STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Colloquium Verzamelingenleer met toepassingen 1963/64

2e druk

LITERATUURLIJST

bij het

Colloquium Verzamelingenleer met toepassingen

1963 - 1964

Hoofdstuk I: Verzamelingenalgebra.

A.A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 1919

" " Mengenlehre, 1927.

" " Abstract set theory. Noord-Holl.Uitg.Mij, Amsterdam, 1953.

J.F. Gray, Sets, relations and functions. Holt, Rinehart en Winston, New York, 1962.

P.R. Halmos, Naive set theory. Van Nostrand, Princeton, 1960.

F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre.

E. Kamke, Mengenlehre. Sammlung Göschen, 1955.

G.B. Keene, Abstract sets and finite ordinals. Pergamon, Londen.

J.G. Kemeny, H. Mirkel, J.L. Snell en G.L. Thompson, Finite mathematical structures. Prentice-Hall, 1959.

K. Kuratowski, Set theory and topology. Pergamon, 1961.

W. Sierpinski, Algèbre des ensembles. Warschau, 1951.

R. Wilder, Introduction into the foundations of mathematics. Wiley, New York, 1952.

Colloquium Verzamelingenleer met toepassingen.

Eerste bijeenkomst: 2 oktober 1963.
Spreker : P.C. Baayen.

I Verzamelingenalgebra.

§1. Inleiding en grondbegrippen.

Er is meer dan één manier om iemand vlakke meetkunde te leren.

Een klassieke methode is de streng deductieve, die begint met een aantal axioma's en hieruit door middel van logisch redeneren stellingen destilleert. In een andere opzet echter - we zouden deze inductief kunnen noemen - begint men ermee de leerling vertrouwd te maken met lijnstukken en cirkels, door hem constructies te laten uitvoeren, misschien ook door hem te laten vouwen en knippen. Men laat hem hoeken middendoor delen, loodlijnen oprichten, driehoeken ergens anders congruent reproduceren, en men vertelt hem later pas dat al die getekende punten, lijnstukken en cirkels slechts benaderingen, modellen zijn van de objecten waar de vlakke meetkunde zich mee bezig houdt.

Deze laatste methode willen we volgen in dit colloquium. We werken met verzamelingen, maar we zullen pas later exact aangeven wat een verzameling "is". Zulks is namelijk alleen exact vast te leggen door het geven van een aantal axioma's waaraan verzamelingen voldoen; evenals "punt" en "rechte lijn" abstracties zijn, vastgelegd door de axioma's van de vlakke meetkunde. En inmiddels volstaan we er mee een aantal dingen aan te wijzen, zeggend: dat is een verzameling.

Een belangrijke verzameling is de verzameling N van alle natuurlijke getallen. D.w.z. een object x behoort tot N - we zeggen liever: x is een element van N, en schrijven: $x \in N$ - dan en slechts dan als x één van de getallen 1,2,3,4,... is.

Een andere verzameling is de verzameling E van alle echtparen, ingeschreven bij de Burgelijke Stand van de gemeente Amsterdam op 2 oktober 1963 te 19.45 uur.

Een derde verzameling is de verzameling - we zullen hem voor het ogenblik X noemen - van alle op het ogenblik in Nederland levende mensen van 500 jaar en ouder.

Deze laatste verzameling schijnt problematisch. Immers, $x \in X$ dan en slechts dan als x een levend mens is, tenminste 500 jaar en ouder op het ogenblik wonend in Nederland. Laat ons buiten beschouwing laten of het mogelijk is dat een mens 500 jaar leeft, in ieder geval is op het ogenblik niemand van deze leeftijd in Nederland woonachtig. M.a.w. de verzameling X is leeg, bevat geen elementen. Toch zullen we X als een verzameling beschouwen.

Hetzelfde geldt voor de verzameling Y van alle reële getallen x die voldoen aan $1<x<0$.

We beschouwen X en Y als dezelfde verzameling, de lege verzameling genaamd en aangeduid met $\emptyset$. Zulks op grond van het gelijkheidsbegrip voor verzamelingen:

> Twee verzamelingen A en B worden als gelijk beschouwd dan en slechts dan indien ze uit dezelfde elementen bestaan: i.e. als
>
> $$x \in A \iff x \in B.$$

(Opmerking: Men kan dit beschouwen als een definitie van =. Men kan het ook opvatten als een axioma dat de niet nader te analyseren begrippen "verzameling" en "gelijkheid" verbindt).

Het zou vermoeiend zijn voor iedere nieuwe verzameling een andere letter te verzinnen. Daarom maakt men vaak gebruik van een andere notatie.

(1) Als we te doen hebben met een eindige verzameling die niet al te veel elementen bevat, dan wordt zo'n verzameling dikwijls aangegeven door zijn elementen op te schrijven, tussen twee accolades.

Voorbeelden. De verzameling van alle priemgetallen kleiner dan 10 kan worden weergegeven door

$$\{ 2,3,5,7 \}.$$

De verzameling van alle letters, nodig om het woord VERZAMELINGENLEER te vormen, kan aangeduid worden met

$$\{ A,E,I,G,L,M,N,R,V,Z \};$$

dit is tevens de verzameling van alle letters nodig om de twee woorden LANGZAME VERVELING te vormen.

(2) Oneindige verzamelingen, en eindige verzamelingen met veel elementen, geven we vaak aan m.b.v. een eigenschap die de elementen karakteriseert.

<u>Voorbeelden.</u> De verzameling van alle <u>even</u> natuurlijke getallen wordt weergegeven door

$$\{ x \mid x=2n \text{ voor een } n \in N \}$$

of korter door

$$\{ 2n \mid n \in N \}.$$

De bovengenoemde verzameling $\{2,3,5,7\}$ wordt ook aangeduid door

$$\{ n \mid n \in N \text{ en } n<10 \text{ en } n \text{ priem} \}.$$

<u>Definitie 1.</u> Een verzameling A heet een <u>deelverzameling</u> van een verzameling B - notatie: $A \subset B$ - indien ieder element van A ook tot B behoort:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

I.h.b. geldt blijkbaar altijd $B \subset B$; d.w.z. iedere verzameling is een deelverzameling van zichzelf. We zullen A een <u>echte</u> deelverzameling van B noemen als enerzijds $A \subset B$ en anderzijds $A \neq B$.
Notatie: $A \subsetneq B$

$$A \subsetneq B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ èn } A \neq B.$$

In plaats van $A \subset B$ schrijven we ook $B \supset A$ (en zeggen dan: B bevat A).

Opmerking. We beschouwen de lege verzameling $\emptyset$ als deelverzameling van iedere verzameling A: $\emptyset \subset A$. Immers aan de voorwaarde

$$x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A$$

is trivialerwijze voldaan, daar nooit $x \in \emptyset$.

Definitie 2. De doorsnede $A \cap B$ van twee verzamelingen A en B is de verzameling die bestaat uit alle elementen die A en B gemeenschappelijk hebben:

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ èn } x \in B.$$

De vereniging $A \cup B$ van twee verzamelingen A en B is de verzameling die bestaat uit alle elementen die hetzij tot A, hetzij tot B behoren:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ of } x \in B \quad \text{(of beide)}$$

Het verschil $A \setminus B$ van twee verzamelingen A en B is de verzameling die bestaat uit alle elementen van A, die niet tot B behoren:

$$x \in A \setminus B \Longleftrightarrow x \in A \text{ en } x \notin B.$$

Het symmetrisch verschil $A \Delta B$ van twee verzamelingen A en B is de verzameling die bestaat uit alle elementen die tot één en slechts één der verzamelingen A en B behoren:

$$x \in A \Delta B \Longleftrightarrow x \in A \text{ òf } x \in B, \text{ maar niet } x \in A \cap B.$$

M.a.w.: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(Opmerking: $x \notin B$ is de ontkenning van $x \in B$).

Voorbeelden.

Zij P de verzameling van alle priemgetallen. Dan geldt:

$$P \cap \{2n \mid n \in N\} = \{2\} .$$

(M.a.w.: 2 is het enige natuurlijke getal dat zowel priem als even is, het enige even priemgetal). Verder geldt:

$$P \cup \{2n \mid n \in N\} \subset N.$$

Voorts:

$$P \cap \{n^2 | n \in N\} = \emptyset;$$

$$\{2n \mid n \in N\} \cap \{n^2 | n \in N\} \subset \{4n | n \in N\} \;;$$

$$\{2n \mid n \in N\} \cup \{2n-1 \mid n \in N\} = N;$$

$$\{2n \mid n \in N\} \cup \{2n+1 \mid n \in N\} = N \setminus \{1\} \,.$$

$$\{2n \mid n \in N\} \,\Delta\, \{3n \mid n \in N\} = \{n \mid n \in N \text{ en } 2/n \text{ en } 3/n \text{ en } 6\not/n\}.$$

Tenslotte geldt:

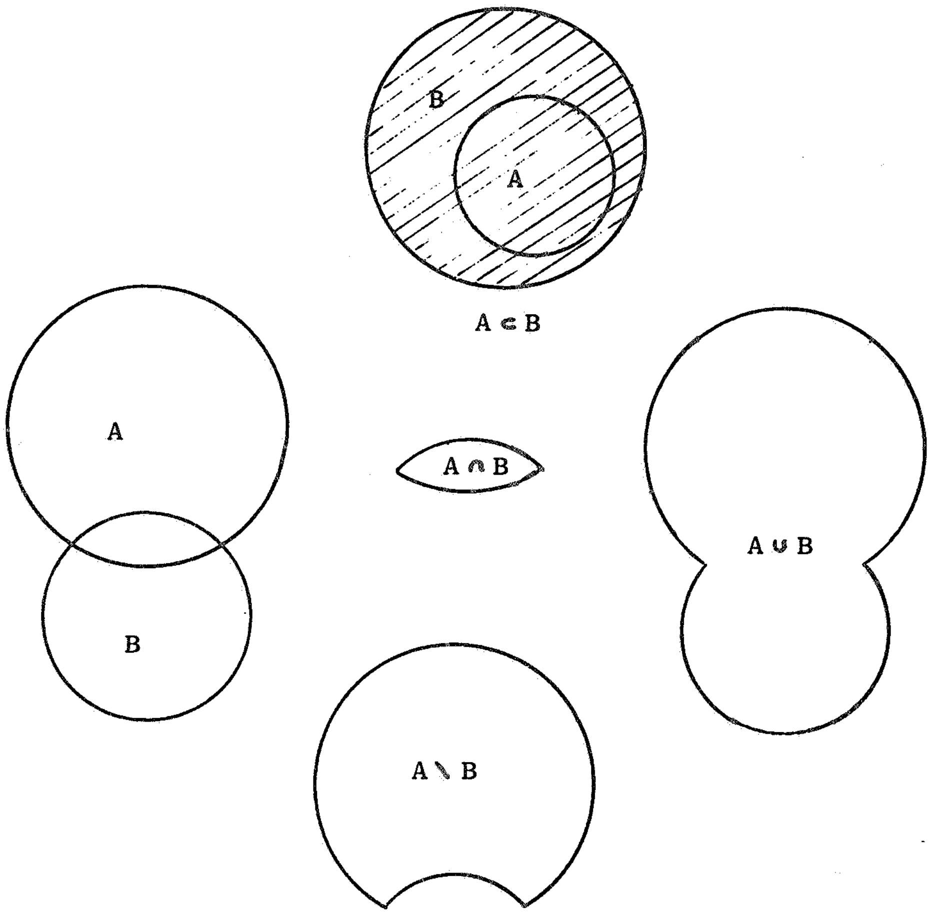
$$\{0,4\} \subset \{0,2,3,4,7\},$$

maar niet

$$\{0,4\} \subset N,$$

daar $0 \notin N$

Diagrammatisch:



§2. Rekenregels. Karakteristieke functies.

Stelling 1. Als A,B,C verzamelingen zijn, dan geldt:

a) $A \subset A$ (reflexiviteit);

b) $A \subset B$ en $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (transitiviteit);

c) $A \subset B$ en $B \subset A \Longrightarrow A = B$ (antisymmetrie).

Bewijs van b): $x \in A \Longrightarrow x \in B$, daar $A \subset B$; $x \in B \Longrightarrow x \in C$, daar $B \subset C$. Dus $x \in A \Longrightarrow x \in C$ voor willekeurige x, dwz. $A \subset C$.

Stelling 2. Als A,B,C verzamelingen zijn, dan geldt:

a) $A \cap A = A \cup A = A$ (idempotentie);

b) $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$ (commutativiteit);

c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativiteit);

d) $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$ (absorptieregels);

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiviteit).

Als voorbeeld bewijzen we de eerste distributieve eigenschap:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Longleftrightarrow x \in A \text{ èn } x \in B \cup C \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \text{ èn } (x \in B \text{ of } x \in C) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ èn } x \in B) \text{ of } (x \in A \text{ èn } x \in C) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cap B \text{ of } x \in A \cap C \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Een belangrijk hulpmiddel voor het bewijs van dergelijke rekenregels wordt verschaft door het begrip karakteristieke functie.

Definitie 3. De karakteristieke functie χ_A van een verzameling A is de functie die voor iedere $x \in A$ de waarde 1 aanneemt, en die identiek 0 is buiten A:

$$\chi_A(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A,$$
$$\chi_A(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A.$$

Opmerking 1. Als we spreken over een functie behoren we af te spreken wat het definitiegebied van die functie is, voor welke x hij gedefinieerd is. We nemen daarom vanaf dit ogenblik aan dat alle verzamelingen die we beschouwen bevat zijn in één grote verzameling I. Wel staan we toe dat die verzameling I van geval tot geval verschillend gekozen wordt; bv. zal de ene maal I de verzameling van alle reële getallen zijn, een andere keer is I misschien de verzameling van alle punten in een plat vlak, een derde keer bestaat I mogelijk uit alle Nederlandse staatsburgers op een zeker tijdstip.

Deze universele verzameling I nu zal fungeren als definitie gebied voor alle in de betreffende beschouwing voorkomende karakteristieke functies: $\chi_A(x)$ is gedefinieerd voor iedere $x \in I$ (en iedere $A \subset I$).

<u>Opmerking 2.</u> Indien we werken binnen zo'n universele verzameling I, schrijven we meestal A' i.p.v. $I \setminus A$; A' heet dan het complement van A (in I, of: met betrekking tot I.) Dan geldt:

$$A = \{x \mid \chi_A(x) = 1\} = \{x \mid \chi_A(x) \neq 0\} ;$$
$$A' = \{x \mid \chi_A(x) = 0\} = \{x \mid \chi_A(x) \neq 1\} .$$

D.m.v. karakteristieke functies is een eenvoudig verband te leggen tussen de rekenregels voor $\cap, \cup, \setminus, \Delta$, en gewone arithmetische operaties:

<u>Stelling 3.</u> Voor willekeurige $A \subset BI$ en $B \subset I$ geldt:

a) $A \subset B \Longleftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ voor alle $x \in I$;

b) $A = B \Longleftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$ voor alle $x \in I$.

Voorts is, voor willekeurige $x \in I$:

c) $\chi_\emptyset(x) = 0$; $\chi_I(x) = 1$;

d) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$

e) $\chi_{A \cup B}(x) = \max \{ \chi_A(x), \chi_B(x) \}$;

f) $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$;

g) $\chi_{A \Delta B}(x) = \mathrm{par}\,(\chi_A(x) + \chi_B(x))$.

<u>Opmerking.</u> Met par(y) (pariteit van y) wordt bedoeld de functie, gedefinieerd voor gehele y, die de waarde 0 heeft als y even is, en de waardé 1 als y oneven is.

Het is vaak prettiger g) te schrijven in de vorm van een congruentie modulo 2:

$$g') \quad \chi_{A\Delta B}(x) \equiv \chi_A(x) + \chi_B(x) \pmod 2.$$

Het <u>bewijs</u> van deze stelling volgt gemakkelijk uit de definities. Als voorbeeld zullen we g) aantonen.

Daartoe onderscheiden we vier gevallen:

1) $x \notin A$, $x \notin B$. Dan zeker $x \notin A\Delta B$. In dit geval is dus $\chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_{A\Delta B}(x) = 0$; dus g) geldt zeker voor deze x.

2) $x \in A$, $x \notin B$. Dan zal $x \in A\Delta B$. Dus $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) = 1$, terwijl $\chi_B(x) = 0$. Weer blijkt g) voor deze x te gelden.

3) $x \notin B$, $x \in A$: geheel analoog aan geval 2).

4) $x \in A$, $x \in B$. Nu zal $x \in A \cap B$, dus $x \notin A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Dus $\chi_{A\Delta B}(x) = 0$, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. Weer blijkt g) te gelden.

Conclusie: g) geldt voor iedere mogelijke keuze van x.

Bij toepassing van g') komt men dikwijls tot een resultaat van de vorm

$$\chi_X(x) \equiv \chi_Y(x) \pmod 2,$$

voor alle x. We merken op dat dit impliceert dat X = Y. Want daar karakteristieke functies slechts de waarden 0 en 1 aannemen, volgt eerst,

$$\chi_X(x) = \chi_Y(x), \text{ voor alle } x.$$

Volgens stelling 3^b) mogen we nu concluderen: X = Y.

We geven de uitspraken in stelling 2 meestal korter weer, door te schrijven: $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$; $\chi_{A\cup B} = \max(\chi_A, \chi_B)$; etc.

Als toepassing geven we een nieuw bewijs van de eerste distributieve met (stelling 2^e)):

$$\chi_{A\cap(B\cup C)} = \chi_A \cdot \chi_{B\cup C} = \chi_A \cdot \max(\chi_B, \chi_C) =$$
$$= \max(\chi_A \cdot \chi_B, \chi_A \cdot \chi_C) =$$
$$= \max(\chi_{A\cap B}, \chi_{A\cap C}) = \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)};$$

dus $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Op gelijksoortige wijze bewijst men:

Stelling 4. a) $I' = \emptyset$; $\emptyset' = I$;
b) $A\cup A' = I$; $A\cap A' = \emptyset$;
c) $(A')' = A$;
d) $(A\cup B)' = A'\cap B'$;
e) $(A\cap B)' = A'\cup B'$;
f) $(A\Delta B)' = A'\Delta B'$;
g) $A\subset B \Longleftrightarrow B'\subset A'$.

De regels d) en e) staan bekend als de wetten van de Morgan.

Stelling 5. $A\backslash B = A\backslash(A\cap B) = A\cap B'$.

Gevolg. $\chi_{A\backslash B} = \chi_A \cdot (1-\chi_B)$.

Stelling 6. a) $A\Delta B = B\Delta A$;
b) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$;
c) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;
d) $A\Delta A = \emptyset$.

Bewijs van 6):

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} \equiv \chi_A + (\chi_B + \chi_C) = (\chi_A + \chi_B) + \chi_C \equiv \chi_{(A\Delta B)\Delta C} \pmod 2;$$

dus $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (cf. de opmerkingen na het bewijs van stelling 3^g).

Bewijs van c);

$$\chi_{A\cap(B\Delta C)} = \chi_A \cdot \chi_{B\Delta C} \equiv \chi_A \cdot (\chi_B + \chi_C) \pmod 2$$

$$\equiv \chi_A \cdot \chi_B + \chi_A \cdot \chi_C = \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} \equiv \chi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} \pmod 2.$$

Voor hen die vertrouwd zijn met het algebraische begrip ring merken we op dat alle deelverzamelingen van een vaste verzameling I een ring vormen als we optelling en vermenigvuldiging definieren door

$$A + B := A\Delta B \ ; \ A.B := A\cap B.$$

Dan fungeert $\emptyset$ als nulelement en I als eenheidselement. Dit volgt uit stelling 2 en stelling 6, en uit de gelijkheden

$$A \,\Delta\, \emptyset = \emptyset \,\Delta\, A = A;$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset;$$
$$A \cap I = I \cap A = A.$$

Het is een zeer bijzonder soort ring; voor iedere A uit de ring geldt nl.:

$$A + A = 0 \ ; \ A.A = A.$$

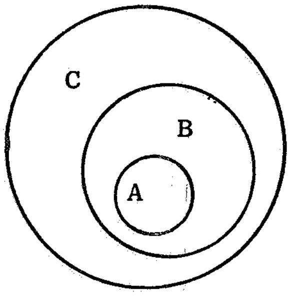
Wij komen hier later op terug.

§3. Opgaven.

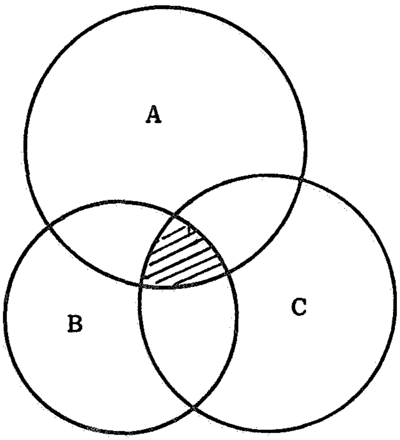
1. Geef een diagrammatische voorstelling van de beweringen van de stellingen 1,2,4,6 (voor zover mogelijk) m.b.v. deelverzamelingen van het platte vlak.

Bijvoorbeeld:

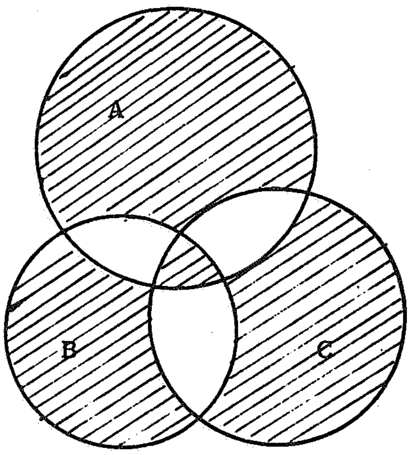
St. 1^b):



$A \subset B$ en $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.



St. 2^c): zowel $A \cap (B \cap C)$ als $(A \cap B) \cap C$ valt samen met het gearceerde gedeelte.



St. (6^b): Zowel $A \Delta (B \Delta C)$ als $(A \Delta B) \Delta C$ valt samen met het gearceerde gedeelte.

2. Geef volledige bewijzen van de stellingen 1 t/m 6.

3. Geef van stelling 4^f) zowel een bewijs m.b.v. karakteristieke functies als een "elementsgewijs" bewijs (d.w.z. een bewijs als op pag. 6 : $x \in (A \Delta B) \Leftrightarrow \ldots\ldots$). Tracht hetzelfde te doen met stelling 6^b).

4. Bewijs: $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$.

Is het omgekeerde waar, d.w.z. geldt ook: $A \cup C \subset B \cup C \Rightarrow A \subset B$?
Illustreer een en ander met diagrammen.

5. Bewijs: $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \Delta B = A \cup B$.

$B \subset A \Longleftrightarrow A \Delta B = A \setminus B$

Opmerking Twee verzamelingen A en B heten disjunct indien $A \cap B = \emptyset$.

6. Zij I de verzameling van alle Nederlandse staatsburgers ingeschreven bij de Burgelijke Stand per 2-10-1963.

Zij A de deelverzameling van alle gehuwde, B die van alle mannelijke, C die van alle vrouwelijke, D die van alle minderjarige burgers, en E die van alle ouders.

Beschrijf de verzamelingen $A \cap B$, $A \Delta B$, $A \cap C \cap D$, $A \Delta C \Delta D$, $B \Delta E$, $B \cap E$, $C \cap E$, $B \cap C \cap E$, $A' \cap D'$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \cup B) \Delta (C \cup D)$.

Welke van onderstaande formules zijn juist, en welke niet:

$$A \cup C \cup D = I;$$
$$A \cup B \cup C = I;$$
$$A \cap C \cap D = \emptyset;$$
$$B \cap C \cap E = \emptyset;$$
$$B \cap E \subset A \cup D;$$
$$A \cup (C \Delta E) = (A \Delta C) \cup (A \Delta E);$$
$$A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C).$$

7. Zij I de verzameling N der natuurlijke getallen. Zij

$$A = \{2n \mid n \in N\} \quad ; \quad B = \{4n \mid n \in N\} \quad ;$$
$$C = \{n^2 \mid n \in N\} \quad ; \quad D = \{2n-1 \mid n \in N\} \quad .$$

Beschrijf de verzamelingen A', $A \cap D$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $B \Delta C$, $A \Delta B \Delta C$, $B' \cap C$, $B' \cap A$, $A \Delta B \Delta D$.

Welke van de volgende formules zijn juist, en welke niet:

$A \cap C \subset B;$

$A \Delta B \subset B \cup D;$

$B \cap D \subset B \setminus A;$

$A \Delta B \Delta D = B';$

$B \Delta C \Delta D \subset B \cup D;$

$(A \cup B) \Delta (A \cup C) \subset C \cap D;$

$A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C);$

$A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C).$

8. Bewijs dat de relatie $\subset$ en de operaties $\cup$ en Δ als volgt herleid kunnen worden tot $\cap$ en $'$:

a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cap B' = \emptyset;$

b) $A \cup B = (A' \cap B')';$

c) $A \Delta B = (A' \cap B')' \cap (A \cap B)'.$

9. Bewijs dat $\subset$, $\cap$ en Δ herleid kunnen worden tot $\cup$ en $'$ d.m.v.

a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A' \cup B = I;$

b) $A \cap B = (A' \cup B')';$

c) $A \Delta B = (A' \cup B)' \cup (A \cup B')'.$

10. Bewijs dat $\subset$, $\cup$ en $'$ als volgt uitgedrukt kunnen worden in $\cap$ en Δ :

a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A;$

b) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B);$

c) $A' = I \Delta A.$

11. A,B,C,D zijn willekeurige deelverzamelingen van I. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:

$(A \cup B) \cap (A \cup B');$

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A);$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D);$

$(A \setminus B) \Delta (B \setminus A);$

$(A' \cap B) \cup (B' \cap C) \cup (C' \cap A) \cup (A \cap B \cap C);$

$(A \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \setminus B) \cap (D \setminus C).$

(*Voorbeeld*: $(A\cup B)\cap(A\cup B') = A\cap(B\cup B')$ (St.2^e)) $= A\cap I$ (St.4^b)) $= A$.)

12. Bewijs dat voor willekeurige verzamelingen A,B en C:

$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) = (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$.

§4. Oneindige vereniging en doorsnede.

De associatieve wetten stellen ons in staat om $A \cap B \cap C$ te schrijven voor de gemeenschappelijke waarde van $(A \cap B) \cap C$ en $A \cap (B \cap C)$. Evenzo schrijven we $A \cup B \cup C$ voor $(A \cup B) \cup C$ of $A \cup (B \cup C)$, en $A \Delta B \Delta C$ voor $(A \Delta B) \Delta C$ en voor $A \Delta (B \Delta C)$.

Elk van deze operaties kan herhaald worden; zo kunnen we bijvoorbeeld vormen:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k .$$

Men bewijst gemakkelijk (door inductie):

$$\chi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k} = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2} \cdot \ldots \cdot \chi_{A_k},$$

zodat

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \Longleftrightarrow x \in A_1 \text{ èn } x \in A_2 \text{ èn} \ldots \text{èn } x \in A_k .$$

Evenzo geldt:

$$\chi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k} = \max\{\chi_{A_1}, \chi_{A_2}, \ldots, \chi_{A_k}\} ,$$

en dus

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \Longleftrightarrow x \in A_1 \text{ of } x \in A_2 \text{ of} \ldots \text{of } x \in A_k .$$

Tenslotte zal

$$\chi_{A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_k} \equiv \chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \ldots \chi_{A_k} \pmod 2,$$

zodat

$$x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_k \Longleftrightarrow \text{het aantal indices } i,\ 1 \leq i \leq k, \text{ met } x \in A_i, \text{ is } \underline{\text{oneven}}.$$

Een analogie met bijv. de optelling van reële getallen dringt zich aan ons op: daar kunnen we ook, op grond van de associatieve eigenschap van de optelling, uitdrukkingen als $a_1+a_2+\ldots+a_k$ zonder gevaar voor misverstand opschrijven. Met zo'n formele analogie moeten we echter oppassen. In de analyse schrijven we bijvoorbeeld zonder gemoedsbezwaar

$$(*) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2}n + \ldots = 1.$$

Maar dit gebruik van oneindig veel plustekens duidt slechts in schijn op een oneindig maal herhaalde optellingsoperatie: dat zou nl. zinloos zijn, aangezien we niet in staat zijn werkelijk oneindig veel handelingen te verrichten. Integendeel, het linkerlid van (*) is, zoals we weten, een andere schrijfwijze voor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2}n\right)$$

en er is hier duidelijk sprake van een nieuwe operatie, de limietvorming.

Evenzo is in de verzamelingenleer een uitdrukking als

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$$

ZINLOOS, opgevat als herhaald uitgevoerde doorsnede. Indien men toch zulke uitdrukkingen zou willen invoeren, dan zouden ze toch beschouwd moeten worden als alternatieve (en eigenlijk foutieve, want misleidende, schrijfwijzen voor nieuw te definieren operaties.

We zouden zulke nieuwe operaties kunnen trachten in te voeren m.b.v. een soort limietbegrip. Dat zal dan wel een vreemd soort limietbegrip worden, zo van een rij verzamelingen, waarvoor geen afstanden of getalgrootheden zinvol zijn. Toch is iets dergelijks mogelijk; maar er bestaat ook een veel eenvoudiger methode, waarbij we ons ook niet behoeven te beperken tot rijen van verzamelingen.

Daartoe eerst het volgende. We hebben in het voorgaande een aantal verzamelingen ontmoet, waarvan de elementen getallen waren, of mensen, of punten van een vlak. Men heeft echter heel dikwijls ook te maken met verzamelingen waarvan de elementen zelf weer verzamelingen zijn.

Voorbeelden.

1. Zij V de verzameling van alle punten van een plat vlak. Een rechte l in dat vlak identificeren we met de verzameling van alle punten in het vlak die op l liggen. Iedere rechte in V is zo een deelver-

zameling van V. Welnu, men kan zinvol spreken over de verzameling van alle rechten in V. Soortgelijke "verzamelingen van verzamelingen" zijn: de verzameling van alle cirkels in V; de verzameling van alle driehoeken in V; de verzameling van alle puntenparen (x,y) met $x \in V$ en $y \in V$.

2. In de analytische meetkunde identificeren we een punt van een vlak met zijn coördinatenpaar (na keuze van een verder vast coördinaten-stelsel). Ieder punt is dan zelf een verzameling van twee reële getallen. (Dit is eigenlijk niet juist: een punt is een geordend paar (x,y); niet een verzameling $\{x,y\}$. Maar ook een geordend paar wordt in de verzamelingenleer als verzameling beschouwd: $(x,y) = \{x,\{x,y\}\}$. We gaan hier op het ogenblik niet verder op in; zie opgave 3). Een vlak V kan dus zelf al opgevat worden als een verzameling van verzamelingen.

3. Een echtpaar kan men beschouwen als een verzameling die uit twee elementen bestaat. De verzameling E van alle echtparen, ingeschreven bij de Burgelijke Stand van Amsterdam per 2-10-'63, is dus een verzameling van verzamelingen.

Definitie 4. Zij A een verzameling. De verzameling, waarvan de elementen precies de deelverzamelingen van A zijn, heet de machtsverzameling van A, aangeduid met $\mathfrak{P}(A)$:

$$\mathfrak{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Voorbeelden

4. De verzameling van alle rechten in een vlak V is een deelverzameling van $\mathfrak{P}(V)$. De verzameling van alle Amsterdamse echtparen E is een deelverzameling van $\mathfrak{P}(A)$, waar A de verzameling is van alle Amsterdammers, ingeschreven bij de B.S. per 2-10-'63.

5. We hebben eigenlijk al een machtsverzameling ontmoet. In § 2 werd nl. opgemerkt dat alle deelverzamelingen van een vaste verzameling I een ring vormen t.o.v. de operaties Δ en $\cap$. De aan deze ring ten

grondslag liggende verzameling - d.w.z. de verzameling van alle objecten die we als elementen van de ring beschouwen, en waarop we de operaties Δ en $\cap$ loslaten - is precies $\mathcal{P}(I)$.

Opmerking. Altijd geldt: $A \in \mathcal{P}(A)$ en $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$. Een machtsverzameling is dus nooit leeg: i.h.b. geldt

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset.$$

We willen in dit verband met de grootste nadruk op wijzen dat men altijd onderscheid moet maken tussen een verzameling A en de daaruit gevormde verzameling $\{A\}$ waarvan A het enige element is. Zo heeft de verzameling N oneindig veel elementen, terwijl $\{N\}$ slechts één element bevat. Algemeen geldt:

$$A \in \{A\} \subset \mathcal{P}(A),$$

en

$$a \in A \Longleftrightarrow \{a\} \subset A \Longleftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(A).$$

Opgave 1. De enige verzameling A, waarvoor $\mathcal{P}(A) = \{A\}$, is de lege verzameling.

Definitie 5. Zij K een verzameling waarvan alle elementen zelf verzamelingen zijn. De doorsnede $\cap K$ van K is de verzameling

$$\cap K = \{x \mid x \in A \text{ voor iedere } A \in K\},$$

en de vereniging $\cup K$ van K is de verzameling

$$\cup K = \{x \mid x \in A \text{ voor tenminste één } A \in K\}.$$

Voorbeeld 6. Zij V een plat vlak, en K de verzameling van alle rechten in V. Dan is $\cup K = V$ en $\cap K = \emptyset$.

De operaties $\cap$ en V komt men vaak in een ietwat andere notatie tegen, waarbij gebruik gemaakt wordt van een indicering van K.

Definitie 6. Een indicering van een verzameling A m.b.v. een verzameling L (de indexverzameling) is een functie die L afbeeldt op A.

Het element van A waarop $\lambda \in L$ wordt afgebeeld wordt dan geschreven als a_λ of x_λ of i.d. Omdat een indicering een afbeelding van L op A is, geldt

$$A = \{a_\lambda | \lambda \in L\}.$$

Voorbeelden.

7. Zij $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ een getallenrij. Dan is de functie die u_n toevoegt aan n een indicering m.b.v. N van de verzameling $\{u_n | n \in N\}$.

8. Zij $A = \{0,1,2\}$. Een indicering van $\mathcal{P}(A)$ m.b.v. de verzameling $L = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
&a_1 = \emptyset; \\
&a_2 = \{0\} ;\ a_3 = \{1\} ;\ a_4 = \{2\} ; \\
&a_5 = \{0,1\} ;\ a_6 = \{0,2\} ;\ a_7 = \{1,2\} ; \\
&a_8 = \{0,1,2\} ; \\
&a_9 = \{0,1,2\} ;\ a_{10} = \emptyset.
\end{aligned}$$

De verzameling A kan eveneens geindiceerd worden m.b.v $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ of m.b.v. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, maar niet m.b.v. $\{1,2,3,4,5,6\}$.

9. De verzameling van alle medewerkers van de afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum per 2-10-'63 wordt geindiceerd door de beginletters van hun achternamen, d.w.z. door de verzameling $\{P,H,M,B\}$.

Opmerking. Een functie behoeft niet één-éénduidig te zijn. Het mag bij een indicering dus voorkomen dat $a_{\lambda_1} = a_{\lambda_2}$ hoewel $x_1 \neq x_2$ (vgl. voorbeeld 8 : $a_1 = a_{10}$, $a_8 = a_9$). Wel moet natuurlijk steeds gelden: $a_{\lambda_1} \neq a_{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Notatie-afspraak. Zij K een verzameling van verzamelingen, geindiceerd door een verzameling L:

$$K = \{A_\lambda \mid \lambda \in L\}.$$

Dan gebruiken we, synoniem met de notatie $\cap K$, ook de notaties

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$$

en

$$\cap \{A_\lambda \mid \lambda \in L\}.$$

Evenzo is

$$\cup K = \cup \{A_\lambda \mid \lambda \in L\} = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

In het bijzondere geval dat L de verzameling N der natuurlijke getallen is, schrijven we i.p.v. $\bigcap_{n \in N} A$ ook

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

en evenzo

$$\bigcup_{n \in N} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Voorbeelden.

10. Voor willekeurige $n \in N$ zij

$$A_n = \{\tfrac{k}{n} \mid k \in N \text{ en g.g.d. } (k,n) = 1\}.$$

Dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ de verzameling van alle positieve rationale getallen, en $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

11. Zij R de verzameling der reële getallen. Voor $a \in R$ en $b \in R$ definieren we het open interval $]a,b[$ en het gesloten interval $[a,b]$ door

$$]a,b[= \{x \mid x \in R \text{ en } a<x<b\};$$

$$[a,b] = \{x \mid x \in R \text{ en } a \leq x \leq b\}.$$

Er geldt:

$$[0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}[= \bigcap\{]-a,\ 1+a[\ \big|\ a\in R \text{ en } a>0\}\ ;$$

$$]0,1[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}] = \bigcup\{[a,1-a]\ \big|\ a\in R \text{ en } 0<a<\tfrac{1}{2}\}\ .$$

Stelling 7. Zij K een verzameling van verzamelingen die slechts eindig veel elementen bevat (elk van deze elementen mag natuurlijk zelf wel een oneindige verzameling zijn): $K = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Dan geldt

$$\bigcap K = A_1 \cap A_2 \ \ldots \cap A_n;$$
$$\bigcup K = A_1 \cup A_2 \ \ldots \cup A_n.$$

Bewijs

$x \in \bigcap K \iff x \in A$ voor iedere $A \in K \iff$

$\iff x \in A_1$ èn $x \in A_2$ èn ... èn $x \in A_k \iff x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$.

$x \in \bigcup K \iff x \in A$ voor tenminste één $A \in k \iff$

$\iff x \in A_1$ of $x \in A_2$ of ... of $x \in A_k \iff x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$.

Voor $\bigcap$ en $\bigcup$ gelden wetten die analoog zijn aan de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen van $\cap$ en $\cup$. Een exacte formulering van deze wetten is nogal omslachtig, reden waarom wij ze hier verder niet vermelden.

Opgaven.

2. Zij A een eindige verzameling, met n elementen. Hoeveel elementen bevat $\mathcal{P}(A)$?

3. Het geordend paar (a,b) gevormd uit twee objecten a en b wordt in de verzamelingenleer gedefinieerd als

$$(a,b) := \{a,\ \{a,b\}\}.$$

Bewijs:

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ èn } b = d.$$

4. Zij A de verzameling der positieve rationale getallen.

Bewijs

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tfrac{n}{k}\}$$

en bereken

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tfrac{n}{k}\} .$$

5. Zij $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ een rij verzamelingen. Men definieert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \{x \mid x \in A_n \text{ voor oneindig veel } n\}$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \{x \mid \text{er is een } n_o \text{ zodanig dat } x \in A_n \text{ voor alle } n \geq n_o\}$$

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}$$

6. Voor willekeurige $n \in N$ zij

$$I_n = \left]\tfrac{1}{n}, n\right[\text{ als } n \text{ even is;}$$

$$I_n = \left]-n, 1-\tfrac{1}{n}\right] \text{ als } n \text{ oneven is.}$$

Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \inf I_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup I_n$ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

7. Een rij verzamelingen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ heet convergent, indien

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n;$$

de verzameling $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$ heet dan de <u>limiet</u> van de rij, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Zij nu $A_1, A_2, A_3, \ldots$ een willekeurige rij verzamelingen, en stel

$$B_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n,$$

$$C_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Men bewijze: zowel de rij $B_1, B_2, \ldots$ als de rij $C_1, C_2, \ldots$ convergeert, en wel geldt:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

M.a.w. de volgende aantrekkelijke formules zijn correct:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n),$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

8. Een rij verzamelingen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ heet monotoon dalend indien $A_{n+1} \subset A_n$, voor $n=1,2,3,\ldots$, en monotoon stijgend indien $A_{n+1} \supset A_n$, voor $n=1,2,3,\ldots$. Bewijs dat iedere monotone rij convergeert, en beschrijf de limiet.

Colloquium Verzamelingenleer met toepassingen
Vijfde bijeenkomst: 4 december 1963
Sprekster: A.B. Paalman-de Miranda

II Boole-algebra's

§1 Definities en eigenschappen

Definitie 1: Een binaire operatie in een niet-lege verzameling V is een afbeelding van $V \times V$ in V, waarbij $V \times V$ de verzameling van alle geordende paren (a,b) is met $a,b \in V$.

Definitie 2: Onder een Boole algebra verstaan we een verzameling $\mathfrak{A}$ met 2 binaire operaties $\cup$ en $\cap$, met de volgende eigenschappen.

A1) $a \cup b = b \cup a$; $a \cap b = b \cap a$ voor alle $a,b \in \mathfrak{A}$.

A2) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$; $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ voor alle $a,b,c \in \mathfrak{A}$.

A3) Er bestaan twee elementen 0 en 1 in $\mathfrak{A}$, zó dat
$0 \cup a = a \cup 0 = a$; $1 \cap a = a \cap 1 = a$, voor alle $a \in \mathfrak{A}$.

A4) Bij iedere $a \in \mathfrak{A}$ is er een element $a' \in \mathfrak{A}$ zó dat
$a \cup a' = 1$; $a \cap a' = 0$.

Opmerking: Zoals uit definitie 2 blijkt, verandert het stelsel axioma's A(1)-(4) niet als we overal $\cup$ door $\cap$, en $\cap$ door $\cup$ vervangen.
Hierbij moeten we dan ook nog de 1 door 0 en de 0 door 1 vervangen.
Onder de duale uitdrukking E^* van een Boole-uitdrukking E (dat is een uitdrukking die verkregen wordt door eindig vaak de operaties $\cap$, $\cup$ en $'$ toe te passen) zullen we verstaan de uitdrukking die uit E verkregen wordt door overal $\cup$ en $\cap$ en 0 en 1 te verwisselen.
Als bijvoorbeeld
$E = a \cup ((b \cap c)' \cup 0)$, dan is $E^* = a \cap ((b \cup c)' \cap 1)$.
Hieruit volgt nu

Stelling: Als een identiteit $E_1 = E_2$, met E_1 en E_2 Boole-uitdrukkingen af te leiden is met behulp van de axioma's A_1-A_4 dan geldt hetzelfde voor $E_1^* = E_2^*$.

In de volgende stellingen zullen steeds twee duale beweringen worden uitgesproken, waarvan ~~we~~ steeds één zullen bewijzen.

Stelling 2: Zij $\mathfrak{A}$ een Boole-algebra en stel $a,b \in \mathfrak{A}$

Dan geldt:

1) $a \cup a = a$; $\quad a \cap a = a$.

2) $a \cup 1 = 1$; $\quad a \cap 0 = 0$.

3) $a \cup (a \cap b) = a$; $\quad a \cap (a \cup b) = a$.

4) $a' \cup (a \cap b) = a' \cup b$; $\quad a' \cap (a \cup b) = a' \cap b$.

Bewijs:

1) $a \cup a = (a \cup a) \cap 1 = (a \cup a) \cap (a \cup a') = a \cup (a \cap a') = a \cup 0 = a.$

2) $a \cup 1 = (a \cup 1) \cap 1 = (a \cup 1) \cap (a \cup a') = a \cup (1 \cap a') = a \cup a' = 1.$

3) $a \cup (a \cap b) = (a \cap 1) \cup (a \cap b) = a \cap (1 \cup b) = a \cap 1 = a.$

4) $a' \cup (a \cap b) = (a' \cup a) \cap (a' \cup b) = 1 \cap (a' \cup b) = a' \cup b.$

Stelling 3: Zij $\mathfrak{A}$ een Boole-algebra.

Dan zijn de operaties $\cup$ en $\cap$ associatief.

Dus voor iedere $a,b,c \in \mathfrak{A}$ geldt

$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \quad ; \quad a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c.$

Bewijs:

$a \cup (b \cup c) = (a \cup (b \cup c)) \cap (a \cup a') =$

$[(a \cup (b \cup c)) \cap a] \cup [(a \cup (b \cup c)) \cap a'] =$

$[a] \cup [(b \cup c) \cap a'] = [a \cup (a \cap c)] \cup [(b \cap a') \cup (c \cap a')] =$

$[(a \cap (a \cup b)) \cup (a \cap c)] \cup [((a \cup b) \cap a') \cup (c \cap a')] =$

$[a \cap ((a \cup b) \cup c)] \cup [((a \cup b) \cup c) \cap a'] = [(a \cup b) \cup c] \cap (a \cup a') = (a \cup b) \cup c.$

Stelling 4: Het element a' is eenduidig bepaald door a. Verder geldt:

1) $(a')' = a$;

2) $0' = 1$; $\quad$; $1' = 0$

3) $(a \cap b)' = a' \cup b'$; $(a \cup b)' = a' \cap b'$ (wetten van de Morgan)

Bewijs:

Stel $a \cup a_1' = a \cup a_2' = 1$ en $a \cap a_1' = a \cap a_2' = 0$.
Dan is

$$a_1' = 1 \cap a_1' = (a \cup a_2') \cap a_1' = (a \cap a_1') \cup (a_2' \cap a_1') = 0 \cup (a_2' \cap a_1') =$$
$$(a_2' \cap a) \cup (a_2' \cap a_1') = a_2' \cap (a \cup a_1') = a_2' \cap 1 = a_2'.$$

1) Daar $a' \cup a = 1$ en $a' \cap a = 0$ volgt $(a')' = a$.
2) $0 \cup 1 = 1$, $1 \cap 0 = 0$.
3) $(a \cap b) \cup (a' \cup b') = (a \cup (a' \cup b')) \cap (b \cup (a' \cup b')) =$
$(a \cup a' \cup b') \cap (b \cup b' \cup a') = (1 \cup b') \cap (1 \cup a') = 1 \cup 1 = 1$
en
$(a \cap b) \cap (a' \cup b') = (a \cap b \cap a') \cup (a \cap b \cap b') = (0 \cap b) \cup (0 \cap a) = 0.$

Voorbeeld 1. Zij V een willekeurige verzameling en $\mathfrak{P}(V)$ de machtsverzameling van V.
Dan is $\mathfrak{P}(V)$ een Boolse algebra als we definiëren; de operatie $\cup$ is de vereniging, $\cap$ is de doorsnede, 0 is de lege verzameling en 1 is de verzameling V, waarbij, als $A \subset V$, A' het complement van A in V is.

Voorbeeld 2. Zij V een willekeurige verzameling en $\mathfrak{A}$ de verzameling van alle eindige en co-eindige deelverzamelingen van V (een verzameling heet co-eindig als zijn complement eindig is).
$\mathfrak{A}$ is een Boolse-algebra onder doorsnede-vorming en vereniging.

Voorbeeld 3. Zij I het gesloten interval $[0,1]$, op de reeele rechte.
Zij $\mathfrak{A}$ de verzameling van alle eindige verenigingen van halfopen intervallen $[\alpha,\beta)$ $(\alpha \in I, \beta \in I, \alpha \leq \beta)$.
Dan is $\mathfrak{A}$ een Boole - algebra onder de verzamelingtheoretische operaties.
$\mathfrak{A}$ heet de interval-algebra van I.

Opmerking 1.
Uit de absorptie wetten (stelling 2. (3)) volgt dat de vergelijkingen $a \cap b = b$ en $a \cup b = a$ equivalent zijn, d.w.z. als één van beide geldt, dan ook de andere.
We definieren nu in $\mathfrak{A}$ een relatie $\subset$ door

$$a \subset b \Leftrightarrow a \cap b = a.$$

In plaats van $a \subset b$ zullen we ook schrijven $b \supset a$.
De relatie $\subset$ wordt de Boolse-inclusie genoemd. Deze relatie valt samen met de verzameling theoretische inclusie als $\mathfrak{A}$ een verzamelingen-algebra is. (zie opgave 8 blz. 13).

Opmerking 2.
Uit stelling 1 volgt dat door te dualiseren de vergelijking $a \cap b = a$ overgaat in $a \cup b = a$, dus in $a \cap b = b$ volgens opmerking 1.
Bij het dualiseren moeten we dus $\subset$ met $\supset$ verwisselen.

Stelling 5.
De relatie $\subset$ in een Boole-algebra is een partiële ordening, d.w.z. $\subset$ voldoet aan de volgende voorwaarden:
1) $a \subset a$
2) als $a \subset b$ en $b \subset a$ dan $a = b$;
3) als $a \subset b$ en $b \subset c$ dan $a \subset c$.
Verder heeft deze relatie de volgende eigenschappen:
4) Als $a \subset c$ en $b \subset d$ dan $a \cup b \subset c \cup d$ en duaal
5) als $a \supset c$ en $b \supset d$ dan $a \cap b \supset c \cap d$
6) $a \subset b \Leftrightarrow b' \subset a'$.

Bewijs:
1) $a \cap a = a \Rightarrow a \subset a$.
2) Als $a \subset b$ en $b \subset a$ dan is $a = a \cap b = b \cap a = b$
3) Als $a \subset b$ en $b \subset c$ dan $a \cap b = a$ en $b \cap c = b$
dus $a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a \Rightarrow a \subset c$
4) $a \subset c$ en $b \subset d \Rightarrow a \cup c = c$, $b \cup d = d \Rightarrow$
$(a \cup b) \cup (c \cup d) = (a \cup c) \cup (b \cup d) = (c \cup d) \Rightarrow a \cup b \subset c \cup d$
6) $a \subset b \Leftrightarrow a \cap b = a \Leftrightarrow (a \cap b)' = a' \cup b' = a' \Leftrightarrow b' \subset a'$.

Opmerking:
Uit stelling 5(4) volgt onmiddellijk dat, als $a \subset c$ en $b \subset c$, dan ook $a \cup b \subset c$; en duaal:
als $c \subset a$ en $c \subset b$ dan $a \cap b \subset c$.

Verder geldt $0 \subset a$ en $a \subset 1$ voor alle $a \in \mathfrak{A}$.

Daar $a \subset a$ en $0 \subset b$ volgt uit stelling 5(4) dat

$a \subset a \cup b$ voor alle a en $b \in \mathfrak{A}$

en $a \cap b \subset a$.

Opgaven:

1. Bewijs dat $a \subset b \Leftrightarrow a \cap b' = 0$.
2. $x \cup y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ en $y = 0$.
3. $x \subset y$ en $x \subset y' \Leftrightarrow x = 0$.
4. Schrijf de uitdrukking
   $[(a \cup b) \cap (c \cup d)]$ $(e \cap f)$
   a) zonder de operatie $\cup$
   b) zonder de operatie $\cap$.
5. Bewijs dat de volgende beweringen equivalent zijn.
   a) $a \subset b$
   b) $a \cap b' \subset a'$
   c) Er bestaat een element c met $a \cap b' \subset c \cap c'$
   d) $a \cap b' \subset 0$
   e) $a' \cup b \supset 1$.
6. $a \cap b = a \cap c \Leftrightarrow (b' \cap c') \cup (b \cap c) \supset a$.
7. Bewijs dat er geen boole-algebra bestaat met precies 6 elementen.
8. Bewijs dat een noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat een Boole-algebra meer dan één element bevat $0 \neq 1$.

§2. Representaties van Boole-algebra's

Definitie 1. Laat $\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{A}_2$ twee Boole-algebra's zijn.
Een afbeelding ϕ van $\mathfrak{A}_1$ op $\mathfrak{A}_2$ heet een isomorfie als geldt, voor willekeurige $a, b \in \mathfrak{A}_1$:

1) $\phi(a \cup b) = \phi(a) \cup \phi(b)$.
2) $\phi(a \cap b) = \phi(a) \cap \phi(b)$.
3) $\phi(a') = [\phi(a)]'$.
4) Als $a \neq b$ dan ook $\phi(a) \neq \phi(b)$.

$\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{A}_2$ zullen we dan isomorfe algebra's noemen. ϕ heet een homomorfe afbeelding als ϕ voldoet aan 1, 2 en 3.

Opmerking 1. Twee algebra's $\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{A}_2$ zijn dus isomorf als de 2 systemen volkomen identiek zijn, op de namen en de wijze van beschrijven van de elementen en operaties na.
Stel bijvoorbeeld dat $V_1=\{0,1,2\}$ en $V_2=\{3,4,5\}$.
Dan zijn $\mathfrak{P}(V_1)$ en $\mathfrak{P}(V_2)$ 2 isomorfe Boole-algebra's, waarbij de isomorfie ϕ bijvoorbeeld die afbeelding is die $\{0\}$, $\{1\}$, en $\{2\}$ afbeeldt op respectievelijk $\{3\}$, $\{4\}$ en $\{5\}$.

Opmerking 2. Het is duidelijk dat iedere homomorfie de 0 en 1 van $\mathfrak{A}_1$ overvoert in resp. de 0 en 1 van $\mathfrak{A}_2$.
Immers uit $0=a \cap a'$ volgt dat
$\phi(0)=\phi(a \cap a')=\phi(a) \cap \phi(a')=\phi(a) \cap [\phi(a)]' = 0$ en uit
$1=0'$ volgt $\phi(1)= \phi(0')= [\phi(0)]' = 0' = 1$.
Verder geldt dat als $a \subset b$, dan $\phi(a) \subset \phi(b)$
Immers uit $a \subset b$ volgt $a \cup b = b$, dus
$\phi(a \cup b)= \phi(a) \cup \phi(b)= \phi(b)$ en dit is equivalent met $\phi(a) \subset \phi(b)$.

Definitie 2. Onder een verzamelingenalgebra verstaan we een systeem $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van een verzameling I, zo dat

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ en $I \in \mathcal{A}$
2) als A en B in $\mathcal{A}$ dan ook $A \cap B$ en $A \cup B$ in $\mathcal{A}$.
3) als A in $\mathcal{A}$ dan ook A' in $\mathcal{A}$.

Hierbij is A' het complement van A ten opzichte van I.

Opmerking

Het is duidelijk dat iedere verzamelingenalgebra een Boole-algebra is.

Een verzamelingenalgebra behoeft zoals uit de definitie blijkt niet te bestaan uit alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling V. Zo is bijvoorbeeld de interval-algebra van het interval $[0,1)$ een verzamelingenalgebra die niet bestaat uit alle deelverzamelingen van $[0,1)$.

Verder is het systeem van alle eindige en co-eindige deelverzamelingen van een verzameling V ook een verzamelingenalgebra, die, als V niet eindig is, niet bestaat uit alle deelverzamelingen van V.

Men kan nu bewijzen dat iedere Boole-algebra isomorf is met een verzamelingenalgebra.

We zullen deze stelling slechts bewijzen voor een speciale klasse van Boole-algebra's, namelijk voor de atomaire algebra's.

Definitie 3. Een element a van een Boole-algebra $\mathfrak{A}$ heet een atoom als $a \neq 0$ en als uit $x \subset a$ volgt dat $x = 0$ of $x = a$.

Definitie 4. Een Boole-algebra $\mathfrak{A}$ heet atomair als er bij iedere $b \neq 0$ uit $\mathfrak{A}$ een atoom a te vinden is met $a \subset b$.

Opmerking. Uit de definitie volgt dat als a_1 en a_2 2 atomen zijn van $\mathfrak{A}$ met $a_1 \neq a_2$, dan $a_1 \cap a_2 = 0$.

Immers $a_1 \cap a_2 \subset a_1$ en $a_1 \cap a_2 \subset a_2$ dus $a_1 \cap a_2 = 0$.

Voorbeeld 1. De verzamelingenalgebra die bestaat uit alle deelverzamelingen van een willekeurige verzameling V is atomair. De atomen zijn hier die deelverzamelingen van V die uit slechts één element bestaan.

Voorbeeld 2. De interval-algebra van het eenheidsinterval $[0,1)$ is niet atomair.

Stelling 1. Iedere eindige Boole-algebra $\mathfrak{A}$ met meer dan 1 element is atomair.

Bewijs: Zij $b \neq 0$ en stel b geen atoom.
Dan is er een b_1 met $b_1 \subset b$ en $0 \neq b_1$, $b \neq b_1$.
Als b_1 geen atoom is, dan is er een $b_2 \in \mathfrak{A}$ met $0 \neq b_2$, $b_2 \neq b_1$ en $b_2 \subset b_1 \subset b$.
Daar $\mathfrak{A}$ eindig is, breekt dit proces na een eindig aantal stappen af, d.w.z. dat er een n is met b_n een atoom en $b_n \subset b$ q.e.d.

Stelling 2.
a is een atoom van $\mathfrak{A}$, dan en slechts dan als $a \neq 0$ en voor iedere $b \in \mathfrak{A}$ geldt $a \subset b$ of $a \subset b'$.
Bewijs.
Stel a een atoom en $b \in \mathfrak{A}$.
Daar $a \cap b \subset a$ geldt $a \cap b = 0$ of $a \cap b = a$.
Als $a \cap b = a$ dan $a \subset b$.
Als $a \cap b = 0$ dan $a \subset b'$ (zie §1 opgave 1).

Zij nu A de verzameling van alle atomen van een Boole-algebra $\mathfrak{A}$ en stel A_b de verzameling van alle atomen a met $a \subset b$.

Stelling 3.
Het systeem $\mathcal{A} = \{A_b\}_{b \in \mathfrak{A}}$ van deelverzamelingen van A is een verzamelingenalgebra.
Bewijs.
1) $A_1 = A$, daar $b \subset 1$ voor alle $b \in \mathfrak{A}$, en dus zeker
$a \subset 1$ voor alle $a \in A$
$A_0 = \emptyset$ daar uit $a \subset 0$ zou volgen dat $a = 0$.
Dus $\emptyset \in \mathcal{A}$ en $A \in \mathcal{A}$.
2) $A_b \cap A_c = A_{b \cap c}$.
Immers als $a \in A_{b \cap c}$, dan $a \subset b \cap c$; en daar $b \cap c \subset b$ en $b \cap c \subset c$ volgt uit de transitiviteit van $\subset$ dat $a \subset b$ en $a \subset c$.
Dus $a \in A_b$ en $a \in A_c$. Hieruit volgt $A_{b \cap c} \subset A_b \cap A_c$.
Als omgekeerd $a \in A_b \cap A_c$, dan $a \subset b$ en $a \subset c$ en dus $a \subset b \cap c$
$A_b \cap A_c$ is dus bevat in $A_{b \cap c}$.

$A_b \cup A_c = A_{b \cup c}$.

Als $a \in A_b \cup A_c$, dan $a \subset b$ of $a \subset c$, dus $a \subset b \cup c$.

We zien dus dat $a \in A_{b \cup c}$.

Stel nu omgekeerd $a \notin A_b \cup A_c$; dan $a \not\subset b$ en $a \not\subset c$.

Volgens stelling 2 geldt dan $a \subset b'$ en $a \subset c'$, en dus $a \subset b' \cap c' = (b \cup c)'$.

Als ook $a \subset b \cup c$ dan $a \subset (b \cup c) \cap (b \cup c)' = 0$ een tegenspraak dus $a \not\subset b \cup c$.

En we concluderen dat $a \notin A_{b \cup c}$.

3) $A_{b'} = [A_b]'$.

Immers $A_{(b \cup b')} = A = A_b \cup A_{b'}$ en $A_{b \cap b'} = \emptyset = A_b \cap A_{b'}$.

Stelling 4. Zij $\mathfrak{A}$ een atomaire Boole-algebra. Dan is de afbeelding ϕ van $\mathfrak{A}$ op $\mathcal{A}$ gedefinieerd door

$\phi(b) = A_b$ een isomorfie. Dus $\mathfrak{A}$ isomorf met een verzamelingenalgebra.

Bewijs.

1) $\phi(b \cup c) = A_{b \cup c} = A_b \cup A_c = \phi(b) \cup \phi(c)$

2) $\phi(b \cap c) = A_{b \cap c} = A_b \cap A_c = \phi(b) \cap \phi(c)$

3) $\phi(b') = A_{b'} = [A_b]' = [\phi(b)]'$

4) Als $b \neq c$ dan $\phi(b) \neq \phi(c)$.

Immers stel $b \neq c$, dan ook $b' \neq c'$, dus geldt of $b \cap c' \neq 0$ of $b \cup c' \neq 1$ en dit is equivalent met $b \cap c' \neq 0$ of $b' \cap c \neq 0$.

Als $b \cap c' \neq 0$, dan is er, daar $\mathfrak{A}$ atomair is, een $a \in A$ met $a \subset b \cap c'$; dus $A_{b \cap c'} \neq \emptyset$.

Maar uit $A_{b \cap c'} = A_b \cap A_{c'} = A_b \cap [A_c]' \neq \emptyset$ volgt $A_b \neq A_c$.

Stelling 5.

Het aantal elementen van een eindige Boole-algebra $\mathfrak{A}$ is een macht van 2 : $|\mathfrak{A}| = 2^n$.

Bewijs.

Daar volgens stelling 1 $\mathfrak{A}$ atomair is als $\mathfrak{A}$ meer dan 1 element heeft, is $\mathfrak{A}$ isomorf met de verzamelingenalgebra $\mathcal{A} = \{A_b\}_{b \in \mathfrak{A}}$.

Daar $\mathfrak{A}$ eindig is heeft $\mathfrak{A}$ een eindig aantal atomen, zeg n en
$A = \{a_1,\ldots,a_n\}$.
Stel nu A^* een willekeurige deelverzameling van A
$A^* = \{a_{i_1}\ldots a_{i_r}\} \subset A$ en stel $a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \ldots \cup a_{i_r} = b$.

Dan is $A^* = A_b$.
Immers uit §1 stelling 5 (5) volgt dat $a_{i_j} \subset b$ voor $j=1,2,\ldots r$ en
dus $A^* \subset A_b$.
Stel nu $A_b \neq A^*$. Dan is er een $a_1 \in A$ met $a_1 \in A_b$, $a_1 \notin A^*$.
Daar $a_1 \subset b$ geldt

$$a_1 = a_1 \cap b = a_1 \cap \{a_{i_1} \cup a_{i_2} \ldots \cup a_{i_r}\} = \{a_1 \cap a_{i_1}\} \cup \{a_1 \cap a_{i_2}\} \ldots \cup \{a_1 \cap a_{i_r}\} =$$
$$0 \cup 0 \cup \ldots 0 = 0\text{, een tegenspraak.}$$

Dus $A^* = A_b$.
Iedere deelverzameling van A is dus te schrijven als een A_b.
Hieruit volgt dat $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{A}$ heeft dus 2^n elementen (zie opgave 2 pagina 21).
Daar $\mathfrak{A}$ isomorf is met $\mathcal{A}$ heeft $\mathfrak{A}$ dus ook 2^n elementen.

Opgaven

1) Laat $\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{A}_2$ 2 Boole-algebra's zijn en stel ϕ is een afbeelding van $\mathfrak{A}_1$ op $\mathfrak{A}_2$ die voldoet aan een aantal van de volgende voorwaarden:
   a) $\phi(a \cup b) = \phi(a) \cup \phi(b)$
   b) $\phi(a') = [\phi(a)]'$.
   c) $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$
   d) $\phi(a \cap b) = \phi(a) \cap \phi(b)$.
   Bewijs 1) dat als ϕ voldoet aan a) en b) dan is ϕ een homomorfie
   2) als ϕ voldoet aan a) c) en d) dan is ϕ een homomorfie.
2) Bewijs: als ϕ een 1-1 duidige afbeelding is, en als $\phi(a) \subset \phi(b) \Longleftrightarrow a \subset b$, dan is ϕ een isomorfie.
3) Zij ϕ een homomorfie van $\mathfrak{A}_1$ op $\mathfrak{A}_2$ en stel dat $\{a \mid \phi(a)=0,\ a \in \mathfrak{A}_1\} = \{0\}$
   Dan is ϕ een isomorfe afbeelding.
4) Een Boolse algebra is dan en slechts dan atomair als uit $b \supset a$ voor alle atomen a volgt $b=1$.

5) Bewijs dat twee eindige Boole-algebra's dan en slechts dan isomorf zijn als ze evenveel atomen hebben.

6) Bewijs dat twee eindige Boole-algebra's dan en slechts dan isomorf zijn als ze evenveel elementen hebben.

§3 Boolese ringen

Definitie 1. Onder een ring verstaan we een niet lege verzameling R met 2 binaire operaties + ,. met de volgende eigenschappen.

1) $a + b = b + a$
2) $(a+b) + c = a + (b+c)$
3) bij iedere a en $b \in R$ bestaat er een c met $a + c = b$.
4) $a(bc) = (ab)c$
5) $a(b+c) = ab+ac$;$(a+b)c = ac+bc$.

Opmerking: Uit 1),2) en 3) volgt dat er een element $0 \in R$ bestaat met $a+0 = a$, voor alle $a \in R$.
Dit element is éénduidig bepaald, evenals het element c met $a+c = b$.

Definitie 2. Een ring R heet een Boolese ring als geldt dat, voor iedere a uit R, $a.a=a$.

Voorbeeld 1. Zij R de verzameling van alle gehele getallen onder optelling en vermenigvuldiging. Dan is R een ring R is geen Boolese ring.

Voorbeeld 2. De verzameling $\{0,1\}$ is een Boolese ring $\mathcal{R}$ als we de optelling en vermenigvuldiging als volgt definieren.

$0+0=0 = 1+1$

$0+1=1+0=1$

$0.0=1.0=0.1=0$

$1.1=1.$

Voorbeeld 3. Zij $\mathcal{R}^X$ de verzameling van alle functies f van een verzameling X in $\mathcal{R}$, waarbij we definieren

$$f_1+f_2(x) = f_1(x)+f_2(x)$$
$$f_1f_2(x) = f_1(x)\ f_2(x).$$

$\mathcal{R}^X$ is dus de verzameling van alle karakteristieke functies gedefinieerd op X.
$\mathcal{R}^X$ is een Boolese ring met als nulelement de functie die identiek 0 is.

Een éénheidselement van een ring R is een element 1 zó dat voor iedere $a \in R$ geldt $1 \circ a = a \circ 1 = a$.
Een ring hoeft geen eenheidselement te bevatten.
Het éénheidselement in $\mathcal{R}^X$ is de functie die identiek 1 is.

Stelling 1. Iedere Boole-algebra is een Boolese ring met eenheid als we de 2 operaties + en $\circ$ op de volgende manier definieren.

$$a+b = (a \cap b') \cup (b \cap a') = (a \cup b) \cap (a' \cup b')$$
$$a \circ b = a \cap b.$$

Bewijs.

1) $a+b = (a \cup b) \cap (a' \cup b') = (b \cup a) \cap (b' \cup a') = b+a.$

2) $a+(b+c) = [a \cap \{(b \cup c) \cap (b' \cup c')\}'] \cup [\{(b \cap c') \cup (c \cap b')\} \cap a'] =$
$[a \cap \{(b' \cap c') \cup (b \cap c)\}] \cup (b \cap c' \cap a') \cup (c \cap b' \cap a') =$
$(a \cap b' \cap c') \cup (a \cap b \cap c) \cup (b \cap c' \cap a') \cup (c \cap b' \cap a') = c+(a+b) = (a+b)+c$

3) Uit de def. volgt dat
$a+a = (a \cup a) \cap (a' \cup a') = 0$ en $0+a = (a \cup 0) \cap (a' \cup 1) = a.$
Stel nu $c = a+b$, dan $a+c = a+(a+b) = (a+a)+b = 0+b = b.$

4) $(ab)c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a(b \circ c).$

5) $ab+ac = [ab \cup ac] \cap [(ab)' \cup (ac)'] = [(a \cap b) \cup (a \cap c] \cap$
$[(a' \cup b') \cup (c' \cup a'] = [a \cap (b \cup c)] \cap [a' \cup (b' \cup c')] =$
$a \cap [(b \cup c) \cap (b' \cup c')] = a(b+c)$
$(a+b) \circ c = c(a+b) = ca+cb = ac+bc.$

6) $1 \circ b = 1 \cap b = b.$

Stelling 2. Iedere Boolese ring met eenheid is een Boole-algebra als we de operaties $\cap$, $\cup$ en $'$ op de volgende manier definiëren

$$a \cup b = a+b+a \circ b$$
$$a \cap b = a \circ b$$
$$a' = 1+a.$$

Bewijs: zie opgave 1.

Opgaven:

1) Bewijs §3 stelling 2.

2) Schrijf de uitdrukking $a \cup (b \cap c) \cup d$ met behulp van de optelling en de vermenigvuldiging.

3) Bewijs dat in een Boolese ring R geldt
   1) $a+a=0$ voor iedere $a \in R$
   2) als $a+b=0$ dan $b=a$.
   3) $a \circ b = b \circ a$ voor alle $a, b \in R$.

4) Zij R een Boolese ring. Definieer in R een relatie $\subset$ door

$$a \subset b \Longleftrightarrow a \circ b = a.$$

   Bewijs dat $\subset$ een partiële ordening is.

5) Bewijs dat iedere eindige Boolese ring een éénheidselement heeft.

6) Zij $\mathfrak{A}$ een Boole-algebra en $\mathfrak{A}^*$ de daarmee corresponderende Boolese ring (st 1). Dan is de Boole-algebra die met $\mathfrak{A}^*$ correspondeert isomorf met $\mathfrak{A}$.

7) Zij R een Boolese ring met eenheid en R^* de daarmee corresponderende Boole algebra (st 2).
   Dan is de Boolese ring die met R^* correspondeert isomorf met R.

§4 Boolese functies

Zij $\mathfrak{A}$ een Boole-algebra.

Onder een Boolese functie $f(x_1,x_2\ldots x_n)$ in de variabelen $x_1,\ldots x_n$ zullen we verstaan een uitdrukking die verkregen wordt door op een eindig aantal constanten en de variabelen $x_1,\ldots x_n$ de operaties $\cup$, $\cap$ en $'$ eindig vaak toe te passen.

Hierbij is een constante ieder willekeurig maar vast element uit een Boolese algebra.

Zo is dus bijvoorbeeld

$f(x,y,z)=(x\cup y')'\cap z\cap(x'\cup z)\cap(0\cup z')$ een Boolese functie.

Definitie 1. Een disjunctieve normaal vorm in de variabelen $x_1,\ldots x_n$ is een uitdrukking D van de vorm $D = D_1\cup D_2\ldots\cup D_k$ waarbij iedere D_k een uitdrukking is van de vorm $x_1^*\cap x_2^*\cap\ldots\cap x_n^*$.

Hierbij is voor iedere i $(1\leqslant i\leqslant n)$ x_i^* gelijk aan x_i of aan x_i' terwijl $D_i \not\equiv D_j$ als $i \neq j$.

Bovendien beschouwen we 0 als een disjunctieve normaalvorm in n variabelen, voor alle $n>0$.

Voorbeeld 1.

$(x\cap y)\cup(x'\cap y')\cup(x'\cap y)$ is een disjunctieve normaalvorm in de variabelen x en y.

$x\cup(x'\cap y)$ is geen disjunctieve normaalvorm.

Stelling 1. Iedere Boolese functie $f(x_1\ldots x_n)$ die geen constanten bevat is te schrijven als een disjunctieve normaalvorm in de variabelen $x_1,\ldots x_n$.

Bewijs: Als $f(x_1,x_2\ldots x_n)\equiv 0$ voor alle $x_1,\ldots x_n$, dan is de stelling bewezen. Stel nu $f\not\equiv 0$, en neem aan dat f een uitdrukking van de vorm $(g\cup h)'$ of $(g\cap h)'$ bevat; dan kunnen we door §1 st 4 (3) toe te passen $(g\cup h)'$ en $(g\cap h)'$ schrijven als resp. $g'\cap h'$ en $g'\cup h'$.

Dit proces kunnen we zo lang voortzetten tot dat de operatie $'$ alleen op de variabelen x_i zelf wordt toegepast.

Door nu de distributieve wet $a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$ toe te passen, kunnen we f schrijven als een uitdrukking van de vorm $f=f_1\cup f_2\cup\ldots\cup f_r$, waarbij

$f_j=a_1\cap\ldots\cap a_s$ met $a_i\in\{x_1,x_2, x_n,x_1',\ldots x_n'\}$ $1\leq i\leq s$.
Als $a_i=a_k$ $i\neq k$ dan kunnen we a_k weglaten, en als $a_i=a_k'$, dan is $f_s=0$.
Hieruit volgt dus dat $f=f_1\cup f_2\ldots\cup f_r$ met $f_j=x^*_{j1}\cap\ldots\cap x^*_{js}$ $j_i\neq j_k$ $1\leq j_i\leq n$.

Stel nu dat x_p noch x_p' voorkomt in f_j. Dan is $f_j=f_j\cap(x_p\cup x_p')$ $=(f_j\cap x_p)\cup(f_j\cap x_p')$ en we hebben f_j geschreven als vereniging van twee termen, die behalve de x^*_{ji} $1\leq i\leq s$ ook nog x_p of x_p' bevatten.
Door dit proces voort te zetten kunnen we iedere f_j, dus ook f schrijven als vereniging van termen $D=x^*_1\cap x^*_2\cap\ldots\cap x^*_n$

$$f=D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k$$

Door nu de herhalingen weg te laten is f geschreven als een disjunctieve normaalvorm in $x_1,\ldots x_n$.

Voorbeeld 2.
Zij $f(x,y)=[x\cup(x'\cap y)]'$.
Dan is $f(x,y)= x'\cap(x'\cap y)'=x'\cap(x\cup y')=(x'\cap x)\cup(x'\cap y')=x'\cap y'$.

Opmerking. Iedere disjunctieve normaalvorm $N=D_1\cup\ldots\cup D_k$ in n-variabelen kunnen we ook schrijven als disjunctieve normaalvorm in (n+1) variabelen.
Immers $N=N\cap(x_{n+1}\cup x'_{n+1})=(N\cap x_{n+1})\cup(N\cap x'_{n+1})=$

$$(D_1\cap x_{n+1})\cup\ldots\cup(D_k\cap x_{n+1})\cup(D_1\cap x'_{n+1})\cup\ldots\cup(D_k\cap x'_{n+1}).$$

We zullen echter in het vervolg als de normaalvorm van een functie steeds die disjunctieve normaalvorm beschouwen, die een zo klein mogelijk aantal variabelen bevat.
Als dus $f(x,y)=(x\cap y)\cup(x\cap y')$, dan is x de disjunctieve normaalvorm van $f(x,y)$.
Verder is het duidelijk dat er precies 2^n verschillende termen $x^*_1\cap\ldots\cap x^*_n$ zijn die in een normaalvorm van n variabelen kunnen voorkomen.
Immers iedere x^*_i kan de waarde x_i of x_i' aannemen.

Definitie 2. De disjunctieve normaalvorm in n variabelen die 2^n termen bevat heet de volledige disjunctieve normaalvorm in n-variabelen. :$N_D(x_1,\ldots x_n)$.

Stelling 2. Stel $N_D(x_1,\ldots x_n)= D_1(x_1\ldots x_n)\cup\ldots\cup D_{2^n}(x_1,\ldots x_n)$.
Als $x_i=a_i$ met $a_i=0$ of 1, dan is $N_D(a_1,\ldots a_n)=1$, en er is precies één term D_i met $D_i(a_1,\ldots,a_n)=1$. Alle andere termen hebben de waarde 0.

Bewijs.
Laat D_i die term $x_1^*\cap\ldots\cap x_n^*$ zijn met $x_i^*=x_i$ als $a_i=1$ en $x_i^*=x_i'$ als $a_i=0$.
Dan is $D_i(a_1,\ldots a_n)=1\cap\ldots\cap 1=1$ terwijl alle andere termen minstens één factor 0 hebben en dus gelijk aan 0 zijn.

Stelling 3. Twee functies zijn dan en slechts dan gelijk als hun disjunctieve normaalvormen dezelfde termen bevatten.

Bewijs.
Als $f_1=f_2$ dan $f_1(a_1,\ldots a_n) = f_2(a_1,\ldots a_n)$ voor iedere keuze van $a_1,\ldots a_n$.
Stel een term $D_i=x_1^*\cap\ldots\cap x_n^*$ bevat in f_1. Dan is er een n-tal $(a_1,\ldots a_n)$ met $a_i=0$ of 1 $1\leq i\leq n$ zó dat $D_i(a_1,\ldots a_n)=1$. Volgens stelling 2 zijn dan alle andere termen $D_j(a_1,\ldots a_n)=0$ $i\neq j$.
Daar $f_1(a_1\ldots a_n)= f_2(a_1,\ldots a_n)=1$, moet f_2 dus ook de term D_i bevatten.
Iedere term die in f_1 bevat is, is dus ook in f_2 bevat en omgekeerd.
Als omgekeerd f_1 en f_2 dezelfde termen bevatten, dan is $f_1=f_2$.

Gevolg: Uit het voorgaande blijkt dat een Boolese functie $f(x_1,\ldots x_n)$ geheel bepaald is door de 2^n waarden $f(a_1,\ldots a_n)$ met $a_i=0$ of 1.
In het bijzonder is dus iedere Boolese functie van 1 variabele bepaald door de waarden f(0) en f(1).

Stelling 4. Er zijn precies 2^{2^n} verschillende Boolese functies van n-variabelen in een willekeurige Boolese algebra $\mathfrak{A}$.

Bewijs.
Dit volgt direct uit het feit dat f geheel bepaald is door de 2^n waarden

$f(a_1,\dots a_n)$ met $a_i=0$ of 1 en het feit dat $f(a_1,\dots a_n)$ gelijk moet zijn aan 0 of 1.

Voorbeeld.

Stel $f(x,y)$ de functie gedefiniëerd door,

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Dan kunnen we $f(x,y)$ in de disjunctieve normaalvorm schrijven op de volgende wijze

$f(x,y)$ bevat de term $x' \cap y'$, immers $f(0,0)=1$ en $0' \cap 0' = 1$.

Evenzo bevat f de termen $x \cap y'$ en $x \cap y$.

Dus

$f(x,y)=(x' \cap y') \cup (x \cap y') \cup (x \cap y)=\{(x' \cup x) \cap y'\} \cup (x \cap y)= y' \cup (x \cap y)=y' \cup x$.

We besluiten deze paragraaf nu met het geven van een stel duale definities en stellingen.

Definitie 1'; Een conjunctieve normaalvorm in n variabelen is een uitdrukking C van de vorm $C=C_1 \cap C_2 \dots \cap C_k$, waarbij iedere C_k een uitdrukking is van de vorm $x_1^* \cup x_2^* \dots \cup x_n^*$. Hierbij is voor iedere i $(1 \leq i \leq n)$ x_i^* gelijk aan x_i of x_i' en $C_i \not\equiv C_j$ als $i \neq j$.

Verder beschouwen we 1 als conjunctieve normaalvorm in n-variabelen, voor alle $n > 0$.

Stelling 1'. Iedere Boolese functie $f(x_1 \dots x_n)$ die geen constanten bevat is te schrijven als een conjunctieve normaalvorm in de variabelen $x_1,\dots x_n$.

Definitie 2': De conjunctieve normaalvorm in n-variabelen die 2^n termen bevat heet de volledige conjunctieve normaalvorm: $N_c(x_1,\dots x_n)$.

Stelling 2'. Als $N_c(x_1,\dots x_n)= C_1(x_1 \dots x_n) \cap \dots \cap C_n(x_1,\dots x_n)$ en $x_i=a_i$ met $a_i=0$ of 1, dan is $N_c(a_1,\dots a_n)= 0$ en er is precies één term C_i met $C_i(a_1 \dots a_n)=0$. Alle andere termen hebben de waarde 1.

Stelling 3'. Twee functies zijn dan en slechts dan gelijk als hun conjunctieve normaalvormen dezelfde termen bevatten.

Opgaven.

1. Schrijf elk van de onderstaande functies in de disjunctieve en de conjunctieve normaalvorm.
   a) $f(x,y,z)=(x\cap y\cap z)\cup\{(x\cup y)\cap(x\cup z)\}$
   b) $f(x,y,z)= x\cap\big((x'\cap y)\cup(x\cup y'\cup z)'\big)\cup\{x\cap(x\cup y)'\}$.
   c) $f(x,y,z)= \{x'\cap(y\cup z)\}\cup\{(x\cup y)\}$.

2. Bepaal de functie $f(x,y,z)$ die gegeven is door

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

3. Bewijs dat voor iedere Boolese functie in 1 variabele geldt

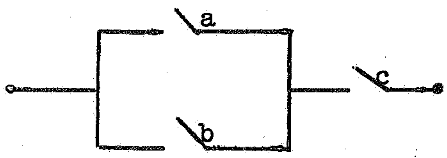
$$f(x)= (f(1)\cap x)\cup(f(0)\cap x')$$

4. Zij $\mathfrak{A}$ een Boole-algebra en stel dat $a\in\mathfrak{A}$ te schrijven is als een disjunctieve normaalvorm in $a_1,\ldots a_n$, $a_i\in\mathfrak{A}$ $1\leq i\leq n$ en stel dat 0 niet geschreven kan worden als $0=a_1^*\cap\ldots\cap a_n^*$ met $a_i^*=a_i$ of a_i' $1\leq i\leq n$. Dan is de schrijfwijze van a als normaalvorm in $a_1,\ldots a_n$ éénduidig bepaald.

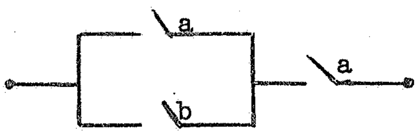
5. Zij $\mathfrak{A}$ een Boole-algebra en stel $a_1,a_2,\ldots a_n\in\mathfrak{A}$ zo dat ieder element b van $\mathfrak{A}$ eenduidig te schrijven is als een disjunctieve normaalvorm in $a_1\ldots a_n$.
   Bewijs dat
   1) Ieder atoom van $\mathfrak{A}$ is te schrijven als $a_1^*\cap a_2^*\cap\ldots a_n^*$.
   2) Ieder element $a_1^*\cap a_2^*\cap\ldots\cap a_n^*$ is een atoom
   3) $\mathfrak{A}$ is isomorf met $\mathfrak{P}(\{1,2,3,\ldots 2^n\})$.

§5 Schakel algebra's

In deze paragraaf willen we ons bezig houden met een bepaald soort electrische systemen. Namelijk die bestaan uit een aantal schakelaars die op verschillende manieren aan elkaar gekoppeld zijn b.v.



De schakelaars zullen we aangeven met letters, a,b,c enz. We veronderstellen verder dat een schakelaar slechts 2 standen kan hebben; a is dicht als er een electrische stroom kan lopen, a is open als hij de stroom onderbreekt.
Twee schakelaars die zo gemaakt zijn, dat ze of beide open zijn, of beide dicht, zullen we met dezelfde letter aangeven.
Als 2 schakelaars zo gekoppeld zijn, dat de eerste altijd open is als de tweede dicht is en omgekeerd, zullen we ze aangeven met b.v. a en a' (of a' en a).
Een schakelaar die altijd open is zullen we aangeven met 0 en een schakelaar die altijd dicht is met 1.
Twee van dergelijke systemen opgebouwd uit schakelaars a,b,c... enz zullen we equivalent noemen, als ze voor iedere willekeurige stand van de schakelaars a,b,c... of beide de stroom onderbreken, of beide de stroom doorlaten.
Zo zijn b.v. de volgende 2 systemen equivalent

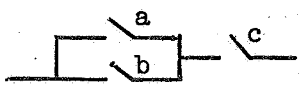


We zullen ons nu bezig houden met het volgende soort problemen.

a) Stel dat er een willekeurig systeem gegeven is.
   Wat zijn dan de standen van de verschillende schakelaars zô dat de stroom niet onderbroken wordt.

b) Stel dat een schakel systeem gegeven is. Vind indien mogelijk een daarmee equivalent systeem dat eenvoudiger is.

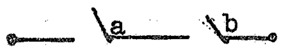
We gaan nu als volgt te werk.
Aan een systeem bestaande uit 2 schakelaars a en b die in serie gekoppeld zijn, voegen we toe de uitdrukking $a \cap b$, en aan een systeem bestaande uit a en b parallel gekoppeld voegen we toe $a \cup b$.
Aan ieder systeem dat uit schakelaars opgebouwd is, die in serie of parallel gekoppeld zijn kunnen we dus zo'n uitdrukking toe voegen.

Zo is b.v. aan 

de uitdrukking $(a \cup b) \cap c$ toegevoegd.

Omgekeerd is ook aan iedere uitdrukking die slechts $\cup, \cap$ en' bevat een schakel systeem toegevoegd.

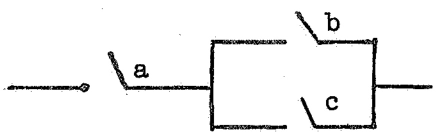
Het blijkt nu dat de klasse van alle systemen een Boole-algebra vormt, als wij tenminste equivalente systemen als gelijk beschouwen.
De commutativiteit van $\cap$ volgt b.v. uit het feit dat de systemen



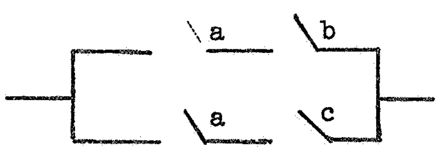
en


equivalent zijn.

De distributieve wet $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ volgt hieruit dat



en



equivalent zijn.

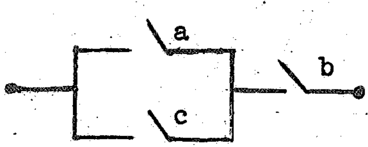
Stel nu dat wij aan schakelaar a de waarde 1 toekennen als a dicht is en de waarde 0 als a open is. Verder zullen we aan een systeem de waarde 1 toekennen als er een stroom door lopen kan, anders heeft het systeem de waarde 0.
We komen dan tot een representatie van het systeem bestaande uit schakelaars a,b,c... door middel van een functie f(a,b,c...), die zo gekozen is dat $f(a^*,b^*,c^*\ldots)=1$ met $a^*,b^*,c^*\ldots=0$ of 1 dan en slechts dan als het systeem de waarde 1 heeft indien de schakelaars a,b,c... resp. de waarden $a^*,b^*,c^*\ldots$ hebben.
Daar iedere Boolese-functie $f(x_1\ldots x_n)$ geheel bepaald is door de 2^n waarden $f(a_1,\ldots a_n)$ met $a_i=0$ of 1, is ieder schakel systeem dus geheel bepaald (tenminste op equivalentie na) door de verschillende toestanden van het systeem bij de verschillende standen van de schakelaars.

Voorbeeld 1.
Stel een systeem bestaande uit de schakelaars a,b en c gegeven door de volgende functie

a	b	c	f(a,b,c)
1	1	0	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

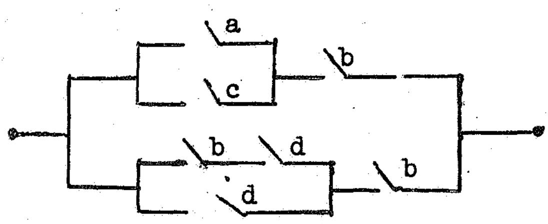
Dan is $f(a,b,c)=(a\cap b\cap c')\cup(a\cap b\cap c)\cup(a'\cap b\cap c)=(a\cap b)\cup(a'\cap b\cap c)=$
$= b\cap(a\cup(a'\cap c))= b\cap(a\cup c)$

f stelt dus het volgende systeem voor



Voorbeeld 2.

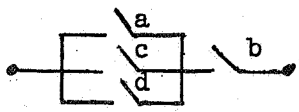
Zij gegeven het systeem



Gevraagd een eenvoudiger daarmee equivalent systeem. Het systeem wordt voorgesteld door de functie

$$f(a,b,c,d) = \{(a \cup c) \cap b\} \cup \{((b \cap d) \cup d) \cap b\} =$$
$$\{(a \cup c) \cap b\} \cup \{d \cap b\} = (a \cup c \cup d) \cap b.$$

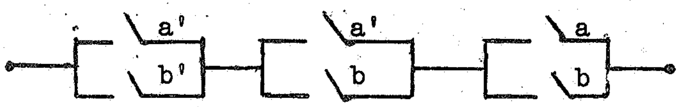
Een daarmee equivalent systeem is dus



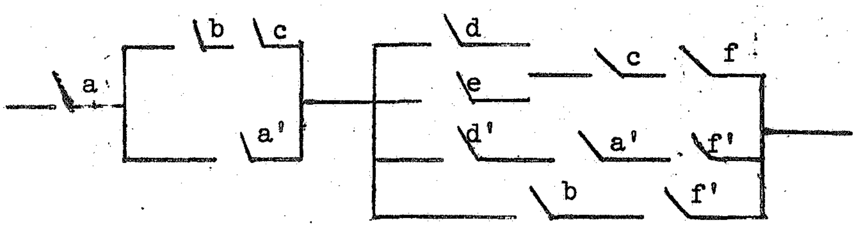
Opgaven

1. Zoek bij ieder van de volgende systemen een eenvoudiger schakel systeem.

a)



b)



2. Teken de systemen die behoren bij de volgende functies

a) $(a \cap b \cap c) \cup \{(a \cap b) \cap ((d \cap c) \cup (e \cap f))\}$

b) $\{(a \cup b' \cup c) \cap (a \cup (b \cap c'))\} \cup (c' \cap d) \cup (d \cap (b' \cup c)).$

3. Construeer een systeem dat open is als het systeem van vraagstuk 2(b) dicht is en dicht als het systeem van vraagstuk 2(b) open is.

4. Construeer een systeem opgebouwd uit schakelaars a,b en c met de volgende eigenschap; het systeem is dan en slechts gesloten als a gesloten is, of als a en b open zijn en c gesloten is.

5. In een commissie bestaande uit 4 mensen, kan elk van hen één van de schakelaars a,b,c of d bedienen.
Elk van hen brengt zijn stem uit over een voorstel door zijn schakelaar te sluiten als hij "ja" stemt en door zijn schakelaar te openen als hij "neen" stemt.
   a) Construeer een systeem zó dat er een lampje gaat branden als het voorstel aangenomen wordt (meerderheid van stemmen).
   b) Construeer een systeem waarbij de voorzitter, die schakelaar a bedient, een extra stem krijgt om bij staking van stemmen te beslissen.

6. Construeer een systeem dat uit 2 schakelaars en een lampje bestaat, zó dat iedere schakelaar gebruikt kan worden om het lampje aan en uit te doen.

7. Aan alle gasten op een feest wordt verzocht iets rood te dragen. Een rode das, een rood hemd, rode sokken of een rood lintje.
Er moeten echter de volgende regels in acht genomen worden.
   a) Een rood hemd moet gedragen worden als men een rode das draagt.
   b) Men mag alleen een rood hemd samen met rode sokken dragen als men ook een rode das of een rood lint draagt.
   c) Als men een rood hemd en rood lint draagt of als men geen rode sokken draagt, dan moet men een rode das dragen.

   Neemt men deze regels niet in acht dan moet men een boete betalen. Construeer een schakel systeem bestaande uit 4 schakelaars waarmee men onmiddellijk kan na gaan of de gasten een boete moeten betalen.

Literatuurlijst

Hoofdstuk II Boole-algebras

B.H. Arnold, Logic and Boolean algebra, Prentice-Hall 1962

G. Birkhoff, S. Maclane, A survey of modern algebra Macmillan 1953

Ph. Dwinger, Introduction to Boolean algebras 1961

L. Henkin, La structure algébrique des théories mathématiques 1956

R. Sikorski, Boolean algebras. Springer 1960

J.E. Whitesitt, Boolean algebra and its applications Addison-Wesley 1962.

III Logica.

1. Inleiding.

In het eerste deel van dit colloquium hebben we ons bezig gehouden met de verzamelingenalgebra. Daarbij bleek dat allerlei betrekkingen tussen verzamelingen eenvoudig geverifieerd kunnen worden met behulp van de karakteristieke functies, door eenvoudige berekeningen met de getallen van 0 en 1.

Het werken met de karakteristieke functies komt, volgens I §2 stelling 3, in feite neer op het hanteren van de volgende tabel:

(1)

A	B	$A\cup B$	$A\cap B$	A'	$A\Delta B$	$A\setminus B$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

(op het kruispunt van de $(n+1)^e$ rij en de$(m+2)^e$ kolom is genoteerd de waarde die de karakteristieke functie van de verzameling, aangegeven boven die kolom, aanneemt wanneer χ_A en χ_B de waarde hebben, genoteerd op de eerste twee plaatsen van de bewuste rij).

Stel nu de verzameling V is gevormd uit de verzamelingen A_1A_2, $A_3,\ldots,A_n$ door middel van de operaties $\cup$, $\cap$ en $'$ (of eventueel ook Δ, $\setminus$, deze zijn echter uit te drukken in $\cap$, $\cup$, $'$). Voor iedere x kunnen we $\chi_V(x)$ uitrekenen m.b.v. tabel (1). Is W een tweede verzameling, opgebouwd uit $A_1,A_2,\ldots,A_n$, dan kunnen we verifieren of al dan niet V=W door na te gaan of al dan niet $\chi_V(x)= \chi_W(x)$ voor iedere x, d.w.z. of bij iedere distributie van de getallen 0 en 1 over de bij $A_1,\ldots,A_n$ behorende kolommen, in de kolommen behorend bij V en W dezelfde rijtjes getallen komen te staan.

Voorbeeld 1. Verificatie van $(A_1 \cap A_2') \cap A_3' = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)'$.

(2)

A_1	A_2	A_3	A_2'	A_3'	$A_1 \cap A_2'$	$(A_1 \cap A_2') \cap A_3'$	$A_2 \cup A_3$	$(A_2 \cup A_3)'$	$A_1 \cap (A_2 \cup A_3)'$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

De zevende en tiende kolom geven inderdaad dezelfde uitkomsten.

Willen we nagaan of $V \subset W$, dan moeten we nagaan of steeds $\chi_V(x) \leq \chi_W(x)$, d.w.z. of op iedere regel het getal in de kolom onder V kleiner is dan of gelijk aan het getal, op die regel, onder W.

In hoofdstuk II beschouwden we boole-algebra's, en bestudeerden daarbij ook boolese functies (hoofdstuk II §4). Daarbij bleek o.a. het volgende (zie pag. 40, het gevolg van stelling 3). Stel $v(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ en $w(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zijn twee boolese functies in de variabelen $x_1,x_2,\ldots,x_n$, opgebouwd uit deze variabelen met behulp van de boolese operaties $\cap$, $\cup$ en $'$ (bij de opbouw van v of w mag ook gebruikt gemaakt worden van de speciale elementen 0 en 1 van de boole-algebra, maar deze kunnen zelf gevormd worden uit $x_1,x_2,\ldots,x_n$; bijvoorbeeld: $0=x_1 \cap x_1'$, $1=x_1 \cup x_1'$. Andere speciale elementen van de boole-algebra mogen in v of w niet voorkomen). Dan geldt: opdat v=w (d.w.z. opdat v en w dezelfde functie voorstellen; anders gezegd, opdat $v(a_1,a_2,\ldots,a_n)= w(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ voor iedere substitutie van elementen $a_1,a_2,\ldots,a_n$ van de boole-algebra voor de variabelen $x_1,x_2,\ldots,x_n$) is het (uiteraard nodig, maar zelfs) voldoende dat v en w telkenmale dezelfde uitkomst leveren wanneer we voor elk van de variabelen x_i een van de elementen 0,1 substitueren.

<u>Voorbeeld 2.</u> Zij $v(x_1,x_2,x_3)=(x_1\cap x_2')\cap x_3'$ en $w(x_1,x_2,x_3)= = x_1\cap(x_2\cup x_3)'$. Dan geldt v=w, zoals blijkt uit de overeenkomst tussen de zevende en tiende kolom van onderstaande tabel.

(3)

x_1	x_2	x_3	x_2'	x_3'	$x_1\cap x_2'$	$(x_1\cap x_2')\cap x_3'$	$x_2\cup x_3$	$(x_2\cup x_3)'$	$x_1\cap(x_2\cup x_3)'$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

De berekeningen in (3) berusten op de tabel

(4)

x_1	x_2	$x_1\cup x_2$	$x_1\cap x_2$	x_1'
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Een vergelijking van tabel (4) met tabel (1), en van (3) met (2), toont dat de berekeningen betreffende betrekkingen tussen verzamelingen m.b.v. karakteristieke functies in hoofdstuk I, en die betreffende boolese vergelijkingen in hoofdstuk II, <u>formeel</u> beschouwd, identiek (uitwisselbaar) zijn. Dit ondanks het feit dat de symbolen 0 en 1 in (1) en (2) bedoeld zijn als notaties voor de <u>getallen</u> 0 en 1, terwijl die symbolen in (4) en (3) staan voor het nulelement (kleinste element) en eenheidselement (grootste element) van een boole-algebra.

Eigenlijk mag ons dit niet verbazen. Immers, we weten dat het stelsel van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling I een boole-algebra vormen t.o.v. vereniging, doorsnede en complement, met $\emptyset$ als nulelement en I als eenheid; omgekeerd zegt de representatiestelling van STONE dat iedere boole-algebra isomorph is met een verzamelingenalgebra.

In dit derde hoofdstuk, gewijd aan een inleiding in de (klassieke) logica, zullen we een derde parallel ontmoeten. Opgemerkt moet worden dat onze volgorde van behandeling niet de historische is; het begrip boole-algebra heeft zich namelijk ontwikkeld uit de onderzoekingen van G. BOOLE, W.S. JEVONS, R.G. RASSMANN, E. SCHRÖDER e.a. betreffende de logica.

§2. De propositie logica

De propositie logica houdt zich bezig met proposities, uitspraken die al of niet waar kunnen zijn.

Neem bijvoorbeeld de volgende beweringen.

(1) $2 \times 2 = 5$.

(2) 16149371 is deelbaar door 1234567.

(3) de maan is gemaakt van groene kaas.

(4) de tienmilliardste decimaal in de decimale ontwikkeling van π is 2.

(5) de tienmilliardste decimaal in de ontwikkeling van π is hetzij even, hetzij oneven.

(6) $\pi^2 < \sqrt{98}$ of $\pi^2 \geq \sqrt{98}$.

(7) Amsterdam is een grote stad of Amsterdam is niet een grote stad.

Elk Uwer zal (1) als onjuist herkennen en (2) als waar. Elk Uwer zal het er over eens zijn dat (3) hetzij waar, hetzij onjuist is (al zullen er mogelijkerwijs enigen zijn die hun oordeel opschorten tot na de geslaagde landing van de eerste lunarnaut). Ook (4) is ongetwijfeld hetzij waar, hetzij niet waar, ofschoon U niet meer in staat zult zijn na te gaan (als bij (1) of (2)) welk van beide het geval is; een spoedige eliminatie van deze onzekerheid is niet te verwachten (zoals nog wel het geval is voor (3)).

De vijfde propositie lijkt bij de eerste oogopslag nog ingewikkelder dan (4); maar dit is schijn: zodra U hem volledig gelezen hebt weet U dat het een ware bewering is, niet gecompliceerder dan de proposities (6) en (7).

De laatste drie proposities zijn alle van de vorm

(8) "hetzij a , hetzij niet a",

waarbij a een uitspraak is die ons niet nader behoeft te interesseren. Immers, iedere uitspraak van de vorm (8) is waar, ongeacht de feitelijke inhoud van a. Welnu, men zou kunnen zeggen dat het het doel is van de propositielogica, na te gaan welke uitspraken waar zijn op grond van hun samenstelling, zonder gebruik te maken van de eigenlijke inhoud.

Ter precisering van het bovenstaande voeren we de volgende notatie in.

Proposities zullen worden aangeduid door kleine latijnse letters, al of niet van een index voorzien, zoals p, q, r, p_1, p_2.

Uit gegeven proposities kunnen we nieuwe vormen door ontkenning (p en q, zowel p als q), disjunctie (p of q), implicatie (als p, dan q), e.a. Voor deze zogenaamde connectieven voeren we in de symbolen $\neg, \wedge, \vee$ en $\rightarrow$. Omdat echter de gewone omgangstaal wel eens dubbelzinnig is (met name waar het de connectieven "of" en "als... dan..." betreft), zullen we ons veilig stellen door $\neg, \wedge, \vee$ en $\rightarrow$ formeel te definieren.

Deze definitie geven we de vorm van een tabel, de zogenaamde waardetafel voor de connectieven. Zoals opgemerkt zullen we ons alleen interesseren voor het al of niet waar zijn van properties; als we "waar" aanduiden door 1, en "onjuist" door 0, dan is e.g. $\vee$ volkomen vastgelegd wanneer we afspreken welke "waarde" (0 of 1) de uitspraak $p \vee q$ heeft in de vier gevallen: p niet waar, q niet waar; p niet waar, q waar; p waar, q niet waar; p en q beide waar. M.a.w. $\vee$, en evenzo $\wedge$, $\neg$ en $\rightarrow$, zijn volkomen vastgelegd door de volgende tabel:

(9)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Voor iedere propositie die opgebouwd is uit proposities $p_1, p_2, \ldots, p_m$ met behulp van de connectieven $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ kunnen we nu ook een waardetafel op stellen.

Voorbeeld 1. $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)$

(10)

p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_2 \rightarrow p_1$	$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Definitie 1 Voor de uitspraak $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_1)$ voeren we in de afkorting $p_1 \leftrightarrow p_2$. Op deze wijze is een nieuw connectief, $\leftrightarrow$, gedefinieerd, coimplicatie genaamd.

Voorbeeld 2. $(\neg (p_1 \vee p_2)) \leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$.

(11)

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$	$\neg(p_1 \vee p_2)$	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \wedge \neg p_2$	$(\neg(p_1 \vee p_2)) \leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Definitie 2 Een propositie q, opgebouwd uit proposities $p_1, p_2, \ldots, p_n$ met behulp van de connectieven $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$, heet een tautologie (in $p_1, p_2, \ldots, p_n$), indien hij de waarde 1 heeft van alle mogelijke waar-

den van $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Tautologieen nu zijn uitspraken die altijd waar zijn, enkel op grond van hun logische opbouw en onafhankelijk van hun feitelijke inhoud.

Opmerking 1. Er zijn uitspraken die waar zijn op logische gronden zonder een tautologie te zijn; op deze logische gronden stuit men bij een nadere analyse van $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Vgl. §5.

Opmerking 2. Het feit dat we iedere tautologie als altijd-waar beschouwen impliceert dat we ons bezig houden met de klassieke (niet-intuitionistische) logica. In het bijzonder accepteren we het beginsel van het uitgesloten derde: $p \vee \neg p$ is een tautologie.

Opgave 1. Ga na met behulp van waardetafels dat de volgende propositievormen tautologieen zijn:

(1) $p \to (q \to p)$.
(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.
(3) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$.
(4) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
(5) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$.
(6) $\neg\neg p \leftrightarrow p$.
(7) $p \vee \neg p$.
(8) $(p \vee p) \leftrightarrow p$.
(9) $p \to (p \vee q)$.
(10) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$.
(11) $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$.
(12) $((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$.

Opgave 2. Welke van onderstaande propositievormen zijn tautologieen:

(1) $p \to (p \wedge q)$.
(2) $\neg p \to (p \to q)$.
(3) $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (p \to q)$.
(4) $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$.

(5) $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$。

(6) $\neg p \to (p \lor q)$。

(7) $((p \land \neg q) \land \quad r) \leftrightarrow p \land \neg (q \lor r)$。

(8) $(\neg (p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land q))$。

(9) $(p \to \neg q) \to (q \to \neg r)$。

(10) $((p \to \neg q) \to (q \to \neg r)) \to ((p \lor r) \to \neg q)$。

§3. Verband tussen propositielogica en boole-algebra's

Voor de beschouwingen in deze paragraaf is het nuttig onze voorraad proposities wat exacter te omschrijven.

We gaan uit van een aantal - eindig veel of eventueel aftelbaar oneindig veel - primitieve proposities, proposities die we niet nader analyseren. Deze duiden we aan met met

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$$

Voor p_1 schrijven we soms gemakshalve p. Verder beschouwen we alle proposities die uit deze primitieve proposities zijn opgebouwd door middel van de connectieven $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$, en geen andere. Voor deze proposities gebruiken we letters als $a, b, c, \ldots$. Zij vormen een verzameling P.

Definitie 1. Twee proposities $a, b \in P$ heten equivalent als ze dezelfde waardetafel hebben. Notatie: $a \equiv b$.

Opmerking. Als men de waardetafel van twee proposities a, b wil vergelijken, dan dient men uit te gaan van alle primitieve proposities die hetzij in a, hetzij in b, hetzij in beide optreden.

Voorbeeld 1. $p \vee (q \wedge \neg q)$ is equivalent met $p \vee p$

p	q	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \vee p$	$p \vee (q \wedge \neg q)$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Stelling 1. De relatie $\equiv$ tussen proposities is inderdaad een equivalentierelatie; d.w.z. voor willekeurige $a, b, c \in P$ geldt:

(1) $a \equiv a$;

(2) als $a \equiv b$, dan $b \equiv a$;

(3) als $a \equiv b$ en $b \equiv c$, dan $a \equiv c$.

Bewijs: evident.

Wanneer a een propositie is, dan schrijven we $[a]$ voor de verzameling van alle proposities die met a equivalent zijn:

$$[a] = \{b \mid b \in P \text{ en } a \equiv b\} .$$

Uit stelling 1 volgt dat twee verzamelingen $[a]$ en $[b]$ òf samenvallen (nl. indien $a \equiv b$), òf disjunct zijn: $[a] \cap [b] = \emptyset$ (nl. indien $a \not\equiv b$).

Definitie 2 $O = [p \wedge \neg p]$, $I = [p \vee \neg p]$.

Stelling 2. $a \in I$ dan en slechts dan indien a een tautologie is, d.w.z. als in de waardetafel van a in de kolom onder a alleen 1 voorkomt. Evenzo: $a \in O$ dan en slechts dan als $\neg a \in I$, d.w.z. als in de waardetafel van a in de kolom onder a slechts nullen staan.

Bewijs

Dit volgt uit het feit dat $p \vee \neg p$ een tautologie is, terwijl $p \wedge \neg p \equiv \neg(p \vee \neg p)$.

Stelling 3. Dan en slechts dan geldt $a \equiv b$, indien de propositie $a \longleftrightarrow b$ een tautologie is.

Bewijs

Volgt onmiddellijk uit de waardetafel voor $\longleftrightarrow$.

Anders gezegd: $[a] = [b]$, dan en slechts dan indien $[a \longleftrightarrow b] = I$. Vgl. ook stelling 5.

Voorbeelden.

2.	$a \rightarrow b$	is equivalent met			$\neg a \vee b$.
3.	$a \wedge b$	"	"	"	$\neg(\neg a \vee \neg b)$.
4.	$a \wedge b$	"	"	"	$b \wedge a$.
5.	$a \wedge (b \wedge c)$	"	"	"	$(a \wedge b) \wedge c$.
6.	$a \vee b$	"	"	"	$b \vee a$.
7.	$a \vee (b \vee c)$	"	"	"	$(a \vee b) \vee c$.
8.	$a \vee (b \wedge c)$	"	"	"	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
9.	$a \wedge (b \vee c)$	"	"	"	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

<u>Definitie 3.</u> Voor $a,b \in P$ definieren we

$$[a] \sqcup [b] = [a \vee b];$$
$$[a] \sqcap [b] = [a \wedge b];$$
$$[a]' = [\neg a].$$

<u>Stelling 4.</u> De verzameling Π van alle equivalentieklassen $[a]$, $a \in P$, is een boole-algebra t.o.v. de operaties $\sqcup$, $\sqcap$ en $'$, met O als nul-element en I als eenheidselement.

<u>Bewijs</u>

We moeten aantonen: als $\alpha,\beta,\gamma \in \Pi$ - zeg $\alpha=[a]$, $\beta=[b]$, $\gamma=[c]$, waar $a,b,c \in P$ - dan:

A1. $\alpha \sqcup \beta=\beta \sqcup \alpha$; $\alpha \sqcap \beta=\beta \sqcap \alpha$.

A2. $\alpha \sqcup (\beta \sqcap \gamma)=(\alpha \sqcup \beta)\sqcap(\alpha \sqcup \gamma)$;

$\alpha \sqcap (\beta \sqcup \gamma)=(\alpha \sqcap \beta)\sqcup(\alpha \sqcap \gamma)$.

A3. $O \sqcup \alpha=\alpha \sqcup O=\alpha$; $I \sqcap \alpha=\alpha \sqcap I=\alpha$.

A4. $\alpha \sqcup \alpha'= I$; $\alpha \sqcap \alpha' = O$

Op grond van definities 2 en 3 betekent dit dat we moeten bewijzen:

B1. $a \vee b \equiv b \vee a$; $a \wedge b \equiv b \wedge a$.

B2. $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

B3. $(p \wedge \neg p) \vee a \equiv a \equiv a \vee (p \wedge \neg p)$

$(p \vee \neg p) \wedge a \equiv a \equiv a \wedge (p \vee \neg p)$.

B4. $a \vee \neg a \in I$; $a \wedge \neg a \in O$.

Voor B1 en B2 verwijzen we naar de voorbeelden 4,6,7,8. Voor B3, vgl. voorbeeld 1. Voor B4 kan men gebruik maken van stelling 2.

We schrijven $\alpha \sqsubseteq \beta$ in Π als $\alpha \sqcap \beta=\alpha$ (of, wat daarmee gelijkwaardig is, als $\alpha \sqcup \beta=\beta$); vgl. hoofdstuk II §1 opmerking 1 (pag. 26/27).

<u>Stelling 5.</u> $a \to b$ is een tautologie dan en slechts dan als $[a] \sqsubseteq [b]$.

<u>Bewijs.</u>

Daar $a \to b \equiv \neg a \vee b$ (zie voorbeeld 2), is

$$[a \to b]=[\neg a \vee b]=[a]' \sqcup [b];$$

dus $a \to b$ is een tautologie dan en slechts dan als $[a]' \sqcup [b] = I$, i.e. als $[a] \sqsubseteq [b]$.

Gevolg. Als a en $a \to b$ beide tautologieen zijn, dan is ook b een tautologie (MODUS PONENS).

Bewijs.

Uit $[a]=I$ en $[a] \sqsubseteq [b]$ volgt $[b]=I$.

Stelling 4 heeft tot gevolg dat allerlei resultaten uit de theorie der boole-algebra's toegepast kunnen worden op de propositie-logica. Zo bestaat, voor iedere propositie, een ermee equivalente conjunctieve normaalvorm, en evenzo een ermee equivalente disjunctieve normaalvorm. Verschillende stellingen uit hoofdstuk II kunnen zonder meer vertaald worden; bijvoorbeeld levert II §1 stelling 5: voor willekeurige $a, b, c, d \in P$ geldt

(1) $a \to a$ is een tautologie;

(2) als $a \to b$ en $b \to a$ tautologieen zijn, dan geldt $a \equiv b$;

(3) als $a \to b$ en $b \to c$ tautologieen zijn, dan ook $a \to c$;

(4) als $a \to c$ en $b \to d$ tautologieen zijn, dan ook $(a \vee b) \to (c \vee d)$;

(5) als $c \to a$ en $d \to b$ tautologieen zijn, dan ook $(c \wedge d) \to (a \wedge b)$;

(6) als $a \to b$ een tautologie is, dan ook $\neg b \to \neg a$, en omgekeerd.

Opgaven.

1. Welke van de volgende proposities zijn equivalent:

(1) $p_1 \to \neg p_2$;

(2) $p_1 \vee \neg p_2$;

(3) $\neg p_1 \to p_2$;

(4) $\neg (p_1 \wedge p_2)$;

(5) $(p_1 \wedge p_2) \to (p_3 \wedge (\neg p_3))$;

(6) $((\neg p_1) \vee p_2) \wedge \neg p_2$;

(7) $\neg((\neg p_1) \to p_2)$;

(8) $(p_2 \to (\neg p_1)) \vee (p_3 \vee (\neg p_3))$;

(9) $(p_2 \to (\neg p_1)) \wedge (p_3 \vee (\neg p_3))$;

(10) $(\neg p_1) \vee (\neg p_2)$.

2. Als men uitgaat van <u>eindig</u> veel primitieve proposities $p_1, p_2, \ldots, p_n$, dan is de boole-algebra Π atomair, met 2^n atomen. Bijgevolg kan men uit n primitieve proposities 2^{2^n} onderling niet equivalente proposities opbouwen. (Vgl. II §4, opgave 5).

3. Als men uitgaat van <u>oneindig</u> veel primitieve proposities $p_1, p_2, \ldots$, dan bevat de boole-algebra Π geen enkel atoom.

§4. Predikaten

In de wiskunde werken we vaak met uitspraken die geen proposities zijn in de zin van het voorgaande.

<u>Voorbeelden.</u>

(1) $x < -1$ of $x^2 > 1$.

(2) $n(n+1)$ is deelbaar door 2.

(3) $X \subset N$ (N staat voor de verzamelingen der natuurlijke getallen)

(4) X heeft ten hoogste aftelbaar veel elementen.

(5) $|x-1| < \varepsilon$.

(6) $A \subset A \cup B$.

De uitspraak (1) wordt tot een propositie wanneer we voor x een reëel getal invullen (deze propositie kan waar zijn of niet, dat hangt er van af welke x we invullen). De uitspraak (2) wordt een propositie als we voor n een natuurlijk getal invullen; (3) en (4) worden proposities als we voor X een verzameling substitueren. In (5) en (6) moeten we <u>twee</u> variabelen vervangen: in (5) bijvoorbeeld x door een reëel of complex getal, ε door een positief reëel getal.

Een uitdrukking waarin nog een variabele optreedt noemt men een predikaat. Voor predikaten is een soort functie-notatie gebruikelijk: $P(x)$, $P_1(x)$, $Q(x_1, x_2)$, etc. Schrijven we bijvoorbeeld $P(x)$ voor het predikaat $x < -1$ en $Q(x)$ voor het predikaat $x^2 > 1$, dan kunnen we uitspraak (1) weergeven door

$$P(x) \vee Q(x).$$

(De logische connectieven, ingevoerd in 2, gebruiken we ook om uit predikaten nieuwe predikaten op te bouwen). Deze uitspraak ($\cdot$) $\vee$ Q(x) is niet een propositie, maar

$$P(\tfrac{1}{2}) \vee Q(\tfrac{1}{2})$$

is er wel een (en wel een onjuiste), en

$$P(5) \vee Q(5)$$

is er ook een (en wel een ware). Als we $R(x,y)$ schrijven voor het predikaat $x < y$, dan is $R(x,-1)$ nog geen propositie: weliswaar is de variabele y door een constante -1 vervangen, maar de variabele x komt nog voor. Dus is $R(x,-1)$ nog steeds een predikaat; en wel valt $R(x,-1)$ samen met het predikaat $P(x)$.

Er zijn nog andere methode om uit uitspraken als (1)-(6) proposities te vormen. Zo kunnen we uit (1) vormen:

(7) Voor ieder reëel getal x geldt: $x < -1$ of $x^2 > 1$,

hetgeen een onjuiste propositie is, en ook

(8) Er is een reëel getal x zodanig dat: $x < -1$ of $x^2 > 1$,

hetgeen een ware propositie is.

We voeren hiervoor een afkortende notatie in: als P(x) een willekeurig predikaat is, dan schrijven we

$$(\forall x)\ P(x)$$

voor de uitspraak

"voor iedere x is P(x) waar"

en

$$(\exists x)\ P(x)$$

voor de uitspraak

"er is een x zodanig dat P(x) waar is".

Men noemt $\forall$ en $\exists$ <u>kwantoren</u>.

Voor een zinvol gebruik van kwantoren dient bij iedere toepassing duidelijk te zijn welke subjecten voor de variabelen $x, y, \ldots$ gesubstitueerd mogen worden; anders gezegd, welke verzameling I de variabele $x, y, \ldots$ doorlopen. Deze verzameling I mag natuurlijk van geval tot geval verschillend genomen worden.

Kwantoren kunnen ook losgelaten worden op predikaten met meer dan één variabele. De situatie is analoog aan die voor substitutie: als we in een predikaat $R(x,y)$ voor y een constante invullen, bijv. het getal -1, dan resulteert en predikaat, $R(x,-1)$. Evenzo levert kwantifikatie naar y van $R(x,y)$ ons een predikaat: $(\forall y)\ R(x,y)$, of $(\exists y)\ R(x,y)$. Verder kunnen we nog vormen: $(\forall x)\ R(x,y)$ en $(\exists x)R(x,y)$.

Voorbeelden.

(9) Zij $R(x,y)$ het predikaat $x \geq y^2$, waar x en y de verzameling der reële getallen in het interval $[-1,+1]$ doorlopen. Dan is

$$(\exists y)R(x,y)$$

een predicaat in x, en wel het predikaat: $x > 0$. Evenzo is

$$(\forall y)R(x,y)$$

een predikaat in x, dat ook te schrijven is als: $x=1$

(10) Zij $P(x,y)$ het predikaat $x < y$, waar x en y de verzameling N der natuurlijke getallen doorlopen. Dan is

$$P(x,y) \wedge P(y,z)$$

een predikaat in drie variabelen, x,y en z, en

$$(\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,z))$$

is weer een predikaat met twee vrije variabelen. Dit predikaat komt overeen met het predikaat: $z-x \geq 2$. Evenzo is

$$(\forall x)(P(x,y) \to P(x,z))$$

een predikaat met twee vrije variabele, y en z, dat ook geschreven kan worden als: $y \leq z$.

Voorts is

$$(\exists y)(\forall x)(P(x,y) \to P(x,z))$$

een predikaat met slechts z als vrije variabele, en

$$(\forall z)(\forall x)(P(x,y) \rightarrow P(x,z))$$

een predikaat met y als enige vrije variabele. Dit laatste predikaat is equivalent met het predikaat $y=1$.

$$(\forall z)(\forall x)(P(x,3) \rightarrow P(x,2))$$

is een onjuiste propositie, evenals

$$(\forall y)(\forall z)(\forall x)(P(x,y) \rightarrow P(x,2));$$

en

$$(\forall z)(\forall x)(P(x,1) \rightarrow P(x,2))$$

is een ware propositie, evenals

$$(\exists y)(\forall 2)(\forall x)(P(x,y) \rightarrow P(x,2)).$$

We gebruikten reeds de term "*vrije variabele*". Een variabele x heet *gebonden* in een samengestelde uitdrukking, als hij in die uitdrukking voorkomt binnen het werkingsgebied van een $(\forall x)$ of een $(\exists x)$. Is dit niet het geval, dan zeggen we dat x vrij voorkomt in die uitdrukking.

(Deze omschrijving is nog erg vaag; voor een exactere definitie zie men bijvoorbeeld W.V.O. QUINE, Mathematical logic; Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951).

Definitie Een uitspraak A, opgebouwd uit predikaten d.m.v. logische connectieven en kwantoren, heet *gesloten* als hij een propositie is, i.e. als in A geen vrije variabelen voorkomen.

Komen in A wel vrije variabelen voor, zeg $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dan heet

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)A$$

de *afsluiting* van A.

§5. Predikatenlogica

In de predikatenlogica abstraheert men van de feitelijke betekenis van de predikaten; evenals in de propositielogica tracht men het al of niet waar zijn van een uitspraak vast te stellen op formele gronden, door onderzoek van de wijze waarop een uitspraak d.m.v. connectieven en kwantoren uit andere proposities en predikaten is opgebouwd.

Bij de formele predikatenlogica gaat men daarbij uit van een voorraad variabelen (het is altijd prettig om voldoende variabelen ter beschikking te hebben; meestal neemt men aan dat er aftelbaar oneindig veel zijn: $x,y,z,x,y,z,x_2,\ldots$). Voorts onderstelt men dat er voor iedere $n \in N$ aftelbaar oneindig veel primitieve predikaten in n variabelen gegeven zijn (een primitieve propositie beschouwen we als een predikaat in 0 variabelen). Uit deze voorraad primitieve predikaten worden willekeurige predikaten opgebouwd m.b.v de connectieven $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ en de kwantoren $\forall, \exists$, volgens welomschreven regels.

Vervolgens moet worden vastgelegd welke <u>gesloten</u> uitspraken (een gesloten uitspraak is immers een propositie) als <u>waar</u> gekwalificeerd moeten worden. Voor de predikatenlogica blijkt dit een veel moeilijker zaak dan voor de propositielogica, en wij zullen om die reden ervan afzien een definitie van ware uitspraken te geven.

De term "tautologie" houden we aan voor uitspraken die "tautologisch opgebouwd" zijn uit gesloten uitspraken; d.w.z. die uit een tautologie van de propositielogica kunnen worden verkregen door gesloten uitspraken te substitueren voor de primitieve proposities (als een primitieve propositie op meerdere plaatsen voorkomt, moet op al die plaatsen uiteraard telkens dezelfde gesloten uitspraak ingevuld worden).

<u>Voorbeelden.</u>

(1) $(\forall x)P(x) \vee \neg(\forall x)P(x)$.

(2) $(\exists x)(\exists y)Q(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)Q(x,y)$.

(3) $((\forall x)((\exists y)P(y) \rightarrow R(x,y)) \wedge (\exists z)P(z)) \rightarrow (\exists z)P(z)$.

Behalve tautologieen zijn er echter nog andere logisch ware uitspraken.

Voorbeelden.

(4) $(\exists x)(\neg P(x)) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$.

(5) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$.

(6) $P(a) \rightarrow (\exists x)P(x)$, wanneer a een element is uit de verzameling waarover x varieert.

Wanneer eenmaal vastgelegd is welke gesloten uitspraken waar zijn, kan men definieren wanneer twee gesloten uitspraken A en B equivalent zijn: $A \equiv B$ dan en slechts dan (per definitie), wanneer $A \leftrightarrow B$ waar is. Dan blijkt $\equiv$ weer een echte equivalentierelatie te zijn.

In de klassieke predikatenlogica is het formele waarheidsbegrip op een zodanige wijze vastgelegd, dat o.a. het volgende geldt:

Stelling 1.

1. $\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x)$;
2. $(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$;
3. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x,y)$;
4. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \equiv (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$;
5. $(\forall x)P(x) \wedge (\forall y)Q(y) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge Q(y))$.
6. $(\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$.
7. $(\forall x)(A \rightarrow P(x)) \equiv A \rightarrow (\forall x)P(x)$, wanneer in A de variabele x niet vrij voorkomt.

Van belang is ook dat de volgende regel geldt (MODUS PONENS): als A en $A \rightarrow B$ beide waar zijn, dan is ook B waar.

Voorbeeld.

(7) Er geldt: $(\forall x)P(x) \equiv \neg(\exists x)\neg P(x)$.

Dit kan men met gebruik van modus ponens afleiden uit stelling 1, tezamen met het gegeven dat alle tautologieen waar zijn, en wel als volgt:

$$(a \leftrightarrow b) \to (\neg a \leftrightarrow \neg b)$$

is een tautologie, dus

$$(\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)) \to (\neg\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg P(x))$$

is waar. Volgens stelling 1,1. is ook

$$\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg P(x))$$

waar. Met behulp van modus ponens concluderen we dat

$$\neg\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg P(x)$$

een ware uitspraak is; m.a.w.

$$\neg\neg(\forall x)P(x) \equiv \neg(\exists x)\neg P(x).$$

Aangezien ook

$$(\forall x)P(x) \equiv \neg\neg(\forall x)P(x)$$

(immers $p \leftrightarrow \neg\neg p$ is een tautologie), volgt inderdaad dat

$$(\forall x)P(x) \equiv \neg(\exists x)\neg P(x).$$

Op een dergelijke wijze kan men uit stelling 1 afleiden:

Stelling 2.

1. $(\forall x)P(x) \equiv \neg(\exists x)\neg P(x)$;
2. $(\exists x)P(x) \equiv \neg(\forall x)\neg P(x)$;
3. $\neg(\exists x)P(x) \equiv (\forall x)\neg P(x)$;
4. $(\exists x)P(x) \equiv (\exists y)P(y)$;
5. $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x,y)$;
6. $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$;
7. $(\exists x)(P(x) \to A) \equiv (\exists x)P(x) \to A$, wanneer in A de variabele x niet vrij voorkomt.

Voorbeelden.

(8) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ is niet equivalent met $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ (cf. stelling 1,4 en stelling 2,6).

Neem e.g. voor P(x) het predikaat "x is even", en voor Q(x) het predikaat "x is oneven", waarbij x de verzameling der natuurlijke getallen doorloopt. Dan is $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ waar, maar $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ niet.

Dezelfde keuze van P en Q toont dat

$$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \quad \text{en} \quad (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

niet equivalent zijn.

(9) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ en $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

zijn niet equivalent.

Neem e.g. voor $P(x,y)$ het predikaat "$x > y$", waarbij x en y weer varieren over de verzameling N der natuurlijke getallen. Dan is $(\forall y)(\exists x)(x > y)$ waar, maar $(\exists x)(\forall y)(x > y)$ is onjuist.

Een ander tegenvoorbeeld krijgt men door voor $P(x,y)$ het predikaat: "x is de vader van y" te nemen, en x en y te laten varieren over de verzameling van alle mensen.

Wel is de volgende uitspraak logisch waar:

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y).$$

Voorbeeld (9) illustreert o.a. het verschil tussen de begrippen <u>continu</u> en <u>uniform continu.</u> Laten we ons gemakshalve beperken tot functies op het interval $[0,1]$. Laten x en y variabelen zijn die varieren over $[0,1]$, en ε en δ variabelen die varieren over de verzameling der positieve reële getallen.

De functie f is continu in $a \in [0,1]$ indien de uitspraak

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall y)((|a-y|<\delta) \rightarrow |f(a)-f(y)| < \varepsilon)$$

waar is. Gemakshalve korten we het predikaat

$$(\forall y)(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

af door $P(x,\varepsilon,\delta)$. Dan is f dus continu in $a \in [0,1]$ indien

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)P(a,\varepsilon,\delta).$$

De functie f heet continu in $[0,1]$ indien hij continu is in <u>ieder</u> punt van $[0,1]$, dus indien

$$(\forall x)(\forall \varepsilon)(\exists \delta)P(x,\varepsilon,\delta)$$

een ware uitspraak is. Volgens stelling 1,3 is deze uitspraak equivalent met

$$(\forall\varepsilon)(\forall x)(\exists\delta)P(x,\varepsilon,\delta).$$

Daarentegen heet f <u>uniform continu</u> in $[0,1]$ indien

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)P(x,\varepsilon,\delta)$$

waar is.

§6. Predikatenlogica en verzamelingenalgebra.

Zij I een vaste verzameling, en beschouw predikaten $P(x)$ in één variabele x, waar x varieert in I. Elk dezer predikaten bepaalt een deelverzameling $\overline{P(x)}$ van I:

$$\overline{P(x)} = \{a \in I \mid P(a) \text{ is waar}\}.$$

Omgekeerd bestaat er voor iedere deelverzameling A van I een predikaat $P(x)$ zodanig dat $A=\overline{P(x)}$; voor $P(x)$ kan men e.g. nemen het predikaat

$$x \in A.$$

<u>Opmerking.</u> In de notatie $\overline{P(x)}$ beschouwe men x als een <u>gebonden</u> variabele (die dan ook door een andere variabele mag worden vervangen: $\overline{P(x)} = \overline{P(y)}$).

<u>Stelling 1.</u>

1. $\overline{P(x) \vee Q(x)} = \overline{P(x)} \cup \overline{Q(x)}$;
2. $\overline{P(x) \wedge Q(x)} = \overline{P(x)} \cap \overline{Q(x)}$;
3. $\overline{\neg P(x)} = \overline{P(x)}'$.

Het bewijs is evident. Hetzelfde geldt voor de beide volgende.

<u>Stelling 2.</u>

1. $(\forall x)P(x)$ is waar dan en slechts dan als $\overline{P(x)} = I$;
2. $(\exists x)P(x)$ " " " " " " " $\overline{P(x)} \neq \emptyset$.

<u>Stelling 3.</u> $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ is waar dan en slechts dan als $\overline{P(x)} \subset \overline{Q(x)}$.

<u>Gevolg.</u> $\overline{P(x)} = \overline{Q(x)}$ dan en slechts dan indien $(\forall x)(P(x) \longleftrightarrow Q(x))$ waar is.

<u>Opmerking.</u> De traditionele logica hield zich hoofdzakelijk bezig met uitspraken, opgebouwd uit predikaten met één variabele (theorie van de syllogismen). Sinds het midden van de vorige eeuw is daarbij het boven vermelde verband met de verzamelingenalgebra intensief geëxploiteerd (J. VENN e.a.).

Literatuur

A. AMBROSE and M. LAZEROWITZ, Logic: the theory of formal inference. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1961.

B.H. ARNOLD, Logic and Boolean Algebra. Englewood Cliffs (N.J.), Prentice-Hall, 1962.

H. FREUDENTHAL, Exacte logica. Haarlem, Erven Bohn, 1961.

D. HILBERT und W. ACKERMANN, Grundzüge der theoretischen Logik, 4te Auflage. Berlin, Springer Verlag, 1959.

G.T. KNEEBONE, Mathematical logic and the foundations of Mathematics. London, Van Nostrand, 1963.

C.I. LEWIS and C.H. LANGFORD, Symbolic Logic. New York, Dover Publ. 1951.

P.C. ROSENBLOOM, The elements of mathematical logic. New York, Dover Publ., 1950.

J.B. ROSSER, Logic for mathematicians. New York, Mc Graw-Hill, 1953.

R.R. STOLL, Set theory and logic. San Francisco, Freeman, 1963.

A. TARSKI, Inleiding tot de logica. Amsterdam, Noordholl.Uitg.Mij., 1953.

W.V.O. QUINE, Mathematical logic. Cambridge (Mass.), Harvard Univ.Press, 1958.

Colloquium verzamelingenleer met toepassingen

Spreker: M.A. Maurice
Datum : 6 mei 1964

IV. Enige opmerkingen over de opbouw van een deductieve theorie, i.h.b. de verzamelingenleer. Axioma's; i.h.b. het keuze-axioma.

§ 1. Inleiding

1.1. In de wetenschappelijke werkwijze maakt men gebruik van redeneringen, het logisch aaneensluiten van uitspraken. Uitspraken beweren iets; ze kunnen juist of onjuist zijn. Logische conclusies uit juiste uitspraken zullen zelf weer juist moeten zijn. Een juiste uitspraak heet ook wel een stelling.

Het is duidelijk dat in deze omschrijving allerlei vaagheden voorkomen, met name wat de begrippen "logisch" en "juist" betreft. We zullen voorlopig echter van deze vaagheden afzien en ons voorstellen, dat we precies weten wat we onder een "logische redenering" en een "juiste uitspraak" verstaan.

1.2. Er is echter, naast het gebruiken van logische redeneringen, meer nodig om een wetenschappelijke theorie op te bouwen: men moet ergens beginnen.

In de eerste plaats kiezen we een stel uitdrukkingen uit, die in de betreffende wetenschap een betekenis hebben, en die ons zonder verdere toelichting begrijpelijk voorkomen; deze uitdrukkingen zullen we ongedefinieerde termen noemen. Uitdrukkingen waarvan de betekenis wordt vastgelegd door middel van de ongedefinieerde termen en van reeds eerder verklaarde termen, zullen we gedefinieerde termen noemen; de zin die de betekenis van een gedefinieerde term vastlegt, heet de definitie van die term.

In de tweede plaats kiezen we een stel uitspraken in termen van de beschouwde wetenschap, die we zonder verdere argumentatie als juist aanvaarden; deze uitspraken zullen we axioma's noemen. Andere uitspraken zullen alleen dan als juist worden aanvaard als we erin slàgen, uitgaande van de axioma's en van reeds eerder als juist aanvaarde uitspraken, de juistheid ervan aan te tonen m.b.v. logische redeneringen; zulke uitspraken heten stellingen of theorema's. Het betoog dat dient om een theorema aan te tonen, heet een bewijs van dit theorema.

Een op deze wijze opgebouwde theorie heet een deductieve theorie.

1.3. In het algemeen wordt in een wiskundige theorie nog wel aandacht besteed aan de axioma's, maar de toegepaste logische redeneringen worden voor het merendeel slechts intuitief op hun juistheid beoordeeld.

In § 2 zullen we ons baseren op zo'n "intuitieve" opbouw van een wiskundige theorie, en wel van de verzamelingenleer; ook axioma's worden dan niet expliciet verondersteld: men gaat slechts uit van het intuitieve begrip "verzameling". Het zal dan blijken, dat een oncritisch gebruik van intuitief-logische begrippen tot tegenspraken leidt.

Dit betekent dus, dat een strengere opbouw van de verzamelingenleer noodzakelijk is. Bijvoorbeeld zal duidelijk moeten zijn, welke axioma's we precies gebruiken. Dat zal echter niet voldoende zijn: ook wat we als logische redenering toelaten zal duidelijk moeten vaststaan. In § 3 zal een beschrijving worden gegeven van de methoden die zijn ontwikkeld tot verwerkelijking van de gestelde eisen.

§ 2. "Intuitieve" verzamelingenleer

2.1. Een omschrijving (geen definitie) van het begrip "verzameling" zou men aldus kunnen geven: een verzameling is de samenvatting tot één geheel van onderscheidene objecten, zodanig, dat men kan uitmaken, welke objecten wèl en welke niet tot de verzameling behoren.

Als een object x tot een verzameling V behoort, dan zeggen we ook dat x element is van V en we schrijven

$$x \in V.$$

De rekenregels voor verzamelingen (de vorming van de vereniging, de doorsnede etc.) zijn behandeld in I, § 2 (blz 6, e.v.).

De woorden "klasse", "familie", "collectie" worden voorlopig gebruikt als synoniemen van het begrip "verzameling".

2.2. 1e paradox (Russell):

Zij $\mathcal{A}$ de klasse van alle verzamelingen A, die zichzelf als element bevatten ($A \in A$), en zij $\mathcal{B}$ de klasse van alle verzamelingen B, die zichzelf niet als element bevatten ($B \notin B$).

Daar elke verzameling òf wel òf niet zichzelf als element bevat, behoort een willekeurige verzameling V òf tot $\mathcal{A}$ òf tot $\mathcal{B}$.

(i) Als $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, dan volgt $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ (definitie van $\mathcal{A}$)

(ii) Als $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, dan volgt $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$ (definitie van $\mathcal{B}$).

Dit is een tegenspraak.

2e paradox (Russell):

Een eigenschap noemen we praedicabel, als hij op zichzelf van toepassing is; zo is "abstract" een praedicabel begrip,"concreet"daarentegen niet.

Zij nu A de verzameling van alle praedicabele eigenschappen, en zij B de verzameling van alle impraedicabele eigenschappen.

Het is duidelijk, dat een eigenschap òf tot A, òf tot B behoort. We onderzoeken nu of het begrip "impraedicabel (t)" tot A of tot B behoort:

(i) Als $t \in A$, dan is t praedicabel en dus impraedicabel

(ii) Als $t \in B$, dan is t impraedicael en dus praedicabel.

Dit is een tegenspraak.

3e paradox (Richard)

Beschouw de verzameling V van alle zinnen uit de Nederlandse taal, waarin ten hoogste 1000 tekens (letters, komma's, punten etc.) voorkomen. Het is duidelijk dat V eindig is. Verder heeft V een deelverzameling, die bestaat uit alle zinnen, die een getal definieren. Zo zijn eindig veel getallen gedefinieerd (misschien sommige op meer dan één manier).

Daaronder is een grootste. Schrijf dan op de zin:

"Neem het grootste getal, dat we met duizend tekens kunnen verkrijgen. Neem het getal dat ontstaat door bij het eerst verkregen getal één op te tellen".

Hiermede is de paradox een feit.

2.3. Er zijn nog vele andere voorbeelden te geven van paradoxen. We geven er nog twee, waarin de - later te behandelen - begrippen "kardinaalgetal", "ordinaalgetal", "welgeordende verzameling" optreden.

4e paradox:

Beschouw de vereniging V van alle verzamelingen. V heeft een kardinaalgetal $\mathfrak{M}$ dat groter is dan of gelijk is aan elk ander kardinaalgetal (een verzameling met dit laatste kardinaalgetal is een deelverzameling van V). $\mathfrak{M}$ is dus blijkbaar het grootste kardinaalgetal. De familie van alle deelverzamelingen van V heeft echter een kardinaalgetal dat groter is dan $\mathfrak{M}$.

5e paradox (Burali-Forti):

De verzameling van alle ordinaalgetallen is welgeordend en heeft dus zeker ordinaalgetal μ. μ is dan groter dan elk ander ordinaalgetal; contradictie: $\mu + 1 > \mu$.

2.4. Paradoxen, zoals hier gegeven, ontstaan in feite doordat we meer zeggen dan we kunnen verantwoorden: we "definieren" verzamelingen zonder dat een criterium bestaat, waarmee we kunnen beslissen of onze definities misschien helemaal geen betekenis hebben - hetgeen toch mogelijk is.

§ 3. Enige opmerkingen over "de logica" en de logische opbouw van een deductieve theorie

3.1. De logica, in het algemeen, is de wetenschap die zich bezighoudt met het onderzoek en de beschrijving van de regels van de strenge bewijsvoering, en die tot doel heeft redeneermethodem te ontwerpen die in een wetenschappelijke theorie kunnen worden gebruikt zonder tot tegenspraken aanleiding te geven. Globaal gesproken betekent dit, dat men zich rekenschap tracht te geven van de stappen die in wetenschappelijke redeneringen feitelijk voorkomen; in sommige gevallen zal men de betreffende redenering verwerpen, terwijl men in andere gevallen zal besluiten dat aan de gegeven redenering een "algemeen logisch principe" ten grondslag ligt, dat dan als een "zuiver logische redenering" wordt erkend. Het resultaat zal zijn dat men een systeem van uitspraken en redeneerwijzen heeft, die alle als correct worden aanvaard. Zo'n systeem heet dan een logica.

Indien een deductieve theorie (bijv. de verzamelingenleer) volgens de in § 1 aangeduide beginselen wordt opgebouwd, dan wordt hij gegrondvest op een logica; dat houdt in, dat alle uitdrukkingen en stellingen van de betreffende logica op dezelfde wijze worden behandeld als de ongedefinieerde termen en de axioma's van de deductieve theorie, die we op het oog hebben.

Daar men zich op meer dan één logica kan baseren en daar men op meer dan één manier ongedefinieerde termen en axioma's voor een (in intuitieve zin) zelfde theorie (denk weer: verzamelingenleer) kan kiezen, zal dezelfde theorie meer dan één deductieve opbouw toelaten. Omdat men bij de deductieve opbouw natuurlijk zo dicht mogelijk zal aansluiten bij wat intuitief bekend is, zullen de verschillen in het algemeen niet essentiëel zijn.

3.2. Reeds bij Aristoteles komt een dergelijke logica voor. Het voert te ver een bespreking van deze "aristotelische logica" te geven. Bij wijze van voorbeeld zij slechts herinnerd aan een zeer bekende onder de vele redeneringen (sluitredenen, syllogismen), de zg. "barbara":

Alle mensen zijn sterfelijk	praemissen	major
Socrates is een mens		minor
Socrates is sterfelijk		conclusie

Ook het begrip "deductieve wetenschap" in de algemene zin, zoals omschreven in § 1, treft men, met kleine variaties, in feite reeds bij Aristoteles aan.

3.3. De aristotelische logica is eeuwenlang aangezien voor een wetenschap die het eindpunt van zijn ontwikkeling (zelfs zeer kort na zijn ontstaan) had bereikt. Geheel juist was dit intussen niet; er zijn bijv. pogingen gedaan tot de constructie van een "wijsgerige taal": zoals met behulp van cijfers rekenkundige bewerkingen kunnen worden voorgesteld op zodanige wijze dat ze voor ieder begrijpelijk zijn, zo zouden wijsgerige gedachten m.b.v. tekens op zodanige wijze moeten worden weergegeven dat de bedoeling voor ieder duidelijk is.

Een grote vlucht heeft de ontwikkeling der logica echter pas genomen in het begin van deze eeuw. Het was toen duidelijk geworden - o.a. door de ontdekking der paradoxen - dat men, gebruikmakend van de aristotelische logica en/of intuitief-logische redeneringen, enerzijds niet ver genoeg kon komen en anderzijds het optreden van tegenspraken niet kon vermijden.

De moderne logica - vaak ook symbolische logica genoemd - draagt een sterk symbolisch karakter. Het is een systeem van tekencombinaties, waarin we - als we ons beperken tot in hoofdstuk III ingevoerde begrippen - twee groepen kunnen onderscheiden:

(i) de atomen, waartoe behoren de proposities (aangeduid met letters p.q,...) en de predikaten (aangeduid door $p(x)$, $q(x)$, $r(x,y)$,... met variabelen x, y, ...)

(ii) de operatoren, waartoe behoren de logische connectieven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) en de kwantoren ($\exists$, $\forall$).

De uitdrukkingen, die met behulp van deze tekens, volgens vaste regels worden opgebouwd behoren tot de predikatenlogica; i.h.b. die uitdrukkingen waarin alleen proposities en logische connectieven voorkomen zijn uitdrukkingen van de propositielogica.

Overigens is de moderne logica met de predikatencalculus in 't geheel niet afgesloten. Hoe de verdere opbouw van de moderne logica geschiedt, kan in dit bestek niet behandeld worden. Vermeld worde slechts dat in het logische systeem bepaalde uitdrukkingen als uitspraken worden opgevat; uitspraken kunnen waar of onwaar zijn; of een uitspraak waar is of niet, hangt slechts van de uitwendige gedaante af (waardoor de logica zijn formeel, maar "objectief" karakter krijgt); ware uitspraken heten stellingen van de symbolische logica.

De in § 1 en § 1.3 bedoelde opbouw van een deductieve theorie kan nu ook formeel-symbolisch geschieden, indien men voor de ongedefinieerde termen en de axioma's symbolische uitdrukkingen gebruikt; voorts moeten dan nog bijzondere definitie-regels (die de vorm van de uitdrukkingen bepalen die als definitie in de theorie kunnen worden aanvaard) en bewijsregels (die de soort van omzettingen beschrijven waardoor uit een ware uitspraak uit de theorie een andere ware uitspraak kan worden afgeleid) worden opgesteld.

Opmerking: De symbolische logica zelf is in feite ook op een dergelijke manier opgebouwd.

§ 4. Het keuze-axioma

4.1. De strenge, axiomatische opbouw van de verzamelingenleer heeft het oog gescherpt voor de precieze vorm van de toegepaste redeneerprincipes. Eén van deze principes is het keuze-axioma.

Opmerking: Daar de in de intuitieve verzamelingenleer gevonden betrekkingen voor een groot deel in de geaxiomatiseerde verzamelingenleer worden teruggevonden, zullen we ons in het volgende baseren op de kennis, die we uit de intuitieve verzamelingenleer hebben. Slechts aan het bovengenoemde principe - het keuze-axioma - en zijn gevolgen zal een bespreking worden gewijd. Nu zij reeds opgemerkt, dat het keuze-axioma reeds lang voordat het expliciet werd geformuleerd in diverse wiskundige bewijzen was gebruikt.

4.2. Onder een functie f met definitiegebied $X = \mathfrak{D}f$ en waarden-gebied $Y = \mathfrak{R}f$ verstaan we een toevoeging van de elementen van Y aan de elementen van X, zodanig dat aan elke $x \in X$ precies één $y \in Y$ is toegevoegd; deze y heet dan de waarde van f in x en we schrijven $y = f(x)$.

We geven nu twee formuleringen van het keuze-axioma

(C_1) Indien $\{X_i\}_{i \in I}$ een disjuncte familie van niet-lege verzamelingen X_i is, dan bestaat er een verzameling $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, zodanig dat $A \cap X_i$ voor alle $i \in I$ uit juist één element bestaat.

(C_2) Indien $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie van niet-lege verzamelingen X_i is, dan bestaat een functie c, met $\mathcal{D}c = I$ en $c(i) \in X_i$ voor alle $i \in I$.[F]

Dat (C_1) uit (C_2) volgt is duidelijk, daar bij een disjuncte familie $\{X_i\}_{i \in I}$ voor A de verzameling $\{c(i)\}_{i \in I}$ kan worden genomen, waarbij c de keuze-functie uit (C_2) is.

Om te laten zien, dat (C_2) ook uit (C_1) volgt, gaan we als volgt te werk: Als $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie van niet-lege verzamelingen is, dan is $\{X_i'\}_{i \in I}$ —— $X_i' = \{(i,x_i) \mid x_i \in X_i\}$ —— een disjuncte familie van niet-lege verzamelingen. Kiest men A als aangegeven in (C_1), dan is $A \cap X_i' = \{x_i'\} = \{(i,x_i)\}$ voor alle $i \in I$ en voor zekere $x_i \in X_i$. Voor c kan men dan nemen de functie bepaald door $c(i) = x_i$.

Opmerking: Daar het product $\prod_{i \in I} X_i$ van een familie $\{X_i\}_{i \in I}$ van verzamelingen wordt gedefinieerd als de verzameling van alle functies f met de eigenschappen

(i) $\mathcal{D}f = I$

(ii) $\forall i \in I: f(i) \in X_i$

kan men het keuze-axioma ook aldus formuleren:

$$(\forall i \in I: X_i \neq \emptyset) \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset.$$

4.3. Een verzameling X heet een (totaal) geordende verzameling, indien in X een relatie $<$ tussen de elementen is gedefinieerd met de eigenschappen

(i) $\forall x \in X: \; x \not< x$

(ii) $\forall x,y,z \in X: \; (x < y$ en $y < z) \rightarrow x < z$

(iii) $\forall x,y \in X: \; x = y$ of $x < y$ of $y < x$.

Voor $x < y$ ("x kleiner dan y") schrijven we ook wel $y > x$ ("y groter dan x").

[F] c heet een keuze-functie voor de familie $\{X_i\}_{i \in I}$.

Indien X een geordende verzameling is, en $A \subset X$, dan heet een element $a_0 \in A$ het eerste element van A, indien $a_0 \leq a$ voor alle $a \in A$.

Het is duidelijk, dat in een geordende verzameling niet elke niet-lege deelverzameling een eerste element behoeft te hebben.

Een geordende verzameling X heet welgeordend, indien iedere niet-lege deelverzameling van X een eerste element heeft; i.h.b. heeft dan X zelf een eerste element. De lege verzameling $\emptyset$ is per definitie ook welgeordend.

Een belangrijke vraag is nu, of iedere verzameling X welgeordend kan worden, d.w.z. of het mogelijk is in X een relatie < tussen de elementen te definieren op zodanige wijze dat X t.o.v. deze relatie welgeordend is.

Het zal blijken dat men deze vraag, gebruik makend van het keuze-axioma, bevestigend kan beantwoorden:

Welordeningsstelling: Iedere verzameling kan welgeordend worden.

Door E. Zermelo zijn twee bewijzen van deze stelling gegeven (in 1904 en in 1908). Het nu volgende bewijs is essentiëel het tweede bewijs van Zermelo.

4.4. Bewijs van de welordeningsstelling.

a. Zij $X \neq \emptyset$.

Zij $\mathcal{A}$ de familie der niet-lege deelverzamelingen A van X. Laat c een keuze-functie voor deze familie zijn:

$$\begin{cases} \mathcal{D}c = \mathcal{A} \\ c(A) \in A \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Zij tenslotte $A' = A \setminus \{c(A)\}$

b. Een familie K van deelverzamelingen van X heet een ϑ-keten, indien

(i) $X \in K$

(ii) $B \in K,\ B \neq \emptyset \rightarrow B' \in K$

(iii) $B_i \in K$ voor $i \in J \rightarrow \bigcap_{i \in J} B_i \in K$

Het is duidelijk dat er ϑ-ketens bestaan; bijv. is de familie

$\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ van alle deelverzamelingen van X een ϑ-keten. Voorts is zeer gemakkelijk in te zien, dat de doorsnede $\bigcap_{t \in T} K_t$ van een familie ϑ-ketens K_t $(t \in T)$ weer een ϑ-keten is; i.h.b. is dus de doorsnede Δ van alle ϑ-ketens in X weer een ϑ-keten; het is duidelijk dat een echte deelverzameling van Δ dan geen ϑ-keten meer is.

c. Er zijn verzamelingen A uit Δ met de eigenschap

$$(E) \ldots \forall B \in \Delta : B \subset A \text{ of } A \subset B;$$

bijv. is X zo'n verzameling. (Straks zal blijken, dat elke $A \in \Delta$ deze eigenschap heeft).

Zij nu:

$$O_A = \{B \mid B \in \Delta,\ B \supsetneq A\}$$
$$U_A = \{B \mid B \in \Delta,\ B \subsetneq A\}$$
$$V_A = \{B \mid B \in \Delta,\ B \subset A'\}$$

(dus $V_A \subset U_A$).

Voor vaste A ($A \in \Delta$, A met eigenschap (E)) vormt de familie

$$H = O_A \cup V_A \cup \{A\}$$

weer een ϑ-keten:

(i) $X \in O_A$ of $X = A$, dus $X \in H$

(ii) Zij $B \in H$, $B \neq \emptyset$

1. Zij $B \in O_A$; dan $B' \in \Delta$, dus $B' \in O_A$ of $B' = A$ of $B' \in U_A$. Als $B' \in U_A$ dan is $B' \subsetneq A$ en dus $B' \subsetneq A \subsetneq B$, waaruit volgt dat er in B ten minste twee elementen voorkomen, die geen element van B' zijn; dit is een tegenspraak.
   Dus $B' \in O_A$ of $B' = A$; derhalve $B' \in H$.
2. Als $B \in V_A \cup \{A\}$, dan is $B' \in V_A$, en dus $B' \in H$.

(iii) Zij $B_i \in H$ voor $i \in J$

1. Als $B_i \in O_A \cup \{A\}$ voor alle $i \in J$, dan is
   $$\bigcap_{i \in J} B_i \in O_A \cup \{A\} \subset H$$
2. Als $B_i \in V_A$ voor zekere $i \in J$, dan is $\bigcap_{i \in J} B_i \in V_A \subset H$.

Daar Δ een minimale $\mathcal{V}$-keten is, volgt dus $H = \Delta$.
Omdat nu enerzijds $U_A \subset \Delta = H = O_A \cup V_A \cup \{A\}$ en anderzijds $U_A \cap O_A = U_A \cap \{A\} = \emptyset$ volgt dat $U_A \subset V_A$; dus

$$U_A = V_A \qquad (1)$$

Hieruit volgt ook nog:

$$A' \text{ heeft de eigenschap (E)} \qquad (2).$$

Is vervolgens $\{D_m\}_{m\in M}$ een familie van verzamelingen uit Δ die de eigenschap (E) hebben, en is Z een willekeurige verzameling uit Δ, dan is $D_m \subset Z$ voor zekere $m \in M$ of $D_m \supset Z$ voor alle $m \in M$; in het eerste geval geldt voor $D = \bigcap_{m\in M} D_m$ dat $D \subset Z$ en in het tweede geval is $D \supset Z$; derhalve

$$D \text{ heeft de eigenschap (E)} \qquad (3)$$

Daar tenslotte ook X de eigenschap (E) heeft, volgt uit (2) en (3) dat de familie N van verzamelingen uit Δ die de eigenschap (E) hebben, een $\mathcal{V}$-keten is. Daar Δ minimaal is, concluderen we dat $N = \Delta$.
Conclusie: Elke verzameling uit Δ heeft de eigenschap (E); oftewel: voor elk tweetal elementen A en B van Δ geldt, dat $A \subset B$ of $B \subset A$.

d. Zij nu $\mathcal{A}$ een niet-lege deelverzameling van X.
De familie F der verzamelingen Q uit Δ die A omvatten is niet leeg: $X \in F$; zij $A_0 = \bigcap_{Q\in F} Q$.
Dan is $A_0 \in F$. Indien nu $c(A_0) \notin A$, dan volgt dat $A_0' \in F$, in strijd met $A_0' \subset A_0$; derhalve $c(A_0) \in A$.

Is vervolgens A_1 een andere verzameling uit Δ met $A \subset A_1$, dan is $A_0 \subset A_1$; dus (daar $U_{A_1} = V_{A_1}$, zie (1)) volgt dat $A_0 \subset A_1'$. Dat betekent, dat $c(A_1) \notin A_0$, dus zeker $c(A_1) \notin A$.
Conclusie: er is juist één verzameling A_0 uit Δ met de eigenschap dat $A_0 \supset A$ en dat $c(A_0) \in A$.

e. Als men kiest $A = \{a\}$, dan volgt uit 't voorgaande dat er juist één verzameling A_0 in Δ is, met $c(A_0) = a$; in dat geval schrijven we $A_0 = R(a)$.

Het is duidelijk dat $R(a) \neq R(b)$ als $a \neq b$.

Als men kiest $A = \{a,b\}$, $a \neq b$, dan is $c(A_0)=a$ of $c(A_0)=b$, zodat $A_0 = R(a)$ of $A_0=R(b)$. Daar $R(a) \neq R(b)$ is $R(a) \subsetneq R(b)$ of $R(b) \subsetneq R(a)$; in het eerste geval schrijven we $b < a$ en in het tweede geval $a < b$.

Dan geldt:

(i) $\forall x \in X: x \nless x$

(ii) $\forall x,y \in X: x=y$ of $x < y$ of $y < x$;

voorts volgt uit $R(y) \subsetneq R(x)$ en $R(z) \subsetneq R(y)$ dat $R(z) \subsetneq R(x)$, hetgeen betekent

(iii) $\forall x,y,z \in X: (x < y$ en $y < z) \to x < z$

Conclusie: X is t.o.v. $<$ een geordende verzameling.

f. We tonen tenslotte aan, dat $(X,<)$ een welgeordende verzameling is.

Zij dus A een niet-lege deelverzameling van X, en zij A_0 de eenduidig bepaalde verzameling A_0 uit Δ met de eigenschap dat $A_0 \supset A$ en $c(A_0) \in A$.

Zij a een willekeurig element van A. Daar $R(a)$ de doorsnede is van al die verzamelingen uit Δ, die a bevatten en daar A_0 ook zo'n verzameling is, volgt

$$R(a) \subset A_0 = R(c(A_0)),$$

en dus

$$c(A_0) \leq a.$$

Dit betekent, dat $c(A_0)$ het kleinste element is van A.

Conclusie: $(X,<)$ is een welgeordende verzameling.

4.5 In het voorgaande hebben we de welordeningsstelling afgeleid uit het keuze-axioma.

Het is gemakkelijk om, omgekeerd, het keuze-axioma te bewijzen m.b.v. de welordeningsstelling:

Als $\{X_i\}_{i \in I}$ een disjuncte familie niet-lege verzamelingen X_i is, kies dan een welordening van $X = \bigcup_{i \in I} X_i$; indien dan x_i^* het kleinste element is van X_i in deze welordening, dan kan men voor de in formulering (C_1) genoemde verzameling A nemen $\{x_i^*\}_{i \in I}$.

Dit betekent dus dat "het keuze-axioma" en "de welordeningsstelling" aequivalente beweringen inhouden.

Er zijn nog verscheidene andere stellingen, die aequivalent zijn met het keuze-axioma; van deze stellingen zullen we alleen noemen het lemma van Zorn. Eerst moeten daartoe enige begrippen worden ingevoerd.

Een verzameling X heet een partiëel geordende verzameling, indien in X een relatie $<$ tussen de elementen is gedefiniëerd met de eigenschappen

(i) $\forall x \in X: x \nless x$

(ii) $\forall x,y,z \in X: (x < y \text{ en } y < z) \rightarrow x < z$

Opmerking: Een totaalgeordende verzameling is dus een partiëel geordende verzameling waarin alle elementen vergelijkbaar zijn; d.w.z. voor alle elementenparen (x,y) geldt één van de drie betrekkingen $x=y$, $x<y$, $y<x$ (vgl. § 4.3).

Indien A een totaalgeordende deelverzameling is van een partiëel geordende verzameling X, en b is een element in X, zodanig dat $a \leq b$ voor alle $a \in A$, dan heet b een bovengrens van A.

Een inductief geordende verzameling X is een partiëel geordende verzameling met de eigenschap dat iedere totaal geordende deelverzameling een bovengrens heeft.

Een element m van een partiëel geordende verzameling X heet een maximaal element in X als voor alle met m vergelijkbare elementen $y \in X$ geldt $y \leq m$.

Lemma van Zorn: Iedere inductief geordende verzameling heeft tenminste één maximaal element.

Literatuur Hoofdstuk IV

Wat betreft §1 t/m §3:

E.W. Beth: Wijsbegeerte der wiskunde

E.W. Beth: Symbolische logica

E.W. Beth: Geschiedenis der logica

D. Hilbert und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik

A. Tarski: Inleiding tot de logica.

Wat betreft §4:

E. Kamke: Mengenlehre
J.L. Kelley: General Topology (Chapter 0 + appendix)
B.L. v.d. Waerden: Algebra I (Kapittel 1).