STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Cursus "Distributies"

Groningen

door

P. C. Baayen

1961

DISTRIBUTIES

Cursus 1961 te Groningen

door

P.C. Baayen

Literatuur:

1. I.M. Gelfand und G.E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen. Deutscher Verlag der Wissenschaften (1960).
2. L. Schwartz, Théorie des distributions. Act.Sci. et Ind., Hermann et Cie (1950,1951).
3. A.C. Zaanen, Distributies, Serie voordrachten voor het Mathematisch Centrum (1956-1957).
4. I. Halperin, Introduction to the theory of distributions. University of Toronto Press (1952).

1. Inleiding

De theorie der distributies is ontwikkeld met de bedoeling een streng wiskundige grondslag te geven aan bepaalde methoden uit de physica, en wel in het bijzonder aan het gebruik van zogenaamde "singuliere functies".

Het eenvoudigste voorbeeld van zo'n singuliere functie is de δ-functie van Dirac. Deze wordt "gedefinieerd" door de eisen: $\delta(x)=0$ als $x\neq 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$. Als dan φ een continue functie is, kan men als volgt redeneren: als $|x|$ klein is, dan is $\varphi(x)\approx\varphi(0)$; dus geldt, voor kleine $\varepsilon>0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\ \varphi(x)dx=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\ \varphi(x)dx\approx\varphi(0)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)dx=$$
$$=\ \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=\varphi(0).$$

Natuurlijk bestaat er geen functie $x\rightarrow\delta(x)$ die voldoet aan bovengenoemde eisen. Maar de toevoeging $\varphi\rightarrow D(\varphi)=\varphi(0)$ die "afgeleid is" m.b.v. $\delta(x)$ heeft wel zin; aan iedere functie φ uit een zekere verzameling (hier de verzameling van alle continue functies) wordt hierdoor een reëel getal toegevoegd. Anders gezegd, D is een reële functionaal; en eventueel zouden we die dan wel kunnen weergeven met $D(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\ \varphi(x)dx$, maar dan is dit geen integraal in de gewone zin, maar louter een symbolische notatie.

Beschouw nu eens een <u>locaal integreerbare</u> functie $f(x)$, d.w.z. een functie die absoluut integreerbaar is over elk begrensd gebied. Dan bestaat $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx$ voor iedere continue functie $\varphi(x)$ die <u>in de verte nul</u> is, d.w.z. die nul is buiten een begrensd gebied. Men schrijft dikwijls (f,φ) voor $\int^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx$. De toevoeging $\varphi \rightarrow (f,\varphi)$ is dan een functionaal F, voortgebracht door f.

Er zijn dus verschillende soorten van functionalen: bij sommige functionalen F bestaat een functie $f(x)$ zodanig dat $F(\varphi)=(f,\varphi)$; bij andere functionalen, zoals D, bestaat een dergelijke functie niet: er is geen functie $\delta(x)$ waarvoor $D=(\delta,\varphi)$. Toch blijkt het mogelijk met een functionaal als D te rekenen, alsof er wel zo'n functie $\delta(x)$ bij behoorde. In dit verband spreekt men dan van gegeneraliseerde functies.

Gelfand en Schilow noemen gemakshalve een functionaal zoals D zèlf een gegeneraliseerde functie. In deze zin nu zijn ook <u>distributies</u> gegeneraliseerde functies. Ze zijn door L. Schwartz gedefinieerd als een speciaal soort functionalen op een speciale verzameling van functies. Bij sommige distributies F bestaat een puntfunctie $f(x)$ zodat $F(\varphi)=(f,\varphi)$; bij andere bestaat zo'n puntfunctie niet; maar met allen kan men in allerlei opzichten rekenen <u>alsof</u> er steeds zo'n functie bij bestaat. Zodoende kunnen dan verschillende begrippen uit de gewone functietheorie worden overgenomen, zoals differentiatie, of convergentie van rijen of reeksen. De definitie van het begrip distributie is daarbij zo fraai gekozen, dat de analyse in de verzameling van de distributie aanzienlijk aangenamer trekken vertoont dan die in de verzameling van de "gewone" functies.

2. <u>De ruimten (C) en (C*)</u>

Zij $\varphi(x)$ een continue functie, gedefinieerd op de k-dimensionale euklidische ruimte R^k. De <u>drager</u> van φ is per definitie de kleinste gesloten verzameling in R^k, die alle $x \in R^k$ met $\varphi(x) \neq 0$ bevat. Een functie φ is dus juist dan nul in de verte, als zijn drager begrensd is.

<u>Definitie.</u> De verzameling van alle continue φ met begrensde drager in R^k heet (C).

De verzameling (C) is een lineaire ruimte: als $\varphi \in (C)$ en $\psi \in (C)$, en als a,b reële getallen zijn, dan is $a\varphi + b\psi \in (C)$.

We zeggen dat F een lineair functionaal is op (C), als aan iedere $\varphi \in (C)$ een reëel getal $F(\varphi)$ is toegevoegd, zodanig dat voor alle φ, $\psi \in (C)$ en reële a,b

$$F(a\varphi + b\psi) = aF(\varphi) + bF(\psi).$$

Als F en G beiden lineaire functionalen op (C) zijn, en a,b zijn reëel, wordt een functionaal aF+bG gedefinieerd door:
$(aF+bG)(\varphi) = a.F(\varphi)+b.G(\varphi)$, voor alle $\varphi \in (C)$. Dan is ook aF+bG een lineair functionaal.

Als $\{\varphi_n\}$ een rij in (C) is, zullen we zeggen, dat $\{\varphi_n\}$ in (C) convergeert naar $\varphi \in (C)$, als er een begrensde verzameling K in R^k is, die de dragers van de φ_n alle omvat, terwijl in de tweede plaats φ_n uniform naar φ convergeert.

Een lineair functionaal F heet continu, als $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ voor iedere in (C) convergente rij $\varphi_n \longrightarrow \varphi$.

Definitie. De verzameling van alle continue lineaire functionalen op (C) heet (C^*).

Ook de verzameling (C^*) is een lineaire ruimte: als $F \in (C^*)$ en $G \in (C^*)$, en a,b reëel, dan is de lineaire functionaal aF+bG weer continu.

Voorbeelden.

1. Voor locaal integreerbare f hebben we gedefinieerd de toevoeging

$$\varphi \longrightarrow (f, \varphi) = \int_{R^k} f(x)\,\varphi(x)dx.$$

Dit is een continue lineaire functionaal op (C), die we gemakshalve ook wel met f weergeven. Men zegt daarom wel: "(C^*) bevat alle locaal integreerbare functies".

2. De toevoeging $\varphi \longrightarrow \varphi(0)$ is een functionaal uit (C^*), die we al aangegeven hebben met D. In plaats van $D(\varphi)$ schrijven we ook:
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\;\varphi(x)dx.$

3. Als μ een massaverdeling in R_k is, dan is de toevoeging $\varphi \to \int_{R_k} \varphi(x)d\mu$ een continue lineaire functionaal. Nauwkeuriger gezegd: μ is een σ-additieve verzamelingsfunctie, gedefinieerd op alle borelverzamelingen in R^k, en met eindige totale variatie op iedere begrensde borelverzameling. Dan is $\int_{R^k} \varphi(x)d\mu$ inderdaad gedefinieerd voor alle $\varphi \in (C)$.

Omgekeerd geldt de stelling van Riesz: bij iedere functionaal $F \in (C^*)$ bestaat een ondubbelzinnig bepaalde massaverdeling μ, zodanig dat, voor alle $\varphi \in (C)$,

$$F(\varphi) = \int_{R^L} \varphi(x)d\mu \quad .$$

Inderdaad hoort bijvoorbeeld bij δ de massaverdeling μ, waarbij een puntmassa ter waarde 1 is geplaatst in de oorsprong, terwijl verder nergens massa aanwezig is. Anders uitgedrukt: als $A \subset R^k$, dan geldt: $\mu(A) = 1$ als $0 \in A$; $\mu(A) = 0$ als $0 \notin A$.
Evenzo hoort bij de functionaal f de massaverdeling μ, gedefinieerd door $\mu(A) = \int_A f(x)dx$.

Het is niet zo, dat iedere massaverdeling μ uit een functie f verkregen kan worden (dit geldt alleen voor absoluut continue μ). Bijvoorbeeld is er geen functie f(x) zodanig dat $(f,\varphi)=D(\varphi)=\varphi(0)$, voor alle $\varphi \in (C)$; want er zou volgen: $\int_{R^k} f(x)dx=1$, en: $f(x)=0$ voor bijna alle x; m.a.w. f(x) zou de δ-functie zijn, en die bestaat niet, als puntfunctie.

3. De ruimten (D) en (D*)

Definitie. De verzameling van alle $\varphi\in(C)$, waarvoor alle afgeleiden, van alle orden, bestaan, heet (D).

Ook (D) is weer een lineaire ruimte, en wel een echte deelruimte van (C). Een voorbeeld van een $\varphi \in (D)$, met $\varphi(x)=0$ voor $r=\|x\| =\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \geq a$ $(a > 0)$ is de functie

$$\varphi_{(a)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}} & \text{voor } r < a; \\ 0 & \text{voor } r \geq a. \end{cases}$$

De drager van $\varphi_{(a)}$ is de bol $\|x\| \leq a$. Evenzo is, voor k=1, de functie $\varphi_{a,b}$, die gedefinieerd is door $\varphi_{a,b}(x)=\exp(-\frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-x})$ als $a < x < b$ en $\varphi_{a,b}(x)=0$ als $x \leq a$ of $x \geq b$, een element uit (D) met precies het interval $a \leq x \leq b$ als drager. Verder horen ook de functies $\{\varphi_{a,b}(x)\}^{1/n}$ (n geheel positief) tot (D).

Definitie. Zij $\{\varphi_n\}$ een rij functies in (D), en zij $\varphi \in (D)$. De rij $\{\varphi_n\}$ heet convergent in (D), met limiet φ, indien

1°. Er is een begrensde verzameling K in R^k, die de dragers van alle φ_n omvat.

2°. De rij φ_n convergeert gelijkmatig naar φ; de rij $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}$ convergeert gelijkmatig naar $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, voor $i=1,\ldots,k$; de rij $\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_i \partial x_j}$ convergeert gelijkmatig naar $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$; en algemeen, als D een partiële differentiatie van willekeurige orde voorstelt: de rij $D\varphi_n$ convergeert gelijkmatig naar $D\varphi$.

Voorbeeld. De rij $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi_{(a)}(x)$ $(n=1,2,\dots)$ convergeert in (D) naar de nulfunctie. Maar de rij $\psi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi_{(a)}(\frac{x}{n})$ $(n=1,2,\dots)$ convergeert weliswaar gelijkmatig naar nul, evenals elke rij van afgeleiden, maar is toch niet convergent in (D), omdat er geen begrensde verzameling K bestaat die alle dragers bevat.

Men merke op, dat er rijen $\{\varphi_n\}$ in (D) zijn - zo'n rij ligt dan zeker in (C) - die wel convergeren in (C), terwijl ze niet convergent zijn in (D). Later zullen we zelfs bewijzen dat iedere $\varphi \in (C)$ de limiet in (C) is van een rij $\{\varphi_n\}$ in (D).

Definitie. Een lineaire functionaal F op (D) heet continu, indien uit $\varphi_n \to \varphi$ in (D) altijd volgt $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$. De verzameling van alle continue lineaire functionalen op (D) heet (D^*). De elementen van (D^*) heten distributies (Schwartz) of gegeneraliseerde functies (Gelfand en Schilow).

Een distributie is dus een continue lineaire functionaal op (D).

De verzameling (D^*) van alle distributies is weer een lineaire ruimte: als F en G continue lineaire functionalen zijn op (D), en a,b zijn reële getallen, dan is aF+bG weer een lineaire functionaal, dat blijkbaar ook weer continu is.

Verder geldt:

Stelling. De ruimte (C^*) is een deelruimte van (D^*).

Bewijs. Stel $F \in (C^*)$. Dan is F een lineaire functionaal, gedefinieerd op (C), dus zeker op (D). En F is continu op (D), want als $\varphi_n \to \varphi$ in (D), dan geldt zeker $\varphi_n \to \varphi$ in (C), en dus $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$, daar F continu is op (C).

Opmerking. Strikt genomen is het niet juist dat (C^*) een deelruimte is van (D^*): als $F \in (C^*)$, dan is niet F zelf een lineaire functionaal op (D), maar alleen zijn restrictie $F|(D)$. Het is echter gebruikelijk (C^*) te identificeren met de ruimte van al deze $F|(D)$.

Uit de stelling volgt dat i.h.b. de functionalen $(f,\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx$ (f(x) locaal integreerbaar) en $M(\varphi) = \int \varphi(x)d\mu$ (μ σ-additief en van eindige totale variatie op begrensde verzamelingen) distributies zijn. Men spreekt dan wel van de distributie f (resp. de distributie μ).

In dit verband moet opgemerkt worden, dat als de distributies f,g (behorende bij de locaal integreerbare functies f(x),g(x)) gelijk zijn, d.w.z. als $(f,\varphi)=(g,\varphi)$ voor alle $\varphi \in (D)$, ook de puntfuncties f(x) en g(x) gelijk zijn, behalve misschien op een nulverzameling. Om dit aan te tonen is het nodig en voldoende te bewijzen:

als f(x) locaal integreerbaar is, en $(f,\varphi)=0$ voor alle $\varphi \in (D)$, dan is bijna overal $f(x)=0$.

Bewijs, voor k=1: In het bijzonder geldt, voor alle $a < b$ en alle gehele positieve n: $(f, \varphi_{a,b}{}^{1/n}) = \int (f(x) \left\{ \varphi_{a,b}(x) \right\}^{1/n} dx=0$. Voor $n \to \infty$ volgt hieruit: $\int_a^b f(x)dx=0$, voor alle a,b met $a < b$. Dus is $f(x) \equiv 0$.

4. Differentieren van distributies

Als $f(x)$ een continue functie is, met continue afgeleide $f'(x)$, dan worden door

$$F(\varphi) = (f,\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)dx,$$
$$G(\varphi) = (f',\varphi) = \int f'(x)\,\varphi(x)dx,$$

twee distributies gedefinieerd. En omdat φ in de verte 0 is, geldt

$$G(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -F(\varphi').$$

Naar aanleiding hiervan wordt algemeen gedefinieerd:

Definitie. Zij F een distributie op R^k. De distributie-afgeleide $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ van F is de functionaal die aan $\varphi \in (D)$ toevoegt het getal $-F(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$.

Aangezien met $\varphi \in (D)$ ook $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in (D)$, is $F(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$ inderdaad steeds gedefinieerd, en daarmee ook $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. Blijkbaar is $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ een lineaire functionaal op (D). Zelfs is $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ een continue lineaire functionaal: als $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in (D), dan ook $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ in (D), dus $F(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}) \longrightarrow F(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$, d.w.z. $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi_n) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi)$. Dus $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ is weer een distributie.

Dan is ook de distributie-afgeleide $\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial F}{\partial x_i})$ gedefinieerd; ook dit is weer een distributie, enz. Iedere distributie is dus oneindig vaak differentieerbaar. En de afgeleiden van hogere orde zijn onafhankelijk van de volgorde der differentiaties; want bijvoorbeeld is

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\varphi) = -\frac{\partial F}{\partial x_2}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) = F(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}) = F(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}) =$$
$$= -\frac{\partial F}{\partial x_1}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\varphi),$$

voor alle $\varphi \in (D)$; m.a.w.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Zijn F en G distributies, en a,b reële getallen, dan geldt voor de distributie-afgeleide van de distributie $aF+bG$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(aF+bG)\right](\varphi) = -(aF+bG)(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = -aF(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) - bG(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = a\frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi) + b\frac{\partial G}{\partial x_i}(\varphi) =$$
$$= (a\frac{\partial F}{\partial x_i} + b\frac{\partial G}{\partial x_i})(\varphi)$$

zodat dus algemeen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(aF+bG) = a\,\frac{\partial F}{\partial x_i} + b\,\frac{\partial G}{\partial x_i}\ .$$

Iedere locaal integreerbare functie $f(x)$ geeft aanleiding tot een distributie $F(\varphi) = (f,\varphi)$, en deze heeft altijd een distributie-afgeleide - ook als de functie $f(x)$ zelf niet differentieerbaar is. Zelfs kan het zijn, dat $f'(x)$ bestaat en locaal integreerbaar is, zodat door $G(\varphi) = (f',\varphi)$ een distributie G gedefinieerd wordt, zonder dat G de distributie-afgeleide is van F. Bij functies f van meer veranderlijken is het verder ook mogelijk dat bijv. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ beiden bestaan, en ongelijk zijn; voor de distributie $F(\varphi)=(f,\varphi)$ geldt dan toch: $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$. Het is dus wel zeer belangrijk, de gewone afgeleide van een functie niet met de distributie-afgeleide te verwarren.

Maar voor continue $f(x)$ met continue afgeleide $f'(x)$ hebben we inderdaad vastgesteld, dat de distributie-afgeleide van (f,φ) juist de distributie (f',φ) is. I.h.b. geldt dus voor een distributie C die behoort bij een constante functie $f(x)=c$:

$$C(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\,\varphi(x)dx = c\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx,$$

dat $C'(\varphi)=(f',\varphi)=(0,\varphi)$; d.w.z. C' is de nuldistributie. Zo'n distributie die behoort bij een constante functie wordt - enigszins verwarrend - een <u>constante distributie</u> genoemd. We hebben dus gezien dat iedere constante distributie distributie-afgeleide nul heeft; omgekeerd is iedere distributie met distributie-afgeleide nul ook een constante distributie, zoals we in § 6 zullen zien.

Algemener geldt nog:

<u>Stelling.</u> Zij $g(x)$ een locaal integreerbare functie met bijbehorende distributie G. Zij verder F de distributie die behoort bij de functie $f(x) = \int_0^x g(t)dt$. En geldt: $F'=G$.

<u>Bewijs.</u> De functie $f(x)$ is continu, dus zeker locaal integreerbaar, en bepaalt dus inderdaad een distributie F. Door partiële integratie volgt weer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ \varphi(x)dx = f(x)\ \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \varphi'(x)dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

voor alle $\varphi\in(D)$; zodat inderdaad steeds $G(\varphi)=-F(\varphi')=F'(\varphi)$, m.a.w. $F'=G$.

<u>Gevolg.</u> Zij $f(x)$ een continue functie. Stel $f(x)$ is differentieerbaar, behalve in een aantal punten $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, en stel $f'(x)$ is continu op elk der intervallen $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, +\infty)$. Dan geldt van de distributie-afgeleide van $F(\varphi)=(f,\varphi)$:

$$F'(\varphi) = (f', \varphi).$$

Immers, onder deze veronderstellingen is $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$; en als F_1 de distributie is die bepaald wordt door $\int_0^x f'(t)dt$, dan is dus $F-F_1$ een constante distributie. Volgens het bovenstaande is dan $(F-F_1)'=F'-F_1'=0$. Daar $F_1'(\varphi)=(f',\varphi)$ voor alle $\varphi \in (D)$, volgens de stelling, geldt ook $F'(\varphi)=(f',\varphi)$, voor alle $\varphi \in (D)$.

5. <u>Voorbeelden</u>

1. Zij $u(x)$ de functie gedefinieerd door: $u(x)=0$ als $x<0$; $u(x)=1$ als $x>0$ (eenheidsfunctie van Heaviside). Daar $u(x)$ locaal integreerbaar is, wordt een distributie U bepaald: $U(\varphi)=(u,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi(x)dx= = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$.

De afgeleide $u'(x)$ bestaat voor alle $x\neq 0$, en $u'(x)=0$ voor $x\neq 0$. Dus $u'(x)$ is locaal integreerbaar en heeft als bijbehorende distributie de nuldistributie. Maar de distributie-afgeleide van U is <u>niet</u> de nuldistributie:

$$U'(\varphi) = -U(\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi(x)dx = \varphi(0);$$

d.w.z. $U' = \delta$. Evenzo

$$U''(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0);$$

en in het algemeen

$$U^{(n+1)}(\varphi) = \delta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

2. Ook de functie $u(x-x_0)$ is locaal integreerbaar; de bijbehorende distributie noemen we U_{x_0} : $U_{x_0}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-x_0)\varphi(x)dx = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)dx$.

De distributie-afgeleide van U_{x_0} heet δ_{x_0} :

$$\delta_{x_0}(\varphi) = U'_{x_0}(\varphi) = -U_{x_0}(\varphi') = -\int_{x_0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(x_0).$$

Men kan δ_{x_0} beschouwen als een verschoven δ-functie, met piek in x_0.

3. Meer in het algemeen zij $f(x)$ een functie, die in elk van de intervallen $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, +\infty)$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ continu

is en een continue afgeleide heeft. Verder nemen we aan dat $f(x)$ in het punt x_ν een sprong f_ν maakt ($\nu = 1,2,\ldots,n$). Daar $f(x)$ en $f'(x)$ beiden locaal integreerbaar zijn, definiëren zij twee distributies F en G: $F(\varphi) = (f,\varphi)$ en $G(\varphi) = (f',\varphi)$, voor $\varphi \in (D)$.

Zij $f_1(x) = f(x) - \sum_\nu f_\nu\, u(x-x_\nu)$; dan is $f_1(x)$ continu, en in alle $x \neq x_\nu$ ($\nu=1,2,\ldots,n$) heeft $f_1(x)$ een continue afgeleide. En wel is $f_1'(x) = f'(x)$ voor $x \neq x_\nu$. Als we de bij $f_1(x)$ behorende distributie met F_1 aangeven, dan volgt dus uit het gevolg van de stelling in § 4:

$$F_1'(\varphi) = (f_1',\varphi) = (f',\varphi) = G(\varphi).$$

Maar $F_1 = F - \sum_\nu f_\nu\, U_{x_\nu}$, dus $F_1' = F' - \sum_\nu f_\nu\, U'_{x_\nu} = F' - \sum_\nu f_\nu\, \delta_{x_\nu}$; en we vinden zo

$$F' = G + \sum_\nu f_\nu\, \delta_{x_\nu}.$$

Slordig gezegd: het verschil tussen de distributie-afgeleide van f en de gewone afgeleide van f is een som van δ-functies; en wel zorgt iedere sprong f_ν voor een term $f_\nu\, \delta_{x_\nu}$.

Als we verder gaan, en aannemen, dat $f''(x)$ ook bestaat en continu is in elk van bovengenoemde intervallen, en dat de discontinuïteiten van $f'(x)$ in de punten x_ν ook weer sprongen zijn, zeg ter grootte f_ν', dan geldt ook

$$G' = H + \sum_\nu f_\nu'\, \delta_{x_\nu},$$

waarbij G weer de distributie $\varphi \to (f',\varphi)$ is, terwijl H de distributie $\varphi \to (f'',\varphi)$ aanduidt. Dan volgt ook:

$$F'' = (G + \sum_\nu f_\nu\, \delta_{x_\nu})' = G' + \sum_\nu f_\nu\, \delta'_{x_\nu} =$$
$$= H + \sum_\nu (f_\nu'\, \delta_{x_\nu} + f_\nu\, \delta'_{x_\nu}).$$

De gevolgen van de discontinuïteiten blijven dus ook doorwerken bij de hogere afgeleiden van F.

4. Zij $-1 < \lambda < 0$, en definieer de functie x_+^λ als volgt:

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0; \\ x^\lambda & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

Dan is x_+^λ locaal integreerbaar; de bijbehorende distributie zij aangegeven met X_+^λ:

$$X_+^\lambda(\varphi) = (x_+^\lambda,\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx.$$

De gewone afgeleide van x_+^λ is niet locaal integreerbaar, en definieert geen distributie: de integraal $\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)$ is in het algemeen divergent. De distributie-afgeleide $(X_+^\lambda)'$ echter bestaat wel, en volgens definitie is

$$(X_+^\lambda)'(\varphi) = -X_+^\lambda(\varphi') = -\int_0^\infty x^\lambda\ \varphi'(x)dx.$$

We kunnen nog een andere schrijfwijze voor $(X_+^\lambda)'(\varphi)$ afleiden; immers $(X_+^\lambda)'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty x^\lambda\ \varphi'(x)dx$; en d.m.v. partiële integratie volgt

$$\int_\varepsilon^\infty x^\lambda\ \varphi'(x)dx = x^\lambda\ (\varphi(x)+C)\Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \lambda\ x^{\lambda-1}(\varphi(x)+C)dx$$

waarbij de constante C willekeurig mag worden gekozen. Kiezen we speciaal $C = -\ \varphi(0)$, dan wordt de eerste term in het rechterlid gelijk aan $-\ \varepsilon^\lambda\ (\varphi(\varepsilon)-\ \varphi(0)$, en dit convergeert naar 0 voor $\varepsilon\to 0$; en dus is

$$(X_+^\lambda)'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty x^\lambda\ \varphi'(x)dx = \int_0^\infty \lambda\, x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\ \varphi(0))dx.$$

Op deze wijze is het verband tussen de distributie-afgeleide $(X_+^\lambda)'$ en de gewone afgeleide $\lambda x^{\lambda-1}$ van x_+^λ wel zo goed mogelijk weergegeven; voor functies φ met $0\notin$ drager (φ) blijkt bijvoorbeeld onmiddellijk:

$$(X_+^\lambda)'(\varphi) = (\lambda x^{\lambda-1},\ \varphi).$$

6. Primitieve distributies van een distributie op R_1

Zij F een distributie op R_1. Een distributie G heet een primitieve distributie van F als $G'=F$ (G' = distributie-afgeleide van G).

Stelling 1. Iedere distributie F op R_1 heeft oneindig veel primitieve distributies. Het verschil van twee primitieve distributies is een constante distributie.

Bewijs. Stel er is een distributie G met $G'=F$. Dan moet gelden voor iedere $\psi\in(D)$ van de vorm $\psi=\varphi'$ $(\varphi\in(D))$:

$$G(\psi) = G(\varphi') = -G'(\varphi) = -F(\varphi).$$

Alle ψ in (D) van de vorm $\psi=\varphi'$ vormen een lineaire deelruimte van (D), en wel een hypervlak (H), want ze zijn bepaald door één enkele lineaire vergelijking, nl.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx = 0.$$

Immers, als $\psi\in(D)$ aan deze vergelijking voldoet, dan is $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x}\psi(t)dt$ in (D); want $\varphi(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar, en de drager van φ is begrensd. Als nl. de drager van ψ bevat is in $[a,b]$, dan is $\varphi(x)=0$ voor $x \leqslant a$ en voor $x \geqslant b$. Omgekeerd, als $\psi = \varphi'$, dan is $\int_{\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Kies nu in (D) een $\varphi_o \in (H)$, met $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_o(x)dx=1$. Aangezien (H) een hypervlak is in (D), moet het mogelijk zijn iedere $\varphi \in (D)$ te schrijven als een lineaire combinatie van φ_o en een functie in (H):

$$\varphi = \lambda\varphi_o + \psi .$$

Inderdaad is dit mogelijk, en slechts op één wijze, nl. met

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Als nu

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$$

dan definieren we een functionaal G door

$$G(\varphi) = \lambda a - F(\chi),$$

waarbij a een willekeurig (maar voor alle φ gelijk) gekozen reëel getal is. In het bijzonder is dus $G(\varphi_o) = a$.

Het is duidelijk dat G een lineair functionaal is op (D). En G is ook continu op (D): stel $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in (D). Zij

$$\varphi_n = \lambda_n \varphi_o + \psi_n; \quad \varphi = \lambda\varphi_o + \psi ;$$

en

$$\chi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi_n(t)dt; \quad \chi(x) = \int_{-\infty}^{x}\psi(t)dt.$$

Dan is

$$\lambda_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \lambda;$$

dus geldt

$$\psi_n = \varphi_n - \lambda_n\varphi_o \longrightarrow \varphi - \lambda\varphi_o = \psi \qquad \text{in (D)}.$$

Vervolgens is

$$\chi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi_n(t)dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt = \chi(x) \qquad \text{in (D)}$$

en omdat F een distributie is volgt $F(\chi_n) \rightarrow F(\chi)$. Tenslotte is dan

$$G(\varphi_n) = \lambda_n a - F(\chi_n) \rightarrow \lambda a - F(\chi) = G(\varphi).$$

Dus G is een distributie.

Voorts is G een primitieve distributie van F; want

$$G'(\varphi) = -G(\varphi') = 0.a + F(\varphi) = F(\varphi).$$

Dat er oneindig veel primitieve distributies van F bestaan is ook duidelijk: het getal a, d.w.z. de waarde $G(\varphi_0)$ mocht immers willekeurig worden gekozen.

Tenslotte moet nog aangetoond worden, dat het verschil van twee primitieve distributies G_1 en G_2 van F een constante distributie is. Inderdaad, neem een willekeurige $\varphi \in (D)$ en schrijf weer $\varphi = \lambda\varphi_0 + \psi$, met $\psi \in (H)$; dan is $G_1(\psi)=G_2(\psi)$, dus $G_1(\varphi)-G_2(\varphi)=\lambda G_1(\varphi_0)-\lambda G_2(\varphi_0)= =\lambda c = \int_{-\infty}^{+\infty} c\,\varphi(x)dx$. D.w.z. G_1-G_2 is de distributie die behoort bij de functie $f(x)=c$, waar c de constante $G_1(\varphi_0)-G_2(\varphi_0)$ is.
Uit stelling 1 volgt i.h.b.: Iedere distributie met distributie-afgeleide nul is een constante distributie. In de tweede plaats kunnen we concluderen: Iedere distributie heeft oneindig veel primitieve distributies van de n^e orde (voor iedere n); het verschil van twee primitieve distributies van de n^e orde is een distributie (f,φ), waarbij f een polynoom is met graad $\leq n-1$.

Voorbeeld 3 van § 5 toont aan, dat als $f(x)$ een primitieve functie is van $g(x)$, de distributie (f,φ) zeker geen primitieve distributie van (g,φ) behoeft te zijn. Maar wel geldt:

<u>Stelling 2.</u> Zij $f(x)$ locaal integreerbaar. De primitieve distributies van $F(\varphi)=(f,\varphi)$ zijn juist de distributies $G=(g,\varphi)$ gedefinieerd door de functies $g(x)$ van de vorm $g(x)=\int_0^x f(t)dt+c$.

<u>Bewijs.</u> Zij $g_0(x)=\int_0^x f(t)dt$; $g_0(x)$ is continu en bepaalt dus een distributie G_0. Volgens de stelling in § 4 is $G_0'(\varphi)=(f,\varphi)$, m.a.w. $G_0'=F$. Dus G_0 is een primitieve distributie van F.

Is nu G een willekeurige primitieve distributie van F, dan is $G-G_0$ volgens stelling 1 een constante distributie C, zeg behorend bij de constante c. Dan is

$$G(\varphi) = G_0(\varphi) + C(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} c\,\varphi(x)dx = (g,\varphi),$$

met $g(x) = g_0(x) + c = \int_0^x f(t)dt + c$.

Wanneer we gemakshalve een distributie F <u>regulier</u> noemen als hij kan worden gedefinieerd door een locaal integreerbare functie (en <u>singulier</u> als dit niet het geval is), dan kunnen we de volgende conclusie uit stelling 2 prettig formuleren:

<u>Stelling 3.</u> Iedere distributie F die een reguliere distributie-afgeleide $F^{(n)}$ bezit (van zekere orde n) is zelf regulier.

7. Translatie en spiegeling

Zij f(x) een locaal integreerbare functie van één variabele, en zij F de bijbehorende distributie: $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx$. Als nu h een reëel getal is, dan is ook de functie f(x-h), die ontstaat door f(x) over een afstand h naar rechts te verschuiven, weer locaal integreerbaar, en hij bepaalt dus een distributie G; er geldt

$$G(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\,\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x+h)dx.$$

Als we, voor willekeurige f(x), de functie f(x-h) aangeven door $\tau_h f$, dan is dus $G(\varphi)=F(\tau_{-h}\varphi)$; anders gezegd

$$(\tau_h f, \varphi) = (f, \tau_{-h}\varphi).$$

Naar aanleiding hiervan definieert men:

<u>Definitie.</u> Zij F een distributie en h een reëel getal. De functionaal, die aan $\varphi \in (D)$ toevoegt het getal $F(\tau_{-h}\varphi)$, wordt aangegeven met $\tau_h F$.

Ook $\tau_h F$ is weer een distributie: als $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ in (D), dan zal ook $\varphi_n(x+h) \to \varphi_n(x+h)$ in (D), i.e. $\tau_{-h}\varphi_n \to \tau_{-h}\varphi$ in (D); dus $F(\tau_{-h}\varphi_n) \to F(\tau_{-h}\varphi)$, d.w.z. $(\tau_h F)(\varphi_n) \to (\tau_h F)(\varphi)$. We zeggen, dat $\tau_h F$ uit F ontstaat door <u>translatie</u> over h.

We hebben reeds gezien: als F de distributie is die behoort bij een locaal integreerbare functie f(x), dan behoort bij de verschoven functie $\tau_h f$ juist de verschoven distributie $\tau_h F$.

In § 5 hebben we hiervan ook al een voorbeeld gezien: bij de eenheidsfunctie u(x) behoort de distributie $U(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx$, met distributie-afgeleide $\delta(\varphi)= \varphi(0)$. Bij de verschoven functie $(\tau_{x_0} u)(x)=u(x-x_0)$ behoort de distributie $U_{x_0}(\varphi) = \int_{x_0}^\infty \varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x+x_0)dx = (\tau_{x_0} U)(\varphi)$, met distributie-afgeleide $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \delta(\tau_{-x_0}\varphi)=(\tau_{x_0}\delta)(\varphi)$.

Tegelijkertijd is dit een voorbeeld van het feit dat de distributie-afgeleide van een verschoven distributie $\tau_h F$ altijd juist de verschoven distributie-afgeleide van F is:

$$(\tau_h F)' = \tau_h(F').$$

Immers, voor willekeurige $\varphi \in (D)$ geldt:

$$(\tau_h F)'(\varphi) = -(\tau_h F)(\varphi') = -F(\tau_{-h}\varphi') = -F((\tau_{-h}\varphi)') = F'(\tau_{-h}\varphi) = (\tau_h F')(\varphi)$$

Zij weer f(x) locaal integreerbaar; geef aan met σf de functie f(-x), die uit f(x) ontstaat door spiegeling ten opzichte van de oorsprong. Dan is

$$(\sigma f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\, \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(-x)dx = (f, \sigma\varphi).$$

Het ligt dus voor de hand te definieren:

Definitie. Onder de gespiegelde σF van een distributie F verstaat men de functionaal die aan $\varphi \in (D)$ toevoegt het getal $F(\sigma\,\varphi)$.

Ook de gespiegelde σF van een distributie F is weer een distributie, en de definitie is zo gekozen dat de gespiegelde van de distributie, behorende bij een locaal integreerbare functie $f(x)$, juist de distributie is die hoort bij de gespiegelde functie $f(-x)$.

Evenzo kunnen we centrale vermenigvuldiging vanuit de oorsprong beschouwen: zij $(\pi_c f)(x) = f(\frac{x}{c})$, voor willekeurige $f(x)$ en willekeurige reële $c \neq 0$. Als $f(x)$ locaal integreerbaar is, dan is $\pi_c f$ dat ook, en

$$(\pi_c f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tfrac{x}{c})\, \varphi(x)dx = |c| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(cx)dx =$$

$$= |c|\; (f, \pi_{\frac{1}{c}}\, \varphi).$$

We definieren dus:

Definitie. Zij F een distributie. Met $\pi_c F$ wordt dan aangegeven de functionaal die aan $\varphi \in (D)$ toevoegt het getal $|c| F(\pi_{\frac{1}{c}}\, \varphi)$.

In het bijzonder is $\pi_{-1}F = \sigma F$. Uiteraard is ook $\pi_c F$ steeds weer een distributie.

Het spraakgebruik bij gewone functies overnemend, zegt men nu ook van distributies F:

F is een even distributie: als $\sigma F = F$;

F is een oneven distributie: als $\sigma F = -F$;

F is periodiek, met periode h: als $\tau_h F = F$;

F is homogeen, van de orde m: als $\pi_c F = c^{-m} F$, voor alle $c > 0$.

Zo is bijvoorbeeld de distributie δ even, en homogeen van de orde -1.

Opmerking. Bovengenoemde drie definities zijn speciale gevallen van de volgende: zij α een willekeurige affiene transformatie van R^1, met inverse α^{-1} en determinant $|\alpha|$. Als $f(x)$ een willekeurige functie is, dan zij αf de functie $f(\alpha^{-1}x)$. Als dan F een distributie is, dan is de functionaal die aan $\varphi \in (D)$ toevoegt het getal $|\alpha| . F(\alpha^{-1}\, \varphi)$, weer een distributie; deze wordt aangegeven met αF:

$$(\alpha F)(\varphi) = |\alpha|\; F(\alpha^{-1}\, \varphi).$$

We kunnen dit ook weergeven door de formule

$$(\alpha F)(\alpha\, \varphi) = |\alpha|\; F(\varphi),$$

die uitdrukt dat de lineaire operaties $\varphi \to \alpha\varphi$ (in (D)) en $F \to \alpha F$ (in (D^*)) contragredient zijn.

Het is duidelijk dat het hierbij niet essentieel is dat de beschouwde distributies ééndimensionaal zijn. We kunnen even goed αF definieren voor distributies op R^k, waar dan α een affiene transformatie van R^k is. Alleen het geval waarbij α een verschuiving is over een vector $h=(h_1,h_2,\dots,h_k)$ is momenteel voor ons van belang.

Definitie. Zij $f(x)$ een functie, gedefinieerd op R^k $(x=(x_1,x_2,\dots,x_k))$, en zij h een vector $(h_1,h_2,\dots,h_k)$. Met $\tau_h f$ bedoelen we de functie $(\tau_h f)(x)=f(x-h)$. Als F een distributie is op R^k, dan is $\tau_h F$ de functionaal, die aan $\varphi \in (D)$ toevoegt het getal $F(\tau_{-h}\varphi)$.

Evenals bij $k=1$ blijkt onmiddellijk dat $\tau_h F$ steeds weer een distributie is.

8. Onafhankelijkheid van één van de variabelen

Het begrip translatie van een distributie kunnen we gebruiken om zin te geven aan de bewering dat een distributie F op R^k van één van de variabelen, bijvoorbeeld van x_1, niet afhangt.

We zullen een distributie F op R^k onafhankelijk van x_1 noemen, en ook wel zeggen, dat F alleen afhangt van $x_2,x_3,\dots,x_k$, indien F invariant is onder iedere translatie evenwijdig aan de x_1-as:

$$\tau_h F = F, \text{ voor iedere } h=(h_1,0,0,\dots,0).$$

Als F behoort bij een continue functie f: $F(\varphi)=(f,\varphi)$, dan is dit juist dan het geval indien $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ onafhankelijk is van x_1. Algemener geldt:

Stelling 1. Zij $f(x)$ een locaal integreerbare functie op R^k. De distributie (f,φ) is juist dan onafhankelijk van x_1, indien $f(x)$ bijna overal gelijk is aan een functie die onafhankelijk is van x_1.

Bewijs voor $k=1$.
In dit geval betekent $\tau_h F=F$ voor alle h (waar $F(\varphi)=(f,\varphi)$):

$$\int f(x)\,\varphi(x)dx = \int f(x)\,\varphi(x+h)dx$$

voor alle $\varphi \in (D)$. Nemen we in het bijzonder $\varphi(x)=\{\varphi_{a,b}(x)\}^{1/n}$ (vgl. § 3), dan is $\varphi(x+h)=\{\varphi_{a-h,b-h}(x)\}^{1/n}$, en er volgt

$$\int f(x)\{\varphi_{a,b}(x)\}^{1/n}dx = \int f(x)\{\varphi_{a-h,b-h}(x)\}^{1/n}dx,$$

en voor $n \to \infty$ vinden we

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x)dx.$$

Dit geldt voor alle a,b en h. Maar dat kan alleen als er een constante c is, zodanig dat $\int_0^x f(t)dt = cx$. En daaruit volgt tenslotte dat $f(x)=c$ voor bijna alle x.

Verder geldt, evenals bij functies:

Stelling 2. Een distributie F op R^k is dan en slechts dan onafhankelijk van x_1, als $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$.

Bewijs. Als we een vaste F en een vaste $\varphi \in (D)$ nemen, dan hangt het getal $(\tau_h F)(\varphi)$ alleen af van h_1, voor $h=(h_1,0,\ldots,0)$. Zij

$$\psi(h_1) = (\tau_h F)(\varphi) \qquad (h=(h_1,0,\ldots,0)).$$

We moeten bewijzen: dan en slechts dan is $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, als voor iedere $\varphi \in (D)$ de bijbehorende functie $\psi(h_1)$ constant is.

Neem een willekeurige rij $k^{(n)} = (k_1^{(n)},0,\ldots,0)$ met $k_1^{(n)} \to 0$. Omdat $\{k_1^{(n)}\}$ begrensd is, is er een begrensde verzameling K die de dragers bevat van alle verschoven functies $\varphi(x+k^{(n)})$. Dan bevat K ook de dragers van de functies

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x+k^{(n)}) - \varphi(x)}{k_1^{(n)}} ;$$

en omdat deze rij φ_n uniform convergeert, evenals alle rijen van afgeleiden, geldt

$$\varphi_n \to \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \underline{\text{in } (D)}.$$

Omdat $\tau_h F$ een distributie is, volgt, voor iedere $h=(h_1,0,\ldots,0)$

$$(\tau_h F)(\varphi_n) \to (\tau_h F)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right).$$

Maar

$$(\tau_h F)(\varphi_n) = (\tau_h F)\left(\frac{\tau_{-k^{(n)}}(\varphi) - \varphi}{k_1^{(n)}}\right) = \frac{(\tau_h F)(\tau_{-k^{(n)}}(\varphi)) - (\tau_h F)(\varphi)}{k_1^{(n)}} =$$

$$= \frac{(\tau_{h+k^{(n)}}F)(\varphi) - (\tau_h F)(\varphi)}{k_1^{(n)}} = \frac{\psi(h_1+k_1^{(n)}) - \psi(h_2)}{k_1^{(n)}}$$

en

$$(\tau_h F)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = F\left(\tau_{-h} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\tau_{-h}\varphi)\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)(\tau_{-h}\varphi);$$

dus

$$\frac{\psi(h_1+k_1^{(n)}) - \psi(h_2)}{k_1^{(n)}} \to -\frac{\partial F}{\partial x_1}(\tau_{-h}\varphi).$$

Aangezien de rij $k_1^{(n)} \to 0$ geheel willekeurig was, blijkt dus dat $\psi(h_1)$ differentieerbaar is; en

$$\frac{d\psi}{dh_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}(\tau_{-h}\varphi).$$

Is nu $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, dan is steeds $\frac{d\psi}{dh_1} = 0$, en dus is $\tau_h F = F$ voor iedere $h=(h_1,0,\ldots,0)$. Omgekeerd, als F onafhankelijk is van x_1, dus $\tau_h F=F$ voor $h=(h_1,0,\ldots,0)$, dan geldt, bij iedere keuze van φ, voor de bijbehorende functie ψ : $\frac{d\psi}{dh_1} = 0$; dus $\frac{\partial F}{\partial x_1}(\tau_{-h}\varphi)=0$, voor alle $\varphi \in (D)$; m.a.w. $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$.

We beschouwen nog eens het probleem, bij een gegeven distributie primitieve distributies te vinden. In het geval van distributies van meer dan één variabele kan men aantonen, op een wijze analoog aan de methode van § 6: bij gegeven F zijn er oneindig veel distributies G zodat $\frac{\partial G}{\partial x_1} = F$.

In dit geval geldt voor het verschil van twee dergelijke primitieve distributies G_1 en G_2: $\frac{\partial}{\partial x_1}(G_1-G_2)=0$. Uit stelling 2 volgt dus, dat dit verschil G_1-G_2 een distributie is die niet van x_1 afhangt.

9. Locale eigenschappen

In het laatste voorbeeld van § 5 beschouwden we de distributie-afgeleide $(X_+^\lambda)'$ $(-1 < \lambda < 0)$. Deze distributie is niet regulier; maar aangezien

$$(X_+^\lambda)'(\varphi) = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx,$$

geldt voor iedere $\varphi(x)$ waarvan de drager de oorsprong niet bevat: $(X_+^\lambda)'(\varphi) = (\lambda x^{\lambda-1}, \varphi)$.

Buiten de oorsprong gedraagt $(X_+^\lambda)'$ zich dus alsof hij wel regulier was. Men is geneigd te zeggen: $(X_+^\lambda)'$ is locaal regulier, buiten de oorsprong. Deze zegswijze zullen we preciseren.

Definitie. We zeggen, dat twee distributies F en G overeenstemmen op een verzameling V als $F(\varphi)=G(\varphi)$ voor alle $\varphi \in (D)$ met drager $(\varphi) \subset V$. Als F op een verzameling V overeenstemt met de nuldistributie, zullen we ook zeggen: F is nul op V.

De verzameling van alle punten x die een omgeving hebben waarop F nul is, is uiteraard open. Zijn complement is dus een gesloten verzameling. Deze gesloten verzameling heet de drager van F:

Definitie. De drager van een distributie F is de verzameling van alle punten x die geen omgeving hebben waarop F nul is.

Voorbeeld: De drager van δ bestaat uit één punt, nl. 0. De drager van $(X_+^\lambda)'$ is de verzameling $[0,+\infty]$. De drager van de nuldistributie is de lege verzameling.

Als F een reguliere distributie is, $F(\varphi) = (f,\varphi)$, dan valt de drager K_1 van de distributie F samen met de drager K_2 van de locaal integreerbare functie f(x). Want als $x \notin K_2$, dan is er een omgeving V van x met f(x)=0 voor alle $x \in V$. Als dan drager $(\varphi) \subset V$, dan is $F(\varphi) = (f,\varphi)=0$, d.w.z. F is nul op V. Dus $x \notin K_1$. Omgekeerd, als $x \notin K_1$, dan is er een omgeving V van x met $(f,\varphi)=0$ voor alle φ met drager $(\varphi) \subset V$; d.w.z. $\int\limits_V f(x)\,\varphi(x)dx=0$ als drager $(\varphi) \subset V$. Door een redenering, geheel analoog aan die op pag.6, volgt: f(x)=0 voor $x \in V$. Dus $x \notin K_2$.

Het ligt voor de hand te definieren: de distributie F is <u>regulier op de verzameling</u> V, als er een reguliere distributie is, die op V met F overeenstemt.

Dan geldt bijvoorbeeld: $(X_+^\lambda)'$ is regulier buiten de oorsprong. Evenzo is δ regulier voor $x\neq 0$.

Het is een van de belangrijkste opgaven van de theorie der distributies, zin te geven aan divergente integralen. Deze opgave kunnen we nu als volgt formuleren: bij voorgegeven f(x) (niet noodzakelijk locaal integreerbaar) een distributie F te vinden, die regulier is op iedere verzameling V, waarover f(x) integreerbaar is, terwijl bovendien geldt voor een dergelijke verzameling V: als drager $(\varphi) \subset V$, dan is $F(\varphi)=(f,\varphi)$.

<u>Voorbeelden.</u>

1. Zoals we al zagen is $(X_+^\lambda)'(\varphi)=(\lambda x^{\lambda-1},\varphi)$, mits $0 \notin$ drager φ.
2. De integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ is in het algemeen divergent; als echter $0 \notin$ drager (φ), dan convergeert hij. Gevraagd een distributie F, zodanig dat $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ voor alle φ met $0 \notin$ drager (φ).

Nu is de functie $\frac{1}{x}$ de afgeleide van $\log|x|$, voor alle $x\neq 0$; de functie $f(x)=\log|x|$ is wel locaal integreerbaar, en bepaalt dus een distributie $G(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\log|x|\,dx$. Het ligt voor de hand de distributie-afgeleide G' eens te onderzoeken:

$$G'(\varphi) = -G(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\log|x|dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi'(x)\log|x|dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\varphi'(x)\log|x|dx\right\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varphi(x)\log|x|\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \varphi(x)\log|x|\Big|_{+\varepsilon}^{+\infty} - \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon))\log\varepsilon - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right\}.$$

Aangezien $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\log \varepsilon = 0$, vinden we zo

(1) $$G'(\varphi) \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

We <u>weten</u> dat $G'(\varphi)$ een distributie is; en uit (1) blijkt dat $G'(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ voor alle φ met $0 \notin$ drager (φ). Dus G' is een distributie zoals we zoeken.

Deze distributie is overigens reeds lang bekend, en wel onder de naam <u>hoofdwaarde van Cauchy</u> van $\int \frac{\varphi(x)}{x} dx$. We zullen hem voortaan aangeven met $\frac{1}{X}$ of X^{-1}.

In plaats van (1) kan men ook nog schrijven:

$$G'(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx;$$

deze integraal bestaat voor iedere $\varphi \in (D)$, zoals uit het bovenstaand blijkt (overigens is dit ook heel eenvoudig direct in te zien).

Maar het is niet waar, dat $G'(\varphi)$ de enige distributie is die voldoet aan de gestelde eisen. Immers, het is duidelijk dat $F = G' + c\cdot\delta$ evenzeer zal voldoen, daar $F(\varphi) = G'(\varphi)$ als $0 \notin$ drager φ. Het gestelde probleem is dus niet ondubbelzinnig oplosbaar.

Als F zo'n distributie is, die voldoet aan $F(\varphi) = (f, \varphi)$ wanneer $(f, \varphi) = \int f(x)\, \varphi(x) dx$ bestaat ($f(x)$ niet locaal integreerbaar) dan noemt men F wel een <u>regularisatie</u> van (f, φ). De hoofdwaarde van Cauchy is in deze zin een regularisatie van $\int \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

Men moet er wel op letten dat een regularisatie van een divergente integraal een distributie is, die in het algemeen <u>niet regulier</u> is. Zo is bijv. de distributie X^{-1}, i.e. de regularisatie van x^{-1}, <u>singulier</u>.

Enige voor de hand liggende vragen in dit verband zijn de volgende. Als een distributie F de eigenschap heeft, dat ieder punt x een omgeving V heeft waarin F regulier is, is dan F regulier zonder meer? Algemener, kan men een distributie definiëren door hem locaal te beschrijven, in een omgeving van ieder punt? Als twee distributies F en G overeenstemmen in een omgeving van ieder punt, is dan F identiek met G? Is bijvoorbeeld de enige distributie die in ieder punt in een omgeving nul is, de nuldistributie?

Het antwoord op deze vragen is bevestigend, en wij zullen dat bewijzen. Maar daarvoor zullen we eerst enige wat dieper liggende hulpresultaten moeten afleiden.

10. Enige hulpstellingen

In de eerste plaats zullen we gebruikmaken van het feit dat iedere continue functie door oneindig vaak differentieerbare functies benaderd kan worden.

Lemma 1. Zij $f(x)$ een continue functie. Er is een schaar $f_\delta(x)$ van willekeurig vaak differentieerbare functies, zodanig dat $f_\delta(x) \to f(x)$ voor $\delta \to 0$, en zulks uniform in ieder begrensd gebied.

Bewijs.
Zij $c_{(a)} = \int \varphi_{(a)}(x)dx$, waarbij $\varphi_{(a)}(x)$ de functie is, gedefinieerd in § 3; stel $\rho_{(a)}(x) = \frac{1}{c_{(a)}} \varphi_{(a)}(x)$. De functie $\rho_{(a)}(x)$ is willekeurig vaak differentieerbaar, heeft als drager de verzameling van alle x met $\|x\| \leq a$, en voldoet aan $\int_{\|x\| \leq a} \rho_{(a)}(x)dx = 1$.

Stel nu

$$f_\delta(x) = \int_{\|x-\xi\| \leq \delta} f(\xi)\,\rho_{(\delta)}(x-\xi)d\xi\ .$$

Alle functies $f_\delta(x)$ zijn willekeurig vaak differentieerbaar, want de differentiatie mag worden uitgevoerd onder het integraalteken, en $\rho_{(\delta)}(x-\xi)$ is willekeurig vaak differentieerbaar naar x. Verder is

$$\begin{aligned} f(x)-f_\delta(x) &= f(x)\int_{\|x-\xi\| \leq \delta} \rho_{(\delta)}(x-\xi)d\xi \\ &\quad - \int_{\|x-\xi\| \leq \delta} f(\xi)\rho_{(\delta)}(x-\xi)d\xi = \\ &= \int_{\|x-\xi\| \leq \delta} \left\{ f(x)-f(\xi) \right\} \rho_{(\delta)}(x-\xi)d\xi\ . \end{aligned}$$

Omdat f(x) continu is, geldt, in een willekeurig begrensd gebied K, en bij willekeurige keuze van $\varepsilon > 0$: als δ klein genoeg is, is

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leq \varepsilon \int_{\|x-\xi\| \leq \delta} \rho_{(\delta)}(x-\xi)d\xi = \varepsilon\ .$$

Hiermee is het lemma volledig bewezen.

Als onmiddellijke toepassing kunnen we nu een stelling bewijzen die in § 3 reeds was aangekondigd:

(De reden, dat het gebruikelijke gelijkteken " = " door het wordtteken " := " is vervangen, is om de nadruk te leggen op de asymmetrie. In het boven gegeven voorbeeld is dat nu niet zo noodzakelijk, want het is duidelijk, dat de rechterkant degene is die uitgerekend moet worden, die dus definieert en dat dus de linkerkant gedefinieerd wordt. Maar in het geval van copiering

f:= a

is het wel gewenst, dat men op de asymmetrie de nadruk legt. De tweede reden is, dat het au fond ook wel iets correcter is, om tot uitdrukking te laten komen, dat het hier gaat om een handeling, die uitgevoerd moet worden en niet, zoals bij het gelijkteken, om een relatie, waaraan al of niet voldaan kan zijn. Willen wij in een zeker stadium van de berekening een of ander tussenresultaat, zeg e, van teken wisselen, dan doen we dit met de assignment statement

e:= - e ;

hadden we hier in plaats van het wordtteken het gelijkteken gebruikt, dan had er een vergelijking gestaan met als enige wortel e = 0, d.w.z. net de waarde, waarvoor tekenwisseling een zinloze operatie is.)

Een speciale vorm van assignment statement is de z.g. herhaalde assignment, waarbij de waarde van een expressie aan een aantal variabelen wordt toegekend, b.v.

" x:= y:= z:= 1 " .

Dit betekent, dat zowel x, als y als z de waarde 1 krijgen.

<u>Stelling.</u> Iedere $\varphi \in (C)$ is de limiet in (C) van een rij $\{\varphi_n\}$ uit (D).

<u>Bewijs.</u>

Als $\varphi \in (C)$, d.w.z. als φ niet alleen continu is, maar ook een begrensde drager K heeft, dan hebben ook de functies $\varphi_\delta(x)$, geconstrueerd als in het bewijs van lemma 1, begrensde dragers: de drager van $\varphi_\delta(x)$ is nl. bevat in de δ-omgeving van K. Dus behoren al deze φ_δ tot (D). Als $\delta_n \downarrow 0$, en als K_1 de δ_1-omgeving is van K, dan zijn de dragers van alle φ_{δ_n} bevat in K_1, en $\varphi_{\delta_n} \to \varphi$, uniform in K_1; m.a.w. $\varphi_{\delta_n} \to \varphi$ in (C).

We kunnen de inhoud van deze stelling ook zó weergeven: (D) ligt overal dicht in (C).

<u>Lemma 2.</u> Zij A een begrensde gesloten verzameling, en U een open verzameling die A omvat. Er bestaat een $\varphi \in (D)$, die voldoet aan de volgende drie voorwaarden:

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \text{ voor alle } x; \quad \varphi(x)=1 \text{ als } x \in A; \quad \varphi(X)=0 \text{ als } x \notin U.$$

<u>Bewijs.</u>

Omdat de gesloten verzameling A begrensd is, is er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat de ε-omgeving van A geheel in U is bevat. (Dit volgt uit de overdekkingsstelling van Heine-Borel.) Zij A_1 de afsluiting van de $\frac{\varepsilon}{3}$-omgeving van A, en U_1 de open $\frac{2\varepsilon}{3}$-omgeving van A. De continue functie $\rho(x) = \min\limits_{y \notin U_1} \|x-y\|$ is dan positief op U_1, en bezit een positief minimum μ op A_1. Ook de functie

$$f(x) = \min\left\{\frac{1}{\mu}\rho(x), 1\right\}$$

is continu, is nul buiten U_1, en bovendien is $f(x)=1$ voor $x \in A_1$ en $0 \leq f(x) \leq 1$ voor alle x. Zij $f_\delta(x)$ gedefinieerd als in het bewijs van lemma 1. Neem $\varphi(x) = f_{\frac{\varepsilon}{3}}(x)$.

In ieder geval is $\varphi \in (D)$. Daar $0 \leq f(x) \leq 1$, is

$$0 \leq \varphi(x) = \int\limits_{\|x-\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}} f(\xi)\rho_{(\frac{\varepsilon}{3})}(x-\xi)d\xi \leq \int\limits_{\|x-\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}} \rho_{(\frac{\varepsilon}{3})}(x-\xi)d\xi = 1.$$

Als $x \in A$, dan is $\xi \in A_1$ voor iedere ξ met $\|x-\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, dus $f(\xi)=1$ voor $\|x-\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Voor alle $x \notin A$ is daarom $\varphi(x)=1$. Tenslotte, als $X \notin U$, en $\|x-\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, dan is $\xi \notin U_1$, dus $f(\xi)=0$. Daaruit volgt: $\varphi(x)=0$ als $x \notin U$.

Lemma 3. Zij U een open verzameling in R^k, en zij $\{U_i\}_{i\in I}$ een stelsel open verzamelingen met $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Er bestaat een rij begrensde open verzamelingen $V_1, V_2, V_3, \ldots$ met de volgende eigenschappen:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = U$;

(2) bij iedere n is er een i zodat $\overline{V}_n \subset U_i$;

(3) ieder punt $x \in U$ heeft een omgeving W die met slechts eindig veel V_n punten gemeen heeft.

Bewijs.

Zij $x \in U$. Er is een $i \in I$ zodat $x \in U_i$. Verder zijn er een punt x_o met rationale coördinaten, en een rationale $\varepsilon > 0$, zodanig dat $\|x-x_o\| < \varepsilon$, en $\xi \in U_i$ voor alle ξ met $\|\xi - x_o\| \leq \varepsilon$. Zij $W(x)$ de verzameling van alle ξ met $\|x-\xi\| < \varepsilon$; $W(x)$ is een open omgeving van x_1 en $\overline{W(x)} \subset U_i$.

De collectie van alle $W(x)$, $x \in U$, is aftelbaar, daar er slechts aftelbaar veel rationale x_o en ε zijn; hij kan dus geschreven worden als een rij $W_1, W_2, W_3, \ldots$. Er geldt: $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = U$.

We definiëren vervolgens een rij begrensde open verzamelingen $G_1, G_2, \ldots$ met de eigenschap

$$(*) \qquad \bigcup_{j=1}^{n} \overline{W_j} \subset G_n \subset \overline{G}_n \subset G_{n+1}, \text{ voor alle } n.$$

De begrensde gesloten verzameling $\overline{W_1}$ kan door eindig veel W_n worden overdekt (overdekkingsstelling van Heine-Borel); zeg door $W_{n_1}, W_{n_2}, \ldots, W_{n_p}$. Zij $G_1 = \bigcup_{j=1}^{p} W_{n_j}$. Indien de begrensde open verzameling G_n reeds is gedefinieerd, beschouw dan $\overline{G_n} \cup \overline{W_{n+1}}$. Dit is weer een begrensde gesloten verzameling, die kan worden overdekt door eindig veel W_n; we definiëren G_{n+1} als de vereniging van deze eindig vele W_n. Het is duidelijk dat dan alle G_n open en begrensd zijn, en voldoen aan $(*)$. Gemakshalve definiëren we ook nog: $G_n = \emptyset$ als $n \leq 0$.

Voor iedere n is de verzameling $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$ begrensd en gesloten, en bevat in de open verzameling $G_{n+1} \setminus \overline{G}_{n-2}$. Als $x \in \overline{G}_n \setminus G_{n-1}$, dan is $V(x) = W(x) \cap (G_{n+1} \setminus \overline{G}_{n-2})$ een open omgeving van x, en volgens de stelling van Heine-Borel kan $\overline{G}_n \setminus G_{n-1}$ worden overdekt door eindig veel $V(x)$, zeg door de verzamelingen $V(x_{n,j}) = V_{n,j}$ $(1 \leq j \leq p_n)$. De collectie van alle $V_{n,j}$, met $n=1,2,3,\ldots$, en $1 \leq j \leq p_n$ voor iedere n, is aftelbaar, en is dus te schrijven als een rij $V_1, V_2, V_3, \ldots$. We zullen aantonen dat deze rij de eigenschappen (1), (2) en (3) heeft. In ieder geval zijn de V_n open; ze zijn ook begrensd, omdat de $W(x)$ begrensd zijn.

Eigenschap (1). Zij $x \in U$. Er is een m zodat $x \in \overline{G}_m \setminus G_{m-1}$. Dan is $x \in V_{m,j}$, voor een j met $1 \leq j \leq p_m$; en $V_{m,j}$ is een V_n. Dus $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Eigenschap 2. Iedere V_n is bevat in een $W(x)$. Voor iedere $W(x)$ is er een i zodat $\overline{W(x)} \subset U_i$. Voor die i is ook $\overline{V}_n \subset U_i$.

Eigenschap 3. Zij x willekeurig in U. Zij m het eerste gehele getal zodat $x \in G_m$. Dan is $x \notin G_{m-1}$, dus zeker $x \notin \overline{G}_{m-2}$. De open verzameling $W = G_m \setminus \overline{G}_{m-2}$ is dus een omgeving van x. We zullen bewijzen dat er slechts eindig veel V_n zijn waarvoor $W \cap V_n \neq \emptyset$.

Iedere $V_{n,j}$ is bevat in $G_{n+1} \setminus \overline{G}_{n-2}$, en kan daarom alleen punten met W gemeenschappelijk hebben als $m-2 \leq n \leq m+1$. Er zijn echter slechts eindig veel $V_{n,j}$ met $m-2 \leq n \leq m+1$ en telkens $1 \leq j \leq p_n$. D.w.z. er zijn slechts eindig veel V_n met $W \cap V_n \neq \emptyset$.

Het volgende lemma geeft het resultaat waarom het ons gaat. De eigenlijke moeilijkheden bij het bereiken van dit resultaat hebben we inmiddels achter de rug, nl. in het bewijs van lemma 3.

Lemma 4. Zij U een open verzameling in R^k, en zij $\{U_i\}_{i \in I}$ een stelsel open verzamelingen met $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Dan is er een stelsel $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ van oneindig vaak differentieerbare functies (geïndiceerd door dezelfde indexverzameling I) met de volgende eigenschappen:

(1) $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, voor alle $x \in U$ en alle $i \in I$;

(2) drager $(\alpha_i) \subset U_i$, voor alle $i \in I$;

(3) op iedere begrensde deelverzameling van U zijn slechts eindig veel α_i niet identiek nul; en $\sum_i \alpha_i(x) \equiv 1$ in U.

Bewijs.

Zij $V_1, V_2, \ldots$ een rij begrensde verzamelingen als beschreven in lemma 3, behorende bij het stelsel $\{U_i\}_{i \in I}$. Zij $W_1, W_2, \ldots$ een rij begrensde open verzamelingen, als beschreven in lemma 3, maar nu behorende bij het stelsel $\{V_n\}$. Voor iedere m zij $\sigma(m)$ een natuurlijk getal zodat $\overline{W}_m \subset V_{\sigma(m)}$.

Zij $\varphi_m \in (D)$ zodat $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ voor alle x; $\varphi_m(x)=1$ als $x \in \overline{W}_m$; en $\varphi_m(x)=0$ als $x \notin V_{\sigma(m)}$. Zo'n φ_m bestaat, voor iedere m, op grond van lemma 2.

Als nu $x \in U$, dan is er een omgeving W van x die slechts eindig veel V_n ontmoet, zeg $V_{n_1},\dots,V_{n_p}$. Dus is $\varphi_m(y)=0$, voor alle $y \in W$, zodra $\sigma(m)\neq n,\dots,n_p$. In iedere $x \in U$ is zodoende $\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x)$ gedefinieerd, en deze som is in een volle omgeving van x een eindige som; dus is $\psi(x)$ zelfs, evenals alle φ_m, oneindig vaak differentieerbaar. Voor iedere $x \in U$ is er een m zodat $x \in W_m$, en dus $\varphi_m(x)=1$; dus $\psi(x) > 0$ voor alle x. Zij $\psi_m(x) = \dfrac{\varphi_m(x)}{\psi(x)}$, voor $x \in U$. Ook iedere $\psi_m(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar; $\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x)=1$, voor alle $x \in U$; drager $(\psi_m) \subset W_m$; en iedere $x \in U$ heeft een omgeving waar slechts eindig veel ψ_m niet identiek nul zijn.

Voor iedere m bestaat een $i(m) \in I$ zodat $W_m \subset U_{i(m)}$. We stellen, voor $i \in I$: $\alpha_i(x) = \sum_{i(m)=i} \psi_m(x)$. Dan is $\alpha_i(x)$ weer willekeurig vaak differentieerbaar. Bovendien is de drager van α_i de vereniging van de dragers van de ψ_m met $i(m)=i$, en dus bevat in U_i. De functies α_i voldoen dus aan alle eisen.

11. Locale eigenschappen (vervolg).

Zij U een open verzameling in R^k. Met (D_U) geven we aan de deelverzameling van (D) die bestaat uit al die $\varphi \in (D)$, waarvan de drager in U is bevat. We kunnen dan ook continue lineaire functionalen op (D_U) beschouwen, functionalen dus die alleen voor functies φ met drager $(\varphi) \subset U$ gedefinieerd behoeven te zijn. Dergelijke functionalen noemen we <u>distributies</u>, <u>gedefinieerd</u> op <u>U</u>, of kortweg distributies op U. Als F een gewone distributie is, dan kan F ook altijd beschouwd worden als een distributie op U. Omgekeerd echter kan een distributie op U i.h.a. niet worden uitgebreid tot een distributie op de gehele ruimte R^k.

De volgende stelling is uiterst belangrijk; hij geeft de aansluiting tussen de globale en de locale beschrijving van een distributie, en maakt het mogelijk de vragen, gesteld in § 9, te beantwoorden.

<u>Stelling 1.</u> Zij U een open verzameling, en zij $\{U_i\}_{i\in I}$ een stelsel open verzamelingen met $\bigcup_{i\in I} U_i=U$. Zij verder, voor iedere $i \in I$, F_i een distributie, gedefinieerd op U_i. Stel tenslotte dat voor alle $i,j \in I$ geldt: als $U_i \cap U_j \neq 0$, dan stemmen F_i en F_j overeen op $U_i \cap U_j$.

Dan is er één en slechts één distributie F op U, die op iedere U_i overeenstemt met F_i.

<u>Bewijs.</u>

Stel $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ is een stelsel functies, behorend bij het stelsel $\{U_i\}_{i\in I}$, zoals beschreven in § 10, lemma 4. Zij K_i de drager van $\alpha_i(x)$. Voor iedere $\varphi \in (D_U)$ geldt

$$\varphi(x) = \sum_i \alpha_i(x)\,\varphi(x), \qquad \text{voor alle } x \in R^k.$$

De som in het rechterlid is een eindige som, voor iedere $x \in R^k$, want in iedere begrensde verzameling K zijn slechts eindig veel $\alpha_i(x)$ niet identiek nul.

Indien de distributie F bestaat, zal hij dus moeten voldoen aan

$$(1) \qquad F(\varphi) = \sum_i F(\alpha_i\varphi) = \sum_i F_i(\alpha_i\varphi).$$

Hieruit volgt dus al, dat F, indien hij bestaat, ondubbelzinnig bepaald is. Maar omgekeerd wordt door (1) een lineaire functionaal vastgelegd, die gedefinieerd is voor alle $\varphi \in (D_U)$. En deze functionaal is continu in (D_U); want stel de functies $\varphi_n \in (D_U)$ convergeren, in (D), naar $\varphi \in (D_U)$. Dan is er een begrensde verzameling K die alle dragers bevat. Voor iedere $i \in I$ zijn de dragers van de functies $\alpha_i\varphi_n$ en $\alpha_i\varphi$ bevat in $K \cap K_i$. Dus $\alpha_i\varphi_n \to \alpha_i\varphi$, in (D). Dan geldt ook: $F_i(\alpha_i\varphi_n) \longrightarrow F_i(\alpha_i\varphi)$, want F_i is een distributie op U_i, en $K \cap K_i \subset U_i$. Tenslotte zijn slechts eindig veel α_i, zeg $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_s}$, niet identiek nul in K, zodat

$$F(\varphi_n) = F_{i_1}(\alpha_{i_1}\varphi_n) + \ldots + F_{i_s}(\alpha_{i_s}\varphi_n) \to F_{i_1}(\alpha_{i_1}\varphi) + \ldots + F_{i_s}(\alpha_{i_s}\varphi) = F(\varphi).$$

Door (1) wordt dus een distributie op U gedefinieerd. We moeten alleen nog aantonen, dat deze distributie op U_i overeenstemt met F_i, voor iedere $i \in I$.

Neem dus een $\varphi \in (D)$ waarvoor drager $(\varphi) \subset U_i$. We moeten bewijzen: $F(\varphi)=F_i(\varphi)$. Voor iedere $j \in I$ is drager $(\alpha_j\varphi) \subset U_i \cap U_j$; omdat F_i en F_j overeenstemmen op $U_i \cap U_j$, is dus steeds $F_i(\alpha_j\varphi) = F_j(\alpha_j\varphi)$; en dus geldt

$$F_i(\varphi) = F_i\Big(\sum_j \alpha_j\varphi\Big) = \sum_j F_i(\alpha_j\varphi) = \sum_j F_j(\alpha_j\varphi) = F(\varphi).$$

De distributie F voldoet dus inderdaad aan de gestelde eisen.

Als alle $F_i=0$, dan voldoet blijkbaar de nuldistributie aan de eisen, en aangezien F door de F_i ondubbelzinnig bepaald is, geldt dus:

<u>Gevolg 1.</u> Zij F een distributie. Als ieder punt een omgeving heeft waarop F nul is, dan is F de nuldistributie.

<u>Gevolg 2.</u> Stel F en G zijn twee distributies. Als ieder punt een omgeving heeft waarop F en G overeenstemmen, dan geldt F=G.

Evenzo blijkt nu eenvoudig:

<u>Gevolg 3.</u> Zij F een distributie. Als ieder punt een omgeving heeft waarop F regulier is, dan is F een reguliere distributie.

In § 9 is ook gedefinieerd het begrip <u>drager</u> van een distributie F. Een punt x behoort dan en slechts dan niet tot drager (F), als x een omgeving heeft waarop F nul is. Uit stelling 1 volgt nu onmiddellijk:

<u>Gevolg 4.</u> Het complement van de drager van een distributie F is de grootste open verzameling waarop F nul is.

Als we de drager van F even K noemen, en zijn complement U, dan zegt gevolg 4 niets anders dan dat $F(\varphi)=0$ voor iedere $\varphi \in (D)$ met drager $(\varphi) \subset U$. Anders gezegd: als $\varphi(x)=0$ op een omgeving van de drager van F, dan is $F(\varphi)=0$. We kunnen dit ook als volgt formuleren.

<u>Stelling 2.</u> Zij F een distributie. Voor iedere $\varphi \in (D)$ waarvan de drager geen punt gemeen heeft met de drager van F, geldt: $F(\varphi) = 0$.

Hieruit volgt ook dat een willekeurige verandering van een functie φ buiten een omgeving van de drager van F geen invloed heeft op de waarde $F(\varphi)$. Want zo'n verandering komt er op neer dat men bij φ een functie ψ optelt, die in een omgeving van de drager van F nul is, zodat $F(\varphi+\psi)=F(\varphi)+F(\psi)=F(\varphi)$, omdat $F(\psi)=0$.

De volgende stelling zegt dat het differentiëren van een distributie in feite een locaal proces is.

<u>Stelling 3.</u> Als twee distributies F en G op een verzameling U overeenstemmen, dan stemmen ook al hun distributie-afgeleiden overeen op U.

<u>Bewijs.</u>

Het is voldoende te bewijzen:als F nul is op U, dan is $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ ook nul op U. Zij $\varphi \in (D)$ met drager $(\varphi) \subset U$. Dan is ook drager $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) \subset U$; dus

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\varphi) = -F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = 0,$$

omdat F nul is op U.

Als dus $f(x)$ een locaal integreerbare functie is, met bijbehorende distributie F, en $f(x)$ is op een zeker gebied U differentieerbaar, dan sluit de distributie-afgeleide $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ op U aan bij de functie $\frac{\partial f}{\partial x_j}$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)(\varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right),$$

voor alle $\varphi \in (D)$ met drager $(\varphi) \subset U$. Vg. de voorbeelden in § 5.

<u>Gevolg.</u> Zij F een distributie. De dragers van $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ enz. zijn allen bevat in de drager van F.

Zo hebben bijvoorbeeld alle afgeleiden van de distributie δ_{x_0} het punt x_0 als drager. Men kan overigens ook een omkering hiervan bewijzen: iedere distributie, waarvan de drager bestaat uit één punt x_0, is een eindige lineaire combinatie van δ_{x_0} en zijn afgeleiden.

12. Convergentie van distributies

Ook in de ruimte (D^*) van alle distributies kan een convergentiebegrip worden ingevoerd.

Definitie. Een rij F_n van distributies heet convergent, met limietdistributie F, indien voor iedere $\varphi \in (D)$ geldt:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(\varphi) = F(\varphi).$$

Vervolgens kan dan convergentie van een reeks van $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ worden gedefinieerd: deze reeks heet convergent, met som F, indien de rij G_n, $G_n = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu$, convergeert naar F.

Deze limietvorming is lineair, d.w.z. als $F_n \to F$ en $G_n \to G$, dan $aF_n + bG_n \to aF + bG$, in (D^*); analoog voor reeksen. Onder algemene voorwaarden sluit de definitie ook weer aan bij de overeenkomstige definitie voor (locaal integreerbare) functies. Bijvoorbeeld geldt

Stelling 1. Stel $f(x)$, $f_1(x), f_2(x), \ldots$ zijn locaal integreerbare functies, met bijbehorende distributies $F, F_1, F_2, \ldots$. Indien $f_n(x) \to f(x)$ uniform op ieder begrensd gebied, dan $F_n \to F$. Dezelfde conclusie geldt, indien $f_n(x) \to f(x)$ bijna overal, terwijl er bovendien een vaak locaal integreerbare functie is die de $|f_n(x)|$ begrenst, en ook als de rij $f_n(x)$ monotoon is.

Bewijs.

In al deze gevallen geldt

$$F_n(\varphi) = (f_n, \varphi) = \int f_n(x)\, \varphi(x)dx \to \int f(x)\, \varphi(x)dx = (f, \varphi) = F(\varphi).$$

Echter geldt niet algemeen: $F_n \to F$ zodra $f_n(x) \to f(x)$.

Voorbeeld 1. Zij $f_n(x)$ als volgt gedefinieerd:

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \text{ als } |x| \geq \frac{1}{n}\,; \qquad f_n(x) = 0 \text{ als } |x| < \frac{1}{n} \quad (n=1,2,\ldots).$$

De rij $f_n(x)$ convergeert naar de functie $\frac{1}{x}$ (behalve in x=0). Ook de bijbehorende rij reguliere distributies convergeert, maar de limietdistributie is niet regulier:

$$F_n(\varphi) = (f_n, \varphi) = \int_{|x| \geq \frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \longrightarrow X^{-1}(\varphi).$$

Voorbeeld 2. Zij $f_n(x)$ de locaal integreerbare functie, gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{1}{2} n \text{ als } |x| \leq \frac{1}{n}\,; \qquad f_n(x) = 0 \text{ als } |x| > \frac{1}{n}\,.$$

De rij $f_n(x)$ convergent voor $x \neq 0$ naar de nulfunctie; de bijbehorende rij distributies convergeert naar δ :

$$F_n(\varphi) = (f_n,\varphi) = \tfrac{1}{2}n \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} \varphi(x)dx \to \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Deze twee voorbeelden tonen beiden dat een singuliere distributie een limiet kan zijn van een rij reguliere distributies. Wij zullen later bewijzen dat dit algemeen het geval is: <u>iedere</u> singuliere distributie is te schrijven als limiet van een rij reguliere distributies.

Een bijzonder prettige eigenschap van de convergentie in de ruimte der distributies is, dat convergente rijen en reeksen termsgewijs gedifferentieerd mogen worden:

<u>Stelling 2.</u> Als de rij distributies F_n convergeert naar de distributie F, dan convergeert ook de rij F_n', en wel naar de distributie F'.

Voor willekeurige $\varphi \in (D)$ geldt

$$F_n'(\varphi) = -F_n(\varphi') \longrightarrow -F(\varphi') = F'(\varphi).$$

<u>Gevolg</u>. Als $F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, dan is $F' = \sum_{n=1}^{\infty} F_n'$.

<u>Voorbeeld 3.</u> Zij $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, en $F_n(\varphi) = (f_n,\varphi)$. Aangezien $f_n(x) \to 0$, uniform, geldt volgens stelling 1: $F_n \to 0$. Dus ook $F_n' \to 0$; hierbij is F_n' de reguliere distributie behorende bij $f_n'(x) = \cos nx$. De <u>functies</u> $f_n'(x)$ echter <u>convergeren</u> <u>niet</u>.

Als we voortaan de reguliere distributie (f,φ) (bij locaal integreerbare $f(x)$) aangeven met $\left[f(x) \right]$, dan geldt dus

$$\left[\cos nx \right] \longrightarrow 0, \text{ voor } n \to \infty .$$

Dit is natuurlijk ook rechtstreeks in te zien: als $\varphi \in (D)$, en de drager van φ is bevat in het interval $[-a,a]$, dan geldt

$$\left[\cos nx \right](\varphi) = \int_{-a}^{a} \cos nx \, \varphi(x)dx = \frac{1}{n} \int_{-a}^{a} \sin nx \, \varphi'(x)dx \longrightarrow 0.$$

<u>Voorbeeld 4.</u> Zoals bekend, convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ overal, met als som de functie $f(x)$, periodiek met periode 2π , die voor $0 < x < 2\pi$ de waarde $\frac{1}{2}(\pi - x)$ heeft.

De partiële sommen zijn uniform begrensd; dus volgt uit stelling 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin nx \right] = \left[f(x) \right] ,$$

en door differentiëren volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\cos nx] = [f(x)]'.$$

Omdat de enige discontinuiteiten van $f(x)$ sprongen zijn (ter grootte π) kunnen we de distributie-afgeleide $[f(x)]'$ berekenen (vgl. § 5 voorbeeld 3):

$$[f(x)]' = [f'(x)] + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n} = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n}.$$

Dus geldt

(2) $$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\cos nx] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n}.$$

Nogmaals differentiëren geeft bv.

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\,[\sin nx] = -\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta'_{2\pi n}.$$

Uit (2) kunnen we nog meer afleiden. Daar nl.

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx},$$

volgt dat

(4) $$\left(1+2 \sum_{n=1}^{\infty} [\cos nx]\right)(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-inx} dx.$$

Als we nu schrijven

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx$$

($\psi(y)$ is de Fourier-getransformeerde van $\varphi(x)$) dan vinden we uit (2) en (4)

(5) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\pi n).$$

Dit is een speciaal geval van de somformule van Poisson.

Voorbeeld 5. Uit de convergentie, voor $x \neq k.2\pi$, van de reeks

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$$

en het feit dat de partiële sommen weer uniform begrensd zijn, volgt (stelling 1 en stelling 2) dat

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} [\sin nx] = \left[\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|\right]'.$$

Hoewel de gewone afgeleide $(\log|2 \sin \frac{x}{2}|)' = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ bestaat, kunnen we het rechterlid van (7) toch niet door $\frac{1}{2}[\operatorname{cotg} \frac{x}{2}]$ vervangen. De functie $\frac{1}{2}$ cotg $\frac{x}{2}$ is nl. niet locaal integreerbaar, en bepaalt dus niet een distributie. Daarentegen kunnen we de distributie in (7) beschouwen als een regularisatie van de divergente integraal $\frac{1}{2}\int \varphi(x)\text{cotg } \frac{1}{2}x\, dx$.

De voorbeelden 5 en 6 tonen dat trigonometrische reeksen, beschouwd als reeksen van distributies, veel gemakkelijker convergeren dan als reeksen van functies. We kunnen zelfs eenvoudig de volgende belangrijke stelling bewijzen.

Stelling 3. De reeks distributies

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n[\cos nx] + b_n[\sin nx]) \tag{8}$$

convergeert reeds, als er een constante $A > 0$ en een natuurlijk getal k bestaan, zodanig dat voor alle n

$$|a_n| \leq An^k \ ; \quad |b_n| \leq An^k.$$

Bewijs.

De reeks van functies

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^{2k}} \cos nx + \frac{b_n}{n^{2k}} \sin nx \right)$$

wordt absoluut gemajoreerd door de convergente reeks $2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, en is dus in ieder begrensd interval absoluut en uniform convergent. Volgens stelling 1 geldt dan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^{2k}} [\cos nx] + \frac{b_n}{n^{2k}} [\sin nx] \right)$$

convergeert, en door $2k$ maal in distributionele zin te differentiëren, en stelling 2 toe te passen, volgt de convergentie van (8).

Opmerking. Behalve rijen F_n kan men natuurlijk ook families F_ε van distributies beschouwen. Men zegt bijv. dat F_ε convergeert naar F voor $\varepsilon \to \varepsilon_0$ indien $F_\varepsilon(\varphi) \to F(\varphi)$ voor $\varepsilon \to \varepsilon_0$, voor iedere $\varphi \in (D)$. Ook in dit geval geldt weer: als $F_\varepsilon \to F$ voor $\varepsilon \to \varepsilon_0$, dan ook $F'_\varepsilon \to F'$, voor $\varepsilon \to \varepsilon_0$.

13. Sterke convergentie

Het in § 12 ingevoerde convergentiebegrip wordt wel zwakke convergentie genoemd. Dit in tegenstelling tot de zgn. sterke convergentie, die niet zo gemakkelijk gedefinieerd kan worden, maar die uit theoretisch oogpunt de voorkeur verdient.

Verreweg het belangrijkste resultaat in dit verband is, dat voor rijen beide convergentie-begrippen samenvallen. Zodra we niet meer rijen beschouwen, maar bijv. families F_ε, zal i.h.a. sterke convergentie niet meer uit zwakke convergentie volgen.

We beperken ons in deze § tot distributies in R_1; deze beperking is niet essentieel.

<u>Definitie</u>. Een deelverzameling V van (D) heet <u>begrensd</u> indien voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(1) Er is een begrensde verzameling die de drager van alle $\varphi \in V$ bevat.

(2) Voor iedere n=0,1,2,... is de verzameling van alle functies $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$, $\varphi \in V$, gelijkmatig begrensd.

(Een verzameling V van functies heet gelijkmatig begrensd als er een getal A is zodat $|\varphi(x)| \leqslant A$ voor alle $\varphi \in V$ en alle $x \in R_k$.)

<u>Definitie</u>. Stel $F, F_1, F_2, \ldots$ zijn distributies. Men zegt dat de rij F_n <u>sterk convergeert</u> naar F (notatie: $F_n \Rightarrow F$) indien

(1) $F_n \longrightarrow F$; d.w.z. $F_n(\varphi) \longrightarrow F(\varphi)$ voor alle $\varphi \in (D)$.

(2) Op iedere begrensde verzameling $V \subset (D)$ convergeert $F_n(\varphi)$ gelijkmatig naar $F(\varphi)$; d.w.z. bij iedere begrensde $V \subset (D)$ en iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een getal $N(\varepsilon, V)$ zodanig dat $|F_n(\varphi) - F(\varphi)| < \varepsilon$ voor alle $\varphi \in V$ en alle $n \geqslant N$.

Analoog wordt gedefinieerd sterke convergentie $F_\varepsilon \Rightarrow F$ voor $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$. Het is duidelijk dat sterke convergentie steeds zwakke convergentie impliceert. Het feit dat voor rijen het omgekeerde geldt (iedere zwak convergente rij distributies is sterk convergent) is vrij moeilijk te bewijzen. De stellingen die daartoe nodig zijn, zijn echter ook op zichzelf van belang.

De eerste stelling verscherpt a.h.w. de continuiteitseigenschap. Dat een distributie F continu is, betekent (per def.): als $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in (D), dan $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$. Natuurlijk is het denkbaar dat <u>niet</u> $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ in (D), en toch nog $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$. Een dergelijke situatie wordt in stelling 1 beschreven. (De notatie (D_K) die hier gebruikt wordt, is gedefinieerd in § 11; $\varphi \in (D_K)$ betekent: $\varphi \in (D)$ en drager $(\varphi) < K$).

<u>Stelling 1.</u> Zij F een distributie, en K een begrensd interval. Er bestaat een geheel getal $r \geqslant 0$ zodanig dat voor iedere rij $\varphi_n \in (D_K)$ met $\varphi_n^{(r)}(x) \longrightarrow 0$, uniform op K, reeds geldt: $F(\varphi_n) \rightarrow 0$.

Bewijs.

Stel zo'n r bestaat niet. Voor k=0,1,2,... bestaat er dan een rij $\varphi_{k,n} \in (D_K)$ zodanig dat

$$\varphi_{k,n}^{(k)}(x) \longrightarrow 0, \text{ voor } n \longrightarrow \infty, \text{ uniform op } K;$$
$$\lim\sup |F(\varphi_{k,n})| = \alpha_k > 0.$$

Zij $\psi_{k,n}(x)$ een deelrij van de rij $\frac{2}{\alpha_k} \cdot \varphi_{k,n}(x)$ waarvoor geldt

(1) $$|F(\psi_{k,n})| > 1, \text{ voor alle } n.$$

Natuurlijk geldt ook $\psi_{k,n}^{(k)}(x) \longrightarrow 0$, uniform op K; en hieruit volgt dan: $\psi_{k,n}^{(i)}(x) \longrightarrow 0$ voor $n \longrightarrow \infty$, uniform op K, als i=0,1,...,k.

Construeer nu een rij $\chi_n(x) \in (D_K)$ als volgt: zij

$$\chi_k(x) = \psi_{k,n_k}(x),$$

waarbij n_k zo groot is gekozen dat voor alle $x \in K$

$$|\psi_{k,n_k}^{(i)}(x)| \leq \frac{1}{k}, \text{ voor } i=0,1,\ldots,k.$$

Dan geldt: $\chi_k \longrightarrow 0$ in (D), en dus $F(\chi_k) \longrightarrow 0$, in strijd met (1), waaruit immers volgt dat $|F(\chi_k)| > 1$, voor alle k.

Laten we invoeren de notatie $\|\varphi\| = \max_x |\varphi(x)|$. Voor iedere $\varphi \in (D)$ is $\|\varphi\|$ een eindig getal, omdat φ een begrensde drager heeft. Uit stelling 1 kunnen we afleiden:

Gevolg. Er is ook een A > 0 zodanig dat voor alle $\varphi \in (D_K)$

(2) $$|F(\varphi)| \leq A . \|\varphi^{(r)}\| .$$

Bewijs.

Stel zo'n constante A bestaat niet. Dan is er een rij $\varphi_n \in (D_K)$ met $F(\varphi_n) > n\|\varphi_n^{(r)}\|$. Zij

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{n.\|\varphi_n^{(r)}\|};$$

dan geldt: $\|\psi_n^{(r)}\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$; dus, volgens stelling 1: $F(\psi_n) \longrightarrow 0$, in strijd met $F(\psi_n) > 1$, voor alle n.

Stelling 2. Zij S een verzameling van distributies, en zij K een begrensd interval. Stel voor iedere $\varphi \in (D_K)$ is de verzameling van de getallen $F(\varphi)$, $F \in S$, begrensd. Dan is er een A > 0 en een geheel getal $r \geq 0$, zodanig dat voor alle $F \in S$ en alle $\varphi \in (D_K)$

(3) $$|F(\varphi)| \leq A.\| \varphi^{(r)} \| .$$

Bewijs.

Voor $\varphi \in (D_K)$ zij M_φ een getal zodanig dat $|F(\varphi)| \leq M_\varphi$, voor alle $F \in S$.

Neem aan dat de stelling onjuist is. Dan bestaan er een rij $\varphi_k \in (D_K)$ en een rij $F_k \in S$ $(k=0,1,2,\ldots)$ zodanig dat

(a) $\| \varphi_k^{(n)} \| < \frac{1}{2^k}$, voor $n=0,1,\ldots,k$;

(b) $F_k(\varphi_k) > k+1 + \sum_{m=0}^{k-1} M_{\varphi_m}$;

(c) $|F_m(\varphi_k)| < \frac{1}{2^k}$, als $m < k$.

Voor $k=0$ vervalt de voorwaarde (c), dus φ_o en F_o zijn eenvoudig te kiezen, op grond van de veronderstelling dat de stelling onjuist is. Stel φ_m en F_m zijn reeds geschikt gekozen, voor $m=0,1,\ldots,k-1$. Volgens het gevolg van stelling 1 bestaan er voor elk van deze m een A_m en een r_m zodat

$$|F_m(\varphi)| \leq A_m . \| \varphi^{(r_m)} \| \quad , \text{ voor alle } \varphi \in (D_K).$$

Als we nu φ_k zó kiezen dat voor $m=0,1,\ldots,k-1$

$$\| \varphi_k^{(r_m)} \| < \frac{1}{2^k . A_m} ,$$

dan zal φ_k zeker aan (c) voldoen. Gecombineerd met (a) geeft dit voor φ_k een voorwaarde van de vorm

(4) $$\| \varphi_k^{(r)} \| < C,$$

waarbij C een geschikte constante is, en $r=\max(r_o,r_1,\ldots,r_{k-1},k)$. Omdat aangenomen is, dat de stelling onjuist is, is het mogelijk φ_k zó te kiezen, dat niet alleen aan (4) is voldaan, maar ook aan (b), voor zekere $F_k \in (D)$.

Definieer tenslotte

(5) $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

De partiële sommen van de reeks in (5) convergeren naar φ in (D), op grond van (a), en dus is

$$|F_k(\varphi)| = \lim_{n \to \infty} \left| F_k \left(\sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x) \right) \right| > k,$$

voor alle k. Voor deze φ is dus de verzameling van alle getallen $F(\varphi)$, $F \in S$, niet begrensd, in tegenspraak tot het gegeven.

<u>Gevolg 1.</u> Zij S een verzameling van distributies met de eigenschap, dat voor iedere $\varphi \in (D)$ de verzameling van alle $F(\varphi)$, $F \in S$, begrensd is. Bij iedere begrensde verzameling V in (D) bestaat dan een constante $A > 0$ zodat voor alle $F \in S$ en $\varphi \in V$

(6) $$|F(\varphi)| \leqslant A.$$

<u>Bewijs.</u>
Aangezien V begrensd is, is er een eindig interval K zodat $V \subset (D_K)$. Volgens stelling 2 zijn er een $A_1 > 0$ en een gehele $r \geqslant 0$ zodanig dat voor alle $\varphi \in V$ en $F \in S$

$$|F(\varphi)| \leqslant A_1 \cdot \|\varphi^{(r)}\| ,$$

omdat V begrensd is, is er een $A_2 > 0$ zodat voor alle $\varphi \in V$ geldt: $\|\varphi^{(r)}\| \leqslant A_2$. Neem $A = A_1 . A_2$; dan geldt (6) voor alle $F \in S$ en $\varphi \in V$.

<u>Opmerking.</u> Dit is een analogon van de stelling van Banach-Steinhaus in de theorie der Banachruimten.

<u>Gevolg 2.</u> Zij S een verzameling van distributies met de eigenschap dat voor iedere $\varphi \in (D)$ de verzameling van de getallen $F(\varphi)$, $F \in S$, begrensd is. Als dan $\varphi_n \to \varphi$ in (D), dan ook $F(\varphi_n - \varphi) \to 0$, uniform in $F \in S$.

<u>Bewijs.</u>
Er is een begrensde interval K dat de dragers van φ en alle φ_n bevat. Dan zijn er ook een $A > 0$ en een gehele $r \geqslant 0$ zodat $|F(\varphi - \varphi_n)| \leqslant A . \|\varphi^{(r)} - \varphi_n^{(r)}\|$ voor alle $F \in S$. En $\|\varphi^{(r)} - \varphi_n^{(r)}\| \to 0$, voor $n \to \infty$.

<u>Stelling 3.</u> De ruimte (D) is <u>volledig.</u> D.w.z. als $\varphi_m - \varphi_n \to 0$ in (D), voor $m,n \to \infty$, dan is er een $\varphi \in (D)$ zodat $\varphi_n \to \varphi$ in (D).

<u>Bewijs.</u>
Uit $\varphi_m - \varphi_n \to 0$ in (D) volgt $\varphi_m(x) - \varphi_n(x) \to 0$, uniform in x; dus is er een functie $\varphi(x)$ zodat, uniform in x, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Omdat ook $\varphi_m'(x) - \varphi_n'(x) \to 0$, uniform in x, zal $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$; enz.

We zijn nu in staat de equivalentie van sterke en zwakke convergentie bij rijen van distributies te bewijzen.

<u>Stelling 4.</u> Stel $F, F_1, F_2, \ldots$ zijn distributies. Indien $F_n \to F$, dan $F_n \Rightarrow F$.

Bewijs.

We moeten bewijzen, als V een willekeurige begrensde verzameling is in (D), dat $F_n(\varphi) \longrightarrow F(\varphi)$ uniform op V. Stel dit is niet het geval. Dan zijn er een $\varepsilon > 0$, een rij φ_k in V en een deelrij F_{n_k} van de rij F_n zodanig dat

(7) $$\left| F_{n_k}(\varphi_k) - F(\varphi_k)\right| \geqslant 3\varepsilon \text{ , voor alle } k.$$

De functies φ_k hebben gelijkmatig begrensde eerste afgeleiden, en zijn dus equicontinu. Dus heeft de rij φ_k een uniform convergente deelrij. Op dezelfde wijze bezit deze weer een deelrij waarvan de rij van eerste afgeleiden uniform convergeert, enz. Als men tenslotte de diagonaalrij neemt, ontstaat een deelrij van de rij φ_k, die in (D) convergeert; omdat (D) volledig is, is ook de limietfunctie $\varphi \in (D)$. Neem aan dat φ_k zelf al deze deelrij is (verander eventueel de nummering).

De verzameling van distributies $S=\{F,F_1,F_2,\ldots\}$ voldoet aan de voorwaarde, gesteld in gevolg 2 van stelling 2; er is dus een $N>0$ zodanig dat

(8) $$\left| F_n(\varphi_k-\varphi) \right| < \varepsilon$$

voor $k \geqslant N$ en voor alle $n=0,1,2,\ldots$ (waarbij $F_0=F$ gesteld wordt). Uit (7) en (8) volgt dat

$$\left| F_{n_k}(\varphi) - F(\varphi) \right| \geqslant \varepsilon$$

voor voldoend grote k, in strijd met het gegeven dat $F_n \longrightarrow F$.

14. Afhankelijkheid van een parameter

Uit de resultaten van § 13 volgt eenvoudig de belangrijke eigenschap, dat de ruimte (D) der distributies volledig is. Dat betekent, dat iedere rij F_n van distributies, die voldoet aan het criterium van Cauchy: $F_n - F_m \to 0$ als $n,m \to \infty$, convergeert naar een distributie F. Anders gezegd:

Stelling 1 (Volledigheidsstelling). Zij F_n een rij distributies, zodanig dat voor iedere $\varphi \in (D)$ de rij $F_n(\varphi)$ convergeert, zeg naar $F(\varphi)$. Dan is ook F een distributie, en $F_n \to F$.

Bewijs. Het is duidelijk dat F een lineaire functionaal is; we moeten aantonen dat F ook continu is. Neem dus een willekeurige rij $\varphi_i \to 0$ in (D).

Volgens § 13 stelling 2 is er een $A > 0$ en een geheel getal $r \geq 0$ zodat voor alle i en n

$$|F_n(\varphi_i)| \leq A . \|\varphi_i^{(r)}\| \quad .$$

Voor $n \to \infty$ volgt

$$|F(\varphi_i)| \leq A . \|\varphi_i^{(r)}\| \quad ,$$

voor alle i, en dus $F(\varphi_i) \to 0$ voor $i \to \infty$.

Opmerking. Omdat voor rijen van distributies zwakke en sterke convergentie samenvallen, behoeven we geen onderscheid te maken tussen een sterke en een zwakke volledigheid.

Beschouw nu een schaar distributies F_λ , afhangend van een parameter λ die een verzameling Γ van (reële of complexe) getallen doorloopt. Men zegt dat F_λ continu is in $\lambda_0 \in \Lambda$ indien $\lim_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda = F_{\lambda_0}$. Dat betekent, dat voor iedere $\varphi \in (D)$ geldt: $\lim_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda(\varphi) = F_{\lambda_0}(\varphi)$, ofwel, dat voor iedere $\varphi \in (D)$ de gewone reëelwaardige functie $F_\lambda(\varphi)$ continu is in λ_0. Met behulp van de volledigheidsstelling kunnen we nu ook aantonen:

Stelling 2. In een verdichtingspunt λ_0 van Λ $(\lambda_0 \in \Lambda)$ kan F_λ dan en slechts dan continu worden voortgezet, indien iedere functie $F_\lambda(\varphi)$ $(\varphi \in (D))$ in λ_0 continu kan worden voortgezet.

Bewijs. Als een continue voortzetting F_{λ_0} bestaat, dan is $\lim_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda(\varphi) = F_{\lambda_0}(\varphi)$, voor $\varphi \in (D)$, dus alle $F_\lambda(\varphi)$ kunnen continu worden voortgezet. Omgekeerd, stel dit laatste het geval. Voor iedere rij $\lambda_n \to \lambda_0$ uit Λ bestaat dan $\lim_{n \to \infty} F_{\lambda_n}(\varphi)$, $\varphi \in (D)$; volgens stelling 1 convergeert dus F_{λ_n} naar een distributie F_{λ_0} . Op de gebruikelijke wijze volgt dat F_{λ_0} niet afhangt van de speciale rij $\lambda_n \to \lambda_0$.

Als F_λ continu is in λ_o, dan geldt hetzelfde voor $\frac{dF_\lambda}{dx}$, aangezien

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\left(\frac{dF_\lambda}{d\,x}\right)(\varphi) = -\lim_{\lambda\to\lambda_o} F_\lambda(\varphi') = -F_{\lambda_o}(\varphi') = \frac{dF_{\lambda_o}}{dx}(\varphi).$$

Als λ_o een inwendig punt is van Λ, en

(1) $$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{F_\lambda - F_{\lambda_o}}{\lambda-\lambda_o}$$

bestaat, dan noemt men F_λ <u>differentieerbaar naar λ</u> in λ_o. Ook deze eigenschap kan herleid worden tot de overeenkomstige eigenschap bij gewone functies:

<u>Stelling 3.</u> Dan en slechts dan is F_λ differentieerbaar naar λ, in het punt λ_o, als dit geldt voor elk der functies $F_\lambda(\varphi)$, $(\varphi\,\varepsilon(D))$.

<u>Bewijs.</u> Is F_λ differentieerbaar, dan bestaat voor iedere $\varphi\,\varepsilon(D)$ de limiet

(2) $$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\left(\frac{F_\lambda - F_{\lambda_o}}{\lambda-\lambda_o}\right)(\varphi) = \lim_{\lambda\to\lambda_o}\left(\frac{F_\lambda(\varphi)-F_{\lambda_o}(\varphi)}{\lambda-\lambda_o}\right);$$

dus zijn alle functies $F_\lambda(\varphi)$ differentieerbaar λ_o. Stel omgekeerd dit het geval. Dan kan voor iedere $\varphi\,\varepsilon(D)$ de voor $\lambda\neq\lambda_o$ gedefinieerde functie van λ

$$\frac{F_\lambda(\varphi)-F_{\lambda_o}(\varphi)}{\lambda-\lambda_o}$$

continu worden voortgezet in λ_o. Volgens stelling2 kan dus ook $\frac{F_\lambda - F_{\lambda_o}}{\lambda-\lambda_o}$ continu worden voortgezet in λ_o, d.w.z. de limiet (1) bestaat.

Als we de afgeleide naar λ van F_λ in λ_o aangeven met $\frac{\partial F_{\lambda_o}}{\partial\lambda}$, dan geldt voor iedere $\varphi\,\varepsilon(D)$ (vgl. (2)):

(3) $$\left(\frac{\partial F_{\lambda_o}}{\partial\lambda}\right)(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(F_\lambda(\varphi))\Big|_{\lambda=\lambda_o}.$$

Geven we de gewone distributie-afgeleide aan met $\frac{\partial F}{\partial x}$, dan geldt dat met F_λ ook $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}$ differentieerbaar is, terwijl bovendien altijd

(4) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x}F_\lambda = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\lambda}F_\lambda .$$

Immers, voor iedere $\varphi\,\varepsilon(D)$ is

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}\right)(\varphi)\right) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}(F_\lambda(\varphi')) = -\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}(\varphi') = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial\lambda}\right)(\varphi)\right).$$

Is λ een complexe parameter, en is F_λ differentieerbaar naar λ in een gebied Λ, dan is voor iedere $\varphi \in (D)$, de functie $F_\lambda(\varphi)$ een gewone analytische functie van λ. In dit geval volgt dus onmiddellijk dat F_λ willekeurig vaak naar λ gedifferentieerd kan worden. Men zegt dan ook wel dat F_λ analytisch van λ afhangt.

Met behulp van stelling 3 kunnen allerlei begrippen en stellingen uit de functietheorie overgebracht worden naar analytische scharen F_λ ; bijvoorbeeld geldt

Stelling 4. Als F_λ analytisch is in een omgeving van λ_0, dan is er, in een omgeving van λ_0, een Taylorontwikkeling

$$F_\lambda = F_{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\,\frac{\partial F_{\lambda_0}}{\partial\lambda} + \tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\,\frac{\partial^2 F_{\lambda_0}}{\partial\lambda^2} + \ldots \tag{5}$$

Bewijs. Voor iedere $\varphi \in (D)$ is $F_\lambda(\varphi)$ een gewone analytische functie van λ, die in een Taylorreeks ontwikkeld kan worden:

$$F_\lambda(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} F_\lambda(\varphi)\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} .$$

Gebruikmakend van (3), kunnen we hiervoor schrijven

$$F_\lambda(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F_{\lambda_0}}{\partial\lambda^n}\right)(\varphi). \tag{6}$$

Omdat dit geldt voor iedere $\varphi \in (D)$, volgt (5).

15. Het product van twee distributies

Zij F een distributie, en zij $g(x)$ een oneindig vaak differentieerbare functie. Voor iedere $\varphi \in (D)$ is dan ook de functie $g(x).\,\varphi(x)$ een functie uit (D), en dus is $F(g.\,\varphi)$ gedefinieerd. Als $\varphi_n \to 0$ in (D), dan zal ook $g\cdot\varphi_n \to 0$ in (D), dus $F(g\cdot\varphi_n) \to 0$. De lineaire functionaal $\varphi \to F(g\cdot\varphi)$ is dus een distributie.

Definitie. Zij F een willekeurige distributie, en G een reguliere distributie, behorende bij een oneindig vaak differentieerbare functie $g(x)$: $G = [g(x)]$. Het product $F.G$ van de distributies F en G is de distributie

$$(F\cdot G)(\varphi) = F(g\cdot\varphi).$$

Verder stellen we $G\cdot F = F\cdot G$.

Deze distributie-vermenigvuldiging sluit weer aan bij gewone vermenigvuldiging: als $f(x)$ en $g(x)$ locaal integreerbaar zijn, en $g(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar, dan is

$$[f(x)]\cdot[g(x)] = [f(x)\cdot g(x)]\ .$$

Immers

$$\big([f(x)]\cdot[g(x)]\big)(\varphi) = [f(x)](g\,\varphi) = \int f(x)\cdot g(x)\ \varphi(x)dx =$$
$$= [f(x)\cdot g(x)](\varphi).$$

Voor twee willekeurige distributies F en G is het distributieproduct niet gedefinieerd. Reeds het product $f(x).g(x)$ van twee willekeurige locaal integreerbare functies zal nl. in het algemeen geen locaal integreerbare functie meer zijn, en dus geen distributie meer definieren.

Zoals te verwachten is, geldt (als $G=[g(x)]$ hoort bij een oneindig vaak differentieerbare functie $g(x)$):

<u>Stelling</u>. $(F\cdot G)' = F'\cdot G + F.G'$.

<u>Bewijs.</u>

$$(F.G)'(\varphi) = -(F\cdot G)(\varphi') = -F(g\cdot\varphi') = -F((g\cdot\varphi)') + F(g'\cdot\varphi) =$$
$$= F'(g\cdot\varphi) + F(g'\cdot\varphi) = (F'\cdot G)(\varphi)+(F\cdot G')(\varphi).$$

<u>Voorbeeld.</u> Als $f(x)$ oneindig vaak differentieerbaar is, dan geldt

$$[f(x)]\cdot\delta = f(0)\cdot\delta\,,$$
$$[f(x)]\cdot\delta' = f(0)\cdot\delta' - f'(0)\cdot\delta\ ;\ \text{enz.}$$

I.h.b.
$$[x]\cdot\delta = 0;\quad [x]\cdot\delta' = -\delta\,.$$

Het is hinderlijk dat het product van twee distributies F en G alleen gedefinieerd is als één van beide, e.g. G, een speciale reguliere distributie is: $G = [g(x)]$, met $g(x)$ oneindig vaak differentieerbaar. Veel is hier echter niet aan te doen. Er zijn wel een paar uitbreidingen mogelijk, maar deze zijn niet zo essentieel. Is b.v. F een distributie, behorend bij een massaverdeling μ (vgl. § 2):

$$F(\varphi) = \int \varphi(x) d\mu \quad ,$$

dan kunnen we F.G definieren voor $G = [g(x)]$, waarbij $g(x)$ alleen continu behoeft te zijn:

$$(F.G)(\varphi) = \int g(x) \; \varphi(x) d\mu \quad . \tag{15.1}$$

En is F een distributie van de orde m, d.w.z. is F een distributie-afgeleide van de orde m van een reguliere distributie:

$$F = \frac{d^m}{dx^m} \; [\, f(x)\,] \; ,$$

dan kan F.G gedefinieerd worden voor $G = [g(x)]$, waarbij van de functie $g(x)$ slechts geeist wordt dat hij m maal continu differentieerbaar is. We stellen dan nl.

$$(F.G)(\varphi) = \int f(x) \cdot \frac{d^m}{dx^m} (g(x) \, . \, \varphi(x)) dx. \tag{15.2}$$

(De afgeleide achter het integraalteken is een gewone functie-afgeleide).

In een artikel "Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions", Comptes Rendus Ac. Sciences, tome 239, 1954, p.847-848, heeft L. Schwartz bewezen dat het echt onmogelijk is, vermenigvuldiging van distributies algemeen te definieren. Er is zelfs geen hoop, dat dit euvel verholpen kan worden door een wijziging van de definitie van een distributie, tenminste, als we blijven verlangen dat de δ-functie van Dirac een distributie blijft, en dat iedere distributie een distributie-afgeleide heeft. Zijn bewijs zullen we nu geven.

Zij F de verzameling van alle continue reële functies van één variabele, en zij F_o de deelverzameling van F die bestaat uit alle functies die ook nog differentieerbaar zijn, met continue afgeleide. Als we, voor het ogenblik, de functie $f(x)$ identificeren met de reguliere distributie $[f(x)]$, dan kunnen we zeggen dat de distributies een lineaire ruimte vormen die F omvat. Beschouw nu, algemener, een willekeurige lineaire ruimte E die F omvat.

Lemma 1. Het is niet mogelijk op E een associatieve, bilineaire vermenigvuldiging te definieren, die op F met de gewone vermenigvuldiging samenvalt, en waarvoor de functie 1 als eenheid fungeert, zodanig, dat er twee elementen ξ en δ in E zijn met

(15.3) $$\xi . x = 1 \; ; \quad x . \delta = 0 \; ; \quad \delta \neq 0 .$$

Bewijs.

Anders zou

$$0 = \xi .(x . \delta) = (\xi x) . \delta = 1 . \delta = \delta \neq 0 .$$

Lemma 2. Stel op E is een vermenigvuldiging gedefinieerd, als omschreven in lemma 1. Stel verder op E een differentiatie D gedefinieerd, d.w.z. een toevoeging $f \to Df$, die lineair is:

(15.4) $$D(af+bg) = aDf + bDg \quad (f,g \in E; \; a,b \text{ reëel});$$

en die voldoet aan de productregel

(15.5) $$D(f.g) = (Df).g + f.(Dg).$$

Neem aan dat D op F_0 de gewone differentiatie van reële functies is. Dan is er een $\xi \in E$ met

(15.6) $$\xi . x = x . \xi = 1 .$$

Bewijs.

Zij f de continue functie $x(\log|x|-1)$, en zij $\xi = D^2 f$. Aangezien f.x een differentieerbare functie is, met continue afgeleide, geldt

$$D(f.x) = (f.x)' = 2f + x,$$

en dus

$$D^2(f.x) = 2Df + 1.$$

Maar ook

$$D^2(f.x) = (D^2 f).x + 2Df.Dx + f.D^2 x = \xi .x + 2Df .$$

Dus $\xi . x = 1$. Evenzo volgt $x . \xi = 1$.

Uit lemma's 1 en 2 volgt onmiddellijk:

Stelling 2: Als in E zowel een vermenigvuldiging als een differentiatie gedefinieerd zijn, als omschreven in lemma 2, dan is er geen element $\delta \neq 0$ in E met $x . \delta = 0$.

Zij nu een definitie van het begrip distributie gegeven (al dan niet verschillend van de tot nu toe gebezigde) die aan de volgende essentiele voorwaarden voldoet:

a) Iedere continue functie geeft aanleiding tot een (reguliere) distributie.
b) De δ-functie van Dirac is een distributie (die dan kennelijk moet voldoen aan $x.\delta=0$, $\delta\neq 0$).
c) Iedere distributie heeft een distributie-afgeleide.
d) Als F en G distributies zijn, dan ook $aF+bG$, a en b reëel.

Uit stelling 2 volgt dan, dat het onmogelijk is, voor alle distributies F,G zinvol een product F.G te definieren.

De functie f, beschouwd in het bewijs van lemma 2, heeft, als reguliere distributie, de distributie-afgeleide

$$\frac{d}{dx}\left[x(\log|x|-1)\right] = \left[\log|x|-1\right]+[x]\frac{d}{dx}\left[\log|x|\right] = \left[\log|x|\right],$$

want $\frac{d}{dx}\left[\log|x|\right] = X^{-1}$ (zie § 9, voorbeeld 2), en $[x]\,.X^{-1}=1$:

$$([x]\,.X^{-1})(\varphi) = X^{-1}(x\,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \int \varphi(x)dx.$$

Er volgt dat in de zin van de distributies

$$\frac{d^2}{dx^2}[f] = X^{-1}. \tag{15.7}$$

Ook als we f opvatten als distributie, en D als de distributie-differentiatie, geldt dus

$$(D^2f).x = x.(D^2f) = 1.$$

Beschouw ook nog de functie $|x|$. De distributie-afgeleide van de tweede orde van $\left[|x|\right]$ is 2δ. Als nu E een lineaire ruimte is, zoals beschouwd in stelling 2, dan geldt, in E:

$$x.(D^2|x|) = 0.$$

Immers

$$x.(D^2|x|) = D^2(x.|x|) - 2D|x|,$$

en $x.|x|$ is differentieerbaar, met continue afgeleide, dus $D(x.|x|)$ is de gewone functie-afgeleide $2|x|$, en $D^2(x.|x|) = 2D|x|$.

Dan volgt ook

$$D^2|x| = ((D^2f).x).D^2|x| = (D^2f).(x.D^2|x|) = 0. \tag{15.8}$$

Hoewel $|x|$ geen polynoom is, is dus toch $D^2|x| = 0$. Gevolg:

E bevat elementen die afgeleide 0 hebben en toch niet constant zijn, in tegenstelling tot de situatie bij de echte distributies. Bij de distributies geldt ook wel: $[x].D^2[|x|] = 0$, en $D^2[f] . [x] = 1$, maar de stap in (15.8) kan niet worden genomen omdat het product $D^2[f].[x] . D^2[|x|]$ niet gedefinieerd is.

16. Deelbaarheid.

Er is toch nog een uitbreiding mogelijk van de definitie van vermenigvuldiging van twee distributies, als we tenminste deling als een soort vermenigvuldiging opvatten. Wanneer we kunnen oplossen, voor willekeurige F

$$[x] . H = F, \tag{16.1}$$

dan kunnen we H beschouwen als een soort product $X^{-1}.F$. Inderdaad blijkt (16.1) oplosbaar; maar er zijn zelfs oneindig veel H die voldoen. De uitdrukking $X^{-1}.F$ is dus toch niet zinvol te definieren.

Algemener zullen we aantonen: als F een willekeurige distributie is, en $G = [g(x)]$, waarbij de functie g(x) willekeurig vaak differentieerbaar is, en slechts geisoleerde nulpunten heeft, van eindige orde, dan heeft de vergelijking

$$G.H = F \tag{16.2}$$

een oplossing H; en zelfs oneindig veel oplossingen, tenzij G geen nulpunten heeft. Daarbij beperken we ons uitdrukkelijk tot ééndimensionale distributies.

Indien G(x) geen nulpunten heeft, is het triviaal dat (16.2) oplossingen bezit: neem maar $H= [(g(x))^{-1}]$. Het eenvoudigste niettriviale geval is dat met $g(x)=x$.

Stelling 1. Zij F een willekeurige distributie. Er zijn oneindig veel distributies H die voldoen aan (16.1), en elk tweetal verschilt een veelvoud $a.\delta$ van de δ-distributie.

Bewijs.

Het bewijs is analoog aan dat van de existentie van een primitieve. Voor iedere toetsfunctie $\varphi(x)$ van de vorm $\varphi(x)=x.\psi(x)$, $\psi \in (D)$, zal moeten gelden

$$H(\varphi) = F(\psi). \tag{16.3}$$

Als $\varphi(x)=x.\psi(x)$, dan is $\varphi(0)=0$. Omgekeerd, als $\varphi(0)=0$, dan $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ continu voort te zetten in x=0, en $\psi(x)$ blijkt dan, evenals $\varphi(x)$, oneindig vaak differentieerbaar te zijn, d.w.z. $\psi \in (D)$.

Alle $\varphi \in (D)$ met $\varphi(0)=0$ vormen dus een lineaire ruimte, en wel een hypervlak van de ruimte (D), bepaald door de lineaire conditie

$$\varphi(0) = 0. \tag{16.4}$$

Kies een $\varphi_0 \in (D)$ met $\varphi_0(0)=1$. Voor willekeurige $\varphi \in (D)$ geldt dan

$$\begin{gathered} \varphi = \lambda\varphi_0 + x.\psi \\ \lambda = \varphi(0) \\ x.\psi = \varphi - \lambda\varphi_0, \ \psi \in (D). \end{gathered} \tag{16.5}$$

Kies een constante a, definieer $H(\varphi_0)=a$, en algemeen

$$H(\varphi) = \lambda.a + F(\psi). \tag{16.6}$$

Dan is H in ieder geval een lineaire functionaal, gedefinieerd voor alle $\varphi \in (D)$. Als $\varphi_n \to 0$ in (D), dan $\lambda_n = \varphi_n(0) \to 0$. Definieer weer $\psi_n(x) \in (D)$ door $x.\psi_n = \varphi_n - \lambda_n\varphi_0$; dan zal ook $x.\psi_n(x) \to 0$ in (D). Hieruit kan afgeleid worden dat $\psi_n \to 0$ in (D) zodat $F(\psi_n) \to 0$, en zodoende ook $H(\varphi_n) \to 0$. De lineaire functionaal H is dus ook continu, ma.w. H is een distributie.

Voor iedere $\varphi \in (D)$ is $([x].H)(\varphi) = H(x\varphi)=F(\varphi)$, dus $[x].H=F$. Als ook $[x].H_1=F$, dan is H_1 bepaald door $H_1(\varphi_0)=a_1$; en

$$H(\varphi)-H_1(\varphi) = \lambda(a-a_1) = (a-a_1)\,\varphi(0) = (a-a_1)\,\delta(\varphi).$$

D.w.z. $H-H_1$ is een veelvoud van δ.
Gevolg: Iedere distributie H met $[x].H=0$ is van de vorm $a\delta$.

<u>Stelling 2.</u> Zij F een willekeurige distributie, en k een natuurlijk getal. Er zijn oneindig veel distributies H die voldoen aan

$$[x^k].H = F, \tag{16.7}$$

en het verschil van twee oplossingen van (16.5) is een lineaire combinatie van δ en zijn afgeleiden van orde $\leq k-1$.

<u>Bewijs.</u>

Zij H_1 een oplossing van $[x].H=F$; de algemene oplossing hiervan is dan van de vorm $H=H_1+c.\delta$. De algemene oplossing van $[x^2].H=F$ moet dus voldoen aan

$$[x].H = H_1 + c\delta. \tag{16.8}$$

Zij H_2 een oplossing van $[x].H=H_1$. Daar $[x].\delta'=-\delta$ (zie voorbeeld op pag.41) vinden we als algemene oplossing van (16.8), d.w.z.

van $[x^2].H=F$

$$H = H_2 + c_1\delta + c_2\delta'.$$

Enz.

We zullen nu de algemene stelling bewijzen:

Stelling 3. Zij F een willekeurige distributie, en $G=[g(x)]$, waar $g(x)$ een willekeurig vaak differentieerbare functie is, met slechts geïsoleerde nulpunten, van eindige orde. Er zijn oneindig veel distributies H waarvoor

$$G.H=F. \tag{16.9}$$

Het verschil van twee oplossingen van (16.9) is te schrijven als een convergente reeks van δ-distributies en afgeleiden daarvan.

Bewijs.

We tonen eerst aan dat delen door G locaal mogelijk is: ieder punt x heeft een omgeving U_x, zodanig dat er een op U_x gedefinieerde distributie H_x bestaat, met $G.H_x=F$ op U_x. D.w.z. voor alle $\varphi \in (D)$ met drager in U_x moet gelden

$$F(\varphi) = (G.H_x)(\varphi) = H_x(g.\varphi).$$

Als x geen nulpunt is van $g(x)$, neem dan voor U_x een omgeving van x waarop $g(x)\neq 0$, en definieer

$$H_x(\varphi) = F(\tfrac{\varphi}{g}),$$

voor $\varphi \in (D)$ met drager $(\varphi) \subset U_x$. Dan is H_x een distributie op U_x.

Stel $a_1, a_2, \ldots$ zijn de nulpunten van $g(x)$, en zeg de orde van a_ν is k_ν. Dan heeft a_ν een omgeving U_{a_ν} waarbinnen de functie

$$h(x) = \frac{g(x)}{(x-a_\nu)^{k_\nu}}$$

een willekeurig vaak differentieerbare functie zonder nulpunten is. Definieer $H^*_{a_\nu}$ op U_{a_ν} door

$$H^*_{a_\nu}(\varphi) = F(\tfrac{\varphi}{h}),$$

voor functies $\varphi \in (D)$ met drager binnen U_{a_ν}. Dan is $H^*_{a_\nu}$ een distributie op U_{a_ν}.

Uit stelling 2 volgt dat er ook een distributie H_{a_ν} op U_{a_ν} bestaat, met

$$[(x-a_\nu)^{k_\nu}].H_{a_\nu} = H^*_{a_\nu}.$$

Op U_{a_ν} geldt dan

$$G.H_{a_\nu} = [h(x)].\,[(x-a_\nu)^{k_\nu}].H_{a_\nu} = [h(x)].H^*_{a_\nu} = F.$$

Inderdaad is dus (16.9) oplosbaar in een omgeving van ieder punt x. Voor het vinden van een <u>globale</u> oplossing van G.H=F kunnen we § 10 stelling 1 gebruiken.

Daartoe moeten we alleen nagaan: als $\varphi \in (D)$, en drager $(\varphi) \subset U_x \cap U_y$, dan is $H_x(\varphi)=H_y(\varphi)$. Maar, als $x \neq y$, dan is $g(x)\neq 0$ op $U_x \cap U_y$. Definieer $\psi(x)=\varphi(x)(g(x))^{-1}$ als $x \in U_x \cap U_y$, en $\psi(x)=0$ als $x \notin U_x \cap U_y$. Dan is $\psi \in (D)$, en

$$H_x(\varphi) = H_x(g\,\psi) = (GH_x)(\psi)=F(\psi)=(GH_y)(\psi)=H_y(g\,\psi)=H_y(\varphi).$$

Aan de voorwaarde van § 10 stelling 1 is dus inderdaad voldaan. Conclusie: er is een distributie H, die op iedere U_x samenvalt met H_x, en dus blijkbaar (globaal) voldoet aan G.H=F.

Het verschil van twee oplossingen is een reeks, waarvan de termen veelvouden zijn van de distributies

$$\varepsilon_{a_\nu}^{(m_\nu)}\;,\quad 0 \leqslant m_\nu \leqslant k_\nu - 1\;;\qquad \nu = 1,2,\ldots$$

<u>Opmerking.</u> Voor meerdimensionale distributies is de situatie aanmerkelijk gecompliceerder. Een bevredigend resultaat, analoog aan stelling 3, is in dat geval niet bekend.

<u>Voorbeelden</u>

. Beschouw de functie x_+^{-1}, gedefinieerd door

$$(16.10)\qquad \begin{aligned} x_+^{-1} &= 0 \quad \text{als } x \leqslant 0;\\ x_+^{-1} &= x^{-1} \quad \text{als } x > 0. \end{aligned}$$

Deze functie is niet locaal integreerbaar, en bepaalt dus geen distributie: de integraal

$$(16.11)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x_+^{-1}\,\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

is i.h.a. divergent.

Zij nu H een distributie die voldoet aan

$$(16.12)\qquad [x]\,.\,H = [u(x)]\,,$$

waar u(x) de eenheidsfunctie van Heaviside is. Voor $\psi \in (D)$ is

$$H(x.\,\psi) = ([x].H)(\psi) = [u(x)](\psi) = \int_0^{\infty} \psi(x)dx.$$

Als $\varphi(x)$ een toetsfunctie is, waarvan de drager de oorsprong niet bevat, zal dus

$$H(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = (x_+^{-1}, \varphi).$$

Iedere oplossing van (16.11) is dus een regularisatie van de divergente integraal (16.11).

2. Uit $[x]\,.X^{-1}=1$ volgt door differentiatie

$$X^{-1} + [x]\,.\,\frac{dX^{-1}}{dx} = 0.$$

Vermenigvuldiging met $[x]$ geeft, dat $-\frac{dX^{-1}}{dx}$ een oplossing is van

$$[x]^2\,.\,H = 1.$$

We zullen daarom $-\frac{dX^{-1}}{dx}$ wel aangeven met X^{-2}. Per definitie is dus

(16.13) $$X^{-2}(\varphi) = -\frac{dX^{-1}}{dx}(\varphi) = X^{-1}(\varphi') = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx.$$

Algemeen geven we aan met X^{-n} $(n=1,2,\ldots)$ de distributie

(16.14) $$X^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}X^{-1}}{dx^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\big[\log|x|\big].$$

3. Het product van distributies is, voorzover gedefinieerd, niet associatief, zoals we zagen in § 15:

$$X^{-1}.[x] = 1\ ;\quad [x]\,.\,\delta = 0;$$

en dus

(16.15) $$\delta = (X^{-1}.[x]).\delta \neq X^{-1}.([x].\,\delta) = 0.$$

Zijn echter F en G beide reguliere distributies: $F=[f(x)]$, $G=[g(x)]$, met $f(x)$ en $g(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar, dan geldt wel, voor willekeurige H,

(16.16) $$(F.G).H = F.(G.H).$$

Want

$$\{(F.G).H\}(\varphi) = H(f.g.\varphi) = H(g.f.\varphi) = (G.H)(f.\varphi) = \{F.(G.H)\}(\varphi).$$

Dit hebben we gebruikt bij de bewijzen van stelling 2 en stelling 3.

17. De convolutie

Voor locaal integreerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ is behalve het gewone product $f(x).g(x)$ ook nog gedefinieerd de convolutie

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy, \tag{17.1}$$

als tenminste deze integraal bestaat, dus in ieder geval als één van beide functies een begrensde drager heeft. (Dan is immers het integratie-interval in werkelijkheid eindig.) De functie $f * g$ is dan weer locaal integreerbaar, en bepaalt daarom een reguliere distributie $[f * g]$. En wel is

$$[f * g](\varphi) = (f * g, \varphi) = \iint f(y)g(x-y)\varphi(x)dy\,dx =$$
$$= [f(y)]\left(\int g(x-y)\ \varphi(x)dx\right).$$

Verder is

$$\int g(x-y)\ \varphi(x)dx = \int g(x)\ \varphi(x+y)dx = [g(x)](\varphi(x+y)),$$

waarbij $\varphi(x+y)$ beschouwd moet worden als functie van x. We vinden zo

$$[f * g](\varphi) = [f(y)]([g(x)](\varphi(x+y))). \tag{17.2}$$

Dit suggereert een mogelijkheid om ook voor distributies de convolutie te definieren, nl. door

$$(F * G)(\varphi) = F_y(G_x(\varphi(x+y))), \tag{17.3}$$

waarbij de notatie G_x aangeeft dat de functionaal G moet worden samengesteld met een functie van x, m.a.w. dat $\varphi(x+y)$ moet worden opgevat als een functie van x. Evenzo houdt de notatie F_y in dat we $G_x(\varphi(x+y))$ beschouwen als functie van y.

Opdat een dergelijke definitie zin heeft is het echter nodig dat, voor iedere $\varphi \in (D)$, de functie $\psi(y) = G_x(\varphi(x+y))$ een toetsfunctie is; anders is $F(\psi)$ en dus $(F * G)(\varphi)$ niet gedefinieerd. Dit is echter niet voor iedere G het geval; wèl geldt

Stelling 1. Zij G een distributie, en $\varphi \in (D)$. De functies $\psi(y) = G_x(\varphi(x+y))$ en $\chi(y) = G_x(\varphi(y-x))$ zijn oneindig vaak differentieerbaar. Heeft G een begrensde drager, dan zijn ook de dragers van ψ en χ begrensd; m.a.w. dan geldt $\psi \in (D)$ en $\chi \in (D)$.

Bewijs.

Als $y_n \to y$, dan zal $\varphi(x+y_n) \to \varphi(x+y)$ in (D), en dus

$$\psi(y_n) = G_x(\varphi(x+y_n)) \to G_x(\varphi(x+y)) = \psi(y).$$

Dus $\psi(y)$ (en evenzo $\chi(y)$) is continu. Verder zal, voor $h_n \to 0$,

$$\frac{\psi(y+h_n)-\psi(y)}{h_n} = G_x\left(\frac{\varphi(x+h+h_n)-\varphi(x+y)}{h_n}\right) \to G_x(\varphi'(x+y)),$$

dus $\psi(y)$ is differentieerbaar (en $\psi'(y) = G_x(\varphi'(x+y))$). Evenzo vindt men dat de hogere afgeleiden $\psi^{(n)}(y)$ bestaan, en dat $\psi^{(n)}(y) = G_x(\varphi^{(n)}(x+y))$. Dus $\psi(y)$ is willekeurig vaak differentieerbaar. Analoog voor $\chi(y)$.

Als G een begrensde drager heeft, dan heeft, voor voldoend grote $|y|$, de drager van $\varphi(x+y)$ niets gemeen met de drager van G, zodat dan $\psi(y) = 0$. Dus dan heeft ψ (en evenzo χ) een begrensde drager.

Opmerking. Evenzo ziet men: is de drager van G naar rechts (resp. naar links) begrensd, dan is ook de drager van $\chi(y)$ naar rechts (resp. links) begrensd, terwijl de drager van $\psi(y)$ juist naar links (resp. rechts) begrensd is.

De uitdrukking (17.3) is dus zinvol als de drager van G begrensd is. Het rechterlid is dan nl. van de vorm $F(\psi)$, met $\psi(y) = G_x(\varphi(x+y)) \in (D)$. Maar dat is ons niet genoeg. Vandaar de volgende beschouwingen.

Zij F een distributie en φ een oneindig vaak differentieerbare functie. A priori is $F(\varphi)$ slechts dan gedefinieerd, als de drager van φ begrensd is. Het is echter mogelijk de functionaal F zinvol uit te breiden tot alle willekeurig vaak differentieerbare functies φ waarvan de drager met drager (F) een begrensde doorsnede heeft. In dat geval definieren we $F(\varphi)$ als volgt.

Zij K een begrensde open verzameling die drager (F) $\cap$ drager (φ) bevat, en $\alpha(x)$ een functie in (D) met de eigenschap: $\alpha(x)=1$ als $x \in K$. (Zo'n functie $\alpha(x)$ bestaat, volgens § 10 lemma 2.) Daar $\alpha(x).\varphi(x) \in (D)$ is $F(\alpha.\varphi)$ gedefinieerd. We definieren nu

$$F(\varphi) = F(\alpha.\varphi). \tag{17.4}$$

Was $\varphi \in (D)$, dan is dit inderdaad de oorspronkelijke waarde van F in φ; want dan is $\varphi(x)-\alpha(x).\varphi(x)=0$ op een omgeving van de drager van F, en dus $F(\varphi-\alpha.\varphi) = 0$ (vgl. § 11 stelling 2). Verder is de definitie onafhankelijk van de keuze van $\alpha(x)$: is $\beta(x)$ een andere functie $\in (D)$ met $\beta(x)=1$ op een omgeving van drager (F) $\cap$ drager (φ), dan is $\alpha(x)\,\varphi(x)-\beta(x)\,\varphi(x)=0$ op een omgeving van de drager van F, en dus $F(\alpha\varphi) = F(\beta\varphi)$.

Als i.h.b. F een begrensde drager heeft, dan is op deze wijze $F(\varphi)$ gedefinieerd voor iedere oneindig vaak differentieerbare functie $\varphi(x)$. In dat geval is dus $F_y(G_x(\varphi(x+y)))$ gedefinieerd, voor alle $\varphi \in (D)$ en voor alle G; m.a.w. (17.3) is ook dan zinvol.

Als de drager van F naar rechts is begrensd, dan is $F(\varphi)$ gedefinieerd voor alle oneindig vaak differentieerbare functies φ waarvan de drager naar links begrensd is. De verzameling van al deze functies zullen we aangeven met (D_-), en de verzameling van alle distributies F met naar rechts begrensde drager door (D_+^*). Evenzo geven we de verzameling van alle oneindig vaak differentieerbare functies φ met naar rechts begrensde drager aan met (D_+), en de verzameling van alle distributies met naar links begrensde drager met (D_-^*). Dan is $F(\varphi)$ ook altijd gedefinieerd voor $F \in (D_+^*)$ en $\varphi \in (D_-)$.

Als nu $F \in (D_+^*)$ en $G \in (D_+^*)$, dan is, voor willekeurige $\varphi \in (D)$, $\psi(y) = G_x(\varphi(x+y)) \in (D_-)$, en dus is $F(\psi)$ gedefinieerd. Evenzo als $F \in (D_-^*)$ en $G \in (D_-^*)$. Zodoende is (17.3) ook zinvol als de dragers van F en G beide naar links of beide naar rechts begrensd zijn.

<u>Definitie.</u> Stel F en G zijn distributies. Als één van beide een begrensde drager heeft, ofwel als beide dragers naar dezelfde kant begrensd zijn, definieren we de functionaal $F * G$ door

$$(F * G)(\varphi) = F_y(G_x(\varphi(x+y))).$$

<u>Stelling 2.</u> De functionaal $F * G$, indien gedefinieerd, is een distributie.

<u>Bewijs.</u>

Alleen de continuiteit van $F * G$ is niet triviaal. Stel $\varphi_n \to 0$ in (D). Zij $\psi_n(y) = G_x(\varphi_n(x+y))$. Voor iedere y en iedere (vaste) index m geldt: $\varphi_n^{(m)}(x+y) \to 0$, in (D), en dus

$$\psi_n^{(m)}(y) = G_x(\varphi_n^{(m)}(x+y)) \to 0.$$

Heeft G een begrensde drager, dan zijn de dragers van de functies $\psi_n(y)$, evenals die van de functies $\varphi_n(x)$, uniform begrensd, en dus volgt

$$(F * G)(\varphi_n) = F(\psi_n) \to 0.$$

Is de drager van G niet begrensd, dan is er, in elk van de mogelijke gevallen, een begrensde open verzameling K die drager $(F) \cap$ drager (ψ_n) bevat, voor iedere n; zij $\alpha(x) \in (D)$ met $\alpha(x)=1$ voor $x \in K$. Dan geldt: $\alpha(x).\psi_n(x) \in (D)$, en

$$\alpha(x).\psi_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{in } (D),$$

en dus

$$(F*G)(\varphi_n) = F(\psi_n) = F(\alpha.\psi_n) \longrightarrow 0.$$

<u>Voorbeelden.</u>

1. Voor iedere F geldt

(17.5) $$F*\delta = \delta*F = F.$$

Want

$$(F*\delta)(\varphi) = F_y(\delta(\varphi(x+y))) = F_y(\varphi(y)) = F(\varphi),$$

en

$$(\delta*F)(\varphi) = \delta(\psi) = \psi(0)$$

met

$$\psi(y) = F_x(\varphi(x+y)); \text{ dus } \psi(0) = F_x(\varphi(x)) = F(\varphi).$$

2. Evenzo is

(17.6) $$F*\delta' = F'$$

en algemeen

(17.7) $$F*\delta^{(n)} = F^{(n)}.$$

Want

$$(F*\delta^{(n)})(\varphi) = F_y(\delta^{(n)}(\varphi(x+y))) = F_y((-1)^n\,\delta(\varphi^{(n)}(x+y))) =$$
$$= (-1)^n F_y(\varphi^{(n)}(y)) = F^{(n)}(\varphi).$$

3. Als we met δ_h weer aangeven de δ-distributie met piek in h, en met $\tau_h F$ de distributie die uit F ontstaat door translatie over h (dus $\delta_h = \tau_h\delta$), dan geldt ook:

(17.8) $$F*\delta_h = \delta_h*F = \tau_h F.$$

4. Als $F=[f(x)]$ en $G=[g(x)]$, en $F*G$ is gedefinieerd, dan volgt uit (17.2) dat

(17.9) $$[f]*[g] = [f*g].$$

Hieruit volgt bijv. dat

(17.10) $$U*U = [x].\,U,$$

aangezien $(u*u)(x) = x.u(x)$.

5. Als $G=[g(x)]$, $g(x)\in(D)$, dan is $F*G$ regulier, en zelfs behoort $F*G$ bij een oneindig vaak differentieerbare functie:

(17.11) $$F*G = [F_y(g(x-y))].$$

Dat $\chi(x) = F_y(g(x-y))$ willekeurig vaak differentieerbaar is, volgt uit stelling 1. De gelijkheid, voor $\varphi \in (D)$, van

$$(F * G)(\varphi) = F_y(\int g(x)\, \varphi(x+y)dx) = F_y(\int g(x-y)\varphi(x)dx)$$

en

$$[\chi](\varphi) = (\chi, \varphi) = \int F_y(g(x-y))\varphi(x)dx$$

volgt door de integralen te approximeren door Riemannse sommen.

6. Algemener geldt: als $\varphi(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is, en $F * [\varphi(x)]$ is gedefinieerd, dan is dit een reguliere distributie, behorend bij de willekeurig vaak differentieerbare functie

$$\chi(x) = F_y(\varphi(x-y)).$$

Het bewijs is als in voorbeeld 5, waarbij van een uitbreiding van stelling 1 gebruik gemaakt moet worden om te bewijzen dat χ willekeurig vaak differentieerbaar is. We zullen de functie χ ook aangeven met $F * \varphi$:

(17.12) $$(F * \varphi)(x) = F_y(\varphi(x-y)).$$

In deze notatie is dus $F * \varphi$ een <u>functie</u>, en er geldt

(17.13) $$F * [\varphi] = [F * \varphi].$$

7. Evenals in § 7 geven we de gespiegelde functie $\varphi(-x)$ aan met $(\sigma\varphi)(x)$. Als $F \in (D_+^*)$ en $\varphi(x) \in (D_-)$, dan is $F(\varphi)$ gedefinieerd. Verder is dan $\sigma\varphi \in (D_+)$, zodat ook de distributie $F * [\sigma\varphi]$ gedefinieerd is, en dus ook (voorbeeld 6) de functie $F * \sigma\varphi$. In dit geval is

(17.14) $$F(\varphi) = (F * \sigma\varphi)(0).$$

Immers

$$(F * \sigma\varphi)(x) = F_y(\sigma\varphi(x-y)) = F_y(\varphi(y-x)),$$

dus

$$(F * \sigma\varphi)(0) = F_y(\varphi(y)) = F(\varphi).$$

<u>Gevolg</u>: <u>Als $F * [\varphi] = 0$, voor alle $\varphi \in (D)$, dan is $F=0$.</u>

Verder geldt, voor $\psi \in (D)$:

(17.15) $$(F * [\sigma\varphi])(\psi) = F(\varphi * \psi).$$

Want

$$\begin{aligned}(F * [\sigma\varphi])(\psi) &= F_y(\int \varphi(-x)\, \psi(x+y)dx) = \\ &= F_y(\int \varphi(x)\, \psi(y-x)dx) = \\ &= F_y((\varphi * \psi)(y)) = F(\varphi * \psi).\end{aligned}$$

Stelling 3. Stel G, F, F_n $(n=1,2,3,\ldots)$ zijn distributies, en

$$F_n \to F.$$

Dan geldt

(17.16) $$F_n * G \to F * G$$

en

(17.17) $$G * F_n \to G * F,$$

zodra aan één van de volgende voorwaarden is voldaan:

(a) De drager van G is begrensd.

(b) De dragers der F_n zijn uniform begrensd.

(c) De dragers van G en de F_n zijn uniform naar dezelfde kant begrensd.

Bewijs.

Als aan één der voorwaarden is voldaan zijn in ieder geval alle optredende convoluties gedefinieerd. We zullen (17.16) bewijzen; het bewijs van (17.17) is analoog.

Zij $\varphi \in (D)$, en $\psi(y) = G_x(\varphi(x+y))$. We moeten aantonen: $F_n(\psi) \to F(\psi)$. Is de drager van G begrensd, dan is $\psi \in (D)$, dus volgt $F_n(\psi) \to F(\psi)$ triviaal uit $F_n \to F$. Is aan (b) voldaan, dan zij K een begrensde open verzameling die de dragers van alle F_n bevat, en $\alpha(x) \in (D)$ zodat $\alpha(x)=1$ als $x \in K$. Uit $F_n \to F$ en $\alpha.\psi \in (D)$ volgt

$$F_n(\psi) = F_n(\alpha.\psi) \to F(\alpha.\psi) = F(\psi).$$

Analoog als aan (c) is voldaan.

Uit stelling 3 kunnen we zonder veel moeite een verrassende conclusie trekken:

Stelling 4. Iedere distributie F is limiet van een rij reguliere distributies $F_n = [f_n(x)]$, waarbij zelfs $f_n(x) \in (D)$ gekozen kan worden.

Bewijs.

Neem een rij $\varphi_n(x)$ uit (D) met $[\varphi_n(x)] \to \delta$; volgens stelling 3 en voorbeeld 1 zal dan

$$F * [\varphi_n(x)] \to F * \delta = F.$$

Volgens voorbeeld 4 is $F * [\varphi_n(x)]$ een reguliere distributie $[g_n(x)]$, waarbij $g_n(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is.

Neem vervolgens een rij $\psi_n(x)$ uit (D) met $\psi_n(x)=1$ als $|x| < n$ en $\psi_n(x)=0$ als $|x| > 2n$. Iedere $\varphi \in (D)$ heeft een eindige drager, dus

$\psi_n \cdot \varphi = \varphi$ als n groot genoeg is. Zetten we $f_n(x) = \psi_n(x) \cdot g_n(x)$, dan is dus

$$\lim_{n \to \infty} [f_n] = \lim_{n \to \infty} [g_n] = F.$$

Aangezien $f_n(x) \in (D)$, voor iedere n, is hiermee de stelling bewezen.

Stelling 4 maakt het mogelijk de distributies nog op een andere wijze in te voeren, een methode die analoog is aan de invoering van de reële getallen m.b.v. fundamentaalrijen van rationale getallen. Ga uit van locaal integreerbare functies, of, desgewenst, van toetsfuncties. Noem een rij $f_n(x)$ van dergelijke functies een fundamentaalrij als de rij (f_n, φ) convergeert, voor iedere $\varphi \in (D)$. Noem twee rijen f_n en g_n equivalent als $(f_n - g_n, \varphi) \to 0$ voor iedere $\varphi \in (D)$. Dan kunnen de distributies ingevoerd worden als equivalentieklassen van fundamentaalrijen.

Deze methode is vooral uitgewerkt door J.G. Mikusiński (Sur la méthode de généralization de Laurent Schwartz et sur convergence faible, Fund.Math.35, 235-239 (1948)) en wordt o.a. toegepast in het boekje van Lighthill.

Met behulp van stelling 3 en stelling 4 bewijzen we de commutativiteit van de convolutie:

Stelling 5. Als $F * G$ (en dus ook $G * F$) gedefinieerd is, dan is $F * G = G * F$.

Bewijs.

Als $F = [f]$ en G is willekeurig, dan is er een rij $g_n \in (D)$ met $[g_n] \to G$. Uit

$$F * [g_n] = [f * g_n] = [g_n * f] = [g_n] * F$$

volgt door limietovergang $F * G = G * F$. Is nu ook F willekeurig, neem dan een rij $f_n \in (D)$ met $[f_n] \to F$ en pas stelling 3 toe op

$$[f_n] * G = G * [f_n] .$$

Met de associativiteit van de convolutie is het anders gesteld: deze geldt nl. niet algemeen.

Voorbeeld 8. $[1] * (\delta' * U) = [1] * U' = [1] * \delta = [1]$, maar $([1] * \delta') * U = 0 * U = 0$.

Wel kan men eenvoudig aantonen:

Stelling 6. Als de dragers van de distributies F,G en H alle naar dezelfde kant begrensd zijn, en ook, als tenminste twee van de dragers begrensd zijn, geldt

$$(F * G) * H = F * (G * H).$$

Verder geldt:

Stelling 7. Als $F * G$ gedefinieerd is, dan ook $F' * G$ en $F * G'$, en

$$(F * G)' = F' * G = F * G'.$$

Bewijs.

$$(F * G)' = \delta' * (F * G) = (\delta' * F) * G = F' * G, \text{ enz.}$$

Opmerking. Op dezelfde wijze volgt uit (17.8):

(17.'8) $$\tau_h(F * G) = (\tau_h F) * G = F * \tau_h G.$$

Voorbeelden

9. Laten we met U^{*m} aangeven het convolutie-product $U * U * \ldots * U$ van m factoren U. Er geldt:

$$U' = \delta;$$

$$(U * U)' = U' * U = \delta * U = U;$$

en algemeen

(17.19) $$(U^{*m})' = U^{*(m-1)} .$$

Er volgt dat

(17.20) $$(U^{*m})^{(m)} = \delta .$$

In U^{*m} hebben we dus een primitieve van de orde m van δ gevonden.

10. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dF}{dx} = G$$

heeft de vorm

$$F = U * G + \text{constante}.$$

Want $(U * G)' = U' * G = \delta * G = G$ (en aan de homogene vergelijking $F'=0$ voldoen alleen de constante distributies: zie § 6).

Algemener heeft de differentiaalvergelijking

(17.21) $$\frac{d^nF}{dx^n} = G$$

de particuliere oplossing

(17.22) $$F = (U^{*n}) * G.$$

11. Evenzo geldt: is H een oplossing van de differentiaalvergelijking

(17.23) $$a_n \frac{d^nF}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dF}{dx} + a_0 F = \delta,$$

dan is $H * G$ (indien gedefinieerd) een particuliere oplossing van de vergelijking

$$(17.24) \qquad a_n \frac{d^nF}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dF}{dx} + a_oF = G.$$

Als de dragers van F en G beide naar rechts begrensd zijn, geldt hetzelfde voor de drager van $F * G$, zoals men eenvoudig na kan gaan. M.a.w. als $F \in (D_+^*)$ en $G \in (D_+^*)$, dan bestaat $F * G$, en $F * G \in (D_+^*)$.

Uit de stellingen 5 en 6 volgt verder, dat (D_+^*), t.o.v. + als optelling en $*$ als vermenigvuldiging, een <u>commutatieve ring</u> is, met een eenheidselement, nl. δ (voorbeeld 2). Deze ring bevat o.a. alle reguliere distributies $[\varphi]$, $\varphi \in (D_+)$. Evenzo is (D_-^*) een commutatieve ring met eenheidselement.

We zullen nu nog aantonen, dat deze beide ringen geen nuldelers hebben (en dus integriteitsgebieden zijn); d.w.z. als $F * G=0$, F en $G \in (D_+^*)$, dan is $F=0$ of $G=0$.

Een dergelijke stelling voor continue functies is in 1924 door Titchmarsh bewezen: als $f * g = 0$, dan is òf $f(x)$ òf $g(x)$ de nulfunctie (zie: J.G. Mikusiński, Operational Calculus (Londen, 1959), hoofdstuk II). Op deze belangrijke stelling baseert Mikusiński zijn operatorenrekening, die een zekere analogie vertoont met de theorie der distributies en die voor gelijksoortige problemen bruikbaar is. We zullen bij het bewijs van stelling 8 van deze stelling van Titchmarsh gebruikmaken.

<u>Opmerking:</u> Als de dragers van F en G niet naar dezelfde kant begrensd zijn, kan het <u>wel</u> gebeuren dat $F \neq 0$, $G \neq 0$ en toch $F * G=0$, zoals blijkt uit

$$(17.25) \qquad \delta' * [1] = 0.$$

<u>Stelling 8.</u> De ringen (D_+^*) en (D_-^*) hebben geen nuldeler. Anders gezegd: als de dragers van F en G naar dezelfde kant begrensd zijn, volgt uit $F * G=0$ dat $F=0$ of $G=0$.

<u>Bewijs.</u>

Stel e.g. F en $G \in (D_+^*)$, en laat $\alpha(x)$, $\beta(x) \in (D_+)$, beide niet identiek nul. Uit $F * G=0$ volgt

$$(F * [\alpha]) * (G * [\beta]) = (F * G) * ([\alpha] * [\beta]) = 0.$$

Daar $F * [\alpha]$ en $G * [\beta]$ reguliere distributies zijn, die horen bij continue functies (zie voorbeeld 5), volgt uit de stelling van

Titchmarsh dat één van beide nul is; bijv.

$$F * [\alpha] = 0.$$

Voor willekeurige $\varphi \in (D)$ is dan ook

$$(F * [\varphi]) * [\alpha] = (F * [\alpha]) * [\varphi] = 0,$$

en dus volgt weer uit de stelling van Titchmarsh, omdat $F * [\varphi]$ weer een reguliere distributie is, behorend bij de continue functie $F * \varphi$, en omdat $\alpha(x)$ niet de nulfunctie is,

$$F * [\varphi] = 0.$$

Aangezien dit geldt voor alle $\varphi \in (D)$ volgt dat $F=0$ (voorbeeld 7).

Correcties betreffende § 1-§ 17.

Op pag.3 regel 9 v.o.: i.p.v. R_k lees: R^k
regel 8 v.o.: i.p.v. R_k lees: R^k

pag.4 regel 1 v.b.: i.p.v. R^L lees: R^k
regel 16 v.b.: i.p.v. "bestaan" lees: "bestaan en continu zijn"

pag.8 regel 6 v.b.: i.p.v. "bestaat" lees: "bijna overal bestaat"
regel 8 v.o.: i.p.v. "En geldt" lees: "Er geldt"

pag.17 regel 16 v.o.: i.p.v. $\varphi(x+k^{(n)}$ lees: $\varphi(x+k^{(n)})$
regel 4 v.o.: i.p.v. $\psi(h_1+k_1{}^{(n)}$ lees: $\psi(h_1+k_1{}^{(n)})$

pag.20 regel 2 v.b.: i.p.v. $G'(\varphi)\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ lees: $G'(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}$

pag.23 regel 4 v.b.: i.p.v. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ lees: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$

pag.24 regel 12 v.o.: i.p.v. "begrensde" lees: "gesloten begrensde"

pag.25 regel 8 v.b.: i.p.v. W_m lees: $V_{\sigma(m)}$
regel 10 v.b.: i.p.v. W_m lees: drager (ψ_m)

pag.26 regel 5 v.b.: i.p.v. "begrensde" lees: "gesloten begrensde"

pag.31 regel 5 v.b.: i.p.v. $\frac{1}{2}$ lees: $[\frac{1}{2}]$
regel 7 v.b.: i.p.v. 1 lees: [1]
regel 11 v.b.: i.p.v. $1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}$ lees:

$$\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\right] = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\right]$$

regel 13 v.b.: i.p.v. 1 lees: [1]
regel 5 v.o.: i.p.v. "de partiele sommen weer uniform bebrensd zijn" lees: "de reeks uniform convergeert op ieder interval dat geen geheel veelvoud van π bevat"

regel 2 v.o.: i.p.v. $(\log|2\sin\frac{x}{2})'$ lees: $(\log|2\sin\frac{x}{2}|)'$

pag.32 regel 16 v.b.: i.p.v. $\frac{a_n}{n^{2k}}$ lees: $\frac{a_n}{n^{k+2}}$
i.p.v. $\frac{b_n}{n^{2k}}$ lees: $\frac{b_n}{n^{k+2}}$

regel 13 v.o.: i.p.v. $\frac{a_n}{n^{2k}}$ lees: $\frac{a_n}{n^{k+2}}$
i.p.v. $\frac{b_n}{n^{2k}}$ lees: $\frac{b_n}{n^{k+2}}$

regel 12 v.o.: i.p.v. 2k lees: k+2

pag.33 regel 4 v.o.: i.p.v. $<$ lees: $\subset$

pag.35 regel 1 v.o.: i.p.v. $\varphi_m(x)$ lees: φ_m .
pag.37 regel 12 v.b.: i.p.v. "convergeert" lees: "een fundamentaalrij is"
i.p.v. "is ook de" lees: "is er een"
pag.38 regel 3 v.b.: i.p.v. (D) lees: (D^*)
pag.41 regel 9 v.o.: i.p.v. "Stelling" lees: "Stelling 1"
pag.44 regel 15 v.b.: i.p.v. 1 lees: [1]
pag.45 regel 3 v.b.: i.p.v. 1 lees: [1]
pag.49 regel 7 v.b.: i.p.v. 1 lees: [1]
regel 10 v.o.: i.p.v. 1 lees: [1]
pag.54 regel 5 v.o.: i.p.v. $(F^*[\sigma\varphi])(\varphi)$ lees: $(F^*[\sigma\varphi])(\psi)$

18. Aanvullingen en voorbeelden

1. Distributies met complexe waarden.

De ruimte (D^*) is in § 3 gedefinieerd als de verzameling van alle functionalenop de ruimte (D) der toetsfuncties. Onder een functionaal F op (D) verstonden we daarbij een toevoeging van een reëel getal $F(\varphi)$ aan iedere $\varphi \in (D)$. Dat betekent, in een iets nauwkeuriger formulering, dat we steeds reële functionalen beschouwd hebben.

We zouden ons kunnen afvragen wat voor wijzigingen de theorie zou moeten ondergaan als we eens complexe functionalen F gingen beschouwen, toevoegingen van een complex getal $F(\varphi)$ aan iedere $\varphi \in (D)$.

In feite levert dit ons niets nieuws. Immers, als F zo'n complexe functionaal is, dan kunnen we, voor iedere $\varphi \in (D)$, het complexe getal $F(\varphi)$ splitsen in een reëel en een imaginair deel:

$$F(\varphi) = a+bi;$$

daarbij hangen a en b elk van φ af. Dat kunnen we aangeven door e.g. te schrijven: $a=G(\varphi)$, $b=H(\varphi)$. Dan geldt dus

$$F(\varphi) = G(\varphi) + i.H(\varphi), \tag{18.1}$$

voor iedere $\varphi \in (D)$. Maar dit betekent dat we de functionaal F geschreven hebben als G+iH, waar G en H reële functionalen zijn.

Definitie. Een complexwaardige distributie is een complexe functionaal F=G+iH op (D), zodanig dat de bijbehorende reële functionalen G en H (gewone) distributies zijn.

Voorbeeld 1.

Beschouw de functie x_+^λ (waar $\lambda = \sigma + i\tau$ een complex getal is) gedefinieerd door

$$\begin{aligned} x_+^\lambda &= 0 && \text{als } x \leqslant 0 \\ x_+^\lambda &= x^\lambda && \text{als } x > 0. \end{aligned} \tag{18.2}$$

Deze functie is locaal integreerbaar als $\sigma > -1$; want als $x > 0$, dan is

$$x_+^\lambda = x^\lambda = x^\sigma . x^{i\tau} = x^\sigma . e^{i\tau \log x} = x^\sigma . \{\cos(\tau \log x) + i \sin(\tau \log x)\},$$

en zowel $x_+^\sigma \cos(\tau \log x)$ als $x_+^\sigma \sin(\tau \log x)$ zijn locaal integreerbaar voor $\sigma > -1$.

Er wordt dus een complexe functionaal gedefinieerd door de toevoeging

$$\varphi \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x_+^{\lambda}\,\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} x^{\sigma}\cos(\tau \log x)\ \varphi(x)dx +$$
$$+ i \int_0^{\infty} x^{\sigma}\sin(\tau \log x)\ \varphi(x)dx.$$

Omdat deze functionaal te schrijven is als combinatie van twee distributies

$$\left[\, x_+^{\sigma}\ \cos(\tau \log x)\right] + i\left[x_+^{\sigma} \sin(\tau \log x)\right]$$

is hij een complexwaardige distributie, die we zullen aangeven met X_+^{λ}.

De distributie X_+^{λ} is volgens het voorgaande gedefinieerd voor ieder complex getal λ met $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$. Dat betekent dat we hier te maken hebben met een <u>schaar van distributies</u>, afhangend van de parameter λ. We kunnen dus trachten de theorie van § 14 toe te passen. Zo kunnen we eenvoudig nagaan dat X_+^{λ} continu afhangt van λ; en zelfs, dat X_+^{λ} differentieerbaar is naar λ:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{X_+^{\lambda} - X_+^{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$$

bestaat, als λ_0 en alle λ een reëel deel > -1 hebben. Om dit na te gaan behoeven we nl. alleen maar te constateren (volgens § 14 stelling 3) dat

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\frac{X_+^{\lambda} - X_+^{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} \right)(\varphi) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda} - x^{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}\ \varphi(x)dx,$$

bestaat voor iedere $\varphi \in (D)$.

Bijgevolg is X_+^{λ} een <u>analytische</u> schaar van distributies, gedefinieerd voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$. Maar dan kunnen we X_+^{λ} door analytische voortzetting ook voor andere waarden van λ definiëren.

Nu geldt voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, en voor willekeurige $\varphi \in (D)$

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda}\ \varphi(x)dx = \int_1^{\infty} x^{\lambda}\ \varphi(x)dx + \int_0^1 x^{\lambda}\ \varphi(x)dx =$$

(18.3)
$$= \int_1^{\infty} x^{\lambda}\ \varphi(x)dx + \int_0^1 x^{\lambda}\Big\{ \varphi(x) - \varphi(0) - x\,\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\ \varphi^{(n-1)}(0)\Big\}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi^{(i-1)}(0)}{(i-1)!\,(\lambda+i)}\ .$$

Het rechterlid van deze identiteit is een analytische functie, gedefinieerd voor Re $\lambda > -n, \lambda \neq -1,-2,\ldots,-(n-1)$. Doordat de identiteit bij analytische voortzetting behouden blijft, volgt, dat $< X_+^\lambda, \varphi >$ analytisch is voor $\lambda \neq -1,-2,-3,\ldots$ Dus ook de complexwaardige distributie X_+ is gedefinieerd en analytisch behalve als $\lambda=-1,-2,\ldots$; in deze punten heeft X_+^λ enkelvoudige polen, zoals ook blijkt uit (18.3). Daar het residu van de <u>functie</u> $< X_+^\lambda, \varphi >$ in $\lambda=-k$, volgens (18.3), het getal

$$\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$$

is, heeft de analytische schaar X_+^λ blijkbaar in $\lambda=-k$ tot residu de distributie

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \delta^{(k-1)}.$$

Evenals iedere andere distributie is X_+^λ differentieerbaar; de distributie-afgeleide wordt zoals gebruikelijk gedefinieerd door

$$< \frac{dX_+^\lambda}{dx}, \varphi > = - < X_+^\lambda, \varphi' > .$$

Men zou kunnen verwachten dat $\frac{dX_+^\lambda}{dx} = \lambda X_+^{\lambda-1}$. Dat dit inderdaad het geval is, is zeer eenvoudig in te zien: als Re $\lambda > 0$, dan zijn zowel X_+^λ als $X_+^{\lambda-1}$ reguliere distributies, en

$$\frac{d}{dx} X_+^\lambda = \frac{d}{dx}\left[x_+^\lambda\right] = \left[\frac{dx_+^\lambda}{dx}\right] = \left[\lambda x_+^{\lambda-1}\right] = \lambda X_+^{\lambda-1}.$$

Daar deze identiteit bij analytische voortzetting behouden blijft, geldt dus voor <u>alle</u> $\lambda \neq -1,-2,-3,\ldots$

$$\frac{d}{dx} X_+^\lambda = \lambda X_+^{\lambda-1} .$$

<u>Voorbeeld 2.</u>

We beschouwen de functies $\log(x+iy)$, $y > 0$, waarbij we stellen

(18.4) $$\log(x+iy) = \log|x+iy| + i \arg(x+iy),$$

met $0 \leq \arg(x+iy) \leq \pi$, $y > 0$. Voor elke $y > 0$ is dit een locaal integreerbare functie van x , die een complexwaardige distributie bepaalt:

(18.5) $$\left[\log(x+iy)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\log(x^2+y^2)\right] + i\left[\operatorname{arc\,tg} \tfrac{y}{x}\right] .$$

Voor $y \longrightarrow +0$ convergeert (18.4) naar

(18.6) $$\log(x+io) = \log|x| + i\pi u(-x),$$

waar u de eenheidsfunctie van Heaviside is; en ook dit is een locaal integreerbare functie, die een distributie bepaalt. Aangezien $\log|x+iy|$ monotoon nadert tot $\log|x|$, en $\arg(x+iy) \to \pi u(-x)$ terwijl het in absolute waarde begrensd blijft (door π), kunnen we § 12 Stelling 1 toepassen en concluderen:

$$\lim_{y \to +0} [\log(x+iy)] = [\log(x+io)] .$$

Hieruit volgt door differentiatie

(18.7) $$\lim_{y \to +0} \left[\frac{1}{x+iy}\right] = [\log(x+io)]' = X^{-1} - i\pi\delta$$

(vgl.18.6). Dat betekent, dat voor iedere $\varphi \in (D)$ geldt

$$\lim_{y \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x+iy}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx - i\pi\varphi(0).$$

2. Verandering van toetsruimte

We hebben ons in het voorgaande voornamelijk beziggehouden met continue lineaire functionalen op (D): de distributies. Maar functionalen op andere ruimten zijn toch ook al ter sprake gekomen.

(a) De ruimte (C) van alle continue functies met begrensde drager omvat (D). Iedere continue lineaire functionaal op (C) is een distributie (cf. § 3). D.w.z. de ruimte (C^*) van alle continue lineaire functionale op (C) is bevat in (D^*).

(b) De ruimte (D_U) van alle toetsfuncties $\varphi \in (D)$ met drager binnen de verzameling U is bevat in (D). Een continue lineaire functionaal op (D_U) heet per definitie een distributie op U, maar is niet noodzakelijk een distributie op geheel R^n. Wel is het omgekeerde waar, iedere distributie is ook een distributie op U; d.w.z. $(D^*) \subset (D_U^*)$.

In het algemeen hebben we het volgende. Zij (L) een lineaire ruimte van reële functies, d.w.z. als $f_1 \in (L)$ en $f_2 \in (L)$, en als a,b reële getallen zijn, dan $af_1+bf_2 \in (L)$. Zij verder op (L) een convergentiebegrip gedefinieerd. Dan kunnen we weer spreken over de ruimte (L^*) van alle continue reële functionale op (L).

Als nu

(18.8) $$(D) \subset (L),$$

terwijl convergentie in (D) ook convergentie in (L) impliceert,i.e.

als $\varphi_n \to \varphi$ in (D) dan zeker $\varphi_n \to \varphi$ in (L); dan geldt

(18.9) $$(L^*) \subset (D^*).$$

Dit is de situatie in (a). Als echter

$$(L) \subset (D),$$

waarbij nu de convergentie in (L) de convergentie in de zin van distributies tot gevolg heeft, dan geldt

$$(D^*) \subset (L^*).$$

Van deze toestand hebben we in (b) een voorbeeld.

Het bewijs is in beide gevallen essentieel gelijk aan dat van de stelling in § 3.

De eerste der beide situaties treedt het meest op. Met een belangrijk voorbeeld zullen we ons uitvoerig bezighouden. Daarbij bestaat (L) uit alle oneindig vaak differentieerbare functies die in het oneindige sneller dan alle machten van x naar nul gaan (de "good functions" bij Lighthill). En $\varphi_n \to \varphi$ in (L) betekent: $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$, uniform in x, voor willekeurige orde van differentiatie k. In dit geval bestaat (L^*) uit de distributies waarop we Fouriertransformatie kunnen toepassen.

Een ander voorbeeld wordt geleverd door de ruimte (E) van alle oneindig vaak differentieerbare functies; $\varphi_n \to \varphi$ in (E) betekent weer $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$, uniform in x, voor alle k. Ook hier geldt: $(E^*) \subset (D^*)$. We bewijzen:

<u>Stelling 1.</u> (E^*) bestaat uit alle distributies met begrensde drager.

<u>Bewijs.</u>

1) Zij $T \in (E^*)$. Dan is de drager van T begrensd. Want anders was er een rij $\varphi_n(x) \in (D)$ met de eigenschappen

$$\varphi_n(x) \equiv 0 \quad \text{als } |x| \leq n,$$

$$T(\varphi_n) = 1.$$

Deze rij convergeert naar 0 in E. Omdat $T \in (E^*)$ moet dus $T(\varphi_n) \to 0$. Tegenspraak.

2) Zij T een distributie met begrensde drager. Dan is $T \in (E^*)$. Nauwkeuriger uitgedrukt: er is een $S \in (E^*)$ die op (D) met T overeenstemt. Zij $\alpha(x) \in (D)$ een functie die op de drager van T de waarde 1 aanneemt; dan kunnen we S definiëren door

$$S(\varphi) = T(\alpha\cdot\varphi) \text{ voor } \varphi \in (E).$$

Het is duidelijk dat dan S een continue lineaire functionaal is op (E), i.e. $S \in (E^*)$, en dat $S(\varphi) = T(\varphi)$ voor $\varphi \in (D)$.

Als derde voorbeeld (voor ons van minder belang) beschouwen we de ruimten (L^p) $(p \geqslant 1)$ die bestaan uit alle meetbare functies $f(x)$ waarvoor $\int_{R^n} |f(x)|^p\,dx$ eindig is. We definiëren convergentie in (L^p) m.b.v. de (L^p)-norm

(18.10) $$\| f \|_p = \left(\int |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En wel zij $f_n \to f$ als $\|f_n - f\|_p \to 0$. Dan is inderdaad $(D) \subset (L^p)$, en $\varphi_n \to \varphi$ in (D) impliceert $\|\varphi_n - \varphi\|_p \to 0$. Dus $(L^{p*}) \subset (D^*)$: iedere continue lineaire functionaal op (L^p) is een distributie.

Het is bekend dat iedere continue lineaire functionaal op (L^p) te schrijven is als een toevoeging

$$f \to (f,g) = \int f(x)g(x)dx$$

waar $g \in L^q$, met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bijgevolg definieert iedere $g \in (L^q)$, $q \geqslant 1$ een distributie:

(18.11) $$(L^q) \subset (D^*).$$

Tenslotte noemen we nog de <u>distributies van eindige orde</u>. Als m een natuurlijk getal is, geven we met (D^m) aan de verzameling van alle reële functies $\varphi(x)$ met begrensde drager, die m maal continu differentieerbaar zijn. We definiëren: $\varphi_n \to \varphi$ in (D^m) als er een begrensde verzameling K is die de dragers van alle φ_n omvat, terwijl $\varphi_n^{(m)}(x) \to \varphi(x)$, uniform in x. (Dan geldt ook: $\varphi_n^{(k)}(x) \to \varphi^{(k)}(x)$, uniform in x, voor $k=0,1,2,\dots,m$). Er geldt weer: $(D) \subset (D^m)$, en als $\varphi_n \to \varphi$ in (D), dan $\varphi_n \to \varphi$ in (D^m). Dus is $(D^{m*}) \subset (D)$. De distributies uit (D^{m*}) heten <u>van orde $\leqslant m$</u>.

Voorbeelden van distributies van eindige orde zijn de distributie-afgeleiden van eindige orde van reguliere distributies: als $F = \frac{d^m}{dx^m}[f]$, dan kan F gemakkelijk uitgebreid worden tot een continue lineaire functionaal op (D^m): stel maar, voor $\varphi \in (D^m)$

(18.12) $$F(\varphi) = (-1)^m \int \varphi^{(m)}(x)\, f(x)dx.$$

Het omgekeerde geldt ook:

<u>Stelling 2.</u> De distributies van eindige orde zijn juist de distributie-afgeleiden, van eindige orde, van reguliere distributies.

Wij zullen deze stelling niet bewijzen, evenmin als de volgende:

Stelling 3. Iedere distributie met begrensde drager is van eindige orde.

Een voorbeeld van een distributie die niet van eindige orde is, wordt geleverd door

$$(18.13) \qquad T = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(n)} .$$

Het is zonder meer duidelijk dat deze distributie geen afgeleide van eindige orde kan zijn van een reguliere distributie. Maar locaal is hij dat wel: op iedere begrensde verzameling zijn slechts eindig veel $\delta_n^{(n)}$ van betekenis, en daar stemt T dus overeen met een distributie van eindige orde.

Algemeen geldt:

Stelling 4. Iedere distributie is locaal een distributie-afgeleide, van eindige orde, van een reguliere distributie.

Bewijs.

Zij F een willekeurige distributie. Als U een begrensde open verzameling is, en $\alpha(x) \in (D)$ is een toetsfunctie met $\alpha(x)=1$ voor $x \in U$, dan is

$$F(\varphi) = F(\alpha\,\varphi) = (\alpha F)(\varphi)$$

voor iedere $\varphi \in (D)$ met drager binnen U. Op U stemt F dus overeen met de distributie αF. Maar αF heeft een begrensde drager, dus αF is een distributie-afgeleide van eindige orde van een reguliere distributie, volgens stelling 3 en stelling 2.

Tot slot bewijzen we

Stelling 5. Iedere distributie F is de som van een convergente reeks van distributie-afgeleiden van reguliere distributies:

$$(18.14) \qquad F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}\,[f_n] .$$

Bewijs.

De gehele R^k kan worden overdekt door een rij begrensde open verzamelingen U_n (e.g. $U_n = \{x : |x| < n\}$). Volgens § 10 lemma 4 zijn er dus functies $\alpha_n(x) \in (D)$, zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) = 1$ voor alle $x \in R^n$. Voor willekeurige $\varphi \in (D)$ is

$$F(\varphi) = F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,\varphi\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n\,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n F)(\varphi);$$

dus $F = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F$. En iedere $\alpha_n F$ heeft een begrensde drager en is dus een distributie-afgeleide, van zekere orde, van een reguliere distributie.

19. Fouriertransformatie van functies. De ruimte S.

1. Notatie-afspraak.

Wanneer we werken in R^n wordt met x zoals gebruikelijk een punt $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ van R^n bedoeld; daarbij is $|x| = (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Is $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, dan definiëren we

$$< x,y > = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n.$$

De letters p,q,r zullen we reserveren om n-tallen niet-negatieve gehele getallen aan te geven:

$$p = (p_1,p_2,\dots,p_n), \quad q = (q_1,q_2,\dots,q_n), \quad r = (r_1,r_2,\dots,r_n);$$

in afwijking van het voorgaande stellen we daarbij

$$|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

We schrijven $p \geq q$ wanneer

$$p_1 \geq q_1, \; p_2 \geq q_2, \dots, p_n \geq q_n$$

en geven met p! aan het getal

$$p! = p_1!p_2!\dots p_n!$$

Evenzo is x^p een schrijfwijze voor

$$x^p = x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}.$$

De notatie D^p is een afkorting voor

$$(19.1) \qquad \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}} = \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}.$$

Deze notatie, ingevoerd door L. Schwartz, geeft aanzienlijke vereenvoudigingen. Bijvoorbeeld kunnen we een polynoom P in $x_1,x_2,\dots,x_n$, van de graad k, nu schrijven in de vorm

$$(19.2) \qquad P(x) = \sum_{|p| \leq k} a_p x^p.$$

De reeksontwikkeling van Maclaurin van een functie $f(x) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ van n variabelen krijgt de eenvoudige en vertrouwde vorm

$$f(x) = \sum_p D^p f(0) \cdot \frac{x^p}{p!}.$$

Wanneer P een willekeurig polynoom in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is, zeg gegeven door (19.5), dan geven we met P(D) aan de differentiaal-operator

(19.3) $$P(D)\, f = \sum_{|p| \leq k} a_p\, D^p f.$$

2. Fouriertransformatie.

Zij f(x) een functie op R^n, die absoluut integreerbaar is:

$$\int_{R^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

(i.e. $f \in L^1$). Dan convergeert, voor iedere y, de integraal

(19.4) $$\int_{R^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dx = g(y).$$

De functie g(y), die we op deze wijze verkrijgen, heet de fourier-transform van f(x); hij wordt ook weergegeven door $\mathcal{F}(f)$. Ook schrijven we wel: $f \xrightarrow{\mathcal{F}} g$.

De functie g(y) is continu op R^n. Bovendien is hij begrensd; en wel geldt

(19.5) $$\|g\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Hierbij is $\|g\|_\infty$ een notatie voor $\sup_{x \in R_n} |g(x)|$. De uitdrukking $\|f\|_1$ is gedefinieerd in § 18:

$$\|f\|_1 = \int_{R^n} |f(x)|\, dx.$$

3. Welke eigenschappen heeft deze functie g(y)?
Neem eens aan dat g(y) differentieerbaar is, zeg naar y, en dat de differentiatie in (19.4) achter het integraalteken mag gebeuren:

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = \int_{R^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} . (-2\pi i x_1)\, dx.$$

Dit is in ieder geval correct als niet alleen $f \in L^1$, maar ook $x_1 f \in L^1$. In dat geval blijkt $\frac{\partial g}{\partial y_1}$ ook een fouriertransform te zijn:

(19.6) $$\frac{\partial g}{\partial y_1} = \mathcal{F}(-2\pi x_1 f).$$

Dan volgt, dat ook $\frac{\partial g}{\partial y_1}$ continu is, en begrensd; en evenals in (19.5) hebben we

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial g_1} \right\|_\infty \leqslant \left\| 2\pi x_1 f \right\|_1 .$$

Als nu niet alleen $f \in L^1$ en $x_1 f \in L^n$, maar zelfs $x^p f \in L^n$, voor alle p met $|p| \leqslant k$, voor zekere k, dan kunnen we het voorgaande gaan herhalen. We vinden dan dat $g(y)$ k maal differentieerbaar is, met continue begrensde afgeleiden. En wel vinden we inductief dat voor al deze p

(19.7) $$(-2\pi i x)^p f \xrightarrow{\mathcal{F}} D^p g$$

zodat

(19.8) $$\| D^p g \|_\infty \leqslant \| (-2\pi i x)^p f \|_1,$$

volgens 19.5. Als $P(x)$ een willekeurig polynoom van graad $\leqslant k$ is, dan volgt verder dat

(19.9) $$P(-2\pi i x) f \xrightarrow{\mathcal{F}} P(D) g.$$

Daartoe gebruiken wij dat de toevoeging $\mathcal{F}$ lineair is:

(19.10) $$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g),$$

zoals onmiddellijk uit (19.4) blijkt.

Tenslotte concluderen we: (A) als $x^p . f \in L'$ voor iedere p, dan is $g(y)$ zelfs oneindig vaak continu differentieerbaar, en alle afgeleiden zijn begrensd.

4. Wat gebeurt er, als we niet $g(y)$ gaan differentieren, maar $f(x)$? Laten we eerst het 1-dimensionale geval nemen, en laten we aannemen dat zowel f als f' continu is en tot L' behoort. We willen het verband onderzoeken tussen

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx$$

en

(19.11) $$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Hulpstelling. Zij $f(x)$ een continue functie van één variabele, met continue afgeleide. Als $f \in L^1$ en $f' \in L^1$, dan is $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Bijgevolg geldt

(19.12) $$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)dt = -\int_{x}^{\infty} f'(t)dt,$$

terwijl

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)dt = 0.$$

<u>Bewijs.</u>

Er geldt

$$f(x) - f(a) = \int_{a}^{x} f'(t)dt.$$

Aangezien $f' \in L^1$ heeft het rechterlid een eindige limiet voor $x \to \infty$. Dus bestaat $\lim_{x\to\infty} f(x)$, en deze limiet is eindig. Dan moet deze limiet 0 zijn, omdat f zelf ook tot L^1 behoort.

Kies nu een vast $y \neq 0$. Door partieel te integreren vinden we

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx = f(x)\cdot \frac{e^{-2\pi ixy}}{-2\pi iy}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + $$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(x)e^{-2\pi ixy}}{-2\pi iy}dx = \frac{1}{2\pi iy}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2\pi ixy}dx = \frac{h(y)}{2\pi iy}.$$

M.a.w. voor iedere $y \neq 0$ geldt

(19.13) $$2\pi iy \cdot g(y) = h(y) = \mathcal{F}(f');$$

omdat beide leden van (19.13) continue functies zijn, blijft deze gelijkheid gelden voor y=0. Toepassing van (19.5) geeft voorts

(19.14) $$\| 2\pi iy\cdot g(y)\|_{\infty} \leq \|f'\|_1 .$$

Beschouw nu het algemene geval van een functie f van n variabelen (n willekeurig). We nemen aan dat f en $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ beide continu zijn en tot L^1 behoren. Voor vaste y met $y_1 \neq 0$ geldt dan

(19.15) $$g(y) = \int_{R^n} f(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx = \int_{R^n}\ldots\int e^{-2\pi i(x_2y_2+\ldots+x_ny_n)}dx_2\ldots$$
$$\ldots dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)e^{-2\pi ix_1y_1}dx_1,$$

volgens de stelling van Fubini, met dien verstande, dat de laatste integraal bestaat voor bijna alle $x_2,\ldots,x_n$, en dat slechts voor die $x_2,\ldots,x_n$ de gelijkheid (19.15) juist is. Passen we het voorgaande toe op de laatste integraal, dan vinden we dat voor bijna alle $x_2,\ldots,x_n$

$$2\pi i y_1\cdot g(y) = \int_{R^{n-1}}\!\!\ldots\int e^{-2\pi i(x_2y_2+\ldots+x_ny_n)}dx_2\ldots dx_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)e^{-2\ ix_1y_1}dx_1.$$

Door de stelling van Fubini nu in omgekeerde richting toe te passen vinden we

$$(19.16)\qquad 2\pi i y_1\cdot g(y) = \int_R\ldots\int_{R^n} f'(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx.$$

We hebben (19.16) bewezen voor $y_1\neq 0$. Beide leden zijn echter weer continu, en dus geldt (19.16) ook voor $y_1=0$. Algemeen geldt dus (onafhankelijk van het aantal variabelen): als $f(x)$ en $f'(x)$ continu zijn en tot L^1 behoren, en als

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(y)$$

dan zal

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi i y_1)\cdot g(y).$$

Uit (19.5) volgt dan dat

$$\|2\pi i y_1\cdot g(y)\|_\infty \leq \|f'(x)\|_1 .$$

Stel nu dat D^pf bestaat, continu is en tot L^1 behoort, voor alle p met $|p|\leq k$. Dan vinden we door inductie dat

$$D^pf \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi i y)^p g(y),$$

zodat $y^p.g(y)$ begrensd is, voor $|p|\leq k$. Algemener geldt: als $P(x)$ een willekeurig polynoom is van graad $\leq k$, dan zal

$$(19.17)\qquad P(D)f \longrightarrow P(2\pi i y)\cdot g(y).$$

Tenslotte concluderen we: (B) als $f(x)$ willekeurig vaak continu differentieerbaar is, en alle afgeleiden van $f(x)$ behoren tot L^1, dan is $y^p.g$ begrensd voor iedere p.

5. Als we de conclusies (A) en (B) combineren vinden we het volgende: stel $x^p.f\in L^1$, voor iedere p, en stel $f(x)$ is willekeurig vaak continu differentieerbaar, met alle afgeleiden in L^1. Zij $g(y)=\mathcal{F}(f)$.

Dan is $y^p \cdot g$ begrensd, voor alle p, en g(y) is oneindig vaak continu differentieerbaar, met alle afgeleiden begrensd. Dit resultaat toont een zekere (onvolledige) symmetrie. We gaan trachten deze symmetrie vollediger te maken.

Daartoe voeren we eerst in het begrip gedempte functie.

Definitie. Een functie f(x) heet gedempt als hij in het oneindige sneller naar 0 gaat dan iedere rationale functie; i.e. als er voor iedere $p \geqslant 0$ een constante c_p bestaat zodanig dat

$$\left| x^p \cdot \varphi(x) \right| \leqslant c_p \quad \text{voor alle } x \in R^n.$$

Verder gebruiken we de notatie C^m voor de verzameling van alle functies op R^n die m maal continu differentieerbaar zijn, terwijl C^∞ de verzameling weergeeft van alle functies die willekeurig vaak continu differentieerbaar zijn. We definiëren

Definitie. Zij (S) de verzameling van alle $\varphi \in C^\infty$ waarvan alle afgeleiden gedempt zijn.

Het is duidelijk dat (S) weer een lineaire functieruimte is. We zullen het volgende "symmetrische" resultaat aantonen: als $\varphi(x) \in (S)$, dan $\mathcal{F}(\varphi) \in (S)$. Anders gezegd: $\mathcal{F}$ beeldt (S) in zichzelf af. Later zullen we zelfs zien dat de ruimte (S) door $\mathcal{F}$ 1.1 op zichzelf wordt afgebeeld.

Eerst moeten we echter de definitie van (S) nader analyseren. Er geldt:

Stelling 1. Laat $\varphi \in C^\infty$. Dan

$\varphi \in (S) \iff x^q D^p \varphi$ begrensd op R^n, voor alle p,q

$\iff Q(x)P(D)\varphi$ " " " , voor willekeurige polynomen P,Q

$\iff P(D)Q(x)\varphi$ " " " , " " " " "

Bewijs.

Het is duidelijk dat de eerste twee criteria equivalent zijn met elkaar en met de eis in de definitie van (S). Aangezien iedere functie $P(D)\ Q(x)\varphi$ een eindige lineaire combinatie is van functies van de vorm $Q^*(x)\ P^*(D)\varphi$, waarbij P^*, Q^* weer polynomen zijn, volgt uit $\varphi \in (S)$ dat altijd $P(D)\ Q(x)\varphi$ begrensd.

Omgekeerd is echter iedere functie $Q(x)\ P(D)\varphi$ een lineaire combinatie van functies van de vorm $P^*(D)\ Q^*(x)\varphi$, zoals eenvoudig inductief te bewijzen is. Als dus steeds $P(D)\ Q(x)\varphi$ begrensd is, dan zal $\varphi \in (S)$.

Stelling 2. Als $\varphi \in (D)$, dan geldt

(1) $Q(x)\ P(D)\varphi \in L^1$, voor willekeurige polynomen P,Q;

(2) $P(D)\ Q(x)\varphi \in L^1$, voor willekeurige polynomen P_1Q.

Bewijs.

Kies willekeurige P,Q. Ook $(1+|x|^2)^n\ Q(x)\ P(D)\varphi$ is weer van de vorm $Q^*(x)\ P^*(D)\varphi$, dus begrensd, zeg $\leq M$. Dan volgt

$$(19.18)\qquad |Q(x)\ P(D)\varphi| \leq \frac{M}{(1+|x|^2)^n}\ .$$

Het rechterlid heeft een eindige integraal; dus $Q(x)\ P(D)\varphi \in L^1$. Voorts zijn de uitspraken (1) en (2) weer equivalent.

Opmerking. Omgekeerd geldt ook: als $\varphi \in C^{\infty}$ en φ heeft de eigenschap (1) (of de equivalente eigenschap (2)) dan $\varphi \in (S)$. Wij zullen dit niet bewijzen, en ook niet gebruiken.

Nu volgt eenvoudig

Stelling 3. Als $\varphi \in (S)$, dan $\mathcal{F}\varphi \in (S)$.

Bewijs.

Als $\varphi \in (S)$, dan $\varphi \in C^{\infty}$; dus $P(-2\pi ix)\varphi \in C^{\infty}$, hoe het polynoom P ook gekozen is. Uit conclusie B volgt dan dat $y^q.\ \mathcal{F}(P(-2\pi ix)\varphi)$ begrensd is, voor alle q. Maar volgens (19.9) is

$$\mathcal{F}\ (P(-2\pi ix)\ \varphi\ ) = P(D)\ \mathcal{F}(\varphi)$$

zodat volgt dat $Q(x)\ P(D)\varphi$ begrensd is, voor alle P en Q.

Verder is $x^p.\varphi \in L^1$, voor alle k, volgens stelling 2, en dus is $\mathcal{F}(\varphi) \in C^{\infty}$, op grond van conclusie A.

6. In plaats van de integraal (19.4) kunnen we bestuderen

$$(19.9)\qquad \int_{R^n} f(x)e^{+2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx = h(y).$$

Ook deze integraal convergeert voor alle y, als $f \in L^1$. De functie $h(y)$ geven we aan met $\overline{\mathcal{F}}(f)$. De operator $\overline{\mathcal{F}}$ heeft overeenkomstige eigenschappen als de operator $\mathcal{F}$; i.h.b. beeldt $\overline{\mathcal{F}}$ ook (S) in zichzelf af.

20. Tamme distributies

We hebben ingevoerd de functieruimte (S), bestaande uit alle willekeurig vaak continu differentieerbare functies $\varphi(x)$ met de eigenschap dat

$$x^q \cdot D^p \varphi(x)$$

begrensd is op R^n voor iedere keuze van p en q.

Op deze functieruimte willen we continue functionalen beschouwen. Dat kan alleen, als we in (S) een convergentiebegrip invoeren. Daarvoor kiezen we het volgende.

Definitie. Wanneer $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ (S), dan zeggen we dat

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{in (S)}$$

indien geldt, voor iedere keuze van p en q

$$x^q \cdot D^p \varphi_n(x) \rightarrow x^q \cdot D^p \varphi(x), \tag{20.1}$$

zulks uniform op R^n.

Na deze definitie is het zinvol te spreken over continue lineaire functionalen F op (S). De verzameling van alle continue lineaire functionalen op (S) geven we aan met (S^*).

Het is duidelijk dat $(D) \subset (S)$. En, als $\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \in (D)$ en $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (D), dan zeker $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (S). Volgens § 18 kunnen we dan schrijven: $(S^*) \subset (D^*)$. Nauwkeuriger gezegd: iedere continue lineaire functionaal F op (S) gedraagt zich als een continue lineaire functionaal op (D). We kunnen de $F \in (S^*)$ dus beschouwen als speciale distributies. Deze distributies zullen we tamme distributies noemen (L. Schwartz noemt ze "distributions tempérées" of "distributions à croissance lente"; het zijn de enige distributies die Lighthill beschouwt).

Niet iedere distributie is een tamme distributie. Zo definieert (in het geval n=1) de locaal integreerbare functie e^x een reguliere distributie $[e^x] \in (D^*)$. Deze distributie $[e^x]$ behoort niet tot (S^*). Want de integraal

$$\int e^x \varphi(x) dx$$

convergeert niet voor iedere $\varphi \in (S)$ (neem maar $\varphi(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$) en men kan aantonen dat $[e^x]$ ook geen niet-reguliere voortzetting tot geheel (S) heeft.

Omgekeerd is het eenvoudig voorbeelden van tamme distributies te geven. Zo is iedere reguliere distributie $[P(x)]$, waar $P(x)$ een polynoom is, tam: als $\varphi_n \to \varphi$ in (S), dan zal $P(x)\ \varphi_n(x) \to P(x)\ \varphi(x)$, uniform op R^n, en dus

$$[P(x)](\varphi_n) = \int P(x)\varphi_n(x)dx \to \int P(x)\varphi(x)dx = [P(x)](\varphi).$$

Algemener wordt een (reguliere) distributie gedefinieerd door iedere <u>tamme functie</u>.

<u>Definitie.</u> Een functie $f(x)$ op R^n heet een <u>tamme functie</u> indien hij gemajoreerd wordt door een polynoom, d.w.z.

(20.2) $$f(x) = (1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^k\ g(x)$$

voor zekere k en zekere <u>begrensde</u> $g(x)$.

Voor iedere tamme $f(x)$ en iedere $\varphi \in (S)$ is de integraal (f, φ) gedefinieerd; want, als we $f(x)$ schrijven in de vorm (20.2), dan is

(20.3) $$(f,\varphi) = \int f(x)\ \varphi(x)dx = \int g(x).(1+x_1^2+\ldots+x_n^2)^k\ \varphi(x)dx.$$

Omdat $\varphi \in (S)$ is $(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^k\ \varphi(x) \in L'$ (zie § 19 stelling 2); daar $g(x)$ begrensd is, volgt dat de integraal in het rechterlid van (20.3) convergeert.

Het is duidelijk dat $\varphi \to (f,\varphi)$ een continue lineaire functionaal is op (S). Dus:

<u>Stelling 1.</u> Iedere tamme functie $f(x)$ definieert een (reguliere) tamme distributie $[f(x)]$:

$$[f(x)]\ (\varphi) = (f,\varphi) \quad \text{voor } \varphi \in (S).$$

We kunnen onze klasse van voorbeelden van tamme distributies nog uitbreiden door gebruik te maken van

<u>Stelling 2.</u> Als F een tamme distributie is, dan ook iedere afgeleide van F.

<u>Bewijs.</u>

Natuurlijk is $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ weer een distributie; we moeten aantonen dat $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ gedefinieerd is op (S), en daar continu is. Maar als $\varphi \in (S)$, dan is $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \in (S)$, dus

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\varphi) = -F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

is gedefinieerd; en als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan zal $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \to 0$ in (S), zodat

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\varphi_n) = -F\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}\right) \to 0.$$

Gevolg: Iedere distributie-afgeleide van eindige orde van een reguliere tamme distributie $[f(x)]$ is weer een tamme distributie.

Hiervan geldt ook een omkering:

Stelling 3. Iedere tamme distributie is een distributie-afgeleide van eindige orde van een reguliere tamme distributie.

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege. Er zij op gewezen dat de situatie hier fraaier is dan bij willekeurige distributies (zoals ook te verwachten was): een willekeurige distributie is in het algemeen slechts locaal een afgeleide van zekere orde van een reguliere distributie, terwijl een tamme distributie die eigenschap globaal heeft. Dit levert ons een nieuwe voorbeeld van een distributie die niet tam is, nl. de distributie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(n)}.$$

Uit stelling 3 volgt ook dat $[e^x]$ geen tamme distributie is: e^x is geen afgeleide, van hoe hoge orde ook, van een tamme functie.

Er volgt ook dat er rijen distributies $\{F_k\}$ zijn, zodanig dat $F_k \in (S^*)$ voor alle k, en dat $\lim_{k\to\infty} F_k = F$ in (D^*) bestaat, zonder dat $F \in (S^*)$. Neem nl. maar

$$F_k = \left[\sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\right] = \sum_{m=0}^{k} \frac{[x^m]}{m!} .$$

We vestigen er de aandacht op dat uit stelling 3 ook volgt dat iedere tamme distributie van eindige orde is.

Opmerking. Als $Q(x)$ een polynoom in x is, dan behoort met $\varphi(x)$ steeds ook $Q(x)\,\varphi(x)$ tot (S). Er volgt dat, voor iedere $F \in (S^*)$, ook het product $[Q].F$ tot (S^*) behoort. Als $f(x)$ een willekeurige functie uit C^{∞} is, dan is de distributie $[f(x)].F$ wel gedefinieerd (§ 15), maar in het algemeen zal $[f].F \notin (S^*)$. Neem e.g. $F = [1]$ $f(x) = e^x$.

21. Fouriertransformatie van tamme distributies

In § 19 beschouwden we de fouriertransformatie

(21.1) $$\varphi(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{F}\varphi)(y) = \int \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dx.$$

Door de operator $\mathcal{F}$ wordt (S) lineair in zichzelf afgebeeld; daarbij geldt nog

(21.2) $$Q(-2\pi ix)P(D)\ \varphi(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} Q(D)\ P(2\pi iy)(\mathcal{F}\varphi)(y).$$

Nu we in (S) een convergentiebegrip hebben, wordt de volgende bewering zinvol:

Stelling 1. De afbeelding $\mathcal{F}: (S) \to (S)$ is continu. D.w.z. als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan zal $\mathcal{F}\varphi_n \to 0$ in (S).

Bewijs.

Als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan zal $Q(-2\pi ix)P(D)\varphi \to 0$ uniform in R^n; dus zal

$$\| Q(-2\pi ix)P(D)\ \varphi_n \|_1 = \int_{R^n} | Q(-2\pi ix)P(D)\ \varphi_n(x)| dx \to 0.$$

Met behulp van (19.5) en (21.2) concluderen we hieruit dat

$$\| Q(D)\ P(2\pi iy)\ (\mathcal{F}\varphi_n)(y) \|_\infty \to 0,$$

i.e. $Q(D)\ P(y) \mathcal{F}\varphi_n$ gaat uniform naar nul op R^n, voor iedere keuze van P en Q. Maar dit betekent precies dat $\mathcal{F}\varphi_n \to 0$ in (S).

We gaan nu over tot de definitie van fouriertransformatie bij distributies. In het voorgaande hebben we steeds een operatie voor distributies gedefinieerd door deze operatie te "verschuiven" naar de toetsfuncties; bijvoorbeeld

$$F'(\varphi) = -F(\varphi');$$
$$([\psi].F)(\varphi) = F(\psi\cdot\varphi);$$
$$(\tau_h F)(\varphi) = F(\tau_{-h}\varphi).$$

Al deze definities waren zo gekozen dat ze aansluiting gaven met de gewone gang van zaken ingeval F regulier was.

Iets dergelijks trachten we nu weer te doen. Beschouw dus eerst een distributie $F=[f]$, bepaald door een tot L^1 behorende functie f(x). Zij $g(y)=(\mathcal{F}f)(y)$ de fouriergetransformeerde van f(x). Als $\varphi \in (S)$, dan geldt

(21.3) $$(g,\varphi) = \int g(y)\,\varphi(y)dy = \int\left\{\int f(x)e^{-2\pi i<x,y>}dx\right\}\varphi(y)dy.$$

Door verwisseling van de integratievolgorde (die is toegestaan omdat de herhaalde integraal (21.3) absoluut convergeert) volgt dat

$$(g,\varphi) = \int f(x)\left\{\int e^{-2\pi i<x,y>}\varphi(y)dy\right\}dx = (f,\psi),$$

waar $\psi(x) = \int \varphi(y)e^{-2\pi i<x,y>}dy = (\mathcal{F}\varphi)(x)$. Anders gezegd:

(21.4) $$(\mathcal{F}f,\varphi) = (f,\mathcal{F}\varphi).$$

Deze formule willen we ten grondslag leggen aan de definitie van de fouriergetransformeerde van een distributie; m.a.w. we willen voor distributies F een fouriergetransformeerde $\mathcal{F}F$ definiëren door

$$(\mathcal{F}F)(\varphi) = F(\mathcal{F}\varphi).$$

Alleen, voor een willekeurige distributie F is deze formule niet bruikbaar. Want als $\varphi \in (D)$, dan zal $\mathcal{F}\varphi$ geen begrensde drager hebben (tenzij $\varphi(x) \equiv 0$), zodat $\mathcal{F}\varphi \notin (D)$, waardoor $F(\mathcal{F}\varphi)$ niet gedefinieerd is.

Maar daartoe hebben we juist de ruimte (S) ingevoerd: als $\varphi \in (S)$, dan ook $\mathcal{F}\varphi \in (S)$. Als nu $F \in (S^*)$, dan is $F(\mathcal{F}\varphi)$ gedefinieerd, voor alle $\varphi \in (S)$. Bovendien is de toevoeging $\varphi \rightarrow F(\mathcal{F}\varphi)$ lineair en continu: de lineariteit volgt uit

$$\alpha\varphi + \beta\psi \rightarrow F(\mathcal{F}(\alpha\varphi + \beta\psi)) = F(\alpha\mathcal{F}\varphi + \beta\mathcal{F}\psi) = \alpha F(\mathcal{F}\varphi) + \beta F(\mathcal{F}\psi),$$

terwijl de continuiteit een gevolg is van stelling 1: als $\varphi_n \rightarrow 0$ in (S), dan $\mathcal{F}\varphi_n \rightarrow 0$ in (S) (stelling 1), dus $F(\mathcal{F}\varphi_n) \rightarrow 0$ (omdat F een continue functionaal is op (S)).

Het is dus geoorloofd te definiëren:

<u>Definitie.</u> Als F een tamme distributie is, dan definiëren we een distributie $\mathcal{F}F$, de fouriergetransformeerde van F, door

$$(\mathcal{F}F)(\varphi) = F(\mathcal{F}\varphi)$$

voor $\varphi \in (S)$.

Voorbeeld 1. $\mathcal{F}\delta = [1]$.

Immers, per definitie is

$$(\mathcal{F}\delta)(\varphi) = \delta(\mathcal{F}\varphi) = \int e^{-2\pi i < 0,y >}\varphi(y)dy = \int \varphi(y)dy = (1,\varphi).$$

Evenzo leiden we onmiddellijk af voor de verschoven δ-distributie, δ_a:

$$\mathcal{F}\delta_a = [e^{-2\pi i < a,y >}]. \tag{21.6}$$

Stelling 2. Als P(x), Q(x) polynomen zijn, en $G \in (S^*)$, dan geldt:

$$\mathcal{F}(P(D)G) = [P(2\pi iy)] \cdot \mathcal{F}G; \tag{21.7}$$

$$\mathcal{F}([Q(-2\pi ix)] \cdot G) = Q(D)\mathcal{F}G; \tag{21.8}$$

$$\mathcal{F}\tau_a G = [e^{-2\pi i < a,y >}] \cdot \mathcal{F}G; \tag{21.9}$$

$$\mathcal{F}([e^{2\pi i < a,x >}) \cdot G) = \tau_a \mathcal{F}G. \tag{21.10}$$

Bewijs.

We maken gebruik van het feit dat uit de definitie van distributie-afgeleide

$$(DG)(\psi) = -G(D\psi) = G(-D\psi)$$

volgt dat voor willekeurige polynomen P(x) ook

$$(P(D)G)(\psi) = G(P(-D)\psi). \tag{21.11}$$

Voorts gebruiken we de gelijkheden (19.17) en (19.9) die gelden voor functies $\psi \in (S^*)$:

$$\mathcal{F}(P(D)\psi(x)) = P(2\pi iy).\mathcal{F}\psi; \tag{21.12}$$

$$\mathcal{F}(P(-2\pi ix) \cdot \psi(x)) = P(D)\mathcal{F}\psi. \tag{21.13}$$

Neem willekeurige $\varphi(y) \in (S)$. (Als G een distributie is met variabele x, dan is $\mathcal{F}G$ een distributie met variabele y; we moeten daarom een $\varphi(y)$ nemen). Er geldt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P(D)G)(\psi) &= (P(D)G)(\mathcal{F}\varphi) = G(P(-D)\mathcal{F}\varphi) = \\ &= G(\mathcal{F}(P(2\pi iy) \cdot \varphi)) = (\mathcal{F}G)(P(2\pi iy) \cdot \varphi) = \\ &= ([P(2\pi iy)] \cdot \mathcal{F}G)(\varphi).\end{aligned}$$

Daarmee is (21.7) bewezen.

Het bewijs van (21.8) is geheel analoog:

$$\mathcal{F}([Q(-2\pi ix)]\cdot G)(\varphi) = [Q(-2\pi ix)]\cdot G(\mathcal{F}\varphi) =$$
$$= G(Q(-2\pi ix)\cdot\mathcal{F}\varphi) = G(\mathcal{F}(Q(-D)\varphi)) =$$
$$= (\mathcal{F}G)(Q(-D)\varphi) = (Q(D)\mathcal{F}G)(\varphi).$$

En op dezelfde wijze bewijzen we (21.9) en (21.10), ditmaal gebruikmakend van het feit (dat onmiddellijk gecontroleerd kan worden) dat de analoga van (21.9) en (21.10) voor functies $\psi \in (S)$ gelden:

(21.14) $$\tau_a \psi(x) = \psi(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2\pi i < a,y >}.\mathcal{F}\psi,$$

(21.15) $$e^{2\pi i < a,x >}.\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tau_a\mathcal{F}\psi.$$

<u>Voorbeeld 2.</u> Daar we zagen dat $\mathcal{F}\delta = 1$, volgt nu dat

(21.16) $$\mathcal{F}(P(D)\delta) = [P(2\pi iy)] ,$$

(21.17) $$\mathcal{F}([Q(-2\pi ix)]\cdot\delta) = [\alpha],$$

waar α de constante term van het polynoom $Q(x)$ is.

We willen nu de fouriergetransformeerde van de distributie [1] berekenen. Deze berekening is iets minder eenvoudig dan die van $\mathcal{F}\delta$.

<u>Stelling 3.</u> $\mathcal{F}[1] = \delta$.

<u>Bewijs.</u>

<u>a</u>. We bewijzen eerst: $e^{-\pi|x|^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\pi|y|^2}$

Stel eerst n=1. Zij $f(x)=e^{-\pi x^2}$ en $g(y)=\mathcal{F}f$. De functie $f(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'(x) + 2\pi x\, f(x) = 0.$$

Op deze vergelijking passen we $\mathcal{F}$ toe; dat geeft

$$2\pi iy.g(y) + i.g'(y) = 0.$$

Dus $g(y)$ voldoet aan dezelfde differentiaalvergelijking. Bijgevolg geldt

$$g(y) = \text{constante}.e^{-\pi y^2}.$$

Om de waarde van de constante te vinden berekenen we $g(0)$:

$$g(0) = \int e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Dus $g(y) = e^{-\pi y^2}$.

Ingeval $n > 1$, dan behoeven we slechts op te merken dat

$$g(y) = \int \ldots \int e^{-\pi(x_1^2 + \ldots + x_n^2)} e^{-2\pi i(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int e^{-\pi x_1^2 - 2\pi i x_1 y_1} dx_1 \cdot \int e^{-\pi x_2^2 - 2\pi i x_2 y_2} dx_2 \ldots =$$

$$= e^{-\pi y_1^2} \cdot e^{-\pi y_2^2} \cdot \ldots \cdot e^{-\pi y_n^2} = e^{-\pi |y|^2}.$$

b. Als $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(y)$, dan $f(\varepsilon x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\frac{1}{\varepsilon})^n g(\frac{y}{\varepsilon})$. Dit passen we toe op $e^{-\pi x^2}$:

$$e^{-\varepsilon |x|^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}} e^{-\pi |(\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} y|^2} = (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} |y|^2}.$$

Als dit geldt voor de functie $e^{-\varepsilon |x|^2}$ dan ook voor de bijbehorende reguliere distributie:

(21.18) $$\left[e^{-\varepsilon |x|^2}\right] \xrightarrow{\mathcal{F}} (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}} \left[e^{\frac{\pi^2}{\varepsilon} |y|^2} \right].$$

Nu zoeken we de limieten (voor $\varepsilon \to 0$) in distributionele zin, van linker- en rechterlid van (21.18). Welnu, als φ een willekeurige toetsfunctie is, dan geldt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[e^{-\varepsilon |x|^2}\right](\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{-\varepsilon |x|^2} \varphi(x) dx = \int \varphi(x) dx = (1, \varphi),$$

dus

(21.19) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[e^{-\varepsilon |x|^2}\right] = [1].$$

En:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}} \left[e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} |y|^2}\right](\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} |y|^2} \varphi(y) dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{-\pi |z|^2} \varphi(z \sqrt{\tfrac{\varepsilon}{\pi}}) dz =$$

$$= \varphi(0) \cdot \int e^{-\pi |z|^2} dx = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

dus

(21.20) $$\lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}} \left[e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} |y|^2}\right] = \delta.$$

Hieruit volgt dat $[1] \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta$.

Opmerking. In dit bewijs gebruiken we de continuiteit van $\mathcal{F}$ als operatie op de distributies uit (S^*). We hebben echter alleen maar bewezen dat $\mathcal{F}$ continu is als operatie op (S) (stelling 1). Als we willen spreken over continuiteit van $\mathcal{F}$ op (S^*) dan moeten we specificeren t.o.v. welk convergentiebegrip in (S^*) we dit bedoelen.

Nu is in (S^*), als deelverzameling van (D^*), een zwakke en een sterke convergentie gedefinieerd. In dit verband is echter een iets gewijzigd convergentiebegrip nuttiger en meer voor de hand liggend: definieer e.g. zwakke convergentie $G_n \longrightarrow G$ in (S^*) door de eis

(21.21) $$G_n(\varphi) \longrightarrow G(\varphi)$$

voor iedere $\varphi \in (S)$. (Dat is sterker dan de eis voor distributies op (D); dan behoeft immers (21.21) slechts te gelden voor alle $\varphi \in (D)$.) In deze zin nu is $\mathcal{F}$ continu: als $G_n \longrightarrow G$, dan $\mathcal{F}G_n \longrightarrow \mathcal{F}G$. Het bewijs is uiterst eenvoudig:

$$(\mathcal{F}G_n)(\varphi) = G_n(\mathcal{F}\varphi) \longrightarrow G(\mathcal{F}\varphi) = (\mathcal{F}G)(\varphi).$$

Voorbeeld 3. In voorbeeld 1 zagen we dat

$$\mathcal{F}\delta_a = \left[e^{-2\pi i<a,y>}\right].$$

Uit het feit dat $\mathcal{F}[1] = \delta$ en uit (21.10) volgt nu onmiddellijk dat omgekeerd:

(21.22) $$\mathcal{F}\left[e^{+2\pi i <a,x>}\right] = \delta_a.$$

Daaruit volgt onmiddellijk dat (voor n=1):

(21.23) $$\mathcal{F}\left[\sin 2\pi ax\right] = -\tfrac{1}{2}i(\delta_a - \delta_{-a});$$

(21.24) $$\mathcal{F}\left[\cos 2\pi ax\right] = \tfrac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}).$$

Op (S) hebben we behalve $\mathcal{F}$:

$$\varphi(x) \longrightarrow \int e^{-\pi i<x,y>} \varphi(x)dx$$

ook gedefinieerd de operatie $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\varphi(x) \longrightarrow \int e^{+\pi i<x,y>} \varphi(x)dx.$$

Ook deze kunnen we definiëren voor distributies op (S); en wel stellen we weer, voor $G \in (S^*)$:

(21.25) $$(\bar{\mathcal{F}} G)(\varphi) = G(\bar{\mathcal{F}}\varphi).$$

Stelling 4. $\mathcal{F}$ beeldt (S^*) 1-1-duidig op zichzelf af, en heeft $\bar{\mathcal{F}}$ tot inverse afbeelding.

Bewijs.

Als $\varphi \in (S)$, en als $\psi = \mathcal{F}\varphi$, dan geldt, voor willekeurige $a \in R^n$:

$$\varphi(a) = \delta_a(\varphi) = \mathcal{F}[e^{2\pi i<a,y>}](\varphi) =$$

$$= [e^{2\pi i<a,y>}](\mathcal{F}\varphi) = \int e^{2\pi i<a,y>}\psi(y)dy = (\bar{\mathcal{F}}\psi)(a).$$

Dus $\varphi = \bar{\mathcal{F}}\psi$.

Als nu $G \in (S^*)$, dan is

$$(\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} G)(\varphi) = (\mathcal{F} G)(\bar{\mathcal{F}}\varphi) = G(\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi) = G(\varphi).$$

Dus $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} G = G$.

Opmerking. Uit het bewijs volgt, dat $\mathcal{F}$ de functieruimte (S) 1-1-duidig op zichzelf afbeeldt, met $\bar{\mathcal{F}}$ als inverse afbeelding.

Voorbeeld 4. We willen nog een aantal fouriergetransformeerden van distributies uitrekenen. Daarbij beperken we ons tot distributies van één variabele.

Laten we beginnen met $\mathcal{F}X^{-1}$. Voor $\varphi \in (S)$ is

$$(\mathcal{F}X^{-1})(\varphi) = X^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, \frac{e^{-2\pi ixy} - e^{+2\pi ixy}}{x}\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)dy \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi ixy} - e^{+2\pi ixy}}{x}\, dx.$$

Nu is

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2\pi ixy} - e^{+2\pi ixy}}{x}\, dx = -2i \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi xy}{x}\, dx =$$

$$= -2i \operatorname{sign} y \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$= -2i \operatorname{sign} y \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi i \operatorname{sign} y.$$

Daarbij is sign y de functie die +1 is voor $y > 0$ en -1 voor $y < 0$.

We vinden dus dat

$$(\mathcal{F}X^{-1})(\varphi) = -\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} y\, \varphi(y)dy,$$

ofwel dat

(21.26) $$\mathcal{F}\, X^{-1} = -\pi i [\operatorname{sign} y] .$$

Op dezelfde wijze volgt dat

$$\overline{\mathcal{F}}\, X^{-1} = +\pi i\, [\operatorname{sign} y] .$$

Nu gaan we stelling 4 toepassen: $X^{-1} = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} X^{-1}$, dus

$$X^{-1} = \pi i\, \mathcal{F} [\operatorname{sign} y] .$$

Anders gezegd,

(21.27) $$\mathcal{F}\, [\operatorname{sign} y] = -\frac{i}{\pi} X^{-1} .$$

Nu geldt echter dat

$$[\operatorname{sign} y] = 2U-1,$$

waar $U = [\mu(y)]$. Er volgt dus dat

$$\mathcal{F}\,(2U-1) = -\frac{i}{\pi} X^{-1} ;$$

$$2\,\mathcal{F} U - \delta = -\frac{i}{\pi} X^{-1} ;$$

en zo vinden we

(21.28) $$\mathcal{F}\, U = -\frac{i}{2\pi}\, X^{-1} + \frac{1}{2}\delta .$$

Dit is in overeenstemming met de relatie (21.7) uit stelling 2:

$$[1] = \mathcal{F}\delta = \mathcal{F} U' = [2\pi i x]\, \mathcal{F} U = [x] \cdot X^{-1} + \pi i [x] \cdot \delta ,$$

daar $[x] \cdot X^{-1} = [1]$ en $[x] \cdot \delta = 0$.

We merken tenslotte op dat we op grond van stelling 2 en stelling 3 ook de fouriergetransformeerde van alle polynomen kennen:

(21.29) $$\mathcal{F}\, [P(-2\pi i x)] = P(D)\, \delta .$$

22. De Stelling van Parseval

We beschouwen nu de functieruimten L^p $(p \geq 1)$. Het is zonder meer duidelijk dat steeds $(S) \subset L^p$. Anderzijds geldt ook – en dat is in dit verband belangrijker – dat een $f \in L^p$ altijd een distributie $[f] \in (S^*)$ definieert. Want als $f \in L^p$ en $\varphi \in (S)$, dan geldt (ongelijkheid van Hölder):

$$(22.1) \qquad |(f, \varphi)| = \left|\int f(x)\, \varphi(x)dx\right| \leq \int |f(x)\, \varphi(x)|dx \leq \|f\|_p \cdot \|\varphi\|_{\frac{p-1}{p}} < \infty.$$

De bevoeging $\varphi \rightarrow (f, \varphi)$ definieert dus een – kennelijk lineaire – functionaal. En deze functionaal is continu (dus een distributie uit (S^*)), want als $\varphi_n \rightarrow 0$ in (S), dan geldt zeker dat

$$\|\varphi_n\|_q = \left\{\int |\varphi_n(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0,$$

voor iedere $q \geq 1$, zodat (vgl. (22.1))

$$|(f, \varphi_n)| \leq \|f\|_p \cdot \|\varphi_n\|_{\frac{p-1}{p}} \rightarrow 0.$$

Slordig gezegd hebben we dat

$$(22.2) \qquad (S) \subset L^p \subset (S^*).$$

We hebben de volgende hulpstelling nodig.

<u>Hulpstelling</u>. Iedere $f \in L^2$ is de limiet, in L^2, van een rij φ_n uit (S).

<u>Bewijs</u>.

Zij $f_n(x) = f(x)$ voor $|x| \leq n$ en $f_n(x) = 0$ voor $|x| > n$. Dan geldt

$$\|f - f_n\|_2 = \left\{\int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \rightarrow 0,$$

dwz. $f_n \rightarrow f$ in L_2.

Zij vervolgens $\rho_{(a)}(x)$ een willekeurig vaak differentieerbare functie met de eigenschappen: $\rho_{(a)}(x) = 0$ als $|x| \geq a$, en $\int \rho_{(a)}(x)dx = 1$. Geheel als in de bewijzen van lemma 1 en stelling 1 van 10 volgt dan eenvoudig dat iedere functie $f_n * \rho_{(a)}$ een willekeurig vaak differentieerbare functie met begrensde drager is. Evenzo volgt, dat $f_n * \rho_{(a)}$ uniform tot f_n nadert voor $a \rightarrow 0$.

Dan geldt zeker $f_n * \rho_{(a)} \to f_n$ in L^2, en er volgt dat f een limiet is, in L^2, van een rij toetsfuncties uit (D). A fortiori is f limiet van een rij functies uit (S).

We gebruiken nu de distributie-theorie om een eenvoudig bewijs te geven van de volgende stelling.

Stelling van Plancherel-Parseval. Zij $f \in L^2$. Dan is er een $g \in L^2$ zodat $\mathcal{F}[f] = [g]$.
Bovendien geldt dat $\|g\|_2 = \|f\|_2$.
Bewijs.

Stel eerst dat f een functie $\varphi \in (S)$ is. Zij $\psi(y) = \mathcal{F}\varphi$. Dan behoort ψ tot (S), dus zeker $\psi \in L^2$; natuurlijk geldt $\mathcal{F}[\varphi] = [\psi]$. We behoeven dus nog maar aan te tonen dat $\|\psi\|_2 = \|\varphi\|_2$. En inderdaad, daar $\varphi = \overline{\mathcal{F}}\psi$ geldt

$$\|\varphi\|_2 = \int |\varphi(x)|^2 dx = \int \varphi(x)\,\overline{\varphi(x)}dx = \int \varphi(x)dx \int \overline{\psi(y)}e^{-2\pi i < x,y >} dy =$$

$$= \int \overline{\psi(y)}dy \int \varphi(x)e^{-2\pi i < x,y >} dy = \int \psi(y)\,\overline{\psi(y)}dy = \|\psi\|_2 .$$

Neem nu het algemene geval: f is een willekeurige functie uit L^2. Volgens de hulpstelling is er een rij φ_n in (S) die in L^2 tot f nadert. Dan geldt zeker ook

$$[\varphi_n] \to [f] \qquad \text{in } (S^*)$$

aangezien, voor willekeurige $\psi(x) \in (S)$,

$$|(f, \psi) - (\varphi_n, \psi)| = \left|\int (f(x) - \varphi_n(x))\, \psi(x)dx\right| \leq \|f - \varphi_n\|_2 \cdot \|\psi\|_2 \to 0.$$

Er volgt dat, als $\psi_n = \mathcal{F}\varphi_n$,

$$[\psi_n] \to \mathcal{F}[f] .$$

Aangezien $\{\varphi_n\}$ convergeert in L^2, geldt dat $\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \to 0$; omdat we onze stelling van functies uit L^2 al bewezen hebben, volgt dat $\|\psi_n - \psi_m\|_2 \to 0$. Hieruit volgt weer (omdat L^2 volledig is) dat ψ_n in L^2 tot een functie g nadert. A fortiori geldt dat in (S^*)

$$[\psi_n] \to [g] .$$

Dan moet $\mathcal{F}[f]=[g]$. Tenslotte geldt

$$\|g\|_2=\lim_{n\to\infty}\|\psi_n\|_2=\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_2=\|f\|_2 ,$$

waarmee het bewijs is voltooid.

Opmerkingen 1. De voorgaande stelling geldt natuurlijk voor $\overline{\mathcal{F}}$. Derhalve zijn $\mathcal{F}$ en $\overline{\mathcal{F}}$ beide 1-1-duidige afbeeldingen van L^2 op zichzelf, die de L^2-norm invariant laten:zogenaamde unitaire operatoren op L^2. Er volgt heel eenvoudig dat voor $f,g \in L^2$ ook

(22.3) $\qquad (f,g) = (\mathcal{F} f, \mathcal{F} g).$

Hierbij is, voor $f \in L^2$, $\mathcal{F} f$ de functie in L^2 zodanig dat

(22.4) $\qquad \mathcal{F}[f] = [\mathcal{F} f].$

De formule (22.3) kan, in plaats van (21.4), als uitgangspunt gebruikt worden voor de definitie van fouriertransformatie van distributies:

(22.5) $\qquad F(\varphi) = (\mathcal{F} F)(\mathcal{F}\varphi).$

Het is dan mogelijk voor iedere distributie $F \in (D^*)$ een fouriergetransformeerde $\mathcal{F} F$ te definiëren. Deze is dan echter een nieuw soort distributie, nl. een continue lineaire functionaal, niet op (D), maar op de functieruimte van alle fouriergetransformeerden van functies uit (D). Dit is de methode die gevolgd wordt in het boek van Gelfand en Shilov.

Opmerking 2. In de klassieke theorie wordt de fouriergetransformeerde $\mathcal{F} f$ van een functie $f \in L^2$ gedefinieerd als de limiet in L^2, voor $N \to \infty$, van de functies

(22.6) $\qquad g_N(y) = \int_{|x| \geqslant N} f(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dx.$

Het is eenvoudig in te zien dat deze definitie overeenstemt met die in (22.4): als weer $f_N(x)=f(x)$ voor $|x| \leqslant N$ en $f_N(x)=0$ voor $|x| > N$, dan is $f_N \in L^1$, en $g_N=\mathcal{F} f_N$.
Dus ook $[g_N]= \mathcal{F}[f_N]$.

Daar $f_N \to f$ in L^2, en, a fortiori, $[f_N] \to [f]$ in (S^*),geldt

$$[g_N] = \mathcal{F}[f_N] \to \mathcal{F}[f] .$$

Als dus g_N in L^2 convergeert naar een functie g, dan is $[g] = \mathcal{F}[f]$.

23. Fouriertransformatie en convolutie.

We hebben gezien dat vermenigvuldiging bij distributies niet altijd mogelijk is. Als f(x) een oneindig vaak differentieerbare functie is, dan kunnen we een willekeurige distributie F met $[f]$ vermenigvuldigen door te stellen

(23.1) $$([f] . F)(\varphi) = F(f.\varphi).$$

Immers, als $\varphi \in (D)$ dan ook $f\cdot\varphi \in (D)$, zodat $F(f.\varphi)$ is gedefinieerd. Is f(x) echter een willekeurige functie, dan valt er niet veel te zeggen.

Bij distributies uit (S^*) is de situatie nog iets onprettiger. Immers, we zagen reeds in § 20 dat als $\varphi \in (S)$ en f willekeurig vaak differentieerbaar is, de functie $f(x)\cdot\varphi(x)$ niet tot (S) behoeft te behoren, zodat $[f]\cdot F$ niet altijd een tamme distributie behoeft te zijn. Neem e.g. $F= [1]$ en $f(x)=e^x$.

We moeten dus aan f(x) zekere verdere beperkingen opleggen. Daartoe definiëren we een geschikte verzameling van functies waarmee we iedere tamme distributie mogen vermenigvuldigen. Deze functies zouden we multiplicatoren kunnen noemen.

Definitie. Zij (O_M) de verzameling van alle functies f(x), waarvan alle afgeleiden bestaan en tam zijn.

Anders gezegd, $f(x) \in (O_M)$ dan en slechts dan als $f \in C^\infty$ en als er voor ieder polynoom P een polynoom Q bestaat zodanig dat voor alle x

(23.2) $$|P(D)\, f(x)| \leq |Q(x)|.$$

Dan kunnen we P(D)f(x) schrijven in de vorm

(23.3) $$P(D)\, f(x) = Q(x)\cdot g(x)$$

waarbij de functie g(x) begrensd en willekeurig vaak differentieerbaar is. Zelfs kunnen we Q(x) zo kiezen dat $g(x) \in L^1$.

Als $f(x) \in (O_M)$ dan is $f(x)$ in ieder geval een tamme functie, die dus een distributie $[f] \in (S^*)$ definieert.

Een voorbeeld van een functie uit (O_M) is $e^{\pi i |x|^2}$. Dit voorbeeld toont dat het polynoom Q essentieel van de orde van differentiatie, dus van het polynoom P, kan afhangen.

Uit de definitie volgt onmiddellijk:

Stelling 1. Als $\varphi \in (S)$ en $f \in (O_M)$, dan is $f.\varphi \in (S)$. En, als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan ook $f.\varphi_n \to 0$ in (S).

Gevolg: Als $F \in (S^*)$ en $f \in (O_M)$ dan $[f].F \in (S^*)$.

We kennen in (D) nog een tweede operatie die niet altijd mogelijk is: de convolutie. De enige gevallen waarin we zonder meer zeker zijn van het bestaan van $F * G$ zijn de volgende:

(1) F of G heeft een begrensde drager;

(2) de dragers van F en G zijn naar dezelfde kant begrensd.

De enige distributies waarvan we zeker zijn dat we ze kunnen vouwen met alle $F \in (D^*)$ zijn dus de distributies met begrensde drager.

In (S^*) is ditmaal de situatie juist gunstiger. Indien $F,G \in (S^*)$ en aan één der voorwaarden (1), (2) is voldaan, dan kan men gemakkelijk nagaan dat $F*G \in (S^*)$. Maar $F*G$ kan in meer gevallen gedefinieerd worden, en i.h.b. zijn er distributies $G \in (S^*)$ die zich laten vouwen met iedere $F \in (S^*)$ zonder een begrensde drager te hebben.

Voorbeeld 1. $G = [e^{i\pi |x|^2}]$.

Zij $g(x) = e^{i\pi |x|^2}$, en zij $\varphi(x) \in (S)$. Dan behoort ook $g*\varphi$ tot (S):

$$g*\varphi = \int e^{\pi i |x-y|^2} \varphi(y)dy = e^{\pi i |x|^2} \int e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} e^{\pi i |y|^2} \varphi(y)dy =$$

$$= e^{\pi i |x|^2} \mathcal{F}\psi ,$$

waar $\psi(y) = e^{\pi i |y|^2} . \varphi(y)$. Aangezien $\mathcal{F}$ de ruimte (S) in zichzelf afbeeldt, behoort $\mathcal{F}\psi$, en daarmee $g*\varphi$, tot (S).

Dus is voor willekeurige $F \in (S^*)$, $F(g * \varphi)$ gedefinieerd. Maar

$$\begin{aligned} F(g * \varphi) &= F\left(\int e^{\pi i |y|^2} \varphi(x-y)dy\right) = \\ &= F\left(\int e^{\pi i |y|^2} \varphi(x+y)dy\right) = \\ &= F_x(G_y\ (\varphi(x+y))) = (F*G)\ (\varphi). \end{aligned}$$

Dus $F*G$ is gedefinieerd, voor alle $F \in (S)$. (Eigenlijk is hiermee $F*G$ alleen nog maar gedefinieerd als lineaire functionaal op (S); we moeten nl. nog bewijzen dat $F*G$ ook continu is op (S). Dit volgt uit het feit dat met $\varphi_n \to 0$ in (S) ook $g*\varphi_n \to 0$ in (S), hetgeen men eenvoudig na kan gaan.)

In bovenstaand voorbeeld bleek het mogelijk $F*G$ te definieren, voor alle $F \in (S^*)$, doordat $G * \varphi$ (vgl.(17.12)) tot (S) behoorde, voor alle $\varphi \in (S)$. Distributies met deze laatste eigenschap verdienen dus onze bijzondere aandacht.

<u>Definitie</u> Zij (O_C^*) de verzameling van alle distributies $G \in (S^*)$ met de volgende twee eigenschappen:

(1) Als $\varphi \in (S)$, dan ook $G * \varphi \in (S)$;

(2) Als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan $G * \varphi_n \to 0$ in (S).

<u>Stelling 2.</u> Als $G \in (O_C^*)$ en $F \in (S^*)$, dan bestaat $F*G$, en $F*G \in (S^*)$.

<u>Bewijs.</u> Met $\psi(x)$ behoort natuurlijk $\sigma\psi(x) = \psi(-x)$ tot (S). Daaruit volgt dat met G ook σG tot (O_C^*) behoort. Maar er geldt algemeen

$$(F*G)(\varphi) = F(\sigma G * \varphi) \tag{23.4}$$

en dus is $F*G$ gedefinieerd, voor alle $F \in (S^*)$.

Natuurlijk is $F*G$ een lineaire functionaal op (S). Bovendien is $F*G$ continu op (S): als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan volgt uit (2) in de definitie van (O_C^*) dat ook $\sigma G * \varphi_n \to 0$ in (S), zodat

$$(F*G)(\varphi_n) = F(\sigma G * \varphi_n) \to 0 \quad \text{in } (S).$$

De distributies uit (O_C) zou men convolutoren kunnen noemen.

Opmerking 1. In de definitie van (O_C^*) is de voorwaarde (2) overbodig. Men kan nl. zelfs aantonen: als $G \varepsilon (D^*)$ de eigenschap heeft, dat $G * \varphi \varepsilon (S)$ voor iedere $\varphi \varepsilon (D)$, dan behoort G tot (O_C^*).

Opmerking 2. Een belangrijk criterium voor het behoren tot (O_C^*) wordt gegeven door de volgende stelling (die wij hier zullen bewijzen):

Stelling 3: Dan en slechts dan behoort een distributie G tot (O_C^*) indien $[Q(x)]$. G een begrensde distributie is, voor iedere keuze van het polynoom $Q(x)$.

Het in deze stelling gebruikte begrip begrensde distributie is als volgt gedefinieerd:

Definitie. Een distributie heet begrensd als hij een eindige som is van distributieafgeleiden (van eindige orde) van begrensde continue functies.

Van groot belang is de volgende stelling.

Stelling 4. Als $f \varepsilon (O_M)$, dan $F = \mathcal{F}[f] \varepsilon (O_C^*)$. Bovendien geldt, voor $G \varepsilon (S^*)$

$$[f] \cdot G \xrightarrow{\mathcal{F}} F * \mathcal{F} G. \tag{23.5}$$

Bewijs:

a) Zij $\varphi \varepsilon (S)$. Dan is

$$F * \varphi = \mathcal{F} \psi \tag{23.6}$$

met

$$\psi = f \cdot \overline{\mathcal{F}} \varphi \, . \tag{23.7}$$

Immers

$$F * \varphi = F_y \; \varphi(x-y) = (\mathcal{F}[f])_y \; (\varphi(x-y)) = [f]_z \; (\mathcal{F} \varphi(x-y)) =$$
$$= [f]_z \; (e^{-2\pi i<x,z>} \overline{\mathcal{F}} \varphi) = \int e^{-2\pi i<x,z>} f(z)(\overline{\mathcal{F}} \varphi)(z) dz =$$
$$= \mathcal{F} \psi$$

met ψ als in (23.6)

b) Hieruit volgt onmiddellijk dat $F \varepsilon (O_C^*)$. Want $\psi \varepsilon (S)$, dus

$F * \varphi = \mathscr{F}\psi \in (S)$; en als $\varphi_n \to 0$ in (S), dan ook $\psi_n = f \cdot \overline{\mathscr{F}}\varphi_n \to 0$ in (S), dus $F * \varphi_n = \mathscr{F}\psi_n \to 0$ in (S).

c) Evenals in a) bewijst men voor de gespiegelde van F

$$\sigma F * \varphi = \overline{\mathscr{F}}\psi , \tag{23.8}$$

waarbij ditmaal

$$\psi = f \cdot \mathscr{F}\varphi . \tag{23.9}$$

Hierbij merke men op dat

$$\sigma F = \sigma \mathscr{F}[f] = \overline{\mathscr{F}}[f]$$

Volgens (23.4) is

$$(F * \mathscr{F}G)(\varphi) = \mathscr{F}G(\sigma F * \varphi) = \mathscr{F}G(\overline{\mathscr{F}}\psi) = G(\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\psi) = G(\psi),$$

waarbij we gebruik maakten van (23.8), met ψ als in (23.9). Dus

$$(F * \mathscr{F}G)(\varphi) = G(f \cdot \mathscr{F}\varphi) = ([f]G)(\mathscr{F}\varphi) = \mathscr{F}([f] \cdot G)(\varphi).$$

Daarmee is de stelling volledig bewezen.

Opmerking. Een analoge stelling geldt voor de geconjugeerde fouriertransformatie $\overline{\mathscr{F}}$.

Een omkering van het eerste deel van stelling 4 geeft

Stelling 5 Als $F \in (O_C^*)$, dan is er een $f \in (O_M)$ zodat $\mathscr{F}F = [f]$.

Deze stelling kan eenvoudig bewezen worden met behulp van stelling 3. Het bewijs laten we echter achterwege, mede omdat we stelling 3 ook niet bewezen hebben.

In verband met de omkeerstelling (§ 21 stelling 4) volgt, dat $\mathscr{F}$ en $\overline{\mathscr{F}}$ de verzameling van alle $[f]$, $f \in (O_M)$, 1-1-duidig afbeelden op (O_C^*); omgekeerd beelden zij (O_C^*) 1-1-duidig af op de verzameling der distributies $[f]$, $f \in (O_M)$.

Zij nu $F \in (O_C^*)$, $G \in (S^*)$. Zij $[f] = \mathscr{F}F$; dan is $F = \overline{\mathscr{F}}[f]$. Volgens het analoog voor $\overline{\mathscr{F}}$ van stelling 4 is

$$\overline{\mathscr{F}}([f] \cdot \mathscr{F}G) = \overline{\mathscr{F}}[f] * \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}G = F * G .$$

Dus geldt dat

$$\mathscr{F}(F * G) = \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}([f] \cdot \mathscr{F}G) = [f] \cdot \mathscr{F}G.$$

Daarmee hebben we een omkering van het tweede deel van stelling 4 bewezen:

<u>Stelling 6</u>. Als $F \in (O_C^*)$ en $G \in (S^*)$, dan geldt

(23.10) $$F * G \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}F \cdot \mathcal{F}G.$$

<u>Opmerking</u>. In voorbeeld 1 bewezen we dat $[e^{i\pi|x|^2}] \in (O_C^*)$.
Dit kunnen we nu vlotter aantonen: het is onmiddellijk duidelijker dat $e^{i\pi|x|^2} \in (O_M)$. Dan

$$\mathcal{F}(e^{i\pi|x|^2}) = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n e^{i\pi|y|^2} ,$$

en daar $\mathcal{F}[f] \in (O_C^*)$ voor $f \in (O_M)$, volgt dat $[e^{-i\pi|y|^2}] \in (O_C^*)$.
Dan ook de toegevoegd complexe distributie $[e^{i\pi|y|^2}] \in (O_C^*)$.

Correcties (vervolg)

Op				
pag. 9	regel 12 v.o.:	ipv.	$-\int_0^\infty \varphi(x)dx$	lees: $-\int_0^\infty \varphi'(x)dx$
" 11	regel 9 v.b.:	ipv.	$({}^{o}\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)$	lees: $({}^{o}\varphi(\varepsilon)-\varphi(0))$
" 19	regel 1 v.o.:	ipv.	$\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)$	lees: $\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)$
" 21	regel 12 v.o.:	ipv.	f(x)	lees: $f_\delta(x)$
" 42	regel 12 v.b.:	ipv.	d.w.z.	lees: bijvoorbeeld
" 46	regel 1 v.b.:	ipv.	$\varphi(0)=0$	lees: $\varphi(x)=x\cdot\psi(x)$, $\psi\in(D)$
	regel 12 v.b.:	ipv.	$\varphi_n(x)\in(D)$	lees: $\psi_n(x)\in(D)$
" 47	regel 2 v.o.:	ipv.	$[(x-a_\nu)^{k_\nu}$	lees: $[(x-a_\nu)^{k_\nu}]$
" 66	regel 13 v.b.:	ipv.	die	lees: waarvan alle afgeleiden
	regel 16 v.b.:	ipv.	$\varphi_n^{(k)}\to\varphi^{(k)}$	lees: $\lvert x\rvert^m\varphi_n^{(k)}\to\lvert x\rvert^m\varphi^{(k)}$
	regel 17 v.b.:	ipv.	k	lees: k, en voor iedere exponent m
"	regel 14 v.o.:	ipv.	uniform in	lees: uniform op elk begrensd interval
" 70	regel 3 v.o.:	ipv.	$-2\pi x_1 f$	lees: $-2\pi i x_1 f$
" 71	regel 1 v.b.:	ipv.	$\frac{\partial g}{\partial g_1}$	lees: $\frac{\partial g}{\partial y_1}$
	regel 2 v.b.:	ipv.	L^n	lees: L^1
" 73	regel 6 v.b.:	ipv.	$\int_R\dots\int_{R^n}$	lees: $\int\dots{}_{R^n}\int$
" 75	regel 2 v.b.:	ipv.	(D)	lees: (S)
" 80	regel 2 v.o.:		voeg toe :	(21.5)
" 81	regel 10 v.o.:	ipv.	(S^*)	lees: (S)
" 85	regel 6 v.o.:	ipv.	$\underline{e^{-2\pi ixy}\,e^{+2\pi ixy}}$	lees: $\frac{e^{-2\pi ixy}-e^{+2\pi ixy}}{x}$
" 86	regel 10 v.b.:	ipv.	2U-1	lees: 2U-[1]
	regel 11 v.b.:	ipv.	$\mu(y)$	lees: u(y)
	regel 11 v.o.:	ipv.	2U-1	lees: 2U-[1]
" 81	regel 11 v.b.:	ipv.	$[e^{2\pi k\langle a,x\rangle})$	lees: $[e^{2\pi i\langle a,x\rangle}]$.