STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Discrete groepen van lineaire transformaties

door

Prof.dr. H.D. Kloosterman

Syllabus van een reeks voordrachten te Eindhoven

najaar 1963

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Discrete groepen van lineaire transformaties door

Prof.dr. H.D. Kloosterman.

Syllabus van een reeks voordrachten te Eindhoven, najaar 1963.

Hoofdstuk I Lineaire transformaties

$$z \to \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ complex}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

Notatie

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad Az = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

1. Toevoeging van ∞ aan het complexe vlak, daar er geen 1-1 afbeelding van het complexe vlak op zichzelf is. (Gauss: Zahlenkugel; functietheorie).

Beschouw alle paren van complexe getallen $(z_1, z_2) \neq (0,0)$. Voer een klassen-indeling in, waarbij $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ zal betekenen $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$. Voor de klassen kan een optelling, vermenigvuldiging en eventueel een topologie worden ingevoerd. De klassen met $z_2 \neq 0$ kunnen 1-1 op de complexe getallen $\frac{z_1}{z_2}$ worden afgebeeld. Nieuw toegevoegd is de klasse van $(z_1, 0)$, $z_1 \neq 0$. Deze wordt door ∞ voorgesteld.

Men krijgt het afgesloten complexe vlak. De elementen hiervan vormen geen lichaam meer.

2. <u>Dubbelverhoudingen zijn invariant</u>. De dubbelverhouding (z_1,z_2,z_3,z_4) is gedefinieerd als

$$\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right).$$ Daar $Az_1 - Az_2 = \dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_1-z_2)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_2+\delta)}$ is

$(z_1,z_2,z_3,z_4) = (Az_1,Az_2,Az_3,Az_4)$.

3. <u>Cirkels gaan in cirkels over</u> (als men rechte lijnen ook als cirkels met oneindige straal beschouwt).

<u>Bewijs 1</u>. 4 punten z_i liggen dan en slechts dan op een cirkel, als hun dubbelverhouding reëel is, zoals volgt uit

$$\mathrm{Det}\,|z_i\bar z_i \quad \bar z_i \quad z_i \quad 1| = |z_1-z_4|^2|z_2-z_3|^2\left((z_1,z_2,z_3,z_4) - \overline{(z_1,z_2,z_3,z_4)}\right).$$

<u>Bewijs 2</u>. Cirkel: $a(x^2+y^2) + b'x + b''y + d = 0$. Stel $x + iy = z$:

$$az\bar z + b\bar z + \bar b z + d = 0, \quad b = \tfrac{1}{2}(b'+ib''), \quad \bar b = \tfrac{1}{2}(b'-ib'')$$

Homogeen in de getallenparen (z_1,z_2) wordt dit:

$$(1) \qquad az_1\bar z_1 + b\bar z_1 z_2 + \bar b z_1\bar z_2 + dz_2\bar z_2 = 0$$

Hier zijn a, b, d complexe getallen, a en d reëel. We beschouwen cirkels met straal $0 < r \leq \infty$. Daarvoor is nodig en voldoende dat $ad - b\bar b < 0$. Het linkerlid van (1) is dus de <u>indefiniete</u> Hermitische vorm $\tilde z H z$ met matrix

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar b & d \end{pmatrix}, \quad \text{en } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde z = (\bar z_1, \bar z_2).$$

We kunnen dus cirkels met Hermitische vormen identificeren: bij een H-vorm hoort éénduidig een cirkel. Door de cirkel is omgekeerd H op een reële factor $\neq 0$ na bepaald.

De cirkel H gaat door de lineaire transformatie $z \to Az$ over in de cirkel $A(H) = H_1 = \tilde A^{-1}HA^{-1}$.

4. <u>Probleem</u>

<u>Bepaal alle lineaire transformaties, die een gegeven cirkel H in een andere gegeven cirkel H_1 overvoeren.</u>

a) $\tilde{z} H z = a z_1 \bar{z}_1 + b \bar{z}_1 z_2 + \bar{b} z_1 z_2 + d z_2 \bar{z}_2$

$$= (az_1 + bz_2)(a\bar{z}_1 + \bar{b}\bar{z}_2) + \Delta z_2 \bar{z}_2 \qquad \Delta = ad - b\bar{b} < 0$$

Zij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sqrt{-\Delta} \end{pmatrix}$. Dan is $\tilde{z} H z = \widetilde{Az}\, H_0\, Az$ met $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d.w.z. $A(H) = aH_0$ (eenheidscirkel).

Als $a=0, d \neq 0$ neme men $A = \begin{pmatrix} \bar{b} & d \\ \sqrt{-\Delta} & 0 \end{pmatrix}$ en als $a = d = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{pmatrix}$.

b) <u>alle A die H_0 op zichzelf afbeelden</u> (det A=1)

$\tilde{A} H_0 A = kH_0$ (k reëel) $\rightarrow \tilde{A} H_0 = kH_0 A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & -\bar{\delta} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$

Determinanten geven $k^2 = 1$, dus $k = \pm 1$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \pm\bar{\beta} & \pm\bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = k.$

Daar $(Az.\overline{Az} - 1) = \dfrac{k(z\bar{z}-1)}{|\beta z + \bar{\alpha}|^2}$ beelden de A met k=1 het inwendige van de eenheidscirkel op zichzelf af. Men heeft verder nog

$$\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \; \frac{z - \eta}{1 - \bar{\eta} z} = e^{i\varphi} \frac{z-\eta}{1-\bar{\eta} z} \quad \text{met } \eta = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad e^{i\varphi} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \; (|\eta| < 1)$$

5. <u>Vergelijking voor de vaste punten</u> en <u>karakteristieke vergelijking</u>

respectievelijk $\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$ en $t^2 - t(\alpha + \delta) + 1 = 0$ (determinant = 1).

Als $\alpha + \delta$ niet reëel is heet A <u>loxodromisch</u>. Als $\alpha + \delta$ reëel is, heet A hyperbolisch, parabolisch of elliptisch, naarmate de karakteristieke wortels reëel en verschillend, samenvallend of geconjugeerd complex zijn.

De wortels van de <u>fixed point equation</u> kunnen ∞ zijn. Neem eerst het geval, dat A samenvallende invariante punten heeft, dus

$\gamma = \delta - \alpha = 0$. Dan is $\alpha = \delta = \varepsilon = \pm 1$ en $A = \pm \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (translatie $Az = z + \beta$).

Verder nemen we aan, dat minstens één der invariante punten ω eindig is. Dan is

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\omega + \beta = (\gamma\omega+\delta)\omega \\ \gamma\omega + \delta = (\gamma\omega+\delta).1\end{array}\right\} \quad \text{dus } A\begin{pmatrix}\omega\\1\end{pmatrix} = (\gamma\omega+\delta)\begin{pmatrix}\omega\\1\end{pmatrix}.$$

d.w.z. $\gamma\omega + \delta$ is een eigenwaarde van A. Zijn er 2 eindige invariante punten ω_1 en ω_2, dan zijn $\gamma\omega_1 + \delta$ en $\gamma\omega_2 + \delta$ de beide eigenwaarden, zodat $(\gamma\omega_1+\delta)(\gamma\omega_2+\delta) = 1$.

Hulpstelling Als $A_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \delta_1\end{pmatrix}$ en $A_2 = \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}$ een gemeenschappelijk invariant punt ω hebben, dan heeft ook $A = A_1A_2 = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ het punt ω als invariant punt en $(\gamma_1\omega+\delta_1)(\gamma_2\omega+\delta_2) = \gamma\omega + \delta$.

Bewijs. Zij $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix}\omega\\1\end{pmatrix}$. Dan is $A_i\,\mathfrak{a} = (\gamma_i\omega+\delta_i)\,\mathfrak{a}\,(i=1,2)$, dus $A_1A_2\mathfrak{a} = (\gamma_1\omega+\delta_1)(\gamma_2\omega+\delta_2)\mathfrak{a}$. Ook is $A_1A_2\mathfrak{a} = A\mathfrak{a} = (\gamma\omega+\delta)\mathfrak{a}$. Daar $\mathfrak{a} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ volgt de bewering door gelijkstelling.

Als ω een eindig invariant punt is, is

$$\text{(I)} \qquad Az - \omega = Az - A\omega = \frac{z-\omega}{(\gamma z+\delta)(\gamma\omega+\delta)}$$

(a) A is parabolisch: $(\alpha+\delta)^2 = 4$, $\alpha + \delta = 2\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1 = \operatorname{sgn} S(A)$).
De karakteristieke wortels voldoen aan $t^2 - 2\varepsilon t + 1 = 0$ en zijn beide ε, dus $\gamma\omega + \delta = \varepsilon$. Daar $\gamma z + \delta = \gamma(z-\omega) + \gamma\omega + \delta = \gamma(z-\omega) + \varepsilon$ is volgens (I).

$$\frac{1}{Az-\omega} = \frac{\varepsilon(\gamma z+\delta)}{z-\omega} = \frac{1}{z-\omega} + \varepsilon\gamma \qquad A = \begin{pmatrix}\varepsilon+\gamma\omega & -\gamma\omega^2\\ \gamma & \varepsilon-\gamma\omega\end{pmatrix}$$

Stelt men $W^{-1}z = \frac{1}{z-\omega}$, $W^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\omega\end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix}\omega & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

dan is $W^{-1}Az = W^{-1}z + \varepsilon\gamma$, dus $\underline{W^{-1}AWz = z + \varepsilon\gamma}$ (translatie).

(b) A is hyperbolisch of elliptisch
Als beide invariante punten eindig zijn: voor beide (I) toepassen:

$$\frac{Az-\omega_2}{Az-\omega_1} = \lambda\,\frac{z-\omega_2}{z-\omega_1}\ , \qquad \lambda = \frac{\gamma\omega_1+\delta}{\gamma\omega_2+\delta} = (\gamma\omega_1+\delta)^2 = (\gamma\omega_2+\delta)^{-2}$$

Stelt men $W^{-1}z = \dfrac{z-\omega_2}{z-\omega_1}$, $W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_2 \\ 1 & -\omega_1 \end{pmatrix}$, $W = \dfrac{-1}{\omega_1-\omega_2}\begin{pmatrix} -\omega_1 & \omega_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

dan is $\underline{W^{-1}AWz = \lambda z}$.

Als $\omega_1 = \infty$, ω_2 eindig, is er weinig verschil. Dan is $\gamma = 0$,
$Az = \dfrac{\alpha z+\beta}{\delta}$, $\alpha\delta = 1$ en $Az - \omega_2 = \dfrac{\alpha z+\beta}{\delta} - \dfrac{\alpha\omega_2+\beta}{\delta} = \dfrac{\alpha}{\delta}(z-\omega_2)$,
$\lambda = \dfrac{\alpha}{\delta} = \alpha^2 = \dfrac{1}{\delta^2}$.

De karakteristieke wortels zijn $\gamma\omega_2 + \delta = \delta$ en α. Stelt men
$W^{-1}z = z - \omega_2$ dus $W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & \omega_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan is weer

$\underline{W^{-1}AWz = \lambda z}$.

In beide gevallen is λ de verhouding der karakteristieke wortels,
dus

$$\left.\begin{array}{lll} A \text{ hyperbolisch} & \lambda > 0\ , & \lambda \neq 1 \\ A \text{ elliptisch} & |\lambda| = 1 & \end{array}\right\} \text{(nodig en voldoende).}$$

6. <u>Cirkels die invariant zijn onder een lineaire transformatie A</u>

a) A is <u>parabolisch</u> met fixed point ∞; $Az = z + \varepsilon\gamma$ ($\varepsilon = \pm 1$) is een translatie bepaald door de vector $\varepsilon\gamma$. Invariant zijn de rechten van de lijnenbundel

$$\mathfrak{I}\left(\frac{z}{\gamma}\right) = \mu \quad \text{of} \quad \mathfrak{R}\left(\frac{z}{i\gamma}\right) = \mu \qquad (\mu\text{=bundelparameter})$$

De <u>orthogonale bundel</u> is

$$\mathfrak{I}\left(\frac{z}{i\gamma}\right) = \mu_1 \quad \text{of} \quad \mathfrak{R}\left(\frac{z}{\gamma}\right) = -\mu_1 \qquad (\mu_1\text{=bundelparameter})$$

De lijnen van deze bundel worden door A gepermuteerd.

b) A is <u>parabolisch</u> met fixed point ω (eindig): $\frac{1}{Az-\omega} = \frac{1}{z-\omega} + \varepsilon\gamma$.

Invariant zijn

(1) $\mathcal{R}\left(\frac{1}{i\gamma(z-\omega)}\right) = \mu$, $\mathcal{R}\left(\frac{\bar{z}-\bar{\omega}}{i\gamma}\right) = \mu\,|z-\omega|^2$ of $\mathcal{R}\left(\frac{z-\omega}{-i\bar{\gamma}}\right) = \mu\,|z-\omega|^2$.

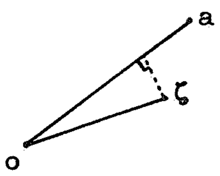
Dit is een cirkelbundel met basisexemplaren $|z-\omega|^2 = 0$ (punt-cirkel ω) en de rechte $\mathcal{R}\left(\frac{z-\omega}{-i\bar{\gamma}}\right) = 0$ (dit kan geschreven worden: $\gamma z + \delta$ is reëel).

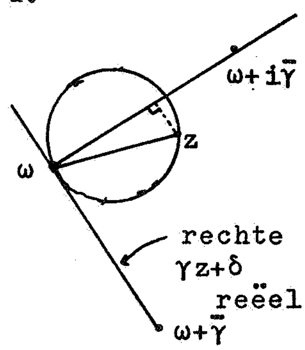
De <u>orthogonale</u> bundel is

$$\mathcal{R}\left(\frac{z-\omega}{\gamma}\right) = \mu_1\,|z-\omega|^2 \qquad \text{of } \mathcal{R}\left(\frac{1}{\gamma(z-\omega)}\right) = \mu_1$$

De cirkels van deze bundels worden door A gepermuteerd.

<u>Opmerking</u>: Als ζ en a complexe getallen zijn, is $\mathcal{R}\left(\frac{|a|}{a}\cdot\zeta\right)$ de projectie van ζ op a. In (1) is dus $\frac{1}{|\mu\;\gamma|}$ de middellijn van de cirkel.





c) A is <u>hyperbolisch</u> of <u>elliptisch</u>, $\frac{Az-\omega_1}{Az-\omega_2} = \lambda\,\frac{z-\omega_1}{z-\omega_2}$.

Zij $\frac{z-\omega_1}{z-\omega_2} = \mu e^{i\varphi}$. Bij vaste φ en veranderlijke μ doorloopt dan z de cirkel $\arg\frac{z-\omega_1}{z-\omega_2} = \varphi$. Dit is een cirkel uit de cirkelbundel B_1 met ω_1, ω_2 als basispunten. Als A hyperbolisch is (λ reëel), is iedere cirkel uit deze bundel invariant. Is echter μ vast en φ veranderlijk, dan doorloopt z de cirkel $\left|\frac{z-\omega_1}{z-\omega_2}\right| = \mu$. Dit is een cirkel uit de orthogonale cirkelbundel B_2 van B_1. Als A hyperbolisch is worden de cirkels van B_2 door A onderling gepermuteerd.

Is echter A elliptisch, dan is iedere cirkel van de bundel B_2 invariant onder A; de cirkels van de bundel B_1 worden dan door A onderling gepermuteerd.

7. Groepen van lineaire transformaties met een zelfde invariante cirkel

$\mathfrak{G}(H)$ = groep van alle lineaire transformaties, die cirkel H invariant laten. Heeft een ondergroep met index 2, die ieder der 2 delen, waarin H het vlak verdeelt, in zichzelf overvoeren. Om deze ondergroep (en discrete ondergroepen daarvan) is het ons te doen.

Als H_1 en H_2 twee cirkels zijn, zijn $\mathfrak{G}(H_1)$ en $\mathfrak{G}(H_2)$ isomorf. Want zij $W(H_1) = H_2$, dan is $\mathfrak{G}(H_2) = W\mathfrak{G}(H_1)W^{-1}$.

Het is dus onverschillig welke cirkel H we kiezen. Als H de eenheidscirkel is, zijn het de transformaties $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Daar $S(A) = \alpha + \bar{\alpha}$ reëel is, komen er geen loxodromische voor.

Nog eenvoudiger is het voor H de reële as te nemen en alle matrices A te beschouwen die $\mathfrak{J}(z) > 0$ in zichzelf overvoeren. We beschouwen dus de groep $\mathfrak{G}$ van alle matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reëel, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

De invariante punten van hyperbolische en parabolische matrices zijn reëel (of ∞), die van elliptische matrices geconjugeerd complex. Men heeft

$$\mathfrak{J}(Az) = \frac{\mathfrak{J}(z)}{|\gamma z+\delta|^2} .$$

Hoofdstuk II De niet-euclidische meetkunde van Lobatchewsky (hyperbolische meetkunde)

1. Lengte. Geodetische lijnen

Lengten zijn onder lineaire transformaties A niet invariant. Want als $z' = Az$ is $dz' = (\gamma z+\delta)^{-2}dz$, $|dz'| = |\gamma z+\delta|^{-2}|dz|$. Alleen op de isometrische cirkel $|\gamma z+\delta| = 1$ is dz invariant. Maar wel is

$\frac{|dz'|}{\mathfrak{J}(z')} = \frac{|dz|}{\mathfrak{J}(z)}$. We nemen dus niet het euclidische lijnelement maar nemen het lijnelement $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Het halfvlak $\mathfrak{J}(z) > 0$ wordt daardoor een <u>Riemannsche ruimte</u>

De <u>geodetische lijnen</u> zijn de extremalen van het <u>variatieprobleem</u>

$$\int_{z_0}^{z_1} ds = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\, dx \text{ minimaal.}$$

Deze vindt men uit de differentiaalvergelijking van <u>Euler-Lagrange</u>:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,, \quad f(y,y') = y^{-1}\sqrt{1+(y')^2}\,.$$

Men heeft

$$\frac{df}{dx} = y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \quad \text{dus}$$

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constant} = \frac{1}{r}.$$

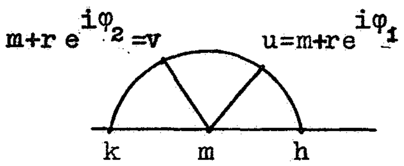
Vult men hierin f in, dan volgt $y\sqrt{1+(y')^2} = r$

waaruit volgt $(x-m)^2 + y^2 = r^2$.

Dit zijn de cirkels (halve cirkels) met middelpunten op de reële as. Hierbij moeten ook de rechte lijnen evenwijdig aan de Y-as worden genomen.

Men krijgt een euclidisch beeld van de meetkunde van Lobatchewsky, waarbij de punten op de X-as als "oneindig verre punten" worden gekozen. De "rechte lijn" door twee punten wordt dan de (halve) cirkel door die punten met middelpunt op de X-as. Iedere rechte heeft twee "oneindig verre punten". Door een punt dat niet op een "rechte" ligt gaan oneindig veel aan die rechte evenwijdige lijnen.

2. De niet-euclidische afstand D(u,v) van u en v (beide in $\Im(z)>0$)



Zij $z = m + re^{i\varphi}$ ($0<\varphi<\pi, r>0$) de cirkel met reëel middelpunt m, die door de beide punten $u = m + re^{i\varphi_1}$; $v = m + re^{i\varphi_2}$ gaat (we veronderstellen $0<\varphi_1<\varphi_2<\pi$). Dus: $dz = ire^{i\varphi}d\varphi$, $|dz| = r|d\varphi|$. Is $z = x + iy$, dan is dus $y = r\sin\varphi$. Bijgevolg is:

$$D(u,v) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{|dz|}{y} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log\frac{tg\frac{1}{2}\varphi_2}{tg\frac{1}{2}\varphi_1}.$$

Daar $|u-v| = 2r\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$ en $|u-\bar{v}| = 2r\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)$ is:

$$\frac{tg\frac{1}{2}\varphi_2}{tg\frac{1}{2}\varphi_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_2\ \cos\frac{1}{2}\varphi_1}{\cos\frac{1}{2}\varphi_2\ \sin\frac{1}{2}\varphi_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)-\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)} = \frac{|u-\bar{v}|+|u-v|}{|u-\bar{v}|-|u-v|}$$

zodat

$$D(u,v) = \log\frac{1+d}{1-d}, \qquad d = \left|\frac{u-v}{u-\bar{v}}\right| \quad (d<1)$$

Andere uitdrukking voor D(u,v):

$$\frac{tg\frac{1}{2}\varphi_2}{tg\frac{1}{2}\varphi_1} = \frac{e^{i\varphi_2}-1}{e^{i\varphi_2}+1} : \frac{e^{i\varphi_1}-1}{e^{i\varphi_1}+1} = \frac{v-m-r}{v-m+r} : \frac{u-m-r}{u-m+r} = \frac{v-h}{v-k} : \frac{u-h}{u-k},$$

waarbij $h = m + r$, $k = m - r$.

Stelt men (in navolging van Poincaré) de dubbelverhouding rechts door $[u,v]$ voor (dubbelverhouding van u en v en de "oneindige" punten h en k van hun verbindings-"rechte") dan is ook $D(u,v) = \log[u,v]$.

3. De driehoeksongelijkheid   Zij $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$ $(u\neq v)$

Lemma $D(u,v) \geqslant \log\frac{u_2}{v_2}$ (gelijk dan en slechts dan als $u_1 = v_1$ en $u_2 > v_2$).

<u>Bewijs</u>: $|u-\bar{v}| \leq |u-v| + |v-\bar{v}|$

$$D(u,v) = \log \frac{|u-\bar{v}|+|u-v|}{|u-\bar{v}|-|u-v|} = \log \frac{|u-\bar{v}|^2-|u-v|^2}{(|u-\bar{v}|-|u-v|)^2} = \log \frac{-(u-\bar{u})(v-\bar{v})}{(|u-\bar{v}|-|u-v|)^2} \geq$$

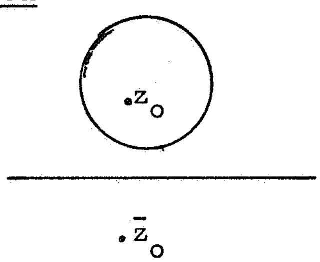
$$\geq \log \frac{-(u-\bar{u})(v-\bar{v})}{|v-\bar{v}|^2} = \log \frac{\bar{u}-u}{\bar{v}-v} = \log \frac{u_2}{v_2} .$$

<u>Bewijs van de driehoeksongelijkheid</u>: Door een lineaire transformatie (die de afstanden niet verandert) kunnen we bereiken, dat $\mathcal{R}(u) = \mathcal{R}(w)$. Het doet geen afbreuk aan de algemeenheid als we $\mathcal{J}(u) > \mathcal{J}(w)$ onderstellen. Volgens het lemma is dan $D(u,w) = \log \frac{\mathcal{J}(u)}{\mathcal{J}(w)}$. Volgens het lemma is ook

$$D(u,v) + D(v,w) \geq \log \frac{\mathcal{J}(u)}{\mathcal{J}(v)} + \log \frac{\mathcal{J}(v)}{\mathcal{J}(w)} = \log \frac{\mathcal{J}(u)}{\mathcal{J}(w)} = D(u,w).$$

4. <u>Niet-euclidische cirkels</u>. <u>Cirkelvormige omgevingen</u>

$$D(z,z_o) = R \text{ of } \frac{|z-z_o|}{|z-\bar{z}_o|} = r = \frac{e^R-1}{e^R+1} = \operatorname{th} \frac{R}{2} .$$



Cirkelschijf(omgeving):

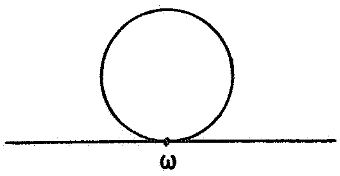
$$N(z_o,r) = \{z \mid D(z,z_o) < r\}.$$

Bij een lineaire transformatie A:

$$A\, N(z_o,r) = N(Az_o,r).$$

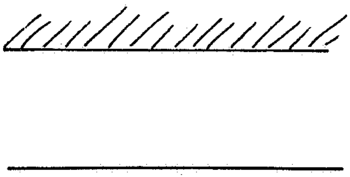
5. <u>Horicycles</u> <u>Horicyclische omgevingen</u>

ω eindig



$$N(\omega,r) = \{z \mid |z-\omega|^2 < r\, \mathcal{J}(z)\}.$$

$\omega = \infty$



$$N(\infty,r) = \{z \mid \mathcal{J}(z) > \tfrac{1}{r}\}.$$

$$Az - A\omega = \frac{z - \omega}{(\gamma z+\delta)(\gamma\omega+\delta)} \qquad \Im(Az) = \frac{\Im(z)}{|\gamma z+\delta|^2}$$

Transformatie van de omgevingen onder A:

1) <u>$A\omega$ eindig</u>.

Voor $z \in N(\omega,r)$ geldt

$$|Az-A\omega|^2 = \frac{|z-\omega|^2}{|\gamma z+\delta|^2(\gamma\omega+\delta)^2} < \frac{r}{(\gamma\omega+\delta)^2}\,\frac{\Im(z)}{|\gamma z+\delta|^2} = \frac{r}{(\gamma\omega+\delta)^2}\,\Im(Az),$$

$$\text{dus}\quad A\,N(\omega,r) = N\left(A\omega,\ \frac{r}{(\gamma\omega+\delta)^2}\right).$$

2)

Voor $A\omega = \infty$, $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$, en $z \in N(\omega,r)$ geldt

$$\Im(Az) = \frac{\Im(z)}{|\gamma z+\delta|^2} = \frac{\Im(z)}{\gamma^2|z-\omega|^2} > \frac{1}{\gamma^2 r};$$

$$\text{dus}\quad A\,N(\omega,r) = N(\infty,\gamma^2 r).$$

Als $\omega = \infty$ geldt

$$A\,N(\infty,r) = N\left(A\infty,\ \frac{r}{\gamma^2}\right) \quad \text{indien } A\infty \text{ eindig is,}$$

$$= N\left(A\infty,\ \frac{r}{\alpha^2}\right) \quad \text{indien } A\infty = \infty.$$

Hoofdstuk III De groep der hyperbolische bewegingen

1. G, de groep der reële matrices A, als topologische groep ($\alpha\delta-\beta\gamma=1$).

norm van A: $\| A \| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$

scalair product van A en B: $\{A, B\} = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$

distantie van A en B: $d(A,B) = \|A - B\|$.

Lemma: a) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ b) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Bewijs:a) $|\{A,B\}|^2 = |\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'|^2 \leq$

$$\leq (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 .$$

Dus

$$\|A + B\|^2 = (\alpha+\alpha')^2 + (\beta+\beta')^2 + (\gamma+\gamma')^2 + (\delta+\delta)^2 = \|A\|^2 + 2\{A,B\} + \|B\|^2 \leq$$

$$\leq \|A\|^2 + 2\|A\| \cdot \|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2.$$

b) Daar $(\alpha\alpha'+\beta\gamma')^2 \leq (\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\gamma'^2)$, enz. is

$$\|AB\|^2 = (\alpha\alpha'+\beta\gamma')^2 + \ldots . \leq (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2+\delta'^2) =$$

$$= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 .$$

Maakt men G met behulp van deze distantie tot een topologische ruimte, dan geldt de

Stelling: G is een topologische groep.

Bewijs: Laten A, B, A_1, B_1 elementen van G zijn. Dan is

$AB - A_1 B_1 = (A-A_1)(B-B_1) + (A-A_1) B_1 + A_1(B-B_1)$ en dus

$d(AB, A_1B_1) \leq d(A,A_1)\, d(B,B_1) + \|B_1\|\, d(A,A_1) + \|A_1\|\, d(B,B_1)$

dus is de productvorming $(A,B) \to AB$ continu. Dit zelfde geldt voor de overgang op de inverse $A \to A^{-1}$, daar

$$d(A^{-1},A_1^{-1}) = \|A^{-1}-A_1^{-1}\| = \sqrt{(\delta-\delta_1)^2 + (\beta-\beta_1)^2 + (\gamma-\gamma_1)^2 + (\alpha-\alpha_1)^2} =$$

$$= \|A-A_1\| = d(A,A^{-1}).$$

2. De groep der hyperbolische bewegingen is niet identiek met G, maar

is de groep $\bar{G}$ der bijbehorende transformaties $\bar{A}$: $z \to Az$. Voor de overgang van G naar $\overline{G}$ moeten de matrices A en -A "geidentificeerd" worden. Men heeft: $\overline{G} \cong G/\Lambda$ (groeps-isomorfie) waar Λ de normaaldeler bestaande uit E en -E is. Ook $\overline{G}$ is een topologische groep als men een verzameling $\overline{f} = \{\overline{A}\}$ open noemt als de verzameling $f = \{A,-A\}$ open in G is.

3. De groep G_ω ($\omega \epsilon \mathfrak{H}$ = inwendige van het halfvlak $\mathfrak{J}(z) > 0$), zij de ondergroep van G, bestaande uit alle matrices $A \in G$ met ω als fixed point (dus is $\bar{\omega}$ het andere fixed point). De A zijn elliptisch. De karakteristieke waarden zijn $\mu = \gamma\omega + \delta$ en $\bar{\mu} = \gamma\bar{\omega} + \delta$. Karakteristieke vectoren $\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ 1 \end{pmatrix}$. De vergelijkingen $A\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}\mu$ en $A\begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ 1 \end{pmatrix}\bar{\mu}$ kunnen samengevat worden tot

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & \bar{\omega} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & \bar{\omega} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

De afbeelding $A \to \mu$ is een isomorfe afbeelding (ook homeomorf) van G_ω met de groep van alle complexe getallen met absolute waarde 1.

4. De groep $G_{\omega,\omega'}$ (ω,ω' reëel of $\omega \neq \omega'$), zij de groep van alle $A \in G$ met ω en ω' als fixed points. Deze A zijn hyperbolisch. De karakteristieke waarden zijn $\gamma\omega + \delta$ en $\gamma\omega' + \delta$, $(\gamma\omega+\delta)(\gamma\omega'+\delta) = 1$. Karakteristieke vectoren: $\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \omega' \\ 1 \end{pmatrix}$ (als ω en ω' eindig zijn). De vergelijkingen

$$A\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}(\gamma\omega+\delta), \qquad A\begin{pmatrix} \omega' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega' \\ 1 \end{pmatrix}(\gamma\omega'+\delta)$$

kunnen samengevat worden tot

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \quad \left(\lambda = \frac{\gamma\omega+\delta}{\gamma\omega'+\delta} = (\gamma\omega+\delta)^2\right).$$

De afbeelding $A \to \lambda$ is een homomorfe afbeelding (blz.4, hulpstelling) (en is ook continu en open) van $G_{\omega,\omega'}$ op R^* (de multiplicatieve groep der positieve getallen) met kern Λ. De groep $\overline{G_{\omega,\omega'}}$ der bijbehorende transformaties is dus isomorf met R^* (dus ook met de additieve groep der reële getallen).

Als ω eindig, $\omega' = \infty$ ($\gamma=0, \lambda=\delta^2$) dan zijn δ en α de karakteristieke waarden met $\binom{\omega}{1}$ en $\binom{1}{0}$ als karakteristieke vectoren. Vergelijking (2) moet dan worden vervangen door

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

5. <u>De groep G_ω</u> (ω reëel of ∞), zij de groep van alle $A \in G$ met ω als enig fixed point. Deze A zijn parabolisch. De afbeelding $A \to \gamma \operatorname{sgn}(\alpha+\delta) = \gamma\varepsilon$ is (volgens blz 4(a)) een homomorfe afbeelding van G_ω op R (= de additieve groep der reële getallen). De kern van deze afbeelding is Λ. Dus geldt voor de bijbehorende groep $\overline{G}_\omega$ van lineaire transformaties, dat $\overline{G}_\omega \cong R$. Als $\omega = \infty$ is dit triviaal.

Hoofdstuk IV Discrete groepen van hyperbolische bewegingen

Zij Γ een discrete ondergroep van G, d.w.z. de door G in Γ geinduceerde topologie is de discrete topologie (m.a.w. ieder element (punt) van Γ is een geisoleerd punt van Γ). Steeds zij $\Gamma \supset \Lambda$. Voor de groep $\bar{\Gamma}$ der bijbehorende lineaire transformaties (hyperbolische bewegingen) is dan $\bar{\Gamma} \cong \Gamma/\Lambda$. Ook $\bar{\Gamma}$ is een discrete ondergroep van $\bar{G}$.

1. De ondergroepen Γ_ω met een gegeven "fixed point" (afgekort fp.).

Lemma. (H. Petersson, Math. Ann. 115 (1937), blz.33). Zij $A \in \Gamma (A \neq \pm E)$ een hyperbolische matrix met ω en $\omega' \neq \omega$ als fp. Dan heeft iedere $B \in \Gamma$, die ω als fp. heeft, ook ω' als fp.

Bewijs. We kunnen aannemen, dat $\omega = \infty$, $\omega' = 0$. Anders zij nl. $W \in G$ zo gekozen, dat $W(\omega) = \infty$, $W(\omega') = 0$. Stel dan $A_1 = W A W^{-1}$ (fp: ∞, 0), $B_1 = W B W^{-1}$ (fp: ∞), $\Gamma_1 = W \Gamma W^{-1}$ Γ_1 ook discreet).

Zij dus $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta = 1$, $\alpha^2 \neq 1$, $B = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ $\rho\tau = 1$. Dan $A^n B A^{-n} = \begin{pmatrix} \rho & \alpha^{2n}\sigma \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ (n geheel). Was $\sigma \neq 0$, dan was dit een rij van verschillende matrices met $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ als limiet ($n \to +\infty$ als $\alpha^2 < 1$, $n \to -\infty$ als $\alpha^2 > 1$), wat onmogelijk is, daar Γ discreet is.

Gevolg. Als er een hyperbolische matrix $\neq \pm E$ in Γ is, die ω als fp. heeft, is er geen parabolische matrix $\neq \pm E$ in Γ met ω als fp.

Definitie. Een punt ω heet elliptisch (hyperbolisch, parabolisch) fp. van Γ als er een van $\pm E$ verschillende elliptische (hyperbolische, parabolische) matrix in Γ is met ω als fp. Een punt dat geen fp. van Γ is, heet een gewoon punt van Γ.

Stelling 1. Als ω een elliptische fp. van Γ is, is Γ_ω een eindige cyclische groep met even orde $2\ell \geq 4$.

Bewijs. Γ_ω is een discrete ondergroep van G_ω, die volgens blz.13 als topologische groep isomorf is met de groep T van alle complexe getallen met abs. waarde 1. Volgens een elementaire stelling over diophantische approximaties is een discrete ondergroep van T een eindige cyclische groep. Daar $\Gamma_\omega \supset \Lambda$ is de orde dezer cyclische groep even en daar $\Gamma_\omega \neq \Lambda$ moet deze orde ≥ 4 zijn.

Opm.1. Een voortbrengend element van Γ_ω krijgt men door in (blz. 13)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & \bar{\omega} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & o \\ o & \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \bar{\omega} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

μ te vervangen door exp $\frac{\pi i}{l}$.

Opm.2. Als Γ_ω de orde $2l$ heeft, heeft $\bar{\Gamma}_\omega \cong \Gamma_\omega/\Lambda$ de orde l.

Stelling 2. Als ω een hyperbolisch of parabolisch fp. van Γ is, is $\bar{\Gamma}_\omega$ een oneindige cyclische groep.

Bewijs. Als ω een hyperbolisch fp. van Γ is, dan zijn (volgens het lemma) alle matrices van Γ_ω hyperbolisch en hebben een tweede gemeenschappelijk fp. ω'. Dan is $\bar{\Gamma}_\omega = \bar{G}_{\omega,\omega'} \cap \bar{\Gamma}$.
Nu is $\bar{G}_{\omega,\omega'}$ volgens blz.13 isomorf met de multiplicatieve groep R^* der positieve getallen en dus ook met de additieve groep R der reële getallen. Daar $\bar{\Gamma}_\omega$ een discrete ondergroep is, die niet uit het eenheidselement alleen bestaat, is $\bar{\Gamma}_\omega$ een oneindige cyclische groep.
Als ω een parabolisch fp. is, gaat het bewijs analoog.

Stelling 3. De verzameling der elliptische fp. van een discrete groep Γ heeft geen verdichtingspunt in (het inwendige van) $\mathfrak{H}$. (H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche).

Bewijs. Stel, dat $\{\omega_n\}$, n=1,2,.... een rij van elliptische fp. van Γ is die tot een punt $z_o \in \mathfrak{H}$ nadert. Zij $2l_n$ de orde van Γ_{ω_n} en zij A_n een voortbrengend element van Γ_{ω_n}. Dan is (opm. 1 bij stelling 1):

$$A_n = \begin{pmatrix} \omega_n & \overline{\omega}_n \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_n & 0 \\ 0 & \overline{\mu}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_n & \overline{\omega}_n \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad , \ \mu_n = \exp \frac{\pi i}{\ell_n} \ (n=1,2,\ldots)$$

Stel eerst, dat de rij der gehele getallen ℓ_n begrensd is. Dan heeft $\{\ell_n\}$ een constante deelrij. We kunnen voor $\{\ell_n\}$ deze deelrij nemen en dus is dan $\mu_n = \mu =$ constant. Laat men dan $n \to \infty$, dan volgt

$$A_n \longrightarrow \begin{pmatrix} z_0 & \overline{z}_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 & \overline{z}_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

in strijd met de onderstelling dat Γ discreet is.

Als de rij der ℓ_n niet begrensd is, heeft ze een tot ∞ naderende deelrij. Beperkt men zich tot deze deelrij, dan geldt $\mu_n \to 1$ en dus $A_n \to E$, wat weer in strijd is met de onderstelling dat Γ discreet is.

2. Eigenlijke discontinuïteit van Γ in $\mathfrak{h}$

Zij $z_1 \in \mathfrak{h}$, $z_2 \in \mathfrak{h}$. Dan heet $z_1 \sim z_2$ (Γ) als er een $A \in \Gamma$ bestaat, zodanig, dat $z_2 = Az_1$. Daardoor valt $\mathfrak{h}$ uiteen in klassen (systemen van transitiviteit). De klasse $K(z_0)$ van z_0 bestaat uit alle Az_0, $A \in \Gamma$.

Stelling 4. $K(z_0)$ heeft in (het inwendige van) $\mathfrak{h}$ geen verdichtingspunt. We zeggen: Γ is eigenlijk discontinu in $\mathfrak{h}$.

Het bewijs volgt na de stellingen 5 en 6.

Lemma. (H.Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche). Laten z_n en z'_n twee rijen van complexe getallen zijn, die beide $\to z_0 \in \mathfrak{h}$.
Onderstel verder:

1) $z'_n = T_n z_n$, waar $T_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \in G$, $\delta_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$;
2) er bestaat een getal $r > 0$, zodat geen der T_n een fp. heeft in $|z - z_0| < r$.

Dan geldt: $T_n \to E$ (eenheidsmatrix).

Bewijs. We bewijzen eerst $\gamma_n \to 0$. Daarbij kunnen we de T_n met $\gamma_n = 0$ uit de rij weglaten en dus $\gamma_n \neq 0$ onderstellen voor alle n. Dan heeft T_n twee eindige fp. ω_n en ω'_n. Uit de identiteit

$$(\gamma_n z_n+\delta_n)(\gamma_n\omega_n+\delta_n) = \frac{z_n - \omega_n}{z'_n - \omega_n} = 1 + \frac{z_n - z'_n}{z'_n - \omega_n}$$

en de onderstelling 2) als volgt

$$(\gamma_n z_n+\delta_n)\ \mu_n \to 1$$

voor beide karakteristieke waarden μ_n en μ'_n. Daar het product der karakteristieke waarden 1 is, volgt dus

$$(\gamma_n z_n+\delta_n)^2 \to 1\ ,\quad \mu_n^2 \to 1.$$

Uit de identiteit

$$\gamma_n^2(z_n-\omega_n)^2 = (\gamma_n z_n+\delta_n)^2 - 2\mu_n(\gamma_n z_n+\delta_n) + \mu_n^2$$

en 2) volgt dan $\gamma_n \to 0$.

Daar $\gamma_n z_n + \delta_n$ begrensd is en $\delta_n \geqslant 0$ volgt uit

$$\delta_n^2 = (\gamma_n z_n+\delta_n)^2 - 2\gamma_n z_n\ (\gamma_n z_n+\delta_n) + \gamma_n^2 z_n^2 \to 1$$

dat $\quad \delta_n \to 1.$

Verwisselt men de rijen z_n en z'_n (en tevens Γ_n en $\Gamma_n^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_n & -\beta_n \\ -\gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$)

dan volgt evenzo $\alpha_n \to 1$ en uit $\alpha_n z_n + \beta_n = z'_n\ (\gamma_n z_n+\delta_n)$ volgt

tenslotte $\beta_n \to 0$.

<u>Stelling 5</u>. Zij $z_o \in \mathfrak{H}$ een gewoon punt van Γ. Dan bestaat er een cirkelschijf $N(z_o,\rho) = \{z \mid D(z,z_o) < \rho\}$, die geen paar van (verschillende) aequivalente punten bevat.

<u>Bewijs</u>. Laat $\rho_n \downarrow 0$ $(n=1,2,\ldots)$. Als de stelling niet waar was, dan zou $N(z_o,\rho_n)$ voor iedere n twee punten z_n, z'_n bevatten, zodat

(1) $\quad z_n \neq z'_n\ ,\quad z'_n = T_n z_n\ ,\quad T_n \in \Gamma \qquad (n=1,2,\ldots)$

Daar z_o geen fp. en (volgens stelling 3) geen limietpunt van fp. van de T_n is, volgt dan uit het lemma, dat $T_n \to E$. Daar $T_n \neq E$ (vanwege $z_n \neq z'_n$) is dit in strijd met de onderstelling dat Γ discreet is.

Stelling 6. Zij $\omega \in \mathfrak{H}$ een elliptisch fp. van Γ. Dan bestaat er een getal $\rho > 0$ met de volgende eigenschap:

Als $z' \in N(\omega,\rho), z'' \in N(\omega,\rho)$, $z' \sim z''(\Gamma)$ en is $z'' = Az'$ met $A \in \Gamma$, dan is $A \in \Gamma_\omega$.

Bewijs. Laat $\rho_n \downarrow 0$. $(n=1,2,\dots)$. Als de stelling niet waar was, dan bevatte $N(\omega,\rho_n)$ voor iedere n twee punten, zodat (1) geldig was en bovendien $T_n \notin \Gamma_\omega$. Verder als bij stelling 5.

Bewijs van stelling 4. Stel K is een klasse van Γ-aequivalente punten met $\zeta \in \mathfrak{H}$ als verdichtingspunt. Zij $\{z_n\}$ een rij van punten $\in K$ met ζ als limietpunt en onderstel, dat de z_n alle verschillend zijn. Als ζ een gewoon punt van Γ is, is dit in strijd met stelling 5. Als ζ een elliptische fp. van Γ is, zij $N(\zeta,\rho)$ de "cirkel"-schijf van stelling 6. Dan is er een n_0, zó dat

$$z_n \in N(\zeta,\rho) \;, \quad n \geq n_0 .$$

Daar Γ_ω eindig is (stelling 1) kan $N(\zeta,\rho)$ echter volgens stelling 6 niet oneindig veel verschillende Γ-aequivalente punten bevatten.

Stelling 7. Zij C een compacte verzameling in $\mathfrak{H}$, K een klasse van Γ-aequivalente punten in $\mathfrak{H}$. Dan is $K \cap C$ eindig.

Bewijs. Was $V = K \cap C$ oneindig, dan had V een verdichtingspunt in C, wat volgens stelling 4 niet het geval is.

Stelling 8. Zij $u \in \mathfrak{H}$, $v \in \mathfrak{H}$, $u \not\sim v$. Dan bestaan er omgevingen $N(u,\rho)$, $N(v,\rho)$, zodat uit $z' \in N(u,\rho)$, $z'' \in N(v,\rho)$ volgt $z' \not\sim z''$.

Bewijs. Daar $v \notin K(u)$ en v ook geen verdichtingspunt van $K(u)$ is, bestaat er een omgeving $N(v,2\rho)$ van v, die geen punten van $K(u)$ bevat.

Stel nu $D(z',u) < \rho$, $D(z'',v) < \rho$, $z'' = Az'$, $A \in \Gamma$, dan volgt
$D(Au,v) \leq D(Au,Az') + D(Az',v) = D(u,z') + D(z'',v) < \rho + \rho = 2\rho$
en zou dus $N(v,2\rho)$ wel een punt van $K(u)$ bevatten.

3. Parabolische fp. van Γ.

De bedoeling van deze § is, voor parabolische fp. stellingen te bewijzen, die analoog zijn aan de stellingen 6 en 8 voor elliptische fp.

Stelling 9. (Petersson)
Laten ∞ en ω parabolische fp. van Γ zijn (ω mag ook $=\infty$ zijn). Zij $W\infty = \infty$, $W \in G$. Dan heeft de verzameling der $|\gamma| \neq 0$ in de matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in W\Gamma$ een positieve benedengrens $\rho = \rho(\Gamma, W)$.

Bewijs. (Hervé)
Zij $k > 0$ en zij M_k de verzameling der getallen c, zo dat $0 < c < k$ en waarbij een matrix $A \in W\Gamma$ met $|\gamma| = c$ bestaat. De stelling zal bewezen zijn, als we aantonen, dat M_k een eindige verzameling is.

Laten P en Q matrices zijn van de voortbrengende elementen van de cyclische groepen $\overline{\Gamma_\infty}$ en $\overline{\Gamma_\omega}$ en $P = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $WQW^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Door eventueel P door P^{-1} en Q door Q^{-1} te vervangen, kunnen we aannemen, dat $p > 0$, $q > 0$.

Zij $c \in M_k$. Dan is er een matrix $A \in W\Gamma$ met $|\gamma| = c$. Zij $A'' = (WQW^{-1})^m AP^n = WQ^m \cdot W^{-1}A \cdot P^n \in W\Gamma$, $A' = AP^n$, waar m en n gehele getallen zijn. Daar $(WQW^{-1})^m$ een horizontale translatie is en

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \alpha np \\ \gamma & \delta + \gamma np \end{pmatrix}$$

is

$$\mathfrak{J}(A''i) = \mathfrak{J}(A'i) = \frac{\mathfrak{J}(i)}{|\gamma i + (\delta + \gamma np)|^2} = \frac{1}{\gamma^2 + (\delta + \gamma np)^2}.$$

Kies n zó dat

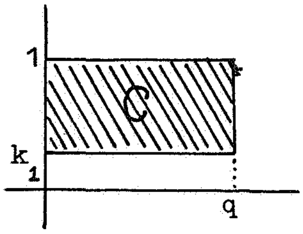
$$1 \leqslant \delta + \gamma np \leqslant 1 + p\,|\gamma|.$$

Dan is

$$1 \geqslant \mathfrak{J}(A''i) \geqslant (\gamma^2 + (1+p|\gamma|\ )^2)^{-1} \geqslant (k^2 + (1+pk)^2)^{-1} = k_1 > 0.$$

Daar WQW^{-1} een horizontale translatie is, kan men verder m zo kiezen, dat

$$0 \leqslant \mathfrak{R}(A'i) \leqslant q.$$



Bij iedere $A \in W\Gamma$ met $|\gamma| = c$ behoort dus een (minstens één) matrix $A'' \in W\Gamma$ met $|\gamma_1| = c$ en $A''i \in C$ $\left(A'' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}\right)$. Hier is C de compacte puntverzameling

$$0 \leqslant \mathfrak{R}(z) \leqslant q, \quad k_1 \leqslant \mathfrak{J}(z) \leqslant 1.$$

Stelt men $A'' = WB$, dan is $B \in \Gamma$, $\quad Bi \in W^{-1}(C)$.

Daar ook $W^{-1}(C)$ (continu beeld van een compacte verzameling) compact is, zijn er volgens stelling 7 slechts eindig veel van zulke matrices. Maar dan moet ook M_k eindig zijn.

<u>Stelling 10.</u>
Laten ω en ω' parabolische fp. van Γ zijn (gelijk of verschillend en al of niet ∞). Dan bestaan er horicyclische omgevingen V, V' van resp. ω, ω' met de volgende eigenschap:
als $z \in V$, $z' \in V'$, $z = Bz'$, $B \in \Gamma$, dan is $\omega = B\omega'$.

<u>Bewijs</u>. Laat eerst $\omega' = \infty$. Zij $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\omega \end{pmatrix}$ (als $\omega = \infty$ zij $W = E$), zodat $W\omega = \infty$. Zij ρ het getal uit stelling 9 en (Hfdst.II,5)

$$V = N(\omega,\rho) \quad , \qquad V' = N(\infty,\rho).$$

Zij nu

$$z \in V, \quad z' \in V', \quad z = Bz', \quad B \in \Gamma, \quad A = WB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

De stelling zal bewezen zijn, als we kunnen aantonen, dat $\gamma = 0$.
Want dan is

$$A\infty = \infty, \text{dus } WB\infty = \infty, \text{ dus } B\infty = \omega.$$

Was nu $\gamma \neq 0$, dan was $|\gamma| \geqslant \rho$ (stelling 9) en dus

$$|\gamma z' + \delta|^2 = \gamma^2 \left|z' + \frac{\delta}{\gamma}\right|^2 \geqslant \rho^2\ (\mathfrak{J}(z'))^2$$

en dus (daar $z' \in N(\infty, \rho)$, dus $\mathfrak{I}(z') > \rho^{-1}$):

$$\mathfrak{I}(Wz) = \mathfrak{I}(Az') = \frac{\mathfrak{I}(z')}{|\gamma z' + \delta|^2} \leqslant \frac{\mathfrak{I}(z')}{\rho^2(\mathfrak{I}(z'))^2} < \frac{1}{\rho}.$$

Daar anderzijds $z \in N(\omega, \rho)$, dus $Wz \in WN(\omega, \rho) = N(\infty, \rho)$, is

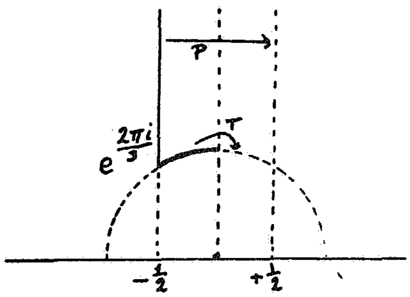
$$\mathfrak{I}(Wz) > \frac{1}{\rho}.$$

Dit is een contradictie. Dus is $\gamma = 0$ en stelling 10 voor $\omega' = \infty$ bewezen.

Het geval, dat ω' eindig is, wordt tot het geval $\omega' = \infty$ teruggebracht door middel van een matrix $W_1 \in G$ met $W_1(\omega') = \infty$, en door dan het reeds bewezene toe te passen op de discrete groep $\Gamma_1 = W_1 \Gamma W_1^{-1}$.

4. Voorbeelden

a) De modulaire groep $\Gamma(1)$: Alle $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geheel, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.



Een fundamentaalgebied D (gebied dat uit iedere klasse van Γ-equivalente punten precies één punt bevat) is bepaald door

1° $-\frac{1}{2} \leqslant \mathfrak{R}(z) < +\frac{1}{2}$

2° $|z| \geqslant 1$

3° als $|z| = 1$: $-\frac{1}{2} \leqslant \mathfrak{R}(z) \leqslant 0$

(een fundamentaalgebied is natuurlijk niet eenduidig bepaald).

De randpunten van $\mathfrak{D}$ worden door de voortbrengende transformaties met matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in elkaar overgevoerd:

$\mathfrak{R}(z) = -\frac{1}{2}$, $\mathfrak{I}(z) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gaat door P over in $\mathfrak{R}(z) = +\frac{1}{2}$, $\mathfrak{I}(z) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

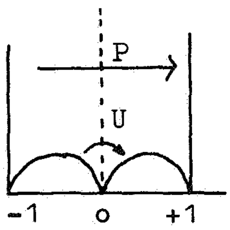
$|z| = 1$, $-\frac{1}{2} \leqslant \mathfrak{R}(z) \leqslant 0$ gaat door T over in $|z| = 1$, $\frac{1}{2} \geqslant \mathfrak{R}(z) \geqslant 0$.

Het punt i is een elliptisch fp. van de orde 2. $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ en $e^{\frac{\pi i}{3}}$

zijn (onderling equivalent) elliptische fp. van de orde 3.

Identificeert men equivalente punten, dan ontstaat een cylindervormig, naar $i\infty$ uitgestrekt, oppervlak. In $i\infty$ is dit open. Voegt men het punt $i\infty$ toe, dan ontstaat een oppervlak, dat topologisch equivalent is met een bol.

b) De groep $\Gamma(2)$ van alle $A \in \Gamma(1)$, die $\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mod 2) zijn. De factorgroep $\Gamma(1)/\Gamma(2)$ is de symmetrische groep van $3! = 6$ elementen.



Een fundamentaalgebied D is bepaald door ($\mathfrak{I}(z) > 0$):

1° $-1 \leqslant \mathcal{R}(z) < 1$;

2° als $-1 \leqslant \mathcal{R}(z) \leqslant 0$: $|z + \frac{1}{2}| \geqslant \frac{1}{2}$;

3° als $0 < \mathcal{R}(z) < 1$: $|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.

De randpunten van D worden door de voortbrengende transformaties met matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in elkaar overgevoerd. Er zijn geen elliptische fp. De punten $i\infty$, -1, 0 en $+1$ (equivalent met -1) zijn parabolische fp.

Identificeert men equivalente punten, dan ontstaat "bijna" een oppervlak, dat topologisch equivalent is met een bol; er ontbreken punten bij $i\infty$, 0 en -1 (equivalent met $+1$).

5. Het Riemann-oppervlak van Γ.

Uit de voorbeelden blijkt, dat men zich niet kan beperken tot een indeling van $\mathfrak{H}$ in klassen van geconjugeerde punten, indien men een gesloten oppervlak wil verkrijgen. Zij daarom $\mathfrak{P}$ de verzameling van alle parabolische fp. van Γ en beschouw

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \cup \mathfrak{P}$$

Maak $\overline{\mathfrak{H}}$ tot een topologische ruimte door aan ieder punt van $\overline{\mathfrak{H}}$ omgevingen toe te voegen (die aan enkele triviale voorwaar-

den moeten voldoen) en wel: aan de punten $z \in \mathfrak{H}$ de "gewone" omgevingen en aan de punten $\omega \in \mathfrak{P}$ de horicyclische omgevingen. Hierdoor wordt $\overline{\mathfrak{H}}$ een Hausdorffse ruimte (d.w.z. als $z_1 \neq z_2$ zijn er omgevingen V_1, V_2 van resp. z_1, z_2, zodanig dat V_1 en V_2 geen gemeenschappelijk punt hebben).
De ruimte $\overline{\mathfrak{H}}$ is samenhangend. De afbeeldingen $z \to Az$, $A \in \Gamma$ zijn (als ∞ parabolisch fp. van Γ is) homeomorfe afbeeldingen van $\overline{\mathfrak{H}}$ op zichzelf.

Beschouw nu de equivalentieklassen $K(z)$ van $\overline{\mathfrak{H}}$ ten aanzien van Γ. Dit zijn de punten van de quotientruimte

$$\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{H}}/\Gamma .$$

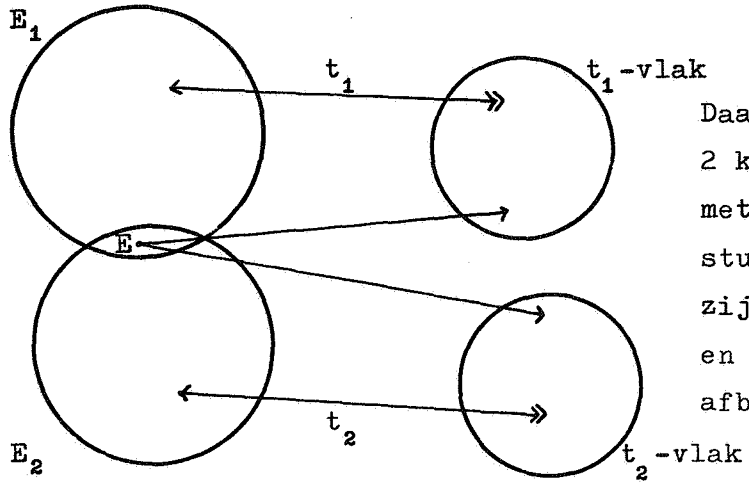
Deze verzameling $\mathfrak{K}$ wordt voorzien van de quotient-topologie: als φ: $z \to K(z)$ de kanonieke afbeelding van $\overline{\mathfrak{H}}$ op $\mathfrak{K}$ is, dan is een verzameling $E \subset \mathfrak{K}$ dan en slechts dan open als $\varphi^{-1}(E)$ open in $\overline{\mathfrak{H}}$ is.

Uit de voorgaande §§ kan men gemakkelijk afleiden: $\mathfrak{K}$ is een locaal-compacte samenhangende Hausdorffse ruimte (dat b.v. twee verschillende klassen $\varphi(\omega)$ en $\varphi(\omega')$ van punten ω, $\omega' \in \mathfrak{P}$ (zodat $\omega \not\sim \omega'(\Gamma)$) omgevingen zonder gemeenschappelijke punten hebben, volgt uit stelling 10).

Als Γ door eindig veel van zijn elementen kan worden voortgebracht, is $\mathfrak{K}$ compact.

Om $\mathfrak{K}$ tot een Riemann's oppervlak te maken moet $\mathfrak{K}$ nog voorzien worden van een analytische structuur ("atlas"):

Een kaart is een topologische afbeelding van een open verzameling E in $\mathfrak{K}$ op een enkelvoudig samenhangend eindig gebied in het vlak van een complexe veranderlijke t. Bij ieder punt van E behoort dus een complex getal.
Een atlas is een verzameling van kaarten, die geheel $\mathfrak{K}$ overdekken.



Daarbij moet verlangd worden, dat 2 kaarten E_1 en E_2 die een stuk E met elkaar gemeen hebben, op dit stuk met elkaar in overeenstemming zijn, d.w.z.: Op E moeten $t_1(E_1)$ en $t_2(E_2)$ door een 1-1-<u>conforme</u> afbeelding samenhangen.

Op een Riemann's oppervlak kunnen analytische functies worden gedefinieerd.

Voor het boven uit Γ verkregen oppervlak is een <u>atlas</u> gedefinieerd door:

a) in een omgeving van een gewoon punt z_o: $t = \dfrac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}$;

b) in een omgeving van een elliptisch fp. z_o van orde ℓ (Hfdst.IV, 1, opm.1):

$$t = \left(\frac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\right)^{\ell} ;$$

c) in een (horicyclische) omgeving van een parabolische fp. ω:

$$t = \exp \frac{2\pi i}{h} \frac{1}{z-\omega}$$

als een voortbrengende transformatie $z \to Pz$ van de oneindige cyclische groep $\overline{\Gamma}_\omega$ wordt gegeven door

$$\frac{1}{Pz-\omega} = \frac{1}{z-\omega} + h.$$

Een functie op $\mathscr{R}$ heet in een punt <u>holomorf</u>, als de functie in een omgeving van dat punt kan worden voorgesteld door een machtreeks $a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\ldots$. Analoog de definitie van nulpunt, pool. De ordes hiervan moeten steeds worden gemeten met behulp van de <u>locale uniformiserende veranderlijke</u> t.

Litteratuur

1. H. Petersson. Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I, Math. Ann. 115, 23 - 67 (1937).

2. H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsiens. Acta Mathematica 1, p. 1 - 62 (1882).

3. -----------. Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta Mathematica 3 (1883).

4. H. Weyl. Die Idee der Riemannschen Fläche. 3e druk, Stuttgart 1955.

5. M. Hervé. Séminaire Ecole Normale Supérieure, Paris, 1953 - 1954, Exposé III.