STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZWA 1965-4

Tauber-stellingen
met als toepassing een afleiding van de
Priemgetalstelling

door

J. van de Lune

December 1965

Deze syllabus is de samenvatting van een aantal interne voordrachten, gehouden voor de Afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

0. Inleiding

Als uitgangspunt kiezen we de ons uit de theorie der (reële) machtreeksen bekende

Stelling van Abel: Is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

convergent in het punt $x = 1$, met

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S,$$

dan heeft de funktie

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-1 < x \leq 1)$$

voor $x \to 1 - 0$ een limiet en deze limiet is gelijk aan S.

Deze enigszins breedsprakige formulering heeft het voordeel dat ze haast als vanzelf de volgende vraag doet rijzen: "Als uit de convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ het bestaan van $\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ volgt, geldt dan omgekeerd ook niet dat uit het bestaan van $\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ volgt?"

Onderstaand voorbeeld laat zien dat dit in het algemeen niet het geval is.

Nemen we $a_n = (-1)^n$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}$ $\quad (|x| < 1)$; nu is

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \tfrac{1}{2}, \text{ terwijl } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ divergeert.}$$

De omkering van de stelling van Abel is dus alleen mogelijk als er nadère voorwaarden gesteld worden.
Nemen we als extra voorwaarde bijvoorbeeld $a_n \geqq 0$, dan is de omkering inderdaad juist; een nauwkeurige formulering vinden we in de
Stelling: Is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \underline{\text{ met } a_n \geqq 0},$$

convergent op $|x| < 1$ en heeft de funktie

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (|x| < 1)$$

voor $x \to 1 - 0$ de limiet S, dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent met de som S.
Het bewijs is eenvoudig:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqq \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S;$$

wegens $a_n \geqq 0$ is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dus convergent en uit de uniforme convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op $0 \leqq x \leqq 1$ volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Hiermee is onze eerste Tauber-stelling bewezen. De reden voor deze naamgeving ligt in het feit dat de Oostenrijkse wiskundige A. TAUBER de eerste was die de juistheid van de omkering van de stelling van Abel aantoonde, en wel onder de nevenvoorwaarde: $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ (zie §1).

Om tot een algemene omschrijving van het begrip "Tauber-stelling" te

komen, denken we ons twee verzamelingen, U en V, met een afbeelding ϕ: $U \xrightarrow{in} V$.
Een stelling die, binnen dit model, op grond van een aantal veronderstellingen betreffende U en/of V, een uitspraak doet betreffende de ruimte V, heet een Abelse stelling; verschaft een stelling ons, op grond van soortgelijke veronderstellingen, informatie over de ruimte U, dan spreken we van een Tauber-stelling.

We lichten dit toe aan de hand van de reeds genoemde stellingen.
De ruimte U definiëren we als de verzameling van alle rijen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
Voor V nemen we de verzameling van alle machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
De afbeelding ϕ: $U \to V$ definiëren we als volgt:

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{\phi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

1) De stelling van Abel doet, op grond van het de ruimte U betreffende gegeven " $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert", een uitspraak over het beeld $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in V$ van de rij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (met name: de som van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is linkscontinu in $x = 1$) en is dus in dit verband een Abelse stelling.

2) De tweede stelling doet een uitspraak betreffende de ruimte U (met name: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent met de som S) en wel op grond van de op de ruimte U betrekking hebbende veronderstellingen $a_n \geq 0$ en $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$ (dit is nl. aequivalent met de convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ op $|x| < 1$), en de V betreffende veronderstelling

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

We hebben hier dus met een Tauberstelling te doen.

Na deze explicatie zal het de lezer niet moeilijk vallen het merendeel van de nog te bespreken stellingen (na de opstelling van een geschikt model: (U,V,ϕ)) te herkennen als Tauberstellingen.

1. <u>Stelling 1.1</u> (A. Tauber, 1897).

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergeert op } |x| < 1 \;^{1)} \\ \lim_{x \to 1-0} f(x) = S \\ \lim_{n \to \infty} n a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Bewijs:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N} a_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n =$$

$$= (1 - x) \sum_{n=1}^{N} a_n (1 + x + \ldots + x^{n-1}) - \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n \cdot \frac{x^n}{n}.$$

Nemen we $x = 1 - \frac{1}{N}$ dan vinden we

[1] Wegens $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$, is aan deze eis automatisch voldaan. Men vergelijke het een en ander met de formulering van stelling 2.

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - S\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - f(1-\tfrac{1}{N})\right| + \left|f(1-\tfrac{1}{N}) - S\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_N \cdot \frac{(1-\frac{1}{N})^n}{N+1} + |f(1-\tfrac{1}{N}) - S| \leq$$

$$(\varepsilon_N \overset{\text{def}}{=} \sup_{n \geq N+1} |na_n|)$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \varepsilon_N \cdot \frac{N}{N+1} + |f(1-\tfrac{1}{N}) - S|.$$

Bedenken we dat uit $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ volgt dat

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |na_n| = 0$$

$$\text{en } \lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0,$$

dan wordt het duidelijk dat

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = S.$$

Opmerking. Uit bovenstaand bewijs volgt, dat het reeds voldoende is te veronderstellen dat $\lim_{N\to\infty} f(1-\frac{1}{N}) = S$, in plaats van $\lim_{x\to 1-0} f(x) = S$.

Stelling 1.2. (A. Tauber, 1897)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergeert op } |x| < 1 \text{ }^{2)} \\ \lim_{x\to 1-0} f(x) = S \\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} na_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

[2] Vgl. de voetnoot bij stelling 1.1.

Bewijs:

Schrijven we

$w_0 = 0$ en $w_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

dan is op $|x| < 1$

$$f(x) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{n(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)}\right) =$$

$$= (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n.$$

We tonen nu aan dat

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n = 0.$$

$$\left|(1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n\right| \leq$$

$$\leq \left|(1 - x) \sum_{n=1}^{N} \frac{w_n}{n+1} x^n\right| + \left|(1 - x) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n\right| \leq$$

$$\leq |1 - x| \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{|w_n|}{n+1} + |1 - x| \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_N \cdot |x^n| \leq$$

$$\left(\delta_N \overset{\text{def}}{=} \sup_{n \geq N+1} \frac{|w_n|}{n+1}\right)$$

$$\leq |1 - x| \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{|w_n|}{n+1} + \delta_N \cdot \frac{|1 - x|}{1 - |x|} ;$$

dus

$$\limsup_{x\to 1-0} \left|(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n\right| \leq \delta_N ,$$

en hieruit volgt op grond van $\lim_{N\to\infty} \delta_N = 0$, dat

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n = 0.$$

Hiermee is aangetoond dat

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n = S - a_0;$$

wegens $n \cdot \frac{w_n}{n(n+1)} = \frac{w_n}{n+1} \to 0$ als $n \to \infty$ is stelling 1.1 toepasbaar, en het resultaat is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = S - a_0.$$

Nu is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{w_n}{n(n+1)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} w_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} - \frac{w_m}{m+1}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n, \text{ met als gevolg}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S - a_0 \text{ of } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

<u>Een toepassing</u>: Op $|x| < 1$ geldt, zoals bekend,

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots .$$

Wegens $\left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} na_n\right| = \left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \leq \frac{1}{N}$

en $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \log 2$

kunnen we dus schrijven

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Deze conclusie kunnen we niet trekken op grond van stelling 1.1, wegens $|na_n| = 1$.

2. In deze paragraaf zullen we de resultaten van paragraaf 1 aanzienlijk verscherpen.

Ons doel is de volgende stelling te bewijzen:

Stelling 2 (G.H. Hardy-J.E. Littlewood, 1914).

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergeert op } |x| < 1 \\ \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = S \\ na_n \leq G \quad (G \text{ constant en } > 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Het bewijs van deze stelling is niet zo eenvoudig als dat van de stellingen uit paragraaf 1 (E. Landau zegt: "Dieser Satz liegt sehr tief"); de nodige voorbereidingen vatten we samen in een aantal lemma's.

Lemma 2.1 (J. Karamata, 1930).

Is de funktie $g(x)$ gedefinieerd op $0 \leq x < 1$, terwijl $\lim\limits_{x \to 1-0} (1 - x)g(x) = A$, dan geldt

$$\lim_{x\to 1-0} (1 - x)g(x^k) = \frac{A}{k} = A\int_0^1 t^{k-1}dt \qquad (k > 0).$$

Bewijs:

$$(1 - x)g(x^k) = \frac{1 - x}{1 - x^k} \cdot (1 - x^k)g(x^k);$$

nu is $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1 - x}{1 - x^k} = \dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt \qquad (k > 0)$

en $\lim\limits_{x\to 1-0} (1 - x^k)g(x^k) = A,$

waaruit het gestelde onmiddellijk volgt.

Lemma 2.2 (J. Karamata, 1930).

Is $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergent op $|x| < 1$ met $\lim\limits_{x\to 1-0} (1 - x)g(x) = A,$

dan geldt voor elk polynoom

$$P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m$$

$$\lim_{x\to 1-0} (1 - x)\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n P(x^n) = A\int_0^1 P(t)dt.$$

Bewijs:

$$(1 - x)\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n P(x^n) = (1 - x)\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^{nk}\right) =$$

$$= (1 - x)\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x^{k+1})^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (1 - x)g(x^{k+1});$$

op grond van lemma 2.1 heeft deze vorm voor $x \to 1 - 0$ de limiet

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \cdot \frac{A}{k+1} = A \cdot \int_0^1 P(t)dt.$$

<u>Lemma 2.3</u> (J. Karamata, 1930).

Is de machtreeks $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, <u>met $b_n \geq 0$</u>, convergent op $|x| < 1$, terwijl

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x)g(x) = A, \text{ [3]}$$

dan geldt voor elke op het interval $0 \leq x \leq 1$ continue (reële) funktie $\phi(x)$

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) = A \int_0^1 \phi(t)dt.$$

Bewijs:

De funktie $\phi(x)$ is op $0 \leq x \leq 1$ continu en laat zich dus (volgens Weierstrass) uniform approximeren door een polynoom $p^*(x)$, zodanig dat

$$|p^*(x) - \phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (0 \leq x \leq 1;\ \varepsilon > 0).$$

Schrijven we

$$P(x) = p^*(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en} \quad p(x) = p^*(x) - \frac{\varepsilon}{2},$$

dan is
$$p(x) \leq \phi(x) \leq P(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Wegens $b_n \geq 0$ geldt dus

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n p(x^n) \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n P(x^n).$$

---

3) Uit de veronderstelling $b_n \geq 0$ volgt: $A \geq 0$.

Maken we nu de limietovergang $x \to 1 - 0$, dan vinden we

$$A \int_0^1 p(t)dt \leq \liminf_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) \leq$$

$$\leq \limsup_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) \leq A \int_0^1 P(t)dt,$$

met als gevolg

$$(\limsup_{x \to 1-0} - \liminf_{x \to 1-0})(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) \leq$$

$$\leq A \int_0^1 (P(t) - p(t))dt = A \circ \varepsilon.$$

Aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig klein gekozen kan worden, kunnen we concluderen dat

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) = L$$

bestaat en dat

$$A \int_0^1 p(t)dt \leq L \leq A \int_0^1 P(t)dt;$$

verder is ook

$$A \int_0^1 p(t)dt \leq A \int_0^1 \phi(t)dt \leq A \int_0^1 P(t)dt,$$

zodat

$$|L - A \int_0^1 \phi(t)dt| \leq A \circ \varepsilon.$$

Conclusie:

$$L = A\int_0^1 \phi(t)dt.$$

Opmerking. In het bovenstaande bewijs speelt de approximatie stelling van Weierstrass slechts schijnbaar een beslissende rol. De voorwaarde dat de funktie $\phi(x)$ continu moet zijn is niet wezenlijk; ze kan vervangen worden door "$\phi(x)$ is op $0 \leq x \leq 1$ eigenlijk Riemann-integreerbaar". Immers, bij elke eigenlijk R-integreerbare funktie $\phi(x)$ op $a \leq x \leq b$ kan men, zoals bekend, twee polynomen $P(x)$ en $p(x)$ vinden zodanig dat

$$p(x) \leq \phi(x) \leq P(x)$$

$$\text{en} \quad 0 \leq \int_0^1 (P(x) - p(x))dx < \varepsilon.$$

En het is juist deze omstandigheid die het bewijs van lemma 2.3 doet slagen.

Hiermee is bewezen

Lemma 2.4. Is de machtreeks $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, met $b_n \geq 0$, convergent op $|x| < 1$, zodanig dat

$$\lim_{x\to 1-0} (1 - x)g(x) = A$$

en is $\phi(x)$ een op $0 \leq x \leq 1$ eigenlijk R-integreerbare funktie, dan geldt

$$\lim_{x\to 1-0} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) = A \int_0^1 \phi(t)dt.$$

Als toepassing van dit lemma geven we het voor het vervolg uiterst belangrijke

<u>Lemma 2.5</u> (Hardy-Littlewood, 1914).

Is $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, <u>met $b_n \geq 0$</u>, op $|x| < 1$ convergent, zodanig dat

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x)g(x) = A,$$

dan geldt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} b_n = A.$$

Bewijs:

Definiëren we de funktie $\phi(x)$ volgens het voorschrift

$$\phi(x) = 0 \quad \text{op} \quad 0 \leq x < e^{-1}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{x} \quad \text{op} \quad e^{-1} \leq x \leq 1$$

dan is

$$\int_0^1 \phi(t)dt = \int_{e^{-1}}^1 \frac{dt}{t} = 1;$$

volgens lemma 2.4 geldt nu

$$\lim_{x\to 1-0} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \phi(x^n) = A \int_0^1 \phi(t)dt = A.$$

Nemen we $x = e^{-\frac{1}{N}}$, dan kunnen we schrijven

$$(1 - e^{-\frac{1}{N}}) \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{n}{N}} \phi(e^{-\frac{n}{N}}) = (1 - e^{-\frac{1}{N}}) \sum_{n=0}^{N} b_n e^{-\frac{n}{N}} \phi(e^{-\frac{n}{N}}) =$$

$$= (1 - e^{-\frac{1}{N}}) \sum_{n=0}^{N} b_n = \frac{1 - e^{-\frac{1}{N}}}{\frac{1}{N}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} b_n,$$

zodat we, wegens $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1 - e^{-\frac{1}{N}}}{\frac{1}{N}} = 1$, kunnen concluderen, dat

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} b_n = A.$$

Lemma 2.6. Is de funktie $f(x)$ op $0 < x < 1$ tweemaal differentieerbaar, zodanig dat

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = S$$

$$\text{en} \quad (1 - x)^2 f''(x) \leq G \quad (G \text{ constant}) \quad (0 < x < 1),$$

dan geldt

$$\lim_{x\to 1-0} (1 - x)f'(x) = 0.$$

Bewijs:

Zonder enig bezwaar mogen we veronderstellen dat $G \geq 0$ is.
We kiezen x_0 en x_1 zodanig dat

$$0 < x_0 < 1 \quad \text{en} \quad x_1 = x_0 + \delta(1 - x_0) \quad (0 < \delta < 1).$$

a. Volgens Taylor geldt nu

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 f''(x_0 + \theta\delta(1 - x_0))$$

$$\text{met } 0 < \theta < 1$$

of

$$f(x_1) = f(x_0) + \delta(1 - x_0)f'(x_0) + \tfrac{1}{2}\delta^2(1 - x_0)^2 f''(x_0 + \theta\delta(1 - x_0));$$

hieruit leiden we af

$$(1 - x_0)f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta} - \tfrac{1}{2}\delta(1 - x_0)^2 f''(x_0 + \theta\delta(1 - x_0)) \geq$$

$$\geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta} - \tfrac{1}{2}\delta(1 - x_0)^2 \frac{G}{\{1 - (x_0 + \theta\delta(1 - x_0))\}^2} =$$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta} - \tfrac{1}{2}\delta \frac{G}{(1 - \theta\delta)^2} \geq$$

$$\geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta} - \frac{\delta G}{2(1 - \delta)^2},$$

met als gevolg:

$$\liminf_{x_0 \to 1-0} (1 - x_0)f'(x_0) \geq - \frac{\delta G}{2(1 - \delta)^2}.$$

Aangezien $\delta > 0$ willekeurig dicht bij 0 gekozen kan worden, vinden we

$$\liminf_{x_0 \to 1-0} (1 - x_0)f'(x_0) \geq 0.$$

b. $f(x_0) = f(x_1) + (x_0 - x_1)f'(x_1) + \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1)^2 f''(x_0 + \theta\delta(1 - x_0))$

met $0 < \theta < 1$

of

$$\delta(1 - x_0)f'(x_1) = f(x_1) - f(x_0) + \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1)^2 f''(x_0 + \theta\delta(1 - x_0));$$

hieruit volgt

$$(1 - x_1)f'(x_1) = \frac{1-\delta}{\delta} \cdot (f(x_1) - f(x_0)) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\delta(1 - x_0)^2(1 - \delta)f''(x_0 + \theta\delta(1 - x_0)) \leqq$$

$$\leqq \frac{1-\delta}{\delta} \cdot (f(x_1) - f(x_0)) + \tfrac{1}{2}\delta(1 - x_0)^2(1 - \delta) \cdot \frac{G}{\{1 - (x_0 + \theta\delta(1 - x_0))\}^2} =$$

$$= \frac{1-\delta}{\delta} \cdot (f(x_1) - f(x_0)) + \frac{\delta(1 - \delta)G}{2(1 - \theta\delta)^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1-\delta}{\delta} (f(x_1) - f(x_0)) + \frac{\delta \cdot G}{2(1 - \delta)^2} .$$

Maken we de limietovergang $x_0 \to 1 - 0$ dan zal ook $x_1 \to 1 - 0$;

dus
$$\limsup_{x_1 \to 1-0} (1 - x_1)f'(x_1) \leqq \frac{\delta G}{2(1 - \delta)^2} ,$$

zodat
$$\limsup_{x_1 \to 1-0} (1 - x_1)f'(x_1) \leqq 0.$$

De resultaten van $\underline{\underline{a}}$ en $\underline{\underline{b}}$ tesamen leveren

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x)f'(x) = 0.$$

We gaan nu over tot het

Bewijs van stelling 2.

Het is duidelijk dat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

op $0 < x < 1$ tweemaal differentieerbaar is met

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)a_n x^{n-2};$$

wegens $na_n \leq G$ kunnen we schrijven

$$(1 - x)^2 f''(x) \leq (1 - x)^2 \cdot G \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)x^{n-2} = G \qquad (0 < x < 1);$$

verder is
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = S.$$

Op grond van lemma 2.6 geldt dus

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x)f'(x) = \lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = 0.$$

Het is nu gemakkelijk in te zien dat

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{na_n}{G}\right)x^{n-1} = 1;$$

met behulp van lemma 2.5 kunnen we, wegens

$$1 - \frac{na_n}{G} \geq 0,$$

hieruit direct afleiden dat

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{na_n}{G}\right) = 1$$

of
$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} na_n = 0.$$

Volgens Tauber (stelling 1.2) geldt dan ook:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

3. De in de vorige paragrafen besproken Tauber-stellingen hadden alle ten doel de convergentie aan te tonen van een gegeven reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; men zou ze kunnen opvatten als convergentie-kenmerken voor reeksen.

Daarnaast bestaan talloze Tauberstellingen die men kan opvatten als convergentie-criteria voor oneigenlijke integralen.
Als voorbeeld vermelden we, zonder bewijs, het volgende analogon van stelling 2.

<u>Stelling 3.1.</u> Is de funktie $F(t)$ op elk eindig interval $0 \leq t \leq T$ eigenlijk R-integreerbaar, zodanig dat

$$\phi(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} F(t)dt$$

op $\sigma > 0$ convergeert, terwijl bovendien

$$\lim_{\sigma \to +0} \phi(\sigma) = I$$

en $\qquad t \, . \, F(t) \leq K \quad (t \geq 0;\ K \text{ constant en } > 0),$

dan geldt

$$\int_0^\infty F(t)dt = I.$$

Een heel ander voorbeeld van een Tauberstelling vinden we in

<u>Stelling 3.2.</u> De funktie $F(t)$ zij op $t \geq 0$ monotoon niet dalend.

$$\text{Is nu } \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x F(t)dt,$$

terwijl $\qquad \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x^p} = 1 \quad (p \geq 1)$

dan geldt $\qquad \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{px^{p-1}} = 1.$

Bewijs:

Nemen we $\alpha > 1$, dan is

$$\int_x^{\alpha x} F(t)dt \geq (\alpha x - x) \cdot F(x) = x(\alpha - 1)F(x)$$

of
$$F(x) \leq \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{\Phi(\alpha x) - \Phi(x)}{x} \qquad (x > 0).$$

Hieruit volgt

$$\frac{F(x)}{px^{p-1}} \leq \frac{1}{p(\alpha - 1)} \cdot \{\frac{\Phi(\alpha x)}{(\alpha x)^p} \cdot \alpha^p - \frac{\Phi(x)}{x^p}\}$$

zodat

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{F(x)}{px^{p-1}} \leq \frac{\alpha^p - 1}{p(\alpha - 1)} .$$

Aangezien het rechterlid onafhankelijk is van x volgt hieruit, wegens

$$\lim_{\alpha\to 1+0} \frac{\alpha^p - 1}{p(\alpha - 1)} = 1,$$

dat
$$\limsup_{x\to\infty} \frac{F(x)}{px^{p-1}} \leq 1.$$

Neem nu $0 < \beta < 1$; dan is

$$\int_{\beta x}^{x} F(t)dt \leq x(1 - \beta)F(x)$$

of
$$F(x) \geq \frac{1}{1 - \beta} \cdot \frac{\Phi(x) - \Phi(\beta x)}{x}$$

of
$$\frac{F(x)}{px^{p-1}} \geq \frac{1}{p(1 - \beta)} \{\frac{\Phi(x)}{x^p} - \frac{\Phi(\beta x)}{(\beta x)^p} \beta^p\}$$

met als gevolg

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{F(x)}{px^{p-1}} \geq \frac{1 - \beta^p}{p(1 - \beta)} ,$$

zodat $$\liminf_{x\to\infty} \frac{F(x)}{p \cdot x^{p-1}} \geq \frac{1}{p} \lim_{\beta\to 1-0} \frac{1-\beta^p}{1-\beta} = 1.$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{p \cdot x^{p-1}} = 1.$$

4. In deze paragraaf geven we een uiteenzetting van een zeer belangwekkende funktietheoretische Tauber-stelling van S. Ikehara.
In paragraaf 5 zullen we met behulp hiervan op eenvoudige wijze de Priemgetalstelling bewijzen. Aan de stelling van Ikehara laten we de volgende beschouwing voorafgaan.
Zij U de verzameling van alle reële funkties $F(x)$ op $x \geq 0$ die voldoen aan

a. $F(x)$ is op elk interval $0 \leq x \leq T$ eigenlijk R-integreerbaar

b. $\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx$ convergeert op $\sigma > 1$ [1] $\quad (s = \sigma + it)$;

zij V de verzameling van alle op het gebied $\sigma > 1$ (of een groter gebied) holomorfe funkties $f(s)$. We definiëren de afbeelding ϕ: $U \to V$ als volgt:

$$F(x) \xrightarrow{\phi} \Phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx.$$

Nemen we voor $F(x) \in U$ de funktie $F(x) = Ae^x \quad (A \neq 0)$, dan is

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}Ae^x dx = \frac{A}{s-1};$$

1) $\Phi(s)$ is dan holomorf op $\sigma > 1$.

van deze funktie merken we op dat ze overal holomorf is, behalve in het punt $s = 1$; in dit punt heeft $\Phi(s)$ een enkelvoudige pool met het residu A.

We beschouwen nu het beeld $\Phi(s) \in V$ van een funktie $F(x) \in U$, waarvan bekend is dat

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{e^x} = A.$$

Van het beeld van zo'n funktie $F(x)$ is voorlopig niet meer bekend dan dat ze holomorf is op $\sigma > 1$; naar aanleiding van de grote verwantschap tussen de funkties $F(x)$ en $A \cdot e^x$, betreffende hun asymptotisch gedrag voor $x \to \infty$, ligt het evenwel voor de hand te vermoeden dat de beelden van deze funkties ook zekere karakteristieke trekken gemeen zullen hebben.

Dat dit inderdaad het geval is blijkt uit (de Abelse)

<u>Stelling 4.1.</u> Geldt voor $F(x) \in U$, dat

$$\lim_{x \to \infty} F(x) \cdot e^{-x} = A$$

dan heeft het beeld $\Phi(s)$ van $F(x)$ bij eventuele analytische voortzetting (over de rechte $\sigma = 1$) geen polen op $\sigma = 1$, behalve misschien in het punt $s = 1$.

Bewijs:

Op $\sigma > 1$ geldt

$$\Phi(s) - \frac{A}{s-1} = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx - \int_0^\infty A \cdot e^{-(s-1)x}dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-1)x} \cdot \{\frac{F(x)}{e^x} - A\}dx.$$

Nemen we $s = 1 + \delta + y_0 i \quad (\delta > 0)$ en $s_0 = 1 + y_0 i$,

dan is

$$\left|(s - s_0)(\Phi(s) - \frac{A}{s-1})\right| = \delta \cdot \left|\int_0^\infty e^{-(\delta+y_0 i)x}\{\frac{F(x)}{e^x} - A\}dx\right| \leq$$

$$\leq \delta \int_0^\infty e^{-\delta x} \cdot \left|\frac{F(x)}{e^x} - A\right| dx =$$

$$= \delta \int_0^T e^{-\delta x}\left|\frac{F(x)}{e^x} - A\right| dx + \delta \int_T^\infty e^{-\delta x}\left|\frac{F(x)}{e^x} - A\right| dx \leq$$

$$\leq \delta \cdot T \cdot \varepsilon_0 + \delta \cdot \int_T^\infty e^{-\delta x} \cdot \varepsilon_T dx \leq \delta T \varepsilon_0 + \varepsilon_T,$$

waarbij

$$\varepsilon_T = \sup_{x \geq T} \left|\frac{F(x)}{e^x} - A\right|.$$

Dus:

$$\limsup_{\delta \to +0} \left|(s - s_0)(\Phi(s) - \frac{A}{s-1})\right| \leq \varepsilon_T;$$

aangezien ε_T onafhankelijk is van δ en

$$\lim_{T \to \infty} \varepsilon_T = 0,$$

kunnen we concluderen

$$\lim_{\delta \to +0} (s - s_0)(\Phi(s) - \frac{A}{s-1}) = 0.$$

Is $y_0 \neq 0$ dan is dit gelijkwaardig met

$$\lim_{\delta \to +0} (s - s_0)\Phi(s) = 0,$$

waaruit blijkt dat $\Phi(s)$ bij eventuele analytische voortzetting, in $s_0 = 1 + y_0 i$ $(y_0 \neq 0)$ geen pool kan hebben. Het doel van de stelling van Ikehara is nu, de zo juist behandelde Abelse stelling om te keren.

Stelling 4.2. (S. Ikehara, 1931).

De funktie F(x) zij op $x \geq 0$ monotoon niet dalend en niet negatief; de integraal

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx \qquad (s = \sigma + it)$$

zij convergent op $\sigma > 1$.
Indien vervolgens de funktie

$$\Delta(s) \overset{def}{=} \Phi(s) - \frac{A}{s-1} = \Phi(1 + \alpha + \beta i) - \frac{A}{\alpha + \beta i} \qquad (\alpha > 0)$$

(A is een reële constante)

op elk eindig interval $-\lambda \leq \beta \leq +\lambda$ uniform tot een limietfunktie $r(\beta)$ [1] nadert als $\alpha \to +0$, dan geldt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{e^x} = A.$$

Opmerking. Als van de funktie $\Phi(s)$ bekend is dat ze analytisch voortgezet kan worden tot een eenduidige holomorfe funktie op $\sigma \geq 1$ $(s \neq 1)$, terwijl $\Phi(s)$ in $s = 1$ een pool van de eerste orde met het residu A heeft, dan is aan de voorwaarde betreffende $\Delta(s)$ voldaan.

Bewijs:

Schrijven we $L(x) = e^{-x} \cdot F(x)$, dan is

$$\Delta(1 + \alpha + \beta i) = \int_0^\infty e^{-\beta ix} \cdot e^{-\alpha x} \cdot L(x)dx - \int_0^\infty e^{-\beta ix} \cdot e^{-\alpha x} \cdot Adx$$

$$(\alpha > 0);$$

[1] Uit de gegevens volgt dat $r(\beta)$ continu is op $-\infty < \beta < +\infty$.

hierin zijn beide integralen (absoluut) uniform convergent in β op $-\infty < \beta < +\infty$.

Als $H(\beta)$ een continue funktie is op $-2\lambda \leq \beta \leq +2\lambda$ $(\lambda > 0)$, dan bestaat dus de integraal

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} H(\beta)\{\int_0^\infty e^{-i\beta x} \cdot e^{-\alpha x} \cdot L(x)dx\}d\beta,$$

en op grond van de uniforme convergentie (in β) van de integraal

$$\int_0^\infty e^{-i\beta x} \cdot e^{-\alpha x} \cdot L(x)dx$$

kunnen we hiervoor ook schrijven

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}L(x)\{\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} H(\beta)e^{-i\beta x}d\beta\}dx.$$

Nemen we nu voor $H(\beta)$ de speciale funktie

$$H(\beta) = \frac{1}{\pi}(1 - \frac{|\beta|}{2\lambda})e^{i\eta\beta} \qquad (\eta \text{ een reële constante})$$

dan geldt

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} H(\beta)e^{-i\beta x}d\beta = \frac{1}{\pi}\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} (1 - \frac{|\beta|}{2\lambda})e^{i\beta(\eta-x)}d\beta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\lambda} (1 - \frac{\beta}{2\lambda})\cos \beta(\eta - x)d\beta = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 \lambda(\eta - x)}{\lambda(\eta - x)^2}.$$

Stellen we $K_\lambda(\zeta) = \dfrac{\sin^2 \lambda\zeta}{\pi\lambda\zeta^2}$, dan kunnen we schrijven

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} H(\beta)\,.\,\Delta(1+\alpha+\beta i)d\beta =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-\alpha x}K_\lambda(\eta - x)L(x)dx - 2A\int_0^\infty e^{-\alpha x}K_\lambda(\eta - x)dx;$$

bij de limietovergang $\alpha \to +0$, nadert het linkerlid tot

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} H(\beta)r(\beta)d\beta,$$

en aangezien

$$\int_0^\infty K_\lambda(\eta - x)dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda(\eta - x)}{\pi\lambda(\eta - x)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda\eta} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

convergeert, geldt op grond van een eenvoudige Abelse stelling uit de theorie der Laplace-transformaties

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}K_\lambda(\eta - x)dx = \int_0^\infty K_\lambda(\eta - x)dx.$$

Uit het bovenstaande volgt, dat ook

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}K_\lambda(\eta - x)L(x)dx$$

voor $\alpha \to +0$ een limiet heeft;
wegens $K_\lambda(\eta - x)L(x) \geq 0$ is deze limiet gelijk aan (vergelijk §0)

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}K_\lambda(\eta - x)L(x)dx = \int_0^\infty K_\lambda(\eta - x)L(x)dx.$$

We vinden dus

$$\int_0^\infty K_\lambda(\eta - x)L(x)dx = \tfrac{1}{2} \cdot \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} H(\beta)r(\beta)d\beta + \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda\eta} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

Maken we nu de limietovergang $\eta \to \infty$, dan verkrijgen we

$$\lim_{\eta\to\infty} \int_0^\infty K_\lambda(\eta - x) \,.\, L(x)dx = A$$

of

$$\lim_{\eta\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda\eta} L(\eta - \tfrac{u}{\lambda}) \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = A\pi,$$

want $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \pi$ en volgens een bekende stelling van Riemann is

$$\lim_{\eta\to\infty} \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} \frac{1}{\pi}(1 - \frac{|\beta|}{2\lambda})e^{i\eta\beta} r(\beta)d\beta = 0.$$

1. Bij elke $\varepsilon > 0$ is dus een $\eta_1 = \eta_1(\lambda,\varepsilon)$ te vinden zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\lambda\eta} L(\eta - \tfrac{u}{\lambda}) \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du < \pi(A + \varepsilon) \text{ voor alle } \eta > \eta_1.$$

Kiezen we bovendien $\eta \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ dan is $\lambda\eta \geq \sqrt{\lambda}$ en dus is

$$\pi(A+\varepsilon) > \int_{-\infty}^{\lambda\eta} L(\eta-\tfrac{u}{\lambda})\,\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du \geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} L(\eta-\tfrac{u}{\lambda})\,\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du \geq$$

$$\geq \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} L(\eta-\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}) \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\frac{u}{\lambda}} \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\ ^{1)} \geq$$

$$\geq L(\eta-\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}) \cdot e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \cdot \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

of

$$L(\eta-\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}) \leq \pi(A+\varepsilon)e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \cdot \Big(\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\Big)^{-1} = R_1(\lambda).$$

Hieruit volgt:

$$\limsup_{\eta\to\infty} L(\eta) \leq R_1(\lambda) \text{ voor elke } \lambda > 0;$$

aangezien $\lim_{\lambda\to\infty} R_1(\lambda) = A + \varepsilon$ kunnen we hieruit concluderen

$$\limsup_{\eta\to\infty} L(\eta) \leq A + \varepsilon \text{ voor elke } \varepsilon > 0.$$

Dus:

$$\limsup_{\eta\to\infty} L(\eta) \leq A.$$

2. Uit 1 volgt dat $L(\eta)$ op $\eta \geq 0$ begrensd is:

$$L(\eta) \leq G.$$

1) Als $t_2 \geq t_1$ dan is $F(t_2) \geq F(t_1) \geq 0$; dus $e^{t_2}L(t_2) \geq e^{t_1}L(t_1)$ of $L(t_2) \geq L(t_1)e^{t_1-t_2}$.

Verder is voor alle $\eta > \eta_2(\lambda,\varepsilon)$

$$\pi(A - \varepsilon) < \int_{-\infty}^{\lambda\eta} L(\eta - \frac{u}{\lambda}) \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du =$$

$$= \{\int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} + \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} + \int_{+\sqrt{\lambda}}^{\lambda\eta}\} L(\eta - \frac{u}{\lambda}) \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \quad (\text{als bovendien } \eta > \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \frac{G}{u^2}\, du + \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} L(\eta - \frac{u}{\lambda}) \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du + \int_{+\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{G}{u^2}\, du \leq$$

$$\leq \frac{2G}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} L(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{u}{\lambda}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du \;{}^{1)} \leq$$

$$\leq \frac{2G}{\sqrt{\lambda}} + L(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) e^{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \cdot \pi$$

of

$$L(\eta + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \geq \{(A - \varepsilon) - \frac{2G}{\pi\sqrt{\lambda}}\} \cdot e^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}} = R_2(\lambda).$$

Dus $\qquad \liminf_{\eta\to\infty} L(\eta) \geq R_2(\lambda)$ voor elke $\lambda > 0$;

aangezien $\qquad \lim_{\lambda\to\infty} R_2(\lambda) = A - \varepsilon$

volgt hieruit

$$\liminf_{\eta\to\infty} L(\eta) \geq A - \varepsilon \text{ voor elke } \varepsilon > 0.$$

Dus $\qquad \liminf_{\eta\to\infty} L(\eta) \geq A.$

---

1) Zie de voetnoot op blz. 27.

De resultaten van 1 en 2 kunnen als volgt worden samengevat:

$$\lim_{\eta\to\infty} L(\eta) = A$$

of

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{e^x} = A.$$

5. De priemgetalstelling

5.0. Historische inleiding

De geschiedenis van de priemgetaltheorie laten we beginnen bij Euclides; hij was de eerste die aantoonde dat er oneindig veel priemgetallen zijn.
Geven we het aantal priemgetallen p met $0 \leq p \leq x$ aan met $\pi(x)$, dan kan dit resultaat als volgt geformuleerd worden:

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty.$$

Pas omstreeks 1850 kon Tschebyschef als eerste aantonen dat er een getal x_0 bestaat, zodanig dat

$$A \cdot \frac{x}{\log x} < \pi(x) < B \cdot \frac{x}{\log x} \text{ voor alle } x \geq x_0;$$

hierbij is A = 0,921 en B = 1,106.
Het feit dat $\pi(x)$ dezelfde grootte-orde heeft als $\frac{x}{\log x}$ was reeds voor Tschebyschef door Legendre, Dirichlet en Gauss vermoed.
Nadat in 1860 een verhandeling van Riemann verscheen over de funktie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1)$$

kwam er verandering in de methodiek; waren de bestaande problemen betreffende de priemgetalverdeling tot die tijd uitsluitend met elementaire methoden aangepakt, na 1860 werd de hulp ingeroepen van de komplexe funktietheorie. In verband met de van Euler afkomstige relatie

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma > 1),$$

bleek het analytische gedrag van de funktie $\zeta(s)$ voor de priemgetaltheorie van fundamenteel belang te zijn.
In 1896 gelukte het zowel J. Hadamard als C.J. de la Vallée Poussin uit een aantal analytische eigenschappen van $\zeta(s)$ de priemgetalstelling af te leiden:

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) \cdot \frac{\log x}{x} = 1.$$

Daarna was het E. Landau die de eerste wezenlijke vereenvoudiging aanbracht; in tegenstelling tot Hadamard en de la Vallée Poussin, die onder meer gebruik maakten van eigenschappen van $\zeta(s)$ op het gebied $0 < \sigma < 1$, bewees Landau de priemgetalstelling "ohne Überschreitung der Geraden $\sigma = 1$".
Vervolgens brachten G.H. Hardy en J.E. Littlewood nog een verbetering aan, door de eisen die Landau stelde aan de grootte-orde van $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ op $\sigma \geq 1$ te verzwakken.
Hierna was het S. Ikehara die, met behulp van door N. Wiener ontworpen methoden, de priemgetalstelling bewees, zonder de grootte-orde van $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ in zijn beschouwingen te betrekken [1].
Het bewijs van de priemgetalstelling volgens Ikehara zullen we na in de paragrafen 5.1 en 5.2 de nodige voorbereidingen te hebben getroffen weergeven in paragraaf 5.3; zoals reeds in paragraaf 4 werd aangekondigd zal stelling 4 hierbij van doorslag gevende betekenis zijn.
Tenslotte zij nog opgemerkt dat er, vooral in het begin van deze eeuw, van de priemgetalstelling meerdere afleidingen gegeven zijn, zonder gebruik te maken van de ζ-funktie van Riemann; in 1947 gaven A. Selberg en P. Erdős zelfs een elementair bewijs.

---

[1] In stelling 4 werden aan de funktie $r(\beta)$ geen voorwaarden betreffende de grootte-orde voor $|\beta| \to \infty$ opgelegd.

5.1. Hulpmiddelen uit de elementaire getaltheorie.

Definitie 5.1.1. a. $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ [1] op $x \geq 0$

b. $\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{m}})$ [2] op $x \geq 0$.

Aangezien de funktie $\pi(x)$ moeilijk hanteerbaar is, beschouwt men liever de met $\pi(x)$ nauw samenhangende funkties $\theta(x)$ en $\psi(x)$.

Lemma 5.1.1. Op $x > 0$ geldt:

a. $\pi(x) < x$

b. $\theta(x) \leq \pi(x)\log x$.

Het bewijs hiervan wordt aan de lezer overgelaten.

Lemma 5.1.2.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x}\right) = 0$$

Bewijs:

Nemen we $x \geq 4$, dan kunnen we schrijven

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) = \sum_{m=2}^{N} \theta(x^{\frac{1}{m}}) \quad \text{met } N = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right].$$

Met behulp van lemma 5.1.1 volgt hieruit:

1) De sommatie-index p doorloopt hierbij alle priemgetallen $\leq x$. Ook in het vervolg zullen alleen priemgetallen met de letter p worden aangegeven.

2) In deze reeks komen slechts eindig veel van nul verschillende termen voor.

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq (N-1)\theta(x^{\frac{1}{2}}) < N \,.\, \theta(x^{\frac{1}{2}}) \leq$$

$$\leq \frac{\log x}{\log 2} \,.\, \pi(x^{\frac{1}{2}})\log x^{\frac{1}{2}} < \frac{\log^2 x}{2\log 2} \,.\, x^{\frac{1}{2}};$$

dus
$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} < \frac{\log^2 x}{2\log 2} \,.\, x^{-\frac{1}{2}},$$

en hieruit volgt het gestelde onmiddellijk.

<u>Lemma 5.1.3.</u> Zij $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ een monotoon stijgende rij natuurlijke getallen; geven we het aantal elementen van deze rij dat $\leq x$ is aan met $P(x)$ en definiëren we $L(x)$ als

$$L(x) = \sum_{a_k \leq x} \log a_k,$$

dan geldt, onder de voorwaarde dat $\frac{L(x)}{x}$ begrensd is:

$$\lim_{x\to\infty} \left\{\frac{P(x)\log x}{x} - \frac{L(x)}{x}\right\} = 0.$$

Bewijs:

Kies $1 < y < x$. Nu is

$$L(x) - L(y) = \sum_{y<a_k<x} \log a_k \geq \{P(x) - P(y)\} \,.\, \log y,$$

wat gelijkwaardig is met

$$P(x) \leq P(y) + \frac{L(x) - L(y)}{\log y} .$$

Met behulp van de ongelijkheden

$$0 \leq L(x) \leq P(x)\log x \text{ en } P(x) \leq x$$

vinden we

$$\frac{L(x)}{x} \leq \frac{P(x)\log x}{x} \leq \{P(y) + \frac{L(x) - L(y)}{\log y}\} \frac{\log x}{x} \leq$$

$$\leq \{y + \frac{L(x)}{\log y}\} \cdot \frac{\log x}{x} = \frac{y}{x} \log x + \frac{L(x)}{x} \cdot \frac{\log x}{\log y} .$$

Nemen we nu

$$y = x^{1-\rho(x)} \text{ met } \rho(x) = \frac{(\log \log x)^2}{\log x} \text{ op } x > e,$$

dan geldt

$$0 < \rho(x) < 1$$

met als gevolg

$$1 < y < x.$$

Dus $$\frac{L(x)}{x} \leq \frac{P(x)\log x}{x} \leq x^{-\rho}\log x + \frac{L(x)}{x} \cdot \frac{1}{1-\rho},$$

of $$0 \leq \frac{P(x)\log x}{x} - \frac{L(x)}{x} \leq x^{-\rho}\log x + \frac{L(x)}{x} \{\frac{1}{1-\rho} - 1\}.$$

Met behulp van de betrekkingen

$$x^{-\rho}\log x = e^{-(\log \log x)^2 + \log \log x},$$

$$\left|\frac{L(x)}{x}\right| \leq G \quad (= \text{constante})$$

en $\lim_{x\to\infty} \rho(x) = 0$

volgt dan het gestelde.

<u>Lemma 5.1.4.</u> Nemen we in lemma 5.1.3 voor de rij $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ de rij der priemgetallen: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$,... dan is

$$P(x) = \pi(x)$$

en $$L(x) = \theta(x).$$

Als we nu aan kunnen tonen dat $\frac{\theta(x)}{x}$ begrensd is, dan mogen we schrijven

$$\lim_{x\to\infty} \left\{\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{\theta(x)}{x}\right\} = 0.$$

Het doel van lemma 5.1.5 is, te laten zien dat $\frac{\theta(x)}{x}$ inderdaad begrensd is.

<u>Lemma 5.1.5.</u> Op $x > 0$ geldt

$$0 \leq \frac{\theta(x)}{x} < 4\log 2.$$

Bewijs:

Met behulp van de relatie

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

is gemakkelijk in te zien dat

$$\binom{2n}{n} < 2^{2n} \quad (n = 1, 2, 3,\ldots).$$

Zoals bekend, is

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n\,.\,(2n-1)\,\ldots\,(n+2)(n+1)}{n\,.\,(n-1)\,\ldots\,2\,.\,1}$$

een natuurlijk getal dat deelbaar is door alle priemgetallen p met $n < p \leq 2n$.

Dus

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < 2^{2n}$$

of
$$\theta(2n) - \theta(n) < 2n\log 2.$$

Voor $n = 2^{m-1}$ met $m \geq 1$ wordt dit

$$\theta(2^m) - \theta(2^{m-1}) < 2^m\log 2.$$

Voor $\theta(2^m)$ kunnen we schrijven :

$$\theta(2^m) = \{\theta(2^m) - \theta(2^{m-1})\} + \{\theta(2^{m-1}) - \theta(2^{m-2})\} +$$

$$+ \ldots + \{\theta(2^1) - (2^0)\},$$

zodat

$$\theta(2^m) < 2^m \log 2 + 2^{m-1}\log 2 + \ldots + 2\log 2 =$$

$$= (2^{m+1} - 1)\log 2;$$

dus:
$$\theta(2^m) < 2^{m+1}\log 2.$$

Bij elke $x \geq 1$ is er altijd een natuurlijk getal m te vinden zodanig dat

$$2^{m-1} \leq x < 2^m;$$

nu is
$$\theta(x) \leq \theta(2^m) < 2^{m+1}\log 2 =$$

$$= (4\log 2) \cdot 2^{m-1} \leq (4\log 2) \cdot x,$$

zodat voor $x \geq 1$

$$\frac{\theta(x)}{x} < 4\log 2.$$

Aangezien het overige deel van lemma 5.1.5 triviaal is, is hiermee het bewijs voltooid.

<u>Lemma 5.1.6.</u> Op $x \geq 0$ geldt

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p.$$

Bewijs:

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{m}}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{\frac{1}{m}}} \log p = \sum_{p^m \leq x} \log p$$

$$(= \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \text{ als } x > 0).$$

Met behulp van lemma 5.1.6 is gemakkelijk in te zien dat $\psi(x)$ een trapfunktie is met discontinuïteiten uitsluitend in de punten $x = p^m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

Definitie 5.1.2. $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Lemma 5.1.7.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{als } n = p^m \\ 0 & \text{als } n \neq p^m \end{cases} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bewijs:

Dit is een direkt gevolg van lemma 5.1.6.

Lemma 5.1.8. Voor elk natuurlijk getal k geldt

$$\sum_{m|k} \Lambda(m) = \log k.$$ [3]

Bewijs:

In de som $\sum_{m|k} \Lambda(m)$ behoeven we m slechts die delers van k te laten doorlopen die een zuivere macht van een priemgetal zijn; schrijven we k in de gedaante

$$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

dan blijkt dat we kunnen schrijven

$$\sum_{m|k} \Lambda(m) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq \delta_i \leq \alpha_i}} \Lambda(p_i^{\delta_i}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq \delta_i \leq \alpha_i}} \log p_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \log p_i = \log k.$$

[3] De sommatie-index m doorloopt hierbij alle (positieve) delers van k.

5.2. Enkele eigenschappen van de funktie $\zeta(s)$.

De reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad 1)$$

is op $\sigma > 1$ absoluut convergent en stelt op dit gebied een holomorfe funktie voor.

Definitie 5.2.1. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\sigma > 1)$.

Op $\sigma > 1$ kunnen we voor $\zeta(s)$ schrijven [2]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{x^s}\, d[x] = \frac{[x]}{x^s}\Bigg|_{+0}^{\infty} - \int_{+0}^{\infty} [x]\, dx^{-s} = s \cdot \int_{+0}^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx =$$

$$= s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx = s \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\, dx = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\, dx.$$

De laatstgenoemde integraal stelt op $\sigma > 0$ een holomorfe funktie voor, terwijl $\frac{s}{s-1}$, behalve in het punt $s = 1$ (dit punt is n.l. een pool van de eerste orde met residu 1), overal holomorf is.
Uit het een en ander blijkt dat $\zeta(s)$ analytisch kan worden voortgezet tot de lijn $\sigma = 0$ [3]; het punt $s = 1$ is op $\sigma > 0$ de enige singulariteit van $\zeta(s)$. We hebben dus

Lemma 5.2.1. De funktie $\zeta(s)$ uit definitie 5.2.1 kan analytisch worden voortgezet tot de lijn $\sigma = 0$ [3]; de enige singulariteit van $\zeta(s)$ in

---

1) In de analytische getaltheorie is het gebruikelijk te schrijven $s = \sigma + it$. Onder n^s wordt verstaan $\exp(s \log n) = e^{s \cdot \log n}$, waarbij log n dezelfde betekenis heeft als in de reële analyse.

2) De theorie van de Riemann-Stieltjes integratie veronderstellen we bekend.

3) Dat $\zeta(s)$ in feite analytisch voortgezet kan worden over het gehele complexe s-vlak is voor ons betoog van geen belang.

dit gebied is een pool van de eerste orde met residu 1 in het punt $s = 1$.

Lemma 5.2.2. Op $\sigma > 1$ geldt:

$$\zeta(s) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} = -\zeta'(s).$$

Bewijs:

$$\zeta(s) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{(mn)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{m|k} \Lambda(m) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^s} = -\zeta'(s).$$

Lemma 5.2.3. $\zeta(s)$ heeft op $\sigma > 1$ geen nulpunten, zodat we kunnen schrijven

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} \qquad (\sigma > 1).$$

Bewijs:

Volgens lemma 5.2.2 geldt op $\sigma > 1$

$$\zeta(s) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} = -\zeta'(s).$$

Veronderstel nu dat $\zeta(s)$ in $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$ met $\sigma_0 > 1$ een nulpunt heeft van de orde α ($\alpha \geq 1$); aangezien

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s}$$

op $\sigma > 1$ holomorf is, heeft $\zeta(s) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s}$ in $s = s_0$ een nulpunt van

de orde $\beta \geq \alpha$. Dit houdt in dat $-\zeta'(s)$, en dus ook $\zeta'(s)$, in s_0 een nulpunt heeft van de orde $\beta \geq \alpha$. Maar, op grond van de gemaakte veronderstelling heeft $\zeta'(s)$ in $s = s_0$ een nulpunt van de orde $\alpha - 1$.
Conclusie: $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma > 1$.

Opmerking. Dat $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma > 1$ volgt ook uit de Eulerse betrekking

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma > 1).$$

Het bestaan van deze relatie wordt in het vervolg bekend verondersteld.

Lemma 5.2.4. $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma = 1$.

Bewijs:

Op $\sigma > 1$ geldt

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right) = \exp\left(\sum_{p,m} \frac{1}{m} \exp(-ms \log p)\right);$$

hieruit volgt

$$|\zeta(\sigma + it)| = \exp\left(\sum_{p,m} \frac{\cos mt \log p}{mp^{m\sigma}}\right).$$

Dus $\quad \zeta^3(1 + \varepsilon) \,.\, |\zeta(1 + \varepsilon + it)|^4 \,.\, |\zeta(1 + \varepsilon + 2it)| =$

$$= \exp\left(\sum_{p,m} \frac{3 + 4\cos mt \log p + \cos 2mt \log p}{mp^{m(1+\varepsilon)}}\right) \quad \text{met } \varepsilon > 0.$$

Nu is voor elke reële ϕ

$$3 + 4\cos \phi + \cos 2\phi = 3 + 4\cos \phi + 2\cos^2 \phi - 1 = 2(1 + \cos \phi)^2 \geq 0,$$

zodat

$$\zeta^3(1 + \varepsilon) \,.\, |\zeta(1 + \varepsilon + it)|^4 \,.\, |\zeta(1 + \varepsilon + 2it)| \geq 1,$$

of $\quad |\zeta(1 + \varepsilon + it)|^4 \geq \dfrac{1}{\zeta^3(1 + \varepsilon) \,.\, |\zeta(1 + \varepsilon + 2it)|} >$

$$> \frac{\varepsilon^3}{8 \,.\, |\zeta(1 + \varepsilon + 2it)|} \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

wegens

$$\zeta(1+\varepsilon) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} < \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{als } 0 < \varepsilon < 1.$$

Dus $$\left|\frac{\zeta(1+\varepsilon+it)}{\varepsilon}\right|^4 \geq \frac{1}{8\varepsilon|\zeta(1+\varepsilon+2it)|}.$$

Omdat $\zeta(s)$ in het punt $s = 1 + 2it$ $(t \neq 0)$ holomorf is, geldt

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \cdot |\zeta(1+\varepsilon+2it)| = 0;$$

dus, in verband met het voorgaande,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left|\frac{\zeta(1+\varepsilon+it)}{\varepsilon}\right| = +\infty \quad (t \neq 0).$$

Met behulp van deze betrekking is nu eenvoudig in te zien dat $\zeta(s)$ op $\sigma = 1$ geen nulpunten heeft.

Stel $\zeta(1+it) = 0$ voor zekere $t \neq 0$;

dan is $$\left|\frac{\zeta(1+\varepsilon+it) - \zeta(1+it)}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\zeta(1+\varepsilon+it)}{\varepsilon}\right|.$$

Volgens het bovenstaande heeft deze vorm voor $\varepsilon \to +0$ de limiet $+\infty$, terwijl deze vorm in feite (vgl. lemma 5.2.1) de limiet $|\zeta'(1+it)|$ heeft.

Conclusie:

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{op} \quad \sigma = 1.$$

Lemma 5.2.5. De funktie

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}$$

is holomorf op $\sigma \geq 1$, behalve in het punt $s = 1$; in dit punt heeft de funktie een pool van de eerste orde met residu 1.

Bewijs:

Dat de funktie $-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}$ holomorf is op $\sigma \geq 1$ $(s \neq 1)$ volgt direkt uit lemma 5.2.4.

De Laurent ontwikkeling van $\zeta(s)$ om het punt $s = 1$ ziet er als volgt uit (vgl. lemma 5.2.1)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \ldots ;$$

hieruit volgt gemakkelijk

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - (c_0 + 1) + \ldots .$$

<u>Opmerking</u>. Met het oog op de toepassing in paragraaf 5.3 formuleren we dit lemma nog als volgt:

De funktie

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

is holomorf op $\sigma \geq 1$.

<u>Lemma 5.2.6</u>. Op $\sigma > 1$ geldt

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_0^\infty e^{-st}\psi(e^t)dt.$$

Bewijs:

Volgens lemma 5.2.3 geldt op $\sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} ;$$

voor het rechterlid van deze betrekking kunnen we schrijven

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(m) - \psi(m-1)}{m^s} = \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{x^s}\, d\psi(x) = \frac{\psi(x)}{x^s}\Big|_{+0}^{\infty} - \int_{+0}^{\infty} \psi(x) dx^{-s} =$$

$$= s \cdot \int_{+0}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\, dx = s \cdot \int_{1}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\, dx = s \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-st}\psi(e^t) dt.$$

Dus:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\psi(e^t) dt = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} \quad (\sigma > 1).$$

5.3. De priemgetalstelling.

Stelling 5.3.1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$

Opmerking. Volgens de lemma's 5.1.2 en 5.1.4 is deze stelling gelijkwaardig met de priemgetalstelling:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

Bewijs:

Nemen we

$$F(t) = \psi(e^t) \quad (t \geq 0),$$

dan is op grond van de lemma's 5.2.5 en 5.2.6 aan alle voorwaarden van stelling 4.2 voldaan; de constante A is in dit geval gelijk aan 1. De stelling van Ikehara levert nu dus onmiddellijk de priemgetalstelling:

$$1 = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(e^t)}{e^t} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}.$$

Bij deze toepassing van de stelling van Ikehara blijkt dat het analytische gedrag van

$$- \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s - 1}$$

op $\sigma \geq 1$ van fundamenteel belang is.
Het feit dat deze funktie op $\sigma \geq 1$ holomorf is, hangt voornamelijk af van het feit: $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma \geq 1$. Dat $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma > 1$ kon gemakkelijk worden aangetoond, zodat het priemgetalprobleem uiteindelijk herleid is tot de stelling: $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma = 1$. Omgekeerd kan men vragen of deze eigenschap van $\zeta(s)$ ook een nodige voorwaarde is voor de geldigheid van de priemgetalstelling.
Dat dit inderdaad het geval is zal hieronder blijken.

Stelling 5.3.2. Als

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

dan geldt

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{op} \quad \sigma = 1.$$

Bewijs:

Op $\sigma > 1$ geldt

$$- \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_0^\infty e^{-st} \,.\, \psi(e^t)dt;$$

op grond van de veronderstelling dat de priemgetalstelling juist is, mogen we schrijven

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(e^t)}{e^t} = 1.$$

Nemen we in stelling 4.1

$$F(t) = \psi(e^t)$$

dan is aan alle voorwaarden voldaan.
De funktie $- \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}$ heeft dus op $\sigma = 1$ $(s \neq 1)$ geen polen.

Indien $\zeta(s)$ op $\sigma = 1$ een nulpunt zou hebben, dan zou $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, en dus ook $-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}$, op $\sigma = 1$ een pool van de eerste orde hebben. Maar dit zou in tegenspraak zijn met stelling 4.1.

Conclusie: $\zeta(s) \neq 0$ op $\sigma = 1$.