_2 en e_3 zijn vectoren in een euclidische vectorruimte. De differentiaalvormen met vectoren als waardengebied, dp,de_1,de_2 en de_3 kunnen in vectorcomponenten ontbonden worden.

$dp = \omega_A\, e_A$, $de_A = \omega_{AB}\, e_B$ (Einstein sommatie-conventie $A,B = 1,2$ en 3).

ω_A en ω_{AB} zijn reële differentiaalvormen op D. Er geldt

(6.4) $\begin{cases} 0 = d(dp) = \omega_A de_A + d\,\omega_A . e_A \;;\; d\,\omega_A = \omega_B \wedge \omega_{BA} \\ 0 = d(de_A) = -\omega_{AB}\, de_B + d\,\omega_{AB} . e_B \;;\; d\,\omega_{AB} = \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} \end{cases}$

Wij beperken nu p tot $p \in X$ en voorts tot driebenen waarvan e_1,e_2 raakvectoren aan X zijn met de bij X passende oriëntatie; $e_3 = n$. Op deze wijze wordt de in de vorige paragraaf genoemde vezelruimte V in D ingebed, terwijl ω_1, ω_2 en dus wegens (6.4) ook ω_{12} de aldaar genoemde betekenis krijgen bij beperking tot V. Dus is

(6.5) $\boxed{\Omega = -K\,\omega_1 \wedge \omega_2 = d\,\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}}$

Kies nu in een punt van X, e_1 en e_2 in de hoofdrichtingen van $X \subset E^3$. Dan is (zie pag.13)

$$dn = de_3 = \omega_{31}\, e_1 + \omega_{32}\, e_2$$
$$dp = \omega_1\, e_1 + \omega_2\, e_2$$
$$\frac{dp\ dn}{dp\ dp} = \frac{\omega_{31}\,\omega_1 + \omega_{32}\,\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{\kappa_1\,\omega_1^2 + \kappa_2\,\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}\ .$$

$$\omega_{31} = \kappa_1\,\omega_1\ ,\quad \omega_{32} = \kappa_2\,\omega_2$$

$$\Omega = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\kappa_1\kappa_2\,\omega_1 \wedge \omega_2$$

(6.6) $$\boxed{\kappa = \kappa_1\,\kappa_2}$$

De vorm Ω is het duale beeld van het oppervlakte-element op de eenheidssfeer onder de afbeelding $p \rightarrow e_3$ van $X \subset E^3$ op S^2. Men kan dit met behulp van het uitproduct van de vectoren in E_3 gecombineerd met het uitproduct der differentialen uitdrukken door ($n = e_3$):

$$dn \mathbin{\hat{\wedge}} dn = \kappa\ dp \mathbin{\hat{\wedge}} dp$$

of uitgeschreven

$$dn \mathbin{\hat{\wedge}} dn = (\kappa_1\,\omega_1 e_1 + \kappa_2\,\omega_2 e_2) \mathbin{\hat{\wedge}} (\kappa_1\,\omega_1 e_1 + \kappa_2\,\omega_2 e_2) =$$
$$2\,\kappa_1\kappa_2 (e_1 \wedge e_2)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \kappa\,(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \mathbin{\hat{\wedge}} (\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) =$$
$$= \kappa\ dp \mathbin{\hat{\wedge}} dp.$$

Het kan ook geschreven worden met een determinant waarbij de vermenigvuldiging der differentialen ook weer uitvermenigvuldiging is:

$$-\Omega = \det(dn, dn, n) = \kappa \det(dp, dp, n) = \kappa\ \omega_1 \wedge \omega_2\ .$$

Voor een oriënteerbaar gesloten oppervlak X is $\int \Omega$ (niet $\int |\Omega|$!) gelijk aan een geheel aantal keren het oppervlak van S^2, dus een geheel aantal keren 4π. Dit aantal is $\frac{1}{2}\chi$ met χ karakteristiek getal van Euler Poincaré, zoals wij nog zullen zien.

7. De stelling van Gauss-Bonnet-Euler-Poincaré.

Wij beschouwen het oriënteerbare gesloten oppervlak X met metriek ds^2. Wij kiezen een veld van eenheidsvectoren, op X, hoogstens uitgezonderd een eindig aantal punten (singulariteiten van het veld), doch elders met componenten die C^∞-functies der locale coordinaten zijn. Bovendien nemen we aan dat wanneer, in locale coordinaten, $(x,y)=(0,0)$ een singulariteit heeft, en het veld in de buurt daarvan is gegeven door $\varphi(x,y)$, dat dan $\lim_{t\to 0} \varphi(t\cos\psi\ ,\ t\sin\psi\ ) = \varphi(\psi)$ een differentieerbare functie van ψ is. De singulariteiten zijn dus niet al te lelijk. Wij vatten de eenheidsvectoren van het veld op als eerste benen van tweebenen, welke tweebenen een oppervlak $M \subset V$ leveren met een rand ∂M, die geheel bevat is in de vezels boven de singulariteiten in X. Nu geldt op elk stuk van de rand $\omega_1 = \omega_2 = 0$, dus

$$\omega_{12} = d\varphi \ .$$

Toepassingen van de stelling van Stokes geeft:

$$\int_X -K\ \omega_1\, \omega_2 = \int_X \Omega = \int_M \Omega = \int_M d\omega_{12} = \int_{\partial M} \omega_{12} = \int_{\partial M} d\varphi$$

$$= \sum_s \int_{\psi=0}^{-2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\, d\psi = \sum_s I_s \ .\ 2\pi \ .$$

I_s is een geheel getal de index van de singulariteit die aangeduid wordt met symbool s.

Stelling van Gauss-Bonnet-Euler-Poincaré:

$$(7.1) \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_V \Omega = \sum_s I_s = \chi}$$

Het karakteristieke getal van Euler-Poincaré χ is onafhankelijke van de (geschikte) keuze van de singulariteiten van het vectorveld wegens het linkerlid van (7.1).

χ is ook onafhankelijk van de metriek [1].

Bewijs: Kies een vectorveld en twee metrieken ds^2 en $d\bar{s}^2$ op het oppervlak V. Dan is ook

---

1) χ is zelfs een topologische invariant.

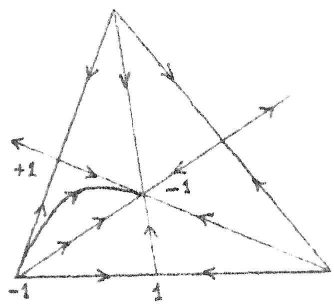
$$(1-\lambda)ds^2 + \lambda(d\bar{s})^2 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

een metriek op V.
Substitutie van deze metriek in (7.1) levert in het linkerlid een continue functie van λ dus ook in het rechterlid een continue functie van λ die echter slechts gehele waarden kan aannemen. Dan is hij constant en het gestelde volgt.

Een voorbeeld van een vectorveld krijgt men door bij een triangulatie in elk simplex een vectorveld te kiezen als in de figuur. Bij zo'n vectorveld leveren de hoekpunten de (middens van de) zijden en de (zwaartepunten) van de driehoeken in ΣI_s bijdragen gelijk aan -1, +1 en -1 respectievelijk, zó dat

$$\chi = \Sigma I_s = -H + Z - D$$

wanneer H, Z en D de aantallen hoekpunten, zijden en driehoeken van de triangulatie voorstellen. Men denke



aan de stelling van Euler uit de stereometrie. Voor bol en torus is $\chi = -2$ en 0 respectievelijk, hetgeen men op grond van het bovenstaande op vele manieren kan bewijzen. (Op de torus bestaat een singulariteitenvrij vectorveld dus $\chi = 0$; op de torus bestaat een euclidische metriek ($\kappa = 0$) dus $\chi = 0$; op de bol kieze men de gewone eenheidsbolmetriek $\neq \int \Omega =$ $\int -1.d\sigma = -4\pi$, dus: $\chi = -2$; op de bol kieze men N. en Z.pool en het veld van eenheidsvectoren gericht naar het Zuiden in elk punt. Daarmee blijkt $\chi = -1-1=-2$).

<u>Toepassingen.</u>[1]

Een éénparameterig (parameter=tijd) stel bewegingen van

---

1) H.Hopf, Lectures on differential geometry in the large. Mimeographed notes. Stanford University 1956.

een oppervlak met ds^2, in zich, bepaalt een snelheidsvectorveld, dat slechts geïsoleerde singulariteiten heeft (snelheid 0) Zo een singulariteit is een stationnair punt en daarom bestaat het vectorveld in de buurt van een singulariteit (op zeker moment t_o) uit raakvectoren aan concentrische cirkels. Zulke singulariteiten leveren een bijdrage $I=-1$. Daaruit volgt de

Stelling: Op een oriënteerbaar gesloten oppervlak X met Euler-Poincaré karakteristiek χ, en metriek ds^2 hoe ook gekozen, is éénparameterige beweging onmogelijk voor geval $\chi > 0$. Voor geval $\chi = 0$ (torus) is beweging soms mogelijk, maar er is geen enkel momentaan invariant punt. Voor geval $\chi = -2$(bol)is beweging soms mogelijk maar dan heeft die beweging twee momentaan invariante punten.

Men kan hieruit ook nog afleiden: Op een niet-oriënteerbaar oppervlak met ds^2 is één parameterige beweging hoogstens mogelijk indien het een projectief vlak is; en in geval er een beweging is, heeft die één momentaan invariant punt.

Analoge stellingen gelden voor conforme afbeeldingen (i.p.v. bewegingen) van X op zich.

(Bij een (compact) Riemanns oppervlak X van een complexe algebraïsche functie bestaat een invariant gedefiniëerde Riemannse metriek met constante kromming gelijk aan 1 indien X een S^2 is, gelijk aan 0 indien X een torus is, gelijk aan -1 in de andere gevallen. In die andere gevallen is geen infinitesimale beweging van het gevonden oppervlak X met metriek mogelijk.)

7. Isometrisch inbedden in euclidische ruimten.

Een C^γ -inbedding f van een C^α-n-variëteit X^n met Riemannse metriek ds^2_X in een euclidische ruimte E^{n+N} met metriek ds^2_E heet isometrisch respectievelijk kort indien

$$f^*(ds^2_E) = ds^2_X \text{ resp. } f^*(ds^2_E) \leq ds^2_X \quad .$$

De laatste ongelijkheid betekent dat $ds^2_X - f^*(ds^2_E)$ niet-negatief is.

De volgende vraag ligt nu voor de hand: Bestaat bij een gegeven X^n (inclusief ds^2_X) een euclidische ruimte E^{n+N} en een isometrische inbedding $f : X^n \to E^{n+N}$. Wat is de kleinste waarde van N waarvoor zo een inbedding bestaat?

Er zijn verschillende redenen waarom een isometrische inbedding onmogelijk kan zijn.

a) In de eerste plaats kan een inbedding op grond van topologische eigenschappen (dus onafhankelijk van de metriek) onmogelijk zijn voor geval $N < n$. Zo kan het reële projectieve vlak niet in E^3 worden ingebed.

b) In de tweede plaats kan een inbedding weliswaar topologisch mogelijk zijn, doch het kan zijn dat de C^1-structuur zich tegen C^1-inbedding verzet (onafhankelijk van de metriek). J. Milnor heeft n.l. op S^7 een C^∞-structuur geconstrueerd die geen C^1-inbedding in E^8 toelaat. Ann.of Math.64 (1956), p.399-405.

c) In de derde plaats kan een isometrische C^3-inbedding onmogelijk zijn voor geval $N < n-1$ op grond van locale isometrische eigenschappen. Voor $n=2$ is dit duidelijk. Een omgeving van de hyperbolische n-dimensionale ruimte kan bijvoorbeeld niet isometrisch C^3 in E^{2n-2} worden ingebed.

d) In de vierde plaats bestaan ruimten X^n met de eigenschap dat weliswaar X^n, C^3 ingebed kan worden in E^{n+N} en ook met de eigenschap dat elk punt van X wel een omgeving heeft die isometrisch C^3 in E^{n+N} kan worden afgebeeld, doch zo dat geen globale isometrische inbedding bestaat. Voorbeeld: de locaaleuclidische torus T met coördinaten φ en ψ (modulo 2π) en metriek $ds^2 = d\varphi^2 + d\psi^2$ kan niet C^3-isometrisch in E^3 worden ingebed (Tompkins,C.). Immers stel er was zo een inbedding $f : T \to E^3$. Is P een vast punt in E^3 en Q een punt variabel in f(T) dan bereikt de afstand PQ een maximum. Stel dit maximum wordt bereikt in R. Door op de bol met middelpunt P en straal PR te letten ziet men direct dat f(T) in het punt R hoofdkrommingen met hetzelfde teken en ongelijk nul heeft, zodat de totale kromming van f(T) in R positief is. Volgens het gegeven is hij nul, een tegenspraak.

Het begrip isometrische inbedding heeft ook nog zin, indien sprake is van inbeddingen van de differentiëerbaarheidsklasse 1. Daarbij kunnen essentieel nieuwe mogelijkheden optreden, omdat alle krommingseigenschappen verloren gaan. Zo gelden de onder c) en d) genoemde bezwaren niet voor C^1-inbed-

dingen. Hierop is het eerst de aandacht gevestigd door J. Nash.
Nash beschouwde ook C^2- en C^1-inbeddingen en gaf diverse opmerkelijke existentie-stellingen. Verdergaande stellingen betreffende C^1-inbeddingen werden door de spreker gevonden. Wij vermelden tenslotte enige van deze.

Stellingen:

I Een Riemannse X^n die kort in E^{n+N+1} ingebed kan worden, kan ook C^1-isometrisch in E^{n+N+1} worden ingebed. $N \geqslant 0$.
(Nash: $N > 0$, Kuiper: $N \geqslant 0$).
II Een compacte Riemannse X^n die C^1 in E^{n+N+1} ingebed kan worden, kan ook C^1-isometrisch in E^{n+N+1} worden ingebed. (Idem)

Gevolg: Een euclidische n-torus kan C^1 isometrisch in E^{n+1} worden ingebed. Het hyperbolische vlak kan C^1-isometrisch worden ingebed in E^3. (Kuiper; niet C^4-isometrisch volgens Hilbert).
III Een niet-compacte Riemannse X^n die C^1 in E^{n+N} kan worden ingebed kan kort en C^1 dus isometrisch in E^{n+N+1} worden ingebed. (Kuiper)
IV De verhoging der dimensie in stelling III kan niet gemist worden. (Idem)

Het elliptische vlak minus één punt kan C^1 in E^3 worden ingebed, maar niet C^1-kort, laat staan C^1-isometrisch.
Opmerking. Een gewone 2-sfeer met straal R kan C^1-isometrisch worden ingebed in een omgeving hoe klein ook gekozen, van een punt in een euclidische driedimensionale ruimte. Ook de starheid van het boloppervlak is dus gebonden aan hogere klasse van differentiëerbaarheid dan C^1.

V Een oriënteerbaar oppervlak met Riemannse metriek, dat diffeomorf is met een compact oppervlak minus eindig veel punten, kan C^1-isometrisch in E^3 worden ingebed. (Idem)

Een ruimte met Riemannse metriek heet metrisch compleet, indien voor elk punt P en elk getal λ de verzameling van punten Q met afstand $(P,Q) \leqslant \lambda$, een compacte verzameling is. Men kan zich nu nog de vraag stellen of een gegeven complete X^n met metriek, afgesloten-in-E^{n+N} kan worden ingebed. Een voorbeeld waarbij de eis van afgeslotenheid-in-E^{n+N} een onoverkomelijke hindernis bepaalt, wordt gegeven door een geschikt gekozen complete metriek op een open Moebiusband, die daarmee wel kort en C^1-isometrisch niet-afgesloten-in-E^3 kan worden ingebed, maar niet C^1-isometrisch afgesloten in E^3. Men neme de metriek $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ op de Moebiusband die uit de hyperboloïde $x^2+y^2-z^2=1$ ontstaat door de identificatie $(x,y,z)\sim(-x,-y,-z)$.

Nash, J. C^1-isometric imbeddings. Annals of Math. 60, 383-396 (1954).

——— The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. of Math. 63, 20-63 (1956).

Kuiper, N.H. On C^1-isometric imbeddings. Proc. Amsterdam 58 (1955) p.545-556, 683-689.

——— Differentiaal meetkunde. Vacantiecursus Math. Centrum 1957; Euclides 1958.